$\boxed{55}$ Den beschränkten Operator A auf l^2 aus Aufgabe $\boxed{52}$(a) können wir als direkte Verallgemeinerung einer Diagonalmatrix auffassen, insbesondere lassen sich Potenzen A^m für $m \in \mathbb{N}$ recht mühelos berechnen. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass alle a_j reell sind, sodass $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$ gilt. (Bemerkung: Es ist $\|A\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$.)

(a) Wie sieht die Folge $p(A)x \in l^2$ für ein beliebiges Polynom p auf $\mathbb{R}$ und $x \in l^2$ aus?

(b) Welchen Ausdruck erraten/erwarten Sie demnach für $f(A)x$, wenn f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[-\|A\|, \|A\|]$ ist? Wenden Sie dies an, um speziell e^{itA} zu beschreiben.

$\boxed{56}$ Begründen Sie, warum $Wx := (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \ldots) = (2^{-j}x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ einen Dichteoperator (oder allgemeinen Zustand) auf l^2 definiert. Was ist der Erwartunsgwert der Observablen A aus der vorigen Aufgabe in diesem Zustand?

$\boxed{57}$ Wir betrachten hier sowohl den Ortsoperator $(Qu)(x) = x\,u(x)$ als auch den Impulsoperator $(Pu)(x) = -i\hbar\, u'(x)$ auf dem Definitionsbereich $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$, auf welchem auch der Kommutator $[Q, P] := QP - PQ$ sinnvoll definiert ist. Warum?

Verifizieren Sie nun die berühmte Relation $[Q, P] = i\hbar I$.

Überlegen Sie, warum Q nicht als beschränkter Operator $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ wirken kann. Folgern Sie daraus mittels Fouriertansformation dasselbe für P.

(Bemerkung: Wie z.B. in Fischer-Kaul, Band 2, §23:1.2 [Satz von Wintner] ausgeführt, kann obige Kommutatorrelation prinzipiell gar nicht mit beschränkten Operatoren bestehen.)

$\boxed{58}$ Welche der folgenden linearen Operatoren sind symmetrisch im Hilbertraum $L^2([0, 1])$?

(a) $D(A) = C_0^2([0, 1]) := \{u \in C^2([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$ und $Au = -u''$.

(b) $D(B) = C^2([0, 1])$ und $Bu = -u''$.

$\boxed{59}$ Wir betrachten im $L^2([0, 1])$ den Operator $(Au)(x) := \dfrac{1}{x}\, u(x)$ mit Definitionsbereich

$$D(A) := \{u \in L^2([0, 1]) \mid \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2}\, dx < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist. (Bemerkung: A ist sogar selbstadjungiert.)

Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(A)$. Besitzt A Eigenwerte?

$\boxed{60}$ Bestimmen Sie jeweils das Spektrum und das Punktspektrum der folgenden linearen Operatoren im Hilbertraum $L^2([0, 1])$:

(a) $D(A) = C^1([0, 1])$ und $Au = u'$.

(b) $D(B) = \{u \in C^2([0, 1]) \mid u(0) = 0\}$ und $Bu = u'$.

Im Vorwort von Walter Thirring für Band 3 seines *Lehrbuches der Mathematischen Physik* (Ausgabe 1979 im Springer-Verlag) steht u.a. dies: „In der axiomatischen Literatur gewinnt man manchmal den Eindruck, es gehe vornehmlich darum, durch veredelnde Abstraktionsprozesse die Physik von allen irdischen Schlacken zu befreien und sie dementsprechend dem einfachen Verstand zu entrücken. Hier wird jedoch das Ziel verfolgt, konkrete Resultate zu liefern, die sich mit experimentellen Tatsachen vergleichen lassen. Alles andere ist nur als Hilfsmittel zu betrachten und nach pragmatischen Gesichtspunkten auszuwählen. Aber gerade deswegen scheint es mir geboten, die Methoden der neueren Mathematik heranzuziehen. Nur durch sie gewinnt das Gewebe des logischen Fadens eine glatte Struktur, sonst verfilzt es sich, besonders bei der Theorie unbeschränkter Operatoren, in einem Gestrüpp unüberschaubarer Details."