VO-Skriptum

Analysis für Physiker∗innen I

Günther Hörmann
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
guenther.hoermann@univie.ac.at

unter Mitwirkung von Michael Hollnbuchner

Wintersemester 2025/26

(Version vom 14. Jänner 2026)

Vorwort

Diese Vorlesungsnotizen orientieren sich in ihrer Stoffauswahl möglichst getreu an den im Modul ANA I beschriebenen Inhalten aus dem Curriculum für das Bachelorstudium Physik (in der Version 2018 `https://mtbl.univie.ac.at/storage/media/mtbl02/2017_2018/2017_2018_183.pdf`).

Der inhaltliche Aufbau lehnt sich dabei großteils an entsprechende Passagen in den hervorragenden Lehrbüchern [FK1] und [FK2] an, mit Ausnahme der Kapitel zum Integral und zu Fourier-Reihen, wo wir uns eher an [Heu1], [Heu2] und [ASM] orientiert haben.

Anders als ein Lehrbuch ist dieses Skriptum sprachlich knapper gefasst, stellenweise auch salopper, und soll inhaltlich ein möglichst getreuer Spiegel und Begleiter des Vorlesungsstoffes sein. Wir erlauben uns im Text somit auch einige Abkürzungen: z.B. (zum Beispiel), d.h. (das heißt), bzw. (beziehungsweise), vgl. (vergleiche), usw. (und so weiter), u.a. (unter anderem), o.B. (ohne Beweis), bzgl. (bezüglich), i.A. (im Allgemeinen), f.ü. (fast überall).

Gelegentlich taucht im Text das Symbol **Ü̇** auf, was darauf hinweisen soll, dass an der entsprechenden Stelle empfohlen wird, die Details eines Arguments oder einer Berechnung übungsweise selbst zu probieren.

Einige Passagen, z.B. detaillierte technische Begründungen, manche Beweise oder aufwendige Zwischenrechnungen, sind in kleinerer Schrift gesetzt und sollen somit als nicht prüfungsrelevant erkennbar sein.

Ich bedanke mich bei Nathalie Tassotti für kritisches Lesen der gesamten Entwürfe und die vielen Korrekturvorschläge. Und in Michael Hollnbuchners Mitwirkung hatte/habe ich eine großartige Unterstützung in allen Belangen der inhaltlichen Feinheiten wie auch der strukturierten Darstellung des Stoffes (bis hin zu Entwürfen für Übungen). Im aktuellen Text verbliebene Schwächen und Fehler sind meine „Einzelleistung“.

Günther Hörmann im September 2025

Im Laufe der VO und UE kann es vorkommen, dass Sie während fruchtbarer[1] Krisen so empfinden werden wie in der folgenden Beschreibung, die ich dem Vorspann des Buches *Stochastic Differential Equations* von Bernt Øksendal, Springer-Verlag, 5. Auflage 1998, entnommen habe (zur Quellenfrage vgl. auch sogenannte *quote investigators* im World Wide Web):

> *„We have not succeeded in answering all our problems. The answers we have found only serve to raise a whole set of new questions. In some ways we feel we are as confused as ever, but we believe we are confused on a higher level and about more important things.“*

[1] Kein Tippfehler! Denn furchtbare Krisen wünscht Ihnen wahrlich niemand, aber die fruchtbaren werden alle erfolgreichen Studierenden mit Sicherheit durchleben müssen.

Inhaltsverzeichnis

A. Grundlagen **1**

1. Zahlen, Mengen und Abbildungen **3**

2. Ein Intermezzo über Aussagen, Beweise und Kombinatorik **15**

3. Ein bisschen mehr über Eigenschaften der reellen Zahlen **23**

4. Komplexe Zahlen **27**

B. Folgen, Reihen und elementare Funktionen **31**

5. Konvergenz und Grenzwerte von Folgen **33**

6. Konvergenzkriterien für Folgen **43**

7. Polynomfunktionen und rationale Funktionen **49**

8. Exponentialfunktion und Logarithmus **53**

9. Trigonometrische Funktionen **61**

10. Exponential- und Polynomfunktionen im Komplexen **67**

11. Reihen **71**

C. Stetigkeit und Differenzierbarkeit **81**

12. Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen **83**

13. Hauptsätze über stetige Funktionen **93**

14. Differenzierbare Funktionen **99**

15. Höhere Ableitungen und deren Anwendungen **111**

D. Folgen, Reihen und Integrale von Funktionen **123**

16. Taylorreihen und Potenzreihen **125**

17. Integrale **135**

18. Stammfunktionen **143**

19. Integrationstechniken **149**

20. Konvergenz von Funktionenfolgen **165**

21. Fourier-Reihen **173**

Appendix: Ein kurzer Blick auf gewöhnliche Differentialgleichungen **183**

Literatur- und Stichwortverzeichnis **193**

Teil A

Grundlagen

1. Zahlen, Mengen und Abbildungen

1.1. Mengenschreibweisen und mathematische Aussagen

Wir wollen rasch zu den praktischeren Aspekten vorstoßen und begnügen uns daher mit einem „naiven“ Begriff von Mengen und dem Umgang mit ihnen. Eine Menge M ist demnach einfach eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Elementen und wir schreiben $x \in M$, falls das Element x zu M gehört, und $x \notin M$ andernfalls.

Für Mengen M und N soll $M \subseteq N$ bedeuten, dass jedes Element $x \in M$ auch $x \in N$ erfüllt. In diesem Fall nennen wir M eine *Teilmenge* von N. Gleichheit $M = N$ der Mengen trifft also zu, falls sowohl $M \subseteq N$ als auch $N \subseteq M$ gilt.

Das spezielle Symbol $\emptyset$ verwenden wir zur Bezeichnung einer Menge, die gar kein Element enthält, und nennen diese *leer*. Somit gilt auch $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

Beispiele: Eine Möglichkeit der Beschreibung von konkreten Mengen ist die Auflistung, wie z.B. bei den *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \quad \text{und deren Erweiterung um 0 durch} \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

oder den *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Viel häufiger werden wir aber Mengen durch eine Kombination aus mathematischen Ausdrücken und Bedingungen spezifizieren, wie z.B. hier für die *rationalen Zahlen* (Brüche)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Lies: Menge aller m durch n für die gilt: m ist eine ganze Zahl, n eine natürliche Zahl.) Die nach dem senkrechten Strich | angegebenen Bedingungen sollen also beide erfüllt sein, was auch mittels '$m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$' beschrieben werden könnte.

Es gelten offensichtlich die Beziehungen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ sowie $\mathbb{N}_0 \neq \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$. Die rationalen Zahlen wiederum sind eine Teilmenge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ (Dezimalzahlen), die wir nicht mehr in so einfacher Art angeben können und ein wenig später im Detail besprechen.

Bei Auflistungen von Mengen soll es übrigens nicht auf die Reihenfolge oder Wiederholungen von Elementen ankommen, sodass z.B. $\{2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\}$ gilt.

Die Bedingungen für die Festlegung von Mengen müssen durch mathematische *Aussagen* gebildet werden, die für ein bestimmtes Element jeweils entweder wahr (zutreffend) oder falsch (nicht zutreffend) sind und dabei keine dritte Möglichkeit zulassen – das „tertium non datur“ (wörtlich „ein Drittes ist nicht gegeben“) der klassischen Logik.

Notationshinweis: Wir verwenden hier und auch in Folge oft die Schreibweise ':=' einer *definierenden Gleichheit* an Stelle von '=', falls wir das Objekt/Symbol auf der linken Seite der Gleichung eben durch jenes auf der rechten Seite definieren/einführen.

Beispiel: Betrachten wir die Mengen $M_1 := \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4x = 0\}$, $M_2 := \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x = 0\}$ und $M_3 := \{y^2 \mid y \in \mathbb{Z}\}$. Mittels Zerlegung $x^2 - 4x = x(x-4)$ sehen wir sofort, dass $M_1 = \{0, 4\}$ und $M_2 = \{4\}$ gilt. Außerdem ist $M_3 = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ und wir erhalten

$$M_2 \subseteq M_1 \subseteq M_3, \quad M_2 \neq M_1, \quad M_1 \neq M_3, \quad M_2 \neq M_3.$$

Beide Mengen M_1 und M_2 sind Lösungsmengen für die Gleichung $x^2 - 4x = 0$, allerdings bei M_1 mit der Grundmenge $\mathbb{Z}$ und bei M_2 mit der Grundmenge $\mathbb{N}$.

Der Kontext ist also nicht unwesentlich für die Gültigkeit einer Bedingung oder Aussage.

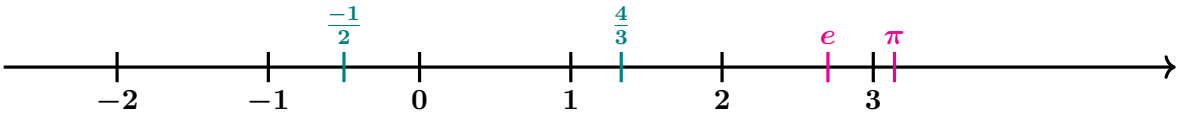
Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mathematische Aussagen sind, dann können wir daraus neue Aussagen bilden:

- nicht $\mathcal{A}$ (Verneinung), symbolisch $\neg\mathcal{A}$, ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ selbst falsch ist;
- $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, symbolisch $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, ist genau dann wahr, wenn sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ wahr ist;
- $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ (inklusives oder), symbolisch $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ wahr ist oder $\mathcal{B}$ wahr ist oder beide wahr sind.
  (Achtung: Im alltäglichen Gebrauch von 'oder' kann dies exklusiv gemeint sein, wofür wir im mathematischen Kontext etwas deutlicher 'entweder $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$' sagen würden und meinen, dass dies genau dann wahr ist, wenn eine der beiden Aussagen wahr ist und nicht beide.)

1.2. Elementare Rechenregeln für die reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann mathematisch recht gut durch eine ganze Reihe von Axiomen charakterisiert werden, die wir großteils im aktuellen Kapitel kursorisch besprechen werden. Ein letztes Axiom zur sogenannten Vollständigkeit behandeln wir dann noch separat in 3.3 (als Supremumsaxiom).

Wir stellen uns die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden vor, worin die ganzen Zahlen bereits als schrittweise Markierungen enthalten sind, und zwar ausgehend von 0 nach links die negativen Zahlen und nach rechts die natürlichen Zahlen. Die rationalen Zahlen wiederum sind gegeben durch entsprechende Teilstrecken auf oder zwischen den ganzzahligen Markierungen. Z.B. liegt die Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ für $m \in \mathbb{N}$ rechts von 0 gerade so weit weg, dass n-faches Auftragen dieser Strecke genau zu m führt, analog für negatives m nach links.



