UE Analysis für Physiker∗innen II SS 22

Blatt 6

$\boxed{\textbf{31}}$ Wir holen hier etwas Hintergrundwissen zu Aufgabe $\boxed{4}$ nach: Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Begründen Sie die Gültigkeit der Formel

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy = f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x) + \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \partial_x f(x,y)\,dy,$$

indem Sie $F(x,u,v) := \int_u^v f(x,y)\,dy$ betrachten. (Hinweise: Kettenregel, Parameterintegrale aus der VO, Hauptsatz der Differentialrechnung aus dem vorigen Semester).

$\boxed{\textbf{32}}$ Für stetige Funktionen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \le h(x)$ für alle $x \in [a,b]$ ist die Menge

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$$

ein sogenannter *ebener Normalbereich vom Typ I.*

(a) Begründen und illustrieren Sie in einer Skizze: Es gibt $c \le d$, sodass $B \subseteq [a,b] \times [c,d]$.

(b) Argumentieren Sie heuristsich, warum wir für eine stetige Funktion $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ den Wert von $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$ als $\int_B f(x,y)\,d(x,y)$ interpretieren[1] können bzw. sollten. Was ergibt sich im Spezialfall $f = 1$?

Bemerkung: Analog heißt $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le y \le b, g(y) \le x \le h(y)\}$ ein *ebener Normalbereich vom Typ II* und $\int_C f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$.

$\boxed{\textbf{33}}$ (a) Wir betrachten $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, g(x) \le y \le \frac{x}{2}\}$, wobei $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $g(x) := 0$ für $0 \le x \le 1$ und $g(x) := x - 1$ für $1 < x \le 2$. Berechnen Sie $\int_B x\,d(x,y)$ im Sinne der vorigen Aufgabe.

(b) Kann B auch als Normalbereich vom Typ II aufgefasst werden? Wie lautet gegebenenfalls die alternative Berechnung von $\int_B x\,d(x,y)$?

$\boxed{\textbf{34}}$ Wie oben nun mit $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$ für $\int_B 2x\,d(x,y)$.

$\boxed{\textbf{35}}$ Es sei $0 < r < R$. Wenn wir die Kreisscheibe $\{(x,0,z) \mid x^2 + (z-R)^2 \le r^2\}$ um die x-Achse rotieren lassen, entsteht ein *Torus* (Vollreifen) T — Skizze! Bestimmen Sie das Volumen von T als Differenz zweier Volumina geeigneter Rotationskörper.

$\boxed{\textbf{36}}$ Wir wollen $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[1,3]} \frac{d(x,y)}{(x^2+y)^3}$ berechnen. Für $y > 0$ setzten wir $g(y) := \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+y}$.

(a) Bestimmen Sie zunächst $g(y)$ explizit und berechnen Sie daraus auch $g'(y)$.

(b) Wir können $g'(y)$ auch als Parameterintegral darstellen. Nützen Sie dies in Kombination mit (a) für die Berechnung des Doppelintegrals aus. (Ergebnis $\pi\frac{27-2\sqrt{3}}{432} + \frac{5}{48} \approx 0{,}275$.)

[1] In der VO wurden bis zum Zeitpunkt der Bearbeitung dieses UE-Blattes [wahrscheinlich] nur Integrale von stetigen Funktionen über kompakte n-dimensionale Quader behandelt und B ist kein Rechteck.