UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 7

49 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $\dfrac{e^{\sin(x)}}{2+\cos(x)}$, (b) $\sqrt{1-x^2}$ $\quad(|x|<1)$, (c) $\arcsin(x)$ $\quad(|x|<1)$.

50 Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (1+x)^n$. Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz und Differentiation, um die folgenden beiden Relationen herzuleiten:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0.$$

51 Bestimmen Sie lokale und globale Extrema sowie Monotoniebereiche der Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

52 Beschreiben Sie die Details der Taylorentwicklung des Sinus an der Stelle $x_0 = 0$.

53 (Hyperbelfunktionen) Wir definieren die Funktionen cosh (*cosinus hyperbolicus*) und sinh (*sinus hyperbolicus*) auf $\mathbb{R}$ durch $\cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Zeigen Sie: (a) $\cosh(-x) = \cosh(x)$, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (daher der Name Hyperbelfunktionen) und für die Ableitungen gilt $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.
(b) cosh ist stets positiv, besitzt ein globales Minimum in $x = 0$, hat kein Maximum und ist streng monoton wachsend in $[0, \infty[$.

54 Zeigen Sie: sinh ist streng monoton wachsend und surjektiv $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daher existiert die Umkehrfunktion $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, genannt *Area sinus hyperbolicus*, und es gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(Der Name rührt daher, dass dies tatsächlich entsprechende Flächeninhalte im Zusammenhang mit Hyperbelstücken liefert. Genauer: Die Punkte $(\cosh(t), \sinh(t))$ beschreiben für $t \in \mathbb{R}$ in der Ebene den rechten Ast einer Hyperbel. Für $t > 0$ hat die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die durch das Hyperbelstück zwischen $(\cosh(-t), \sinh(-t))$ und $(\cosh(t), \sinh(t))$ sowie die beiden Strahlen von $(0,0)$ zu eben diesen Punkten begrenzt wird, gerade den Flächeninhalt t.)

55 Für jeden Parameterwert $t > 0$ ist die Funktion $f_t\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_t(s) = \dfrac{(s-13)(t-s)}{s}$. Zeigen Sie, dass f_t sein Maximum an einer eindeutigen Stelle $s(t)$ annimmt. Untersuchen Sie nun die Funktion $h(t) := f_t(s(t))$, $h\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ auf Maxima und Minima.[1]

56 Wenden Sie die Regel von de l'Hospital für die Berechnung folgender Limiten an:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x \log x$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{1-\cos x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

[1] In dem Buch *Analysis in historischer Entwicklung* von E. Hairer und G. Wanner (Springer-Verlag 2011) wird die Funktion h als sogenannte Einhüllende der durch $a > 0$ parametrisierten Schar von Geraden $y = (a-13)(x-a)/a = f_x(a)$ beschrieben, mit Bezug zu einer Skizze von Albrecht Dürer.