Die Rechengesetze für $\mathbb{R}$, aus denen alle elementaren Rechenregeln für die Addition $+$ (sowie Subtraktion) und Multiplikation $\cdot$ (sowie Division) abgeleitet werden können, sind zusammengefasst in den folgenden *Axiomen eines Körpers*: Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ und ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$, sodass für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

(i) Assoziativität der Addition: $(a+b)+c = a+(b+c)$,

(ii) Kommutativität der Addition: $a+b = b+a$,

(iii) 0 ist neutrales Element der Addition: $a+0 = a$,

(iv) die Gleichung $a+x = b$ hat genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$, die mit $b-a$ bezeichnet wird; im Falle $b = 0$ heißt $-a := 0-a$ das zu a additiv inverse Element;

(v) Assoziativität der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

(vi) Kommutativität der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$,

(vii) 1 ist neutrales Element der Multiplikation: $a \cdot 1 = a$,

(viii) die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für $a \neq 0$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$, die mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet wird; im Falle $b = 1$ heißt $a^{-1} := \frac{1}{a}$ das zu a multiplikativ inverse Element;

(ix) Distributivgesetz: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Im Distributivgesetz steht rechts eigentlich $(a \cdot b)+(a \cdot c)$, aber wir haben gleich stillschweigend die Konvention „Punkt vor Strichrechnung“ angewandt. Außerdem werden wir hinkünftig oft ab schreiben für das Produkt $a \cdot b$.

In rein mathematischen VO und UE müssten wir uns nun einige Zeit lang damit beschäftigen, wie aus den obigen Axiomen die üblichen Rechenregeln abgeleitet werden können. Das beginnt schon einmal damit, in ersten Überlegungen zu zeigen, dass die Elemente 0 und 1 eindeutig sind. Wir überspringen solche Spielchen hier natürlich, wollen aber nur zur Illustration eine (sogar lückenhafte) Argumentationsskizze für die gar nicht beeindruckende Regel

$$(-1) \cdot a = -a$$

angeben: Zunächst wundern Sie sich vielleicht darüber, was hier überhaupt zu sagen wäre ... aber bedenken Sie, dass wir es auf der linken Seite mit dem Produkt von a und dem additiv Inversen von 1 zu tun haben, während auf der rechten Seite das additiv Inverse zu a steht; nehmen wir an, wir hätten zuvor schon $0 \cdot a = 0$ gezeigt – ja, auch das wäre Teil der Aufgabe und ist die schon angekündigte Lücke –, dann dürften wir wegen $1+(-1) = 0$ und $1 \cdot a = a$ mittels Distributivgesetz die Berechnung

$$0 = 0 \cdot a = (1+(-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$$

anstellen; da die Gleichung $0 = a + x$ aber per Axiom (iv) *eindeutig* durch $x = -a$ gelöst wird, muss $(-1) \cdot a = x = -a$ gelten.

Die obigen Körperaxiome gelten übrigens auch innerhalb der Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Dies lässt sich leicht durch direkte Rechnung nachweisen, wobei wir für rationale Zahlen mit den Darstellungen $a = \frac{m}{n}$ und $b = \frac{p}{q}$ folgende Formeln verwenden können:

$$a \cdot b = \frac{mp}{nq} \quad \text{und} \quad a + b = \frac{mq+np}{nq}.$$

Innerhalb der Teilmenge $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ der ganzen Zahlen gilt Axiom (viii) nicht: Z.B. ist die Gleichung $2x = 3$ unlösbar unter der Bedingung $x \in \mathbb{Z}$. Dies führt auf den Begriff der *Teilbarkeit*

von $m \in \mathbb{Z}$ durch $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$: Wir schreiben in diesem Fall $n \mid m$, falls es ein $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit der Eigenschaft $nx = m$. (Mit anderen Worten ist in dem Fall $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$.) Eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ heißt *gerade*, falls $2 \mid m$ gilt, d.h. $m = 2k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$. Andernfalls heißt m *ungerade*, in welchem Fall sich $m = 2k + 1$ ergibt für ein passendes $k \in \mathbb{Z}$.

Innerhalb der Teilmenge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ der natürlichen Zahlen ist auch Axiom (iv) verletzt, weil z.B. die Gleichung $4 + x = 1$ nicht lösbar für $x \in \mathbb{N}$ ist.

1.3. Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$

Anschaulich auf der Zahlengeraden entspricht die *Ungleichung* $a < b$ zwischen zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ dem Umstand, dass a links von b liegt. Axiomatisch wird dies so festgelegt: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die Eigenschaften

(i) Trichotomie: genau eine der drei Beziehungen $a < b$, $a = b$, $a > b$ ist erfüllt,

(ii) Transitivität: aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$,

(iii) aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$,

(iv) aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.

Durch Vergleich mit 0 legen wir auch den Begriff einer *positiven* bzw. *negativen* Zahl $a \in \mathbb{R}$ fest, nämlich durch die Bedingung $a > 0$ bzw. $a < 0$. Aus Axiom (iii) lässt sich z.B. mittels $c = \pm a$ ableiten, dass $b > a$ gleichwertig mit $b - a > 0$ ist.

Als Kurznotation für $a < b$ und $b < c$ verwenden wir auch die Schreibweise $a < b < c$.

Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen: (Ohne hier auf die Herleitungen einzugehen gelten)

- $a > 0$ ist gleichwertig mit $-a < 0$, ähnlich ist $a < 0$ gleichwertig mit $-a > 0$,
- für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$,
- aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$,
- aus $0 < a < b$ folgt $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Eine *nicht strikte Ungleichung* $a \leq b$ soll bedeuten, dass $a < b$ oder $a = b$ gilt. Speziell sehen wir sofort:

$$\text{Aus} \quad a \leq b \text{ und } b \leq a \quad \text{folgt stets} \quad a = b.$$

Folgende Eigenschaften $\leq$ sind ganz ähnlich zu jenen für $<$:

(i) Transitivität: aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$ und wir schreiben dann $a \leq b \leq c$,

(ii) aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$,

(iii) aus $a \leq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \leq bc$.

Einige Rechenregeln für Ungleichungen:

- Addition von Ungleichungen: Aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$.
  Speziell ist $a + x \leq b$ gleichbedeutend mit $x \leq b - a$.

- Aus $ac \leq bc$ und $c > 0$ folgt $a \leq b$. Für $a > 0$ gilt: $ax \leq b$ ist gleichbedeutend mit $x \leq \frac{b}{a}$.
- Für $0 \leq a < b$ ist $a^2 < b^2$. Aus $a^2 \leq b^2$ und $b \geq 0$ folgt $a \leq b$.

In der letztgenannten Eigenschaft kann die Bedingung $b \geq 0$ nicht weggelassen werden, denn z.B. für $a = -1$, $b = -2$ ist zwar $a^2 = 1 \leq 4 = b^2$, aber $a > b$.

Intervalle: Als solche bezeichnen wir alle folgenden speziellen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zunächst die durch Randpunkte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ beschränkten Intervalle

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{abgeschlossen}, \quad]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{offen},$$
$$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{und} \quad [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{halboffen}.$$

Weiters haben wir die nach rechts unbeschränkten Intervalle

$$[a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \quad \text{abgeschlossen}, \quad]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \quad \text{offen},$$

sowie die nach links unbeschränkten Varianten

$$]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \quad \text{abgeschlossen}, \quad]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \quad \text{offen}.$$

Wir können noch $]-\infty,\infty[:= \mathbb{R}$ hinzufügen und anmerken, dass $[0,\infty[$ die abgeschlossene Halbgerade der nichtnegativen reellen Zahlen ergibt, während $]0,\infty[$ die offene Halbgerade der positiven reellen Zahlen ist. Ein beschränktes abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ bezeichnen wir auch als *kompaktes Intervall*.

1.4. Absolutbetrag von reellen Zahlen

Für $a \in \mathbb{R}$ ist der Abstand von a zu 0 auf der Zahlengeraden entweder a, falls a positiv oder 0 ist, oder entspricht gerade der positiven Zahl $-a$, falls a negativ ist. Wir definieren daher den *Absolutbetrag* oder *Betrag* einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ durch

$$|a| := \begin{cases} -a & \text{für } a < 0, \\ a & \text{für } a \geq 0. \end{cases}$$

Wir erhalten unmittelbar folgende Eigenschaften für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a| \geq 0, \quad |a| = 0 \text{ nur für } a = 0, \quad |-a| = |a|, \quad |a|^2 = a^2, \quad -|a| \leq a \leq |a|, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Außerdem zeigen wir noch für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die fundamentale

Dreiecksungleichung

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{1.1}$$

(Der Name wird später bei der analogen Ungleichung für komplexe Zahlen plausibler.)

Beweis: 1. Fall $a + b \geq 0$: Wegen $a \leq |a|$ und $b \leq |b|$ folgt $|a+b| = a + b \leq |a| + |b|$.

2. Fall $a + b < 0$: Wegen $-a \leq |-a| = |a|$ etc. ist $|a+b| = -(a+b) = -a - b \leq |a| + |b|$. $\square$

Umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a - b|. \tag{1.2}$$

Beweis: Der Wert von $\Big||a| - |b|\Big|$ ist $|a| - |b|$, falls $|a| \geq |b|$, und $|b| - |a|$, falls $|a| < |b|$. Aus $|a| = |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b|$ und $|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |b - a| = |a| + |a - b|$ ergeben sich jeweils die Ungleichungen

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad \text{und} \quad |b| - |a| \leq |a - b|,$$

woraus die behauptete Ungleichung folgt. □

Weitere nützliche Ungleichungen: (i) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{und} \quad (a + b)^2 = |a + b|^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

(ii) Für $a < b$ liegt das arithmetische Mittel strikt dazwischen: $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

(iii) Für $a, b > 0$ gilt $ab \leq \dfrac{(a + b)^2}{4}$. Der Fall $ab = \dfrac{(a + b)^2}{4}$ ist gleichbedeutend mit $a = b$.

Ü (Die Begründungen dafür eignen sich als Übungsaufgaben.)

1.5. Mengenoperationen

Wenn A und B Mengen sind, dann besteht ihre *Vereinigung* $A \cup B$ aus allen Elementen x, für die $x \in A$ oder $x \in B$ gilt. Der *Durchschnitt* $A \cap B$ besteht aus allen Elementen x, für die $x \in A$ und $x \in B$ gilt. Beispielsweise mit $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ erhalten wir $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ und $A \cap B = \{2\}$.

