# UE Analysis für Physiker∗innen II SS 22

## Blatt 1

Aus dem Buch *Mathematik 1, Geschrieben für Physiker* von Klaus Jänich (Springer-Verlag 2001):

> „Tatsächlich ist die mathematische Ausbildung der Physiker mit zwei tief wurzelnden Schwierigkeiten konfrontiert, die ich schlagwortartig so kennzeichnen will:
>
> - „Die Mathematik kommt immer zu spät."
> - Mathematiker und Physiker sprechen nicht dieselbe mathematische Sprache.
>
> Das Erste werden Sie bald selbst bemerken: in den Physikvorlesungen werden mathematische Techniken verwendet, die in den Mathematikvorlesungen noch nicht dran waren. Das zweite Problem ist anfangs weniger spürbar, nimmt aber mit wachsendem Niveau zu und wird auch nicht, wie doch schließlich das erste, von der Zeit geheilt."

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Mit unserem Wissensstand gemäß der Analysis I werfen wir hier nun (in freiwilligen Aufgaben!) einmal einen vorläufigen Blick auf einige typische Fragestellungen aus dem Analysis-II-Stoff des kommenden Semesters. (Lassen Sie sich von der Textmenge einzelner Aufgabenstellungen nicht einschüchtern! Im Sommersemester geht es oft genau darum, die richtigen Begriffe zu entwickeln, sodass sich dies kürzer präzise ausdrücken und systematischer bearbeiten lässt.)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$ und fragen uns, ob sie in einem noch zu definierenden Sinne *stetig* sein kann.

(a) Begründe: Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y_0)$ stetig $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ebenso ergibt $y \mapsto f(x_0,y)$ für jedes fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (D.h. $f$ ist *separat stetig*.)

(b) Speziell für $(x_0,y_0) = (0,0)$ besagt (a) jeweils $\lim_{x\to 0} f(x,0) = f(0,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y)$. In einer Skizze der $(x,y)$-Ebene sehen Sie, dass es sich bei diesen Limiten um Annäherungen an $(0,0)$ nur aus horizontalen oder vertikalen Richtungen handelt. Was passiert, wenn wir entsprechende Limiten der Funktionswerte entlang anderer Geraden durch den Ursprung studieren? Beginnen Sie z.B. mit dem Spezialfall der ersten Mediane, parametrisiert durch $t \mapsto t\cdot(1,1) = (t,t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ (d.h. studieren Sie $f(t,t)$ für $t \to 0+$ und $t \to 0-$). Geben Sie dann allgemein an, in welcher Weise der Limes richtungsabhängig ist, indem Sie $f$ entlang einer Geraden durch $(0,0)$ mit Winkel $\theta \in [0,\pi]$ zur $x$-Achse mittels Richtungsvektor $(\cos\theta, \sin\theta)$ beschreiben. (D.h. in Polarkoordinaten „enthüllt $f$ seine Unstetigkeit".)

$\boxed{\mathbf{2}}$ Wir versuchen lokale Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = xy$ auf dem abgeschlossenen Einheitskreis $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ zu bestimmen.

(a) Begründe: Im Inneren $B := \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 < 1\}$ finden wir durch Betrachtung der Ableitungen der separaten Funktionen $x \mapsto f(x,y_0)$ und $y \mapsto f(x_0,y)$ eine kritische Stelle. Diese ist aber kein lokales Minimum oder Maximum.

(Hinweis: $f$ wechselt an den Koordinatenachsen jeweils das Vorzeichen.)

(b) Durch geeignete Parametrisierung des Randes $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ können wir Maxima und Minima von $f$ entlang $S^1$ als Funktion einer Variable auffinden. Bestimmen Sie diese und überlegen Sie (durch einfache direkte Abschätzung), warum es sich jeweils um globale Maxima bzw. Minima von $f$ auf ganz $K$ handelt.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Wir wollen studieren, inwiefern eine Funktion $x \mapsto y(x)$ *implizit* durch eine Gleichung der Form $f(x,y) = 0$ definiert (und verstanden!) werden kann. (Denken Sie etwa an eine Beschreibung von Isobaren, also Kurven konstanten Druckes, zu einer gegebenen Druckverteilung $f(x,y)$ an jedem Punkt $(x,y)$ eines ebenen Gebietes.) Wir betrachten das Beispiel $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1.$$

(a) Begründen Sie durch passende Eigenschaften der Funktion $y \mapsto h(y) := e^y + y^3$, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau ein $g(x)$ existiert, sodass $f(x,y) = 0$ gleichwertig mit $y = g(x)$ ist.

(b) Auch wenn wir die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus (a) nicht explizit bestimmen können, so haben wir doch die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ zur Verfügung, um Informationen über die Werte von Ableitungen $g'(x)$ und $g''(x)$ zu erhalten. Zeigen Sie, dass $g$ in $x_0 = 0$ ein lokales Maximum und in $x_- = -2/3$ ein lokales Minimum besitzt.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Wir studieren hier die Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die als *Integral mit Parameter* durch

$$u(x) := \int_0^x f(s) \sin(x-s)\, ds \qquad (x \in \mathbb{R})$$

definiert ist, wobei $f$ eine gegebene stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Unser Ziel wäre der Nachweis, dass $u$ das folgende Anfangswertproblem einer durch $f$ erzwungenen Schwingung löst:

$$u'' + u = f, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

(Das könnten wir rein mit Analysis-I-Wissen jetzt zwar schaffen, aber nur mit einigem Aufwand.) Da Sie wohl schon mit partiellen Ableitungen zu tun hatten, können wir schauen, worauf die nötigen Argumente eigentlich im Kern hinauslaufen: Zunächst ist $u(0) = 0$ klar.

Wir können $u(x) = h(x,x)$ schreiben, wobei die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $h(x,y) := \int_0^x f(s) \sin(y-s)\, ds$. Daher ist $u'(x) = \frac{d}{dx}(h(x,x)) = \frac{\partial}{\partial x} h(x,y)|_{y=x} + \frac{\partial}{\partial y} h(x,y)|_{y=x}$, was wir auch später im Semester mittels *Kettenregel* begründen könnten. Zeigen Sie (u.a. durch hemmungsloses Vertauschen von Differentiation nach $y$ mit Integration bzgl. $s$), dass wir daraus $u'(x) = \int_0^x f(s) \cos(x-s)\, ds$ erhalten. Insbesondere gilt $u'(0) = 0$.

Verfahren Sie nun beim Bilden der zweiten Ableitung $u''$ auf ähnliche Art und zeigen Sie somit schließlich, dass die Differentialgleichung $u'' + u = f$ erfüllt ist.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Die Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ für $x, y \neq 0$, $f(x,0) := 0$ und $f(0,y) := 0$ hat eine etwas unangenehme Eigenschaft bezüglich Integration: Machen Sie zunächst die Beobachtungen $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = f(x,y) = -\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ und zeigen Sie damit

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Für eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [0,\infty[$ wird ein Rotationskörper, der durch Drehung um die $x$-Achse entsteht und dessen Schnittfläche senkrecht dazu bei $x$ ein Kreis mit Radius $f(x)$ ist, durch $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ beschrieben.

Argumentieren Sie, warum es plausibel ist, $K$ die Zahl $V(K) := \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$ als *Volumen* zuzuordnen und rechnen Sie nach, dass dies für einen Kreiskegel mit Höhe $h > 0$ und Grundkreisradius $R > 0$ mit dem elementargeometrischen Volumen übereinstimmt. (Es bleibt momentan offen, wie wir allgemeineren Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ ein Volumen zuordnen können.)