UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 3

$\boxed{\textbf{17}}$ In welchen Fällen handelt es sich um Nullfolgen? (Jeweils mit Begründung!)

(a) $a_n = \dfrac{1000n^2+n+1}{n^3+2n+3}$, (b) $b_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, (c) $c_n = \dfrac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Für die folgenden beiden Aufgaben: In welchen Fällen handelt es sich um konvergente Folgen? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (Jeweils mit Begründung!)

$\boxed{\textbf{18}}$ (a) $a_n = \dfrac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$, (b) $b_n = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}}$.

$\boxed{\textbf{19}}$ (a) $a_n = (1+\dfrac{1}{n^2})^n$, (b) $b_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(Hinweise: Bei (a) kann $\lim(1-\frac{1}{n^2})^n = 1$ aus der VO verwendet werden; bei (b) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = ?$)

$\boxed{\textbf{20}}$ Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n) = \dfrac{1}{2}$.

(Hinweis: Zunächst $\sqrt{n^2+n+1} \geq n+\frac{1}{2}$ nachweisen und dies mit Aufgabe $\boxed{12}$(b) kombinieren.)

$\boxed{\textbf{21}}$ Es sei (a_n) mit $a_n \geq 0$ $(n\in\mathbb{N})$ konvergent gegen a. Zeigen Sie, dass dann $a \geq 0$ gilt und $(\sqrt{a_n})$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. (Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a=0$ und $a>0$; für letzteren kann die Relation $c-d = (c^2-d^2)/(c+d)$ für $c,d>0$ nützlich sein.)

$\boxed{\textbf{22}}$ Zeigen Sie $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ nach folgender Anleitung: Setze $a_n := \sqrt[n]{n}-1$, beachte $a_n \geq 0$ und verwende den Binomischen Lehrsatz für die Abschätzung

$$n = (1+a_n)^n = 1+\binom{n}{1}a_n+\binom{n}{2}a_n^2+\cdots+\binom{n}{n}a_n^n \geq 1+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2.$$

$\boxed{\textbf{23}}$ Für $a>0$ und $x_1>0$ definieren wir die Folge (x_n) iterativ durch $x_{n+1} := \dfrac{1}{2}\Big(x_n+\dfrac{a}{x_n}\Big)$.

(Beachte: Nach Konstruktion ist $x_n>0$ für alle $n\in\mathbb{N}$.)

(a) Zeigen Sie durch Anwendung von Aufgabe $\boxed{2}$(a) auf das Produkt $2x_nx_{n+1}$, dass $x_k^2 \geq a$ für alle $k\in\mathbb{N}$ mit $k\geq 2$ gilt. Es folgt also, dass (x_n) nach unten beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass (x_n) konvergent ist.

(c) Ermitteln Sie $\lim x_n$.

$\boxed{\textbf{24}}$ Zeigen Sie, dass die Folge (s_n) mit $s_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\frac{1}{n^2}$ konvergent ist.

(Verblüffender Weise ist der Grenzwert $\frac{\pi^2}{6}$, was sich als „Nebenprodukt“ einer Fourierreihe ergibt.)