Zwei Mengen A und B heißen *disjunkt*, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt, d.h. die Mengen haben kein gemeinsames Element.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass folgende Distributivgesetze für beliebige Mengen A, B, C gelten:

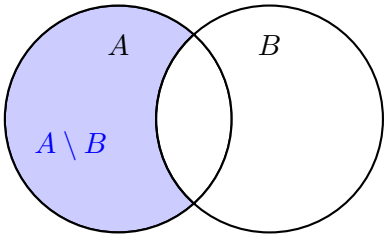
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{und} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

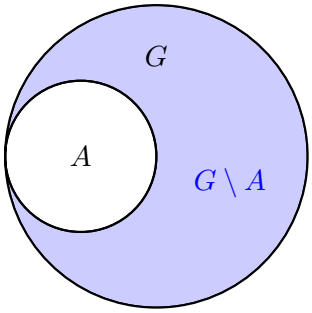
Weitere einfache Eigenschaften sind

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A = A \cap (A \cup B), \quad A = A \cup (A \cap B),$$
$$A \subseteq B \text{ ist gleichbedeutend mit } A = A \cap B, \quad A \subseteq B \text{ ist gleichbedeutend mit } B = A \cup B.$$

Die *Differenzmenge* $A \setminus B$ (auch: „A ohne B“) ist definiert durch

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$





Wenn A Teilmenge einer Grundmenge G ist, dann nennen wir $G \setminus A$ auch das *Komplement* von A bezüglich G.
Es gilt dann stets die disjunkte Zerlegung

$$G = A \cup (G \setminus A) \quad \text{und} \quad A \cap (G \setminus A) = \emptyset.$$

Schließlich lassen sich als Übungsaufgabe **Ü** auch die sogenannten *Regeln von de Morgan* für Teilmengen $A \subseteq G$ und $B \subseteq G$ begründen:

$$G \setminus (A \cup B) = (G \setminus A) \cap (G \setminus B) \quad \text{und} \quad G \setminus (A \cap B) = (G \setminus A) \cup (G \setminus B).$$

Kartesische Produkte von Mengen: Die Menge $A \times B$ besteht aus allen Paaren (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$. Ist C eine dritte Menge, dann wird $A \times B \times C$ aus allen Tripel (x, y, z) mit $x \in A$, $y \in B$ und $z \in C$ gebildet.

Entsprechend können wir für n Mengen $A_1, \ldots, A_n$ das n-fache kartesische Produkt mit Hilfe von sogenannten n-Tupel bilden in der Form

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid j = 1, \ldots, n \colon x_j \in A_j\}.$$

Im Spezialfall $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ schreiben wir

$$A^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid j = 1, \ldots, n \colon x_j \in A\}.$$

Insbesondere für $A = \mathbb{R}$ mit $n = 2$ bzw. $n = 3$ erhalten wir eine Koordinatenbeschreibung der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. des Raumes $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

In einem n-Tupel ist die Reihenfolge der Einträge wesentlich, z.B. sind $(1, 2)$ und $(2, 1)$ verschiedene Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1.6. Abbildungen und Funktionen

Eine *Abbildung* $f \colon M \to N$ zwischen (nichtleeren) Mengen M und N ist eine Vorschrift $x \mapsto f(x)$, die jedem Element x aus der *Definitionsmenge* M genau ein Element $f(x) \in N$ zuordnet. Falls die *Zielmenge* N eine (Teil)Menge von Zahlen ist, nennen wir f auch eine *Funktion*.

Beispiel: Eine Funktion $f \colon \{1, 2\} \to \mathbb{N}$ mit $f(1) := 3$ und $f(2) := 3$, also $1 \mapsto 3$ und $2 \mapsto 3$.

Gleichheit von Abbildungen: Zwei Abbildungen $f\colon M \to N$ und $h\colon P \to Q$ bezeichnen wir dann (und nur dann) als *gleich*, wenn die drei Bedingungen $M = P$, $N = Q$ und $f(x) = h(x)$ für jedes $x \in M$ erfüllt sind. Wir schreiben (nur) in diesem Fall $f = h$.

Das Element $f(x) \in N$ heißt das *Bild* von $x \in M$ (unter f), während im Falle $y \in N$ mit $y = f(x)$ das Element $x \in M$ ein *Urbild* von y ist. Zu jedem $x \in M$ gibt es also genau ein Bild $f(x)$, aber $y \in N$ hat nur dann ein Urbild, falls es ein $x \in M$ mit der Eigenschaft $f(x) = y$ gibt; und in diesem letzten Fall muss x nicht eindeutig sein: In obigem Beispiel ist 3 das Bild von 1 und auch das Bild von 2. Also hat 3 sowohl 1 als auch 2 als Urbild und keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 3$ hat ein Urbild.

Für $A \subseteq M$ ist die *Bildmenge* von A unter f gegeben durch die Teilmenge $f(A) \subseteq N$ mit

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\},$$

besteht also aus jenen Elementen von N, die unter f von Elementen aus A getroffen werden. In obigem Beispiel ist $f(\{1\}) = \{3\} = f(\{2\})$ und auch $f(\{1, 2\}) = \{3\}$.

Entsprechend ist für $C \subseteq N$ die *Urbildmenge* von C unter f gegeben durch die Teilmenge $f^{-1}(C) \subseteq M$ mit

$$f^{-1}(C) := \{x \in M \mid f(x) \in C\},$$

besteht also aus allen Elementen von M, die unter f auf ein Element in C abgebildet werden. In obigem Beispiel ist $f^{-1}(\{3\}) = \{1, 2\} = f^{-1}(\mathbb{N})$ und $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset = f^{-1}(\mathbb{N} \setminus \{3\})$.

Es gilt übrigens stets $f(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Hier einige Rechenregeln für Bild- und Urbildmengen, wobei A, B Teilmengen von M und C, D Teilmengen von N sind:

$$\begin{aligned} f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), \quad & f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D), \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \quad & f(A \cap B) &\subseteq f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Zur Illustration beweisen wir die am Ende behauptete Inklusionsrelation: Sei $y \in f(A \cap B)$ gegeben, dann können wir also ein $x \in A \cap B$ finden mit $f(x) = y$. Daher gilt sowohl $y = f(x) \in f(A)$ als auch $y = f(x) \in f(B)$, somit folgt $y \in f(A) \cap f(B)$.

Wir wollen noch anmerken, dass in der gerade bewiesenen Inklusionsrelation im Allgemeinen tatsächlich nicht Gleichheit zu erwarten ist. Dazu brauchen wir nur wiederum das schon oben mehrfach bemühte Beispiel für f anzuschauen und $A := \{1\}$, $B := \{2\}$ zu setzen. Dann folgt nämlich $A \cap B = \emptyset$, also auch $f(A \cap B) = \emptyset$, aber $f(A) \cap f(B) = \{3\} \cap \{3\} = \{3\} \neq \emptyset$.

Grob gesagt können wir uns merken, dass „für Urbildmengen alles mit Gleichheit funktioniert“ und für Bildmengen zumindest bei der Vereinigung.

Verknüpfung von Abbildungen: Angenommen wir haben zwei Abbildungen $f\colon D \to M$ und $g\colon M \to N$, dann können wir für jedes $x \in D$ zunächst $f(x) \in M$ bilden und dieses Element wiederum in g einsetzen, also mittels $g(f(x))$ nach N abbilden. Wir erhalten dadurch die Abbildung $g \circ f\colon D \to N$ mit

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (x \in D).$$

Wir können das so veranschaulichen, dass es in diesem Diagramm nicht darauf ankommt, auf welchem Weg wir den Pfeilen von D nach N folgen:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Beispiel: Mit den Funktionen $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = 5y^2$ ergibt sich $g \circ f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{x+1}) = \frac{5}{(x+1)^2} = \frac{5}{x^2+2x+1}$.

Summen und Produkte von Funktionen: Falls wir zwei Funktionen $f_1, f_2\colon D \to \mathbb{R}$, also mit derselben Definitionsmenge und Werten in einer Zahlenmenge, vorliegen haben, dann können wir durch punktweise Wirkung die Summe $f_1 + f_2$ sowie das Produkt $f_1 \cdot f_2$ dieser Funktionen definieren, indem wir für jedes $x \in D$ die Werte

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad (f_1 \cdot f_2)(x) := f_1(x) \cdot f_2(x)$$

festlegen. Entsprechend können wir für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ auch das Vielfache $cf\colon D \to \mathbb{R}$ durch die Zuordnung $x \mapsto cf(x)$ definieren. Speziell für $c = -1$ erhalten wir die Funktion $-f$ mit der Abbildungsvorschrift $x \mapsto -f(x)$.

Beispiel: Wir betrachten $f_1, f_2\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$ und $f_2(x) = 1-x$, dann erhalten wir für jedes $x \in]0,1[$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (1-x) = 1 \text{ und } (f_1+f_2)(x) = \frac{1}{1-x} + 1 - x = \frac{1+(1-x)^2}{1-x} = \frac{x^2-2x+2}{1-x}.$$

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ können wir auch die entsprechende konstante Funktion $D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto c$ betrachten. Dann erhalten wir speziell für $c = 0 \in \mathbb{R}$ die sogenannte *Nullfunktion* $x \mapsto 0$, die wir unvorsichtigerweise auch gerne einfach mit 0 bezeichnen. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist also genau dann gleich der Nullfunktion, und wir schreiben in dem Fall auch kurz $f = 0$, falls $f(x) = 0$ *für jedes* $x \in D$ gilt. Insbesondere ist immer $-f + f = 0$ im Sinne der Addition von Funktionen.

Nullfunktion versus Nullstellen: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 1$ ist nicht die Nullfunktion, d.h. $f \neq 0$, auch wenn sie an allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den Wert 0 annimmt. Es genügt nämlich, dass f an einer einzigen Stelle einen Funktionswert hat, der verschieden von 0 ist.

Also ist bei Anwendung der Bedingung $f \neq 0$ Vorsicht geboten. Falls wir beispielsweise zu einer gegebenen Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ die Funktion $1/f\colon D \to \mathbb{R}$ bilden wollen, dann müssen wir punktweise $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ verlangen, was eben nicht aus $f \neq 0$ folgt!

Ein Punkt $x \in D$ einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ heißt *Nullstelle*.

Z.B. hat die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 4x$ die beiden Nullstellen 0 und 4.

1.7. Weitere Eigenschaften von Abbildungen

Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt

(a) *injektiv*, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt; gleichbedeutend ist die Eigenschaft: aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$; für beliebiges $y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ also *höchstens eine* Lösung $x \in M$ (und eventuell auch gar keine);

(b) *surjektiv*, falls $f(M) = N$ gilt; für beliebiges $y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ also *mindestens eine* Lösung $x \in M$ (und eventuell auch mehr als eine);

(c) *bijektiv*, falls f injektiv *und* surjektiv ist; für beliebiges $y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ also *genau eine* Lösung $x \in M$.

Im Falle von (c) gibt es die Abbildung $g\colon N \to M$, $y \mapsto g(y)$, wobei $g(y) := x \in M$ die eindeutige Lösung der Gleichung $f(x) = y$ ist. Es gilt dann laut Konstruktion

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

und g wird die *Umkehrabbildung* oder *inverse Abbildung* zu f genannt. Wir werden meistens die übliche Notation

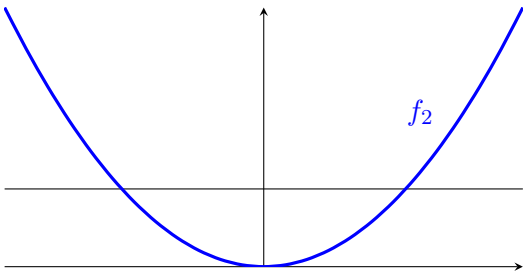
$$f^{-1}\colon N \to M$$

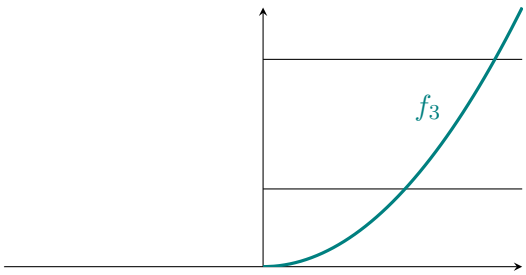
für die Umkehrfunktion einer bijektiven Abbildung $f\colon M \to N$ verwenden. Dies darf aber nicht mit der Notation für Urbildmengen aus 1.6 oder mit einer Funktion der Form $x \mapsto 1/f(x)$ verwechselt werden.

