# PUE Analysis für Physiker∗innen III WS 22/23

Blatt 9

$\boxed{\textbf{49}}$ Im Hilbertraum $L^2([-1,1])$ betrachten wir die Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) := x$ und $g(x) := x^2$ sowie den davon aufgespannten 2-dimensionalen Teilraum $V = \operatorname{span}\{f, g\}$. Geben Sie eine Formel für die Orthogonalprojektion $P$ von $L^2([-1,1])$ auf $V$ an.

$\boxed{\textbf{50}}$ (a) Geben Sie im Folgenraum $l^2$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion $P_n$ auf $V_n := \operatorname{span}\{e_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ an. Begründen Sie, warum $P_n x \to x$ in $l^2$ für $n \to \infty$ gilt.

(b) Für den Linksshift $L$ und den Rechtsshift $R$ auf $l^2$ zeigen Sie: $R^* = L$, $L^* = R$ und $LR = I$, aber $RL \neq I$.

$\boxed{\textbf{51}}$ Bezeichne $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R})$, $Q$ den Ortsoperator und $P$ den Impulsoperator (beide definiert zumindest auf dem dichten Teilraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$). Durch welche Relationen sind diese drei Operatoren verbunden? Was heißt dies für die Erwartungswerte von $Q$ bzw. $P$ in einem Zustand $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$?

$\boxed{\textbf{52}}$ Überprüfen Sie in beiden Fällen, dass es sich um stetige lineare Operatoren handelt:

(a) $A\colon l^2 \to l^2$ mit $A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)$, wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen ist.

(b) $T\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ mit $(Tf)(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy$, wobei $G \in C([0,1]^2)$ ist.

$\boxed{\textbf{53}}$ (a) Überprüfen Sie in beiden Fällen, dass es sich jeweils um *unitäre* Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ handelt, d.h. $S$ ist bijektiv und $\langle Sf, Sg\rangle = \langle f, g\rangle$ für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

(i) Der Paritätsoperator (Raumspiegelung) $(Sf)(x) := f(-x)$.

(ii) Translation mit festem Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, d.h. $(Sf)(x) := f(x - a)$.

Insbesondere gilt also jeweils $\|Sf\| = \|f\|$, daher ist $S$ stetig mit Operatornorm $\|S\| = 1$.

(b) (i) Zeigen Sie, dass für einen unitären Operator $S$ stets $S^{-1} = S^*$ gilt.

(ii) Der Rechtsshift $R$ auf $l^2$ erfüllt zwar $\langle Rx, Ry\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in l^2$, aber $R$ ist nicht bijektiv und daher nicht unitär.

$\boxed{\textbf{54}}$ Prüfen Sie nach, dass der Operator $A(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{x_k}{k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$ einen symmetrischen Operator $A \in \mathcal{L}(l^2)$ definiert. Bestimmen das Punktspektrum $\sigma_p(A)$ sowie das Spektrum $\sigma(A)$. (Hinweis: Es ergibt sich $\sigma_p(A) = \{\frac{1}{j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ und $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.)