PUE Analysis für Physiker$*$innen III — WS 22/23

Blatt 5

$\boxed{\mathbf{25}}$ Bei den Separationsansätzen in der VO haben wir mehrfach auf Fourierreihenentwicklungen aus dem Stoff der Analysis I zurückgegriffen. Wiederholen Sie die Grundbegriffe in reeller sowie komplexer Fassung, aber angepasst an Funktionen *mit beliebiger Periode* $2L$ ($L > 0$), die wir z.B. auf dem Intervall $[-L, L]$ betrachten; geben Sie die entsprechend adaptierten Formeln für die Reihenentwicklung sowie für die Koeffizienten an. Was erhalten wir in der reellen Version speziell für die Fourierentwicklung der *ungeraden* Fortsetzung einer zunächst auf $[0, L]$ gegebenen integrierbaren reellen Funktion f mit $f(0) = f(L) = 0$?

Geben Sie in den folgenden drei Aufgaben jeweils die in der VO aus Separationsansätzen gewonnenen Fourierdarstellungen für die Lösung an:

$\boxed{\mathbf{26}}$ Wellengleichung $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ ($0 < x < 1$, $t \in \mathbb{R}$) mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = -x(x-1)$, $\partial_t u(x,0) = 0$.

$\boxed{\mathbf{27}}$ Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u$ ($0 < x < 2$, $t \in \mathbb{R}$) mit den Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$, wobei $f(x) = x$ für $0 \le x \le 1$ bzw. $f(x) = 2 - x$ für $1 < x \le 2$ gilt.

$\boxed{\mathbf{28}}$ Stationäres Wärmeleitungsproblem, d.h. $\Delta u = 0$ auf der Kreisscheibe $K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Randbedingung $u = f$ auf $S^1 = \partial K_1(0)$ für zwei konkrete Beispiele von f:
(a) $f = 1$ (konstant) und (b) $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^2\varphi$ (d.h. $f(x,y) = x^2$ für $x^2 + y^2 = 1$).
(Hinweis: In beiden Fällen ergibt sich eine recht einfache endliche Summe mittels komplexer Fourierreihe, die sich schließlich als Polynom in den Variablen x und y ausdrücken lässt.)

In den folgenden beiden Aufgaben skizzieren wir ein Argument dafür, dass das Newton-Potential $\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}$ tatsächlich eine Fundamentallösung für $-\Delta$ in drei Dimensionen ergibt, d.h. $-\Delta\Gamma = \delta_0$ auf $\mathbb{R}^3$ im distributionellen Sinne gilt.

$\boxed{\mathbf{29}}$ Für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $\tilde{f}\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ der *sphärischen Mittel* durch

$$\tilde{f}(r) := \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(r\omega)\,do(\omega) \left[= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(r\begin{pmatrix}\cos\alpha\sin\theta\\ \sin\alpha\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right)\sin\theta\,d\theta d\alpha\right].$$

Begründen Sie: (a) Es gilt $\tilde{f}(0) = f(0)$ und die Relation (vgl. Aufgabe $\boxed{19}$, UE Analysis II) $\Delta\Big(\tilde{f}(\|x\|)\Big) = \tilde{f}''(r) + \frac{2}{r}\tilde{f}'(r)$ für $r = \|x\|$.
(b) $\Gamma(\psi) = \int_0^\infty r\,\tilde{\psi}(r)\,dr$ für jede Testfunktion ψ auf $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{30}}$ Zeigen Sie nun mit Hilfe der Resultate aus der vorigen Aufgabe, dass $-\Delta\Gamma(\psi) = \psi(0)$ gilt für jede Testfunktion ψ auf $\mathbb{R}^3$. Ein bisschen müssen und dürfen Sie aber bei der Berechnung nun noch „schummeln", indem Sie nach Umwandlung in ein eindimensionales Integral über die radiale Variable einfach $\widetilde{\Delta\psi}$ durch $\Delta\tilde{\psi}$ ersetzen, um nämlich die zweite Relation aus (a) in obiger Aufgabe anwenden zu können. (Das hat schon seine Richtigkeit, wäre aber nicht so leicht „auf elementare Art" zu beweisen; siehe z.B. Proposition 9.2, Chapter I in F. Treves, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press 1975.)