Beispiele: Die Funktion $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (weil z.B. $f_1(-1) = f_1(1)$) und auch nicht surjektiv (weil z.B. $-1 \notin f_1(\mathbb{R})$).

Die Funktion $f_2\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, aber surjektiv.

Die Funktion $f_3\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv.





Bei Funktionsgraphen bedeutet Injektivität anschaulich, dass der Graph von jeder horizontalen Geraden über dem Definitionsbereich höchstens einmal getroffen wird.

Bemerkung: Wenn es zur Abbildung $f\colon M \to N$ eine Abbildung $g\colon N \to M$ gibt, sodass $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$ und $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$ gilt, dann ist f bijektiv und $g = f^{-1}$ (Übungsaufgabe). **Ü**

1.8. Monotone Funktionen

Wir betrachten nun Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Die Funktion f heißt

(a) *monoton wachsend*, falls für $x_1, x_2 \in I$ aus $x_1 \leq x_2$ immer $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt, und *streng monoton wachsend*, falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) < f(x_2)$ folgt;

(b) *monoton fallend*, falls für $x_1, x_2 \in I$ aus $x_1 \leq x_2$ immer $f(x_1) \geq f(x_2)$ folgt, und *streng monoton fallend*, falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) > f(x_2)$ folgt;

Also ist f genau dann (streng) monoton fallend, wenn die Funktion $-f$ (streng) monoton wachsend ist.

Beispiele: Wir betrachten wieder die Funktionen f_1, f_2, f_3 aus 1.7. Während f_3 streng monoton wachsend ist, haben f_1 und f_2 keine Monotonieeigenschaften, die auf dem ganzen Definitionsbereich einheitlich gelten. Allerdings sind für beide Funktionen die Einschränkungen auf $]-\infty, 0]$ streng monoton fallend und jene auf $[0, \infty[$ streng monoton wachsend, also haben wir für f_1 und f_2 jeweils Monotonie auf Teilintervallen.

Ü Als Übungsaufgabe empfohlen: Streng monotone Funktionen sind stets injektiv. Die Umkehrfunktion einer streng wachsenden (bzw. fallenden) bijektiven Funktion ist ebenfalls streng wachsend (bzw. fallend).

2. Ein Intermezzo über Aussagen, Beweise und Kombinatorik

2.1. Implikationsaussagen

Die meisten mathematischen Resultate bzw. Sätze sind so strukturiert, dass unter einer Voraussetzung $\mathcal{A}$ stets eine behauptete Aussage $\mathcal{B}$ gelte, also in Form einer *Implikation* $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Auch für mathematische Aussagen, die zunächst nicht in dieser Implikationsform angegeben sind, lässt sich eine solche Umformulierung geben, die oftmals auch besser zu handhaben ist.

Beispiel: Die Aussage „$\sqrt{2}$ ist nicht rational“ ist gleichbedeutend mit „wenn $x \in \mathbb{Q}$ gilt, dann ist $x^2 \neq 2$“. Also hat dies die Form $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{A}$ die Voraussetzung $x \in \mathbb{Q}$ ist und $\mathcal{B}$ die Behauptung $x^2 \neq 2$.

Übrigens wird im Falle einer Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ in mathematischen Texten oft gesagt, dass $\mathcal{A}$ *hinreichend* für $\mathcal{B}$ ist bzw. $\mathcal{B}$ *notwendig* für $\mathcal{A}$.

Welche Möglichkeiten haben wir, um eine Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zu zeigen? Und was bedeutet eine Implikation bzw. was bedeutet sie nicht? Zuerst widmen wir uns kurz der zweiten Frage.

Wir hatten am Ende von 1.1 schon ein bisschen über Verneinung und Kombination von mathematischen Aussagen mittels „nicht“, „und“ und „oder“ diskutiert. Außerdem haben wir bisher eher informell Begründungen von „aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$“ gegeben in der Art, dass $\mathcal{B}$ jedenfalls zutrifft, falls $\mathcal{A}$ stimmt. Zur Präzisierung wollen wir nun aussagenlogisch die Bedeutung der Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ durch eine Verneinung einführen:

Es soll nicht gelten, dass $\mathcal{A}$ wahr ist und $\mathcal{B}$ falsch ... nicht ($\mathcal{A}$ und (nicht $\mathcal{B}$)).

Spielen wir die insgesamt vier Möglichkeiten von wahr/falsch für $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in einer Wahrheitswerttabelle durch, so ergibt sich dasselbe wie für (nicht $\mathcal{A}$) oder $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$	w	w	f	f
$\mathcal{B}$	w	f	w	f
nicht $\mathcal{B}$	f	w	f	w
nicht $\mathcal{A}$	f	f	w	w
$\mathcal{A}$ und (nicht $\mathcal{B}$)	f	w	f	f
nicht ($\mathcal{A}$ und (nicht $\mathcal{B}$))	w	f	w	w
(nicht $\mathcal{A}$) oder $\mathcal{B}$	w	f	w	w

Also halten wir fest: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist gleichbedeutend mit (nicht $\mathcal{A}$) oder $\mathcal{B}$.

Anhand der Tabelle können wir eine weitere wichtige Beobachtung machen: Vertauschung von $\mathcal{A}$ mit (nicht $\mathcal{B}$) und von $\mathcal{B}$ mit (nicht $\mathcal{A}$) in einer Implikation ergibt ebenfalls dieselben Wahrheitswerte, d.h. wir erhalten zusätzlich:

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist gleichbedeutend mit der *Kontraposition* (nicht $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ (nicht $\mathcal{A}$).

Beispiel: Wir betrachten folgende Aussage für $n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{n^2 \text{ gerade}}_{\mathcal{A}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{n \text{ gerade}}_{\mathcal{B}}$.

Wir können dies sehr einfach in der Form (nicht $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ (nicht $\mathcal{A}$) zeigen: Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, also $n = 2k + 1$ mit passendem $k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1$$

mit $l := 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}_0$, also ist auch n^2 ungerade.

Äquivalenz: Ein besonders wichtiger Umstand ist erfüllt, falls sowohl $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ als auch $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ gilt, in welchem Falle wir $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ als *äquivalent* bezeichnen und auch $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ schreiben.

Die beiden Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus dem obigen Beispiel sind sogar äquivalent, denn es gilt tatsächlich auch $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$: Ist nämlich $n \in \mathbb{N}$ gerade, also von der Form $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$, dann folgt $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2m$ mit $m := 2k^2 \in \mathbb{N}$, also ist n^2 gerade.

2.2. Strategien für Beweise

Nun zu der ersten in 2.1 gestellten Frage, nämlich wie wir eine Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zeigen können. Im letzten Beispiel haben wir schon den Weg über die Kontraposition (nicht $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ (nicht $\mathcal{A}$) gesehen. Dies wird oft als *indirekter Beweis* bezeichnet.

Eine weitere Spielart ist der *Beweis durch Widerspruch* – ebenso oft indirekter Beweis genannt. Mit Blick auf die Motivation der Implikation und die Tabelle in 2.1 versuchen wir in diesem Fall abzuleiten, dass die Kombination $\mathcal{A}$ und (nicht $\mathcal{B}$) unmöglich ist, also auf einen offensichtlichen Widerspruch führt. Weil dies gerade besagt, dass nicht ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) stets falsch ist, muss also $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ richtig sein (tertium non datur).

Beispiel: Wir hatten schon in 2.1 die Aussage „$\sqrt{2}$ ist nicht rational“ umgeformt in $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$:

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2.$$

Nun schreiben wir dafür einen Beweis durch Widerspruch zur Illustration in allen Details auf.

Beweis: Angenommen $x \in \mathbb{Q}$ und $x^2 = 2$. Wegen $(-x)^2 = x^2$ und $0^2 = 0 \neq 2$ können wir auch $x > 0$ annehmen. Wir schreiben $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, wobei dieser Bruch schon vollständig durchgekürzt sein soll, d.h. es gibt kein $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ mit $m \mid p$ und $m \mid q$.

Nun berechnen wir

$$\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = x^2 = 2, \quad \text{daher } p^2 = 2q^2,$$

also ist p^2 gerade. Aus dem zweiten Beispiel in 2.1 wissen wir, dass somit p gerade sein muss, also von der Form $p = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist. Nun berechnen wir $4k^2 = p^2 = 2q^2$, somit ist $q^2 = 2k^2$ gerade. Wiederum muss daher auch q gerade sein und es folgt insgesamt, dass sowohl $2 \mid p$ als auch $2 \mid q$ gilt — Widerspruch ↯ . $\square$

Induktionsbeweise: Diese finden häufig Anwendung bei Aussagen $\mathcal{A}(n)$, die explizit von einem Parameter $n \in \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}_0$ abhängen, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ sei dabei ein Anfangswert. Als konkretes Beispiel betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\mathcal{A}(n): \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Das Induktionsprinzip macht sich die Eigenschaft zunutze, dass jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt (Wohlordnung von $\mathbb{N}$) und erlaubt (nach ein bisschen zusätzlicher Argumentation) folgende Schlussweise für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$:

Ist (a) $1 \in M$ und (b) für jedes $k \in M$ auch $k+1 \in M$, dann muss $M = \mathbb{N}$ gelten.

Das lässt sich analog für Startwerte n_0 statt 1 argumentieren. Durch Anwendung auf die Menge $M := \{n \mid \mathcal{A}(n) \text{ trifft zu}\}$ entsteht nun das Beweisschema der *vollständigen Induktion*:

	(a) $\mathcal{A}(n_0)$ trifft zu,	
Zeige	und	dann gilt $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$.
	(b) $\mathcal{A}(k) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1)$,	

Als Variante darf übrigens (b) auch ersetzt werden durch: Aus $\mathcal{A}(n_0), \ldots, \mathcal{A}(k)$ folgt $\mathcal{A}(k+1)$.

Beispiel: Wir werden die oben schon erwähnte Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nachweisen.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{A}(n)$, d.h. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Beweis: Durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang $n = 1$: Die linke Seite von $\mathcal{A}(1)$ ist $1^2 = 1$ und die rechte Seite von $\mathcal{A}(1)$ ist $1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)/6 = 6/6 = 1$, also trifft $\mathcal{A}(1)$ zu.

Induktionsschluss von k auf $k+1$: Wir dürfen nun voraussetzen, dass $\mathcal{A}(k)$ gilt, also die Formel $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Wir berechnen und formen schrittweise die linke Seite von $\mathcal{A}(k+1)$ um:

$$\begin{aligned}
\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}_{\mathcal{A}(k) \text{ verwenden}} + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)(k+1)}{6} = \frac{k+1}{6}\Big(k(2k+1) + 6(k+1)\Big) \\
&= \frac{k+1}{6}\Big(\underbrace{2k^2 + k + 6k + 6}_{(2k+3)(k+2)}\Big) = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass der letzte Ausdruck gerade der rechten Seite von $A(k+1)$ entspricht. Also haben wir gezeigt, dass aus $\mathcal{A}(k)$ tatsächlich $\mathcal{A}(k+1)$ folgt. $\square$

Eine weitere Anwendung dieser Beweismethode sehen wir bei der grundlegenden

Bernoulli-Ungleichung:

Ist $h \in \mathbb{R}$ mit $h \geq -1$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1+h)^n \geq 1 + nh. \tag{2.1}$$

Das Gleichheitszeichen gilt dabei nur, wenn $n = 1$ oder $h = 0$ ist.

Beweis: Durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang $n = 1$: $(1+h)^1 = 1 + h = 1 + 1 \cdot h$.

Induktionsschluss von k auf $k+1$: Wir dürfen $(1+h)^k \geq 1 + kh$ annehmen und berechnen

$$(1+h)^{k+1} = \underbrace{(1+h)}_{\geq 0}\underbrace{(1+h)^k}_{\geq 1+kh} \geq (1+h)(1+kh) = 1 + kh + h + \underbrace{kh^2}_{\geq 0} \geq 1 + (k+1)h.$$

Im Falle $h \neq 0$ und $k \geq 1$ (somit $n \geq 2$) gilt $kh^2 > 0$ und dann kann oben das letzte $\geq$ durch $>$ ersetzt werden. $\square$

So harmlos und einfach der Induktionsanfang auch meistens ausfällt, müssen wir uns dennoch hüten auf ihn zu vergessen. Z.B. ließe sich sonst irrtümlich beweisen, dass $1^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte, denn aus $1^n = 0$ folgt nämlich ohne Umstände auch $1^{n+1} = 1^n \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$.

2.3. Schreibweisen für Summen und Produkte

Summen wie im zweiten Beispiel in 2.2 können wir abkürzend mit dem Summenzeichen Σ, einem Summationsindex k, einer Untergrenze 1 und einer Obergrenze n angeben in der Form

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Wir haben also für $m \leq n$ und beliebige $a_m, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die Summenschreibweise

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Noch ein wenig allgemeiner (und somit flexibler) kann eine Indexmenge $I = \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ gegeben sein und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in I$, dann schreiben wir

$$\sum_{k \in I} a_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_p}.$$

Beispiele:

1) Induktiv erhalten wir aus der Dreiecksungleichung $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

2) Die Relation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ist wohlbekannt bzw. unmittelbar nachprüfbar. Durch Ausmultiplizieren sehen wir für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ direkt folgende Verallgemeinerung

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n.$$

Wir können das auf zwei Arten in eine Summenschreibweise fassen:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\, b^k = (a-b)\sum_{\substack{0 \leq j,k \leq n-1,\\ j+k=n-1}} a^j b^k.$$

3) Angenommen $q \in \mathbb{R}$ erfüllt $q \neq 1$. Wenden wir 2) mit $a := 1$, $b := q$ und $n+1$ an Stelle von n an, so ergibt sich $1 - q^{n+1} = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$ bzw. nach Division durch $1-q$ die

Geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{2.2}$$

Bemerkung: Diese Formel kann übrigens auf mindestens zwei weitere Arten bewiesen werden. Eine ist Induktion nach n, die andere ist so: Setzen wir $s := 1 + q + \ldots + q^n$, dann ist $q \cdot s = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$ und somit $(1-q)\cdot s = s - qs = 1 - q^{n+1}$.

4) Als weitere Anwendung der Zerlegungsformel aus 2) folgt die strenge Monotonie von $x \mapsto x^n$ als Funktion $]0,\infty[\to]0,\infty[$. Ist nämlich $a > b > 0$, dann folgt $a - b > 0$, $a^j b^k > 0$ und somit auch $a^n - b^n = (a-b)\sum a^j b^k > 0$. Also haben wir gezeigt:

$$a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > b^n.$$

Ähnlich verfahren wir mit Produkten von endlich vielen Faktoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und schreiben

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

bzw. auch für entsprechende Verallgemeinerungen.

Als kleine Anwendung definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ nun „n Fakultät“ oder „n Faktorielle“ durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

und setzen noch $0! := 1$. Induktiv erhalten wir auch $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ als iterative Formel.

Die kombinatorische Interpretation von $n!$ ist gerade die Anzahl der möglichen Umordnungen von n vorgelegten Objekten an n Plätzen. Denn bei einer Umordnung haben wir für das erste Element alle n Plätze zur Verfügung (auch an seinem Platz belassen gilt hier als Spezialfall einer Umordnung), für das zweite daher noch $n-1$ Plätze zur Auswahl, beim dritten bleiben $n-2$ Möglichkeiten usw. Es ergeben sich also insgesamt $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

2.4. Binomialkoeffizienten

Wie groß ist die Anzahl $B_{n,k}$ an Möglichkeiten für Bitfolgen der Länge n, in denen k-mal 0 und $(n-k)$-mal 1 vorkommt? Für $n = 3$, $k = 1$ gibt es die drei Möglichkeiten 011, 101, 110.

Prinzipiell gibt es $n!$ Umordnungen in der gesamten Bitfolge, aber die $k!$ Umordnungen der Nullen untereinander sind nicht unterscheidbar, ebenso wenig die $(n-k)!$ Umordnungen der Einser[1] untereinander. Daher gilt

$$B_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} =: \binom{n}{k},$$

[1] Österreichisch für die Ziffer 1, vgl. Österreichisches Wörterbuch, öbv & hpt, Wien, 39. Auflage 2001.

wodurch wir auch gleich den sogenannten *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ eingeführt haben. Übrigens sehen wir im Wesentlichen mit derselben Argumentation, dass $\binom{n}{k}$ auch der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen entspricht.

Kürzen wir den Faktor $(n-k)!$ im obigen Bruch durch, so ergibt sich alternativ die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

die aber nun sogar für beliebige $n \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ verwendet werden kann, also im Falle von $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ als Definition.

Berechnen wir die Summe für zwei aufeinanderfolgende k-Werte so erhalten wir

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots\overbrace{(n-k+2)}^{(n+1)-k+1}}{k!}\big(\underbrace{k+(n-k+1)}_{n+1}\big) = \binom{n+1}{k},\end{aligned}$$

also zusammengefasst die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{2.3}$$

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ergibt sich daraus das sogenannte *Pascal-Dreieck* mit der n. Zeile bestehend aus den $n+1$ Zahleneinträgen

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n},$$

sodass jede Zahl im Inneren sich als Summe der beiden unmittelbar darüber stehenden Zahlen ergibt.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Das Pascal-Dreieck führt uns auch schon fast auf das folgende Resultat, weil es direkt erlaubt, zeilenweise die Koeffizienten in der Entwicklung eines Binoms $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ nach den sortierten Potenzen $a^k b^{n-k}$ abzulesen. Der Ausdruck $a^k b^{n-k}$ ergibt sich ja immer dann, wenn wir beim Ausmultiplizieren des Produktes aus k Klammern a auswählen und aus $n-k$ Klammern b entnehmen. Das sind also $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten und wir müssen das für $k = 0, \ldots, n$ durchspielen und aufsummieren. Das führt insgesamt auf das folgende Resultat.

Binomischer Lehrsatz:

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Ü (Ein alternativer Beweis wäre auch als Routine-UE-Aufgabe mit Induktion machbar.)

Halten wir schließlich noch den einfachen Spezialfall von obigem Satz mit $a = b = 1$ fest, also für $(1+1)^n = 2^n$.

Folgerung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Mit der Interpretation von $\binom{n}{k}$ als Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen ergibt sich nun, dass eine n-elementige Menge insgesamt 2^n Teilmengen besitzt.

3. Ein bisschen mehr über Eigenschaften der reellen Zahlen

3.1. Vorbemerkungen über die rationalen Zahlen

1) *Archimedische Eigenschaft von* $\mathbb{Q}$*:* Zu $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q > 0$ gibt es stets eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $Np > q$. (Wir müssen durch N ja nur den Quotienten q/p übertreffen.)

Speziell für $p = 1$ ergibt sich: Zu $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > q$. Jede positive rationale Zahl wird durch eine geeignete natürliche Zahl übertroffen.

2) Zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen gibt es stets noch eine rationale Zahl: Zu beliebigen $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $p < r < q$. (Z.B. $r := (p + q)/2$ erfüllt dies.)

Nun gibt es sowohl zwischen p und r als auch zwischen r und q wieder eine rationale Zahl ... also letztlich sogar unendlich viele zwischen p und q.

3) Es gibt eine Art „Nummerierung“ von $\mathbb{Q}$ durch eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.
(O.B.; dies wird z.B. erreicht, indem zunächst die positiven vollständig durchgekürzten Brüche der Form m/n mit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ im zweidimensionalen Gitter $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ „geschickt abgefahren werden“.)

In diesem Sinne gibt es „nicht mehr“ rationale als natürliche Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ ist daher *abzählbar unendlich*.

4) Die Menge $\mathbb{Q}$ „füllt“ die Zahlengerade $\mathbb{R}$ noch nicht aus: Betrachten wir das Einheitsquadrat über dem Intervall $[0, 1]$ und schlagen die Länge der Diagonale von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ auf die Zahlengerade ab, so erhalten wir $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (was hier vorerst nur anschaulich begründet ist). Aber „$\sqrt{2}$ ist nicht rational“, wie wir schon in 2.1 bewiesen hatten.

3.2. Beschränkte Mengen, Maxima und Minima

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $K \in \mathbb{R}$ existiert mit der Eigenschaft $x \leq K$ für alle $x \in M$. In diesem Fall ist K eine *obere Schranke* für M und es gilt $M \subseteq]-\infty, K]$.

Analog definieren wir *nach unten beschränkte* Teilmengen von $\mathbb{R}$ und *untere Schranken*. Ist L eine untere Schranke für $M \subseteq \mathbb{R}$, so gilt $M \subseteq [L, \infty[$.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist. Dies ist äquivalent dazu (Begründung als Ü Übungsaufgabe), dass es eine Zahl $c \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft $|x| \leq c$ für alle $x \in M$, d.h. $M \subseteq [-c, c]$.

Eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ heißt *Maximum* der (nichtleeren) Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, falls k sowohl zu M gehört (also $k \in M$) als auch eine obere Schranke für M ist. Wir schreiben in diesem Fall $k = \max M$ (und diese Zahl ist eindeutig, soferne sie existiert).

Entsprechend ist $l \in \mathbb{R}$ das *Minimum* der (nichtleeren) Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ und wir schreiben $l = \min M$, falls $l \in M$ gilt und l eine untere Schranke für M ist.

Beispiele:

1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ besitzt das Minimum 1 und ist nicht nach oben beschränkt.

2) $]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$ hat 0 als untere Schranke und ist nicht nach oben beschränkt. Wegen $0 \notin]0, \infty[$ ist 0 kein Minimum der Menge $]0, \infty[$ (die gar kein Minimum besitzt).

3) Die Menge $W := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ ist beschränkt: Ist nämlich $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 2$ oder $x < -2$, dann folgt $x^2 > 4$ und somit $x \notin W$. (Hier gibt es weder ein Maximum noch ein Minimum.)

4) Endliche, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen immer ein Minimum und ein Maximum.

3.3. Infimum, Supremum und Ordnungsvollständigkeit

Eine obere (bzw. untere) Schranke einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Supremum* (bzw. *Infimum*) von M, falls sie die kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von M ist. Falls ein solches existiert, schreiben wir für die entsprechende Zahl $\sup M$ (bzw. $\inf M$).

Vollständigkeit der reellen Zahlen – Supremumsaxiom: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Entsprechend besitzt eine nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum.

Beispiele:

1) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann ist $b = \sup]a, b[$ und $a = \inf]a, b[$. Die Menge $]a, b[$ besitzt weder ein Maximum noch ein Minimum.

2) Falls eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ein Maximum m besitzt, also $m = \max M$, dann gilt auch $m = \sup M$.

3) Wir betrachten $M := \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\min M = 0$ (ergibt sich für $n = 1$), $\sup M = 1$, aber 1 ist kein Maximum (beachte $1 \notin M$).

Folgerungen: (i) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $s = \sup M$, dann ist $]s - \varepsilon, s] \cap M \neq \emptyset$ für jedes $\varepsilon > 0$. D.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in M$ mit $s - \varepsilon < x \leq s$.
(Eine analoge Aussage gilt für nach unten beschränkte Teilmengen und Infima.)

Zur Begründung müssen wir nur bemerken, dass $s - \varepsilon < s$ ist und daher keine obere Schranke von M sein kann (weil s ja die kleinste solche ist). Daher gibt es ein $x \in M$ mit $x > s - \varepsilon$; und $x \leq s$ gilt ohnehin, weil s eine obere Schranke von M ist.

(ii) *Archimedische Eigenschaft:* Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gibt es stets eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $Na > b$.

Wir setzen $r := b/a$ und müssen also zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $N > r$. Indirekt angenommen $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq r\} = \mathbb{N}$, dann ist also r eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ und es gibt $s := \sup \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist auch $n + 1 \in \mathbb{N}$ und somit $n + 1 \leq s$. Mit anderen Worten gilt $n \leq s - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist auch $s - 1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ und kleiner als s — Widerspruch $\lightning$ zur Supremumseigenschaft von s.

(iii) *Prinzip des Eudoxos:* Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Dies folgt natürlich aus (ii) mit $a := \varepsilon$ und $b := 1$.

(iv) Seien $x, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Wenn $x \leq \frac{c}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt, dann folgt $x \leq 0$.

Indirekt angenommen $x > 0$, dann können wir die archimedische Eigenschaft (ii) auf $a := x$ und $b := c$ anwenden. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $mx > c$. Für $m' > m$ gilt stets $m'x > mx$, daher können wir allenfalls m vergrößern und zusätzlich $m \geq N$ annehmen. Somit folgt $x > \frac{c}{m}$ für ein $m \geq N$ — Widerspruch $\lightning$.

Gaußklammer (ganzzahliger Anteil): Für festes $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge $M := \{m \in \mathbb{Z} \mid x < m + 1\}$. Nach dem archimedischen Prinzip ist $M \neq \emptyset$ und laut Konstruktion ist $x - 1$ eine untere Schranke für M. Wir können daher $[x] := \inf M$ setzen und bemerken, dass dies sogar das Minimum ist, denn $M' := [[x], [x] + 1[\cap M$ ist nichtleer und endlich mit $\min M' = \inf M' = \inf M = [x]$. Somit ist $x < [x] + 1$, weil $[x] \in M$, und $[x] \leq x$, weil $[x] - 1 \notin M$; insgesamt also ist $[x]$ die eindeutige ganze Zahl mit

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Z.B. ist $[3.14] = 3$ und $[-3.14] = -4$.

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig mit $a < b$, dann enthält das offene Intervall $]a, b[$ (unendlich viele) rationale Zahlen.

Beweis: Es ist $\frac{b-a}{2} > 0$, daher gibt es nach dem Prinzip des Eudoxos ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N} < \frac{b-a}{2}.$$

Wir setzen $m := [Na] + 1$, dann gilt

$$m - 1 \leq Na < m$$

und weiters $a < \frac{m}{N}$ sowie $\frac{m+1}{N} = \frac{m-1}{N} + \frac{2}{N} < a + b - a = b$. Also haben wir insgesamt

$$a < \frac{m}{N} < \frac{m+1}{N} < b \quad \text{und} \quad \frac{m}{N}, \frac{m+1}{N} \in \mathbb{Q}.$$

Zwischen $\frac{m}{N}$ und $\frac{m+1}{N}$ lassen sich nun wieder rationale Zahlen einfügen usw. $\square$

3.4. Existenz der Quadratwurzel

Wir behaupten: Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gibt es genau eine reelle Zahl $x \geq 0$ mit der Eigenschaft $x^2 = a$. Diese eindeutige Lösung bezeichnen wir mit $x = \sqrt{a}$.

Beweis: Im Falle $a = 0$ kommt nur $x = 0$ in Frage, weil andernfalls $x^2 > 0$ wäre (vgl. die Folgerungen in 1.3); und $x = 0$ ist natürlich eine Lösung von $x^2 = 0$.

Wir betrachten ab nun also den Fall $a > 0$.

Eindeutigkeit: Angenommen $x, y \in \mathbb{R}$ sind beide positiv und erfüllen $x^2 = a = y^2$. Dann ist

$$0 = a - a = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

daher muss $x - y = 0$ oder $x + y = 0$ gelten. Der zweite Fall kann wegen $x = -y < 0$ aber nicht eintreten, also ist zwingend $x - y = 0$ und somit $x = y$.

Existenz: Wir betrachten die Menge $M := \{z \in \mathbb{Q} \mid z^2 < a\}$. Wegen $0 \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Weiters ist $1 + \frac{a}{2}$ eine obere Schranke für M, weil für $z \in M$ stets

$$z^2 < a < 1 + a + \frac{a^2}{4} = \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2$$

gilt. Also existiert $s := \sup M$ und wir haben $s \geq 0$, weil $(z \in M \Leftrightarrow -z \in M)$ gilt.

Wir werden nun (mit etwas Mühe) $s^2 = a$ zeigen.

<u>1. Schritt</u> $s^2 \geq a$: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $s + \frac{1}{n} \notin M$, daher ergibt $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ nun

$$a \leq \left(s + \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leq s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n} = s^2 + \frac{2s+1}{n}.$$

Die äußeren Glieder besagen $a - s^2 \leq \frac{2s+1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt $a - s^2 \leq 0$ nach Folgerung (iv) in 3.3, d.h. $a \leq s^2$.

<u>2. Schritt</u> $s^2 \leq a$: Wegen $s \geq 0$ und der Erkenntnis $s^2 \geq a > 0$ aus dem ersten Schritt schließen wir zunächst auf $s > 0$. Nach dem Prinzip des Eudoxos (Folgerung (iii) in 3.3) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < s$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt daher $0 < s - \frac{1}{N} \leq s - \frac{1}{n}$. Wegen der Supremumseigenschaft von s ist $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M, daher gibt es ein $x_n \in M$, sodass

$$0 < s - \frac{1}{n} < x_n.$$

Daraus folgt für alle $n \geq N$ die Ungleichungskette

$$a > x_n^2 > \left(s - \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} > s^2 - \frac{2s}{n},$$

also $s^2 - a < \frac{2s}{n}$ für alle $n \geq N$. Wiederum nach Folgerung (iv) in 3.3 dürfen wir nun auf $s^2 - a \leq 0$ schließen, d.h. $s^2 \leq a$.

Wir haben insgesamt $s^2 \leq a \leq s^2$ gezeigt, also muss tatsächlich $s^2 = a$ gelten (vgl. die Einführung von $\leq$ in 1.3). $\square$

Bemerkung: Für den Spezialfall $a = 2$ liefert der obige Beweis eine positive Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $s^2 = 2$, also $s = \sqrt{2}$. Wir wissen aus 2.2 bereits, dass $s \notin \mathbb{Q}$ gilt („$\sqrt{2}$ ist nicht rational"). Die Konstruktion liefert $s = \sup\{z^2 \in \mathbb{Q} \mid z^2 < 2\} = M$, womit auch gezeigt ist, dass die beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{Q}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt, wohl aber in $\mathbb{R}$ – dies deutet an, wie die in 3.1 erwähnten Lücken von $\mathbb{Q}$ in der Zahlengeraden durch $\mathbb{R}$ „gestopft" wurden.

4. Komplexe Zahlen

Wir gehen hier ganz pragmatisch vor und führen auf der Menge aller Paare $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ eine Addition (analog zu jener von Vektoren)

$$(x, y) + (u, v) := (x + y, u + v)$$

und eine Multiplikation

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

ein. Durch direktes Nachrechnen könn(t)en wir leicht nachweisen, dass diese beiden Operationen alle Körperaxiome (i)-(ix) aus 1.2 erfüllen, wobei $(0, 0)$ bzw. $(1, 0)$ das neutrale Element bezüglich Addition bzw. Multiplikation ist.

Schreiben wir ab nun einfach x statt $(x, 0) = x(1, 0)$ und $\mathrm{i}y$ statt $(0, y) = y(0, 1)$ dann

$$\text{entspricht} \qquad x + \mathrm{i}y \qquad \text{dem Paar} \qquad (x, y).$$

Hierbei heißt $\operatorname{Re} z := x \in \mathbb{R}$ der *Realteil* und $\operatorname{Im} z := y \in \mathbb{R}$ der *Imaginärteil* der *komplexen Zahl* $z := x + \mathrm{i}y$.

In dieser Schreibweise lautet nun die Addition $(x + \mathrm{i}y) + (u + \mathrm{i}v) = x + u + \mathrm{i}(u + v)$ und die Multiplikation

$$(x + \mathrm{i}y) \cdot (u + \mathrm{i}v) = xu - yv + \mathrm{i}(xv + yu).$$

Die Menge aller $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennen wir den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Durch die obige Identifikation von $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit dem Koordinatenpaar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ haben wir auch immer eine geometrische Veranschaulichung von komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene.

Das neutrale Element bezüglich Addition bzw. Multiplikation schreibt sich nun einfach $0 = 0 + \mathrm{i}0$ bzw. $1 = 1 + \mathrm{i}0$. Wir können aber alle reellen Zahlen aus $\mathbb{R}$ mittels der Zuordnung $x \mapsto x + \mathrm{i}0$ als Elemente von $\mathbb{C}$ auffassen, wobei auch die üblichen Rechenregeln innerhalb $\mathbb{R}$ bewahrt werden, wie sich z.B. bei $(x + \mathrm{i}0) \cdot (u + \mathrm{i}0) = xu + \mathrm{i}0$ zeigt. Geometrisch entspricht dann $\mathbb{R}$ einfach der horizontalen Geraden $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^2$.

Wir definieren den *Betrag* $|z|$ der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ mittels der euklidischen Länge von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, d.h.

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

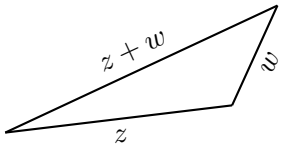
Offensichtlich erfüllt dies die folgenden Bedingungen:

$$|z| \geq 0 \quad \text{und} \quad \Big(|z| = 0 \Rightarrow z = 0\Big).$$

Durch direktes Nachrechnen für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ erhalten wir auch

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

Aus der bekannten euklidischen Eigenschaft bzw. durch Vergleich der Seitenlängen im Dreieck mit den Eckpunkten 0, z und $z+w$ schließen wir auf die



Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen

$$|z+w| \leq |z| + |w|. \tag{4.1}$$

Es folgen ohne Mühe aus dem Obigen für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$ auch noch die Relationen

$$\max\{|x|, |y|\} \leq |x + \mathrm{i}y| \leq |x| + |y| \quad \text{und} \quad \Big||z| - |w|\Big| \leq |z - w|.$$

Spiegelung an der reellen Achse macht aus $z = x + \mathrm{i}y$ die *konjugiert komplexe Zahl*

$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y.$$

Die kurze Rechnung $(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 + \mathrm{i}(-xy + yx) = x^2 + y^2$ zeigt sofort den nützlichen Zusammenhang

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

und ähnlich einfach ergibt sich auch

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

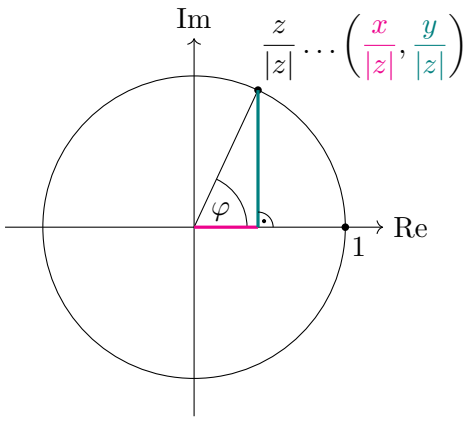
Beispiel: Für $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ (also $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, entsprechend „nicht ($x = 0$ und $y = 0$)“) ist

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Polardarstellung: Für $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ hat die komplexe Zahl $\frac{z}{|z|}$ stets Länge 1 und die Darstellung

$$\frac{z}{|z|} = \frac{x}{|z|} + \mathrm{i}\frac{y}{|z|}$$

entsprechend dem Punkt $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}\right)$ auf dem Einheitskreis.



Daher[1] gilt $\frac{x}{|z|} = \cos\varphi$ und $\frac{y}{|z|} = \sin\varphi$ mit einem passenden Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$, wobei dann jeder Winkelwert $\varphi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ebenso verwendbar wäre, und wir erhalten mittels $z = |z|\frac{z}{|z|}$ die Darstellung

$$z = |z|\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right).$$

[1] Wir besprechen die trigonometrischen Funktionen cos und sin später in Kapitel 9 genauer und verwenden sie hier wie (hoffentlich) aus Schulzeiten (oder aus der StEOP 2) bekannt.

Wenn auch $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in Polardarstellung $w = |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ vorliegt, dann können wir das Produkt $z \cdot w$ wie folgt (mit Hilfe der Additionstheoreme (9.1) und (9.2) der Winkelfunktionen) berechnen

$$\begin{aligned} z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot \Big(\overbrace{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi}^{\cos(\varphi+\psi)} + \mathrm{i}\big(\overbrace{\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi}^{\sin(\varphi+\psi)}\big)\Big) \\ = |z|\,|w|\,(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi))\,. \end{aligned}$$

Somit entspricht für festes $w \neq 0$ die Abbildung $z \mapsto zw$, $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ der Kombination aus einer Drehung um den Winkel ψ mit einer Streckung um den Faktor $|w|$.

Teil B

Folgen, Reihen und elementare Funktionen

5. Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

5.1. Folgen und Teilfolgen

Eine *Folge* in $\mathbb{R}$ (oder *reelle Zahlenfolge*) ist eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wir verwenden meistens die Indexnotation $a_n := a(n)$ und schreiben die Folge an als

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \text{oder ganz kurz} \quad (a_n).$$

Beispiele: $(\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ oder $\left((1+\frac{1}{n})^n\right) = \left(2, (\frac{3}{2})^2, \dots\right)$ oder die alternierende Folge $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$; für $q \in \mathbb{R}$ die *geometrische Folge* $(q^n) = (q, q^2, q^3, \dots)$.

Oft kommen auch *rekursive* Angaben von Folgen vor, wie z.B. $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{1+a_1}$, ... mit dem allgemeinen Glied $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$; der Anfangsteil ist also $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \dots\right)$.

Die *Fibonacci-Folge* (a_n) ist definiert durch $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ für alle weiteren Glieder, beginnt also mit $(1, 1, 2, 3, 5, \dots)$.

Wenn (a_n) eine gegebene Folge ist, so können wir durch Auswahl von Indizes $n_1, n_2, n_3, \dots \in \mathbb{N}$ mit der Bedingung

$$1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

die *Teilfolge* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bilden. Die obige Bedingung entspricht der strikten Monotonie von $k \mapsto n_k$ als Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und ergibt automatisch $n_k \ge k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Zum Beispiel ergibt $n_k = k^2$ die Teilfolge $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots)$ von $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$.

5.2. Konvergenz

In der folgenden Begriffsbildung soll präzisiert werden, was es heißt, dass eine Folge (a_n) einem Wert $a \in \mathbb{R}$ beliebig nahe kommt.

Definition:

Die Folge (a_n) *konvergiert* gegen die Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn Folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge n_\varepsilon.$$

Wir schreiben in diesem Fall $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und nennen a den *Grenzwert* oder *Limes* der Folge.
Wenn eine Folge nicht konvergent ist, nennen wir sie *divergent*.

Wir bezeichnen eine Folge (a_n), die gegen 0 konvergiert, hinkünftig als *Nullfolge*. Für diese gilt also laut obiger Definition, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

Wir sehen, dass in diesem Fall auch $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Eine Folge (a_n) ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Abänderung von nur endlich vielen Folgengliedern ändert weder das Konvergenzverhalten[1] noch den Grenzwert (soferne existent) der Folge.

Beispiele:

1) Für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{c}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Im Falle $c = 0$ ist das klar. Wegen $|-c| = |c|$ können wir uns weiters auf den Fall $c > 0$ konzentrieren.

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach dem Prinzip des Eudoxos gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{c}$ (wir könnten übrigens konkret $n_\varepsilon := [\frac{c}{\varepsilon}] + 1$ wählen). Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon$ tatsächlich

$$\left|\frac{c}{n}\right| = \frac{c}{n} \leq \frac{c}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

2) Auch $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ist eine Nullfolge, denn zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir gemäß archimedischer Eigenschaft ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon^2}$ und somit

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

3) Ist auch $\left(n\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$ eine Nullfolge? Das werden wir in 5.3 klären.

4) Für $a_n = \frac{2^n}{n!}$ ist (a_n) eine Nullfolge, was hier eine etwas längere Begründung braucht.

Zunächst schätzen wir für $n \geq 3$ unter Beachtung von $\frac{2}{n+1} < \frac{1}{2}$ wie folgt ab:

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2}{n+1} \cdot a_n \leq \frac{1}{2} \cdot a_n.$$

Wir erhalten daraus sukzessive für $n \geq 3$ mit $a_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ auch

$$a_n \leq \frac{1}{2} \cdot a_{n-1} \leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n-3}} \cdot a_3 = \frac{1}{2^n} \cdot 2^3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Verwenden wir nun die Bernoulli-Ungleichung in der Nebenrechnung $2^n = (1+1)^n \geq 1+n \geq n$, dann ergibt sich daraus

$$a_n \leq \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{n}.$$

Jetzt ist alles vorbereitet, um die Argumentation für die Nullfolgeneigenschaft abzuschließen: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir können ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ wählen mit den Eigenschaften $n_\varepsilon \geq 3$ und $n_\varepsilon > \frac{32}{3\varepsilon}$. Dann folgt für jedes $n \geq n_\varepsilon$ in der Tat

$$|a_n| = a_n \leq \frac{32}{3n} \leq \frac{32}{3n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

[1] Gemeint ist damit, ob die Folge konvergent oder divergent ist.

5.3. Techniken für Nullfolgen

In 5.2, Beispiel 4), hatten wir unterwegs bereits die Abschätzung $0 \leq a_n \leq \frac{32}{3n}$ und wir wussten eigentlich aus dem dortigen Beispiel 1) bereits, dass $b_n = \frac{32}{3n}$ eine Nullfolge ist. Wie wir gleich sehen werden, hätten wir daraus auch direkt schließen dürfen, dass auch (a_n) eine Nullfolge ist.

Vergleichskriterium: Ist (b_n) eine Nullfolge mit nichtnegativen Gliedern $b_n \geq 0$ und gilt für ein gewisses $N \in \mathbb{N}$ stets $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq N$, dann ist auch (a_n) eine Nullfolge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $b_n = |b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt. Wir setzen $N_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon, N\}$, dann folgt für jedes $n \geq N_\varepsilon$ direkt $|a_n| \leq b_n < \varepsilon$. $\square$

Beispiele:

1) $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ ist eine Nullfolge, denn es gilt

$$\left|\frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

und $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine Nullfolge.

2) Für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Für $q = 0$ ist das klar. Sei ab nun also $0 < |q| < 1$, somit $\frac{1}{|q|} > 1$, d.h. $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ und $h + 1 = \frac{1}{|q|}$. Mit der Bernoulli-Ungleichung erhalten wir das Zwischenresultat

$$\frac{1}{|q^n|} = \frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh$$

und daraus sofort

$$|q^n| < \frac{1}{hn}.$$

Aus dem Vergleichskriterium schließen wir also nun, dass (q^n) eine Nullfolge sein muss.

Bemerkungen: (i) Es genügt, falls für (x_n) die definierende Ungleichung zur Nullfolgeneigenschaft mit einem zusätzlichen Faktor $c > 0$ gilt, der unabhängig von n und ε ist. Gilt nämlich mit $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|x_n| < c \cdot \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon,$$

dann können wir genauso gut zu $\varepsilon' := \varepsilon/c$ ein passendes $N_{\varepsilon'}$ wählen mit $|x_n| < c\varepsilon' = \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon'}$.

(ii) Jede Teilfolge einer Nullfolge (a_n) ist ebenfalls eine Nullfolge.
(Wegen $n_k \geq k$ gilt nämlich für $k \geq n_\varepsilon$ erst recht $|a_{n_k}| < \varepsilon$, wenn wir $k \geq n_\varepsilon$ annehmen.)

Nützliche Beobachtungen: (i) Jede Nullfolge (a_n) ist eine *beschränkte Folge*, d.h. es gibt eine Zahl $M \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$|a_n| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < 1$ für alle $n \geq n_1$. Wir erzwingen einfach $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, indem wir $M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, 1\}$ setzen.

(ii) Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Speziell ist (nach (i)) das Produkt zweier Nullfolgen eine Nullfolge.

Wir nehmen $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Dann folgt $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \varepsilon \cdot M$, somit ist nach obiger Bemerkung (i) auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

(iii) Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen und $c, d \in \mathbb{R}$, dann ist auch $(ca_n + db_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $m_\varepsilon, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq m_\varepsilon$ und $|b_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Wir setzen $N_\varepsilon := \max\{m_\varepsilon, n_\varepsilon\}$ und erhalten für jedes $n \geq N_\varepsilon$ die Ungleichung

$$|ca_n + db_n| \leq |ca_n| + |db_n| = |c||a_n| + |d||b_n| < (|c| + |d|)\,\varepsilon.$$

(iv) Ist (a_n) eine Nullfolge, dann auch $(\sqrt{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Zu $\varepsilon' := \varepsilon^2 > 0$ gibt es laut Voraussetzung ein $n_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| < \varepsilon' = \varepsilon^2$ für alle $n \geq n_{\varepsilon'}$ gilt. Wegen $\left(\sqrt{|a_n|}\right)^2 = |a_n| < \varepsilon^2$ und $\varepsilon > 0$ folgt[2] somit auch $\sqrt{|a_n|} < \varepsilon$ für $n \geq m_\varepsilon := n_{\varepsilon'} = n_{\varepsilon^2}$.

Beispiele:

3) Für $|q| < 1$ ist (nq^n) eine Nullfolge (vg. Beispiel 3) in 5.2 mit $q = 9/10$).

Wegen $\sqrt{|q|} < 1$, also $1 < 1/\sqrt{|q|}$ können wir mit passendem $h > 0$ die Relation $\frac{1}{\sqrt{|q|}} = 1 + h$ notieren. Mit der Bernoulli-Ungleichung folgt daraus

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|q|}}\right)^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \geq nh$$

und weiters dann

$$|nq^n| = n \cdot \left(\sqrt{|q|}\right)^n \cdot \left(\sqrt{|q|}\right)^n \leq n \cdot \frac{1}{nh} \cdot \frac{1}{nh} = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Weil $(\frac{1}{nh^2})$ eine Nullfolge ist, muss es somit auch (nq^n) sein.

4) Allgemeiner als in 5.2, Beispiel 4) ist $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge.

Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2|x|$, dann erhalten wir für jedes $n \geq N+1$ die Abschätzung

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^N \cdot \overbrace{|x| \cdots |x|}^{n-N \text{ Faktoren}}}{N! \cdot (N+1) \cdots n} = \frac{|x|^N}{N!} \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdots \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|^N}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{2^N |x|^N}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

wobei der Faktor $c := \frac{2^N |x|^N}{N!}$ konstant (unabhängig von ε und n) ist und $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ eine Nullfolge.

5.4. Eigenschaften und Rechenregeln für Grenzwerte

Wir erinnern daran, dass im Falle der Konvergenz $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ die Zahl a Grenzwert der Folge (a_n) heißt; gleichbedeutend ist, dass $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.

[2] Vgl. die Rechenregeln für Ungleichungen in 1.3.

Grenzwerte sind eindeutig: Falls nämlich $a, b \in \mathbb{R}$ beides Grenzwerte der konvergenten Folge (a_n) sind, dann ist sowohl $(a_n - a)$ als auch $(a_n - b)$ eine Nullfolge. Nach Beobachtung (iii) in 5.3 ist daher auch $(-(a_n - a) + a_n - b)_{n\in\mathbb{N}} = (a - b)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Für jedes $\varepsilon > 0$ folgt dann $0 \leq |a - b| < \varepsilon$, was $|a - b| = 0$, d.h. $a = b$ nach sich zieht.

Beispiele:

1) Die alternierende Folge $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ hat keinen Grenzwert, ist also nicht konvergent.

Wäre nämlich $a \in \mathbb{R}$ der (nach Obigem eindeutige) Grenzwert, dann würde für beliebiges $\varepsilon > 0$ und passendes $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|a - (-1)^n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ bestehen. Während gerades n nun $|a-1| = |a-(-1)^n| < \varepsilon$ ergibt, liefert ungerades n stets $|a+1| = |a-(-1)^n| < \varepsilon$, was einerseits $a = 1$ und andererseits $a = -1$ bedeutet — Widerspruch ↯

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$, denn $|1-(1-\frac{1}{\sqrt{n}})| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ und wir können das Vergleichskriterium für Nullfolgen anwenden.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1$, denn $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$ und mittels Bernoulli-Ungleichung erhalten wir

$$0 < 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}_{\geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}} \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Fünf Eigenschaften unter der Voraussetzung $a_n \to a$:

(i) Falls es ein $s \in \mathbb{R}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \geq s$ für alle $n \geq n_0$, dann folgt $a \geq s$.

Für $n \geq n_0$ ist $s - a \leq a_n - a$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ $(n \geq n_\varepsilon)$. Daraus schließen wir für $n \geq \max\{n_0, n_\varepsilon\}$ auf $s - a \leq a_n - a < \varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt nun $s - a \leq 0$.

Achtung: Aus $a_n > s$ für $n \geq n_0$ folgt aber nicht $a > s$. (Z.B. ist $1 + \frac{1}{n} > 1$, aber $\lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$.)

(ii) Analog zu (i): Aus $a_n \leq t$ für $n \geq n_0$ folgt $a \leq t$.

(iii) Falls $a > 0$ gilt, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n > \frac{a}{2}$.

Zu $\varepsilon = a/2$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon = a/2$ für $n \geq n_0$. Für ebendiese n folgt nun auch

$$a_n = a + (a_n - a) \geq a - |a_n - a| > a - \varepsilon = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

(iv) Als konvergente Folge ist (a_n) auch beschränkt.

Die Nullfolge $(a_n - a)$ ist nach Beobachtung (i) in 5.3 beschränkt. Es gibt also eine Zahl $K \geq 0$ mit $|a_n - a| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt auch

$$|a_n| = |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + K,$$

wobei die obere Schranke $|a| + K$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ ist.

(v) $\lim |a_n| = |a|$.

Wir müssen dazu nur die umgekehrte Dreiecksungleichung anwenden, denn $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| \to 0$.

Zwei weitere nützliche Eigenschaften:

(a) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $s := \sup M$, dann gibt es eine Folge (a_n) mit $a_n \in M$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim a_n = s$. (Eine analoge Aussage gibt es für ein Infimum.)

(b) **Sandwichlemma:** Sind (a_n) und (c_n) konvergente Folgen mit $\lim a_n = b = \lim c_n$ und gelten für die Folge (b_n) mit einem festen $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann ist (b_n) konvergent und $\lim b_n = b$.

Beweis: (a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M, daher gibt es ein $a_n \in M$ mit $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$. Daraus folgt $|s - a_n| = s - a_n < \frac{1}{n} \to 0$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \varepsilon$ und $|c_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Für die Differenzen $b - b_n = -(b_n - b)$ und $b_n - b$ haben wir die folgenden Ober- und Unterschranken, wenn wir $n \geq n_0$ annehmen:

$$a_n - b \leq b_n - b \leq c_n - b \quad \text{und} \quad b - c_n \leq b - b_n \leq b - a_n.$$

Daher ist $|b - b_n| \leq \max\{|a_n - b|, |c_n - b|\}$ für $n \geq n_0$ und somit weiters $|b - b_n| < \varepsilon$ für $n \geq \max\{n_0, n_\varepsilon\}$. $\square$

Rechenregeln für Grenzwerte: Hier nehmen wir an, dass (a_n) und (b_n) konvergente Folgen sind mit $a = \lim a_n$ und $b = \lim b_n$.

- Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\boxed{\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b.}$

  Das folgt direkt aus

  $$|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| = |\alpha(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\alpha| \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0} + |\beta| \underbrace{|b_n - b|}_{\to 0} \to 0.$$

- $\boxed{\lim(a_n b_n) = ab.}$

  Als konvergente Folge ist (b_n) auch beschränkt, sagen wir es gelte $|b_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann können wir $a_n b_n \to ab$ wie folgt begründen:

  $$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| \\ &= |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0} K + |a| \underbrace{|b_n - b|}_{\to 0} \to 0. \end{aligned}$$

  Speziell für $a_n = b_n$ erhalten wir natürlich $a_n^2 \to a^2$ und daraus sukzessive durch weitere Multiplikationen mit a_n die entsprechende Relation auch für höhere Potenzen $m \in \mathbb{N}$ in der Form $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n^m = a^m.}$

- Falls $a \neq 0$ ist, dann folgt $\boxed{\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}.}$

  Es genügt $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ zu zeigen, weil dann $\frac{b_n}{a_n} = b_n \cdot \frac{1}{a_n} \to b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$ folgt. Wegen $-\frac{1}{a} = \frac{1}{-a}$ und $-\frac{1}{a_n} = \frac{1}{-a_n}$ können wir uns auch auf den Fall $a > 0$ beschränken. Wie wir bereits aus obiger Eigenschaft (iii) wissen, gibt es dann ein $n_0 \in N$, sodass $a_n > a/2$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Für diese Indizes n folgt somit

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{aa_n}\right| = \frac{|a - a_n|}{aa_n} < \frac{2}{a^2}\,|a - a_n| \to 0.$$

5.5. Die m-te Wurzel und rationale Potenzen

Ähnlich wie schon bei der Quadratwurzel behaupten wir: Für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und $a \geq 0$ gibt es genau eine reelle Zahl $x \geq 0$ mit $x^m = a$, die wir mit $x = \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$ bezeichnen.

Ein Beweis kann durch Adaptierung für jenen im Spezialfall $m = 2$ gewonnen werden, z.B. für die Existenz durch Betrachtung der Menge $M := \{z \in \mathbb{R} \mid z^m \leq a\}$, die sich als nach oben beschränkt herausstellt und ein Supremum $s \geq 0$ besitzt, für welches sich mit ein bisschen Mühe $s^m = a$ nachweisen lässt (siehe z.B. [FK1, §2, 7.1]). Für die Eindeutigkeit nehmen wir $x^m = a = y^m$ mit $x, y > 0$ an und bemerken, dass in der Zerlegung

$$0 = x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=0}^{m-1} x^j y^{m-j-1}$$

der Faktor mit der Summe wegen $x^j y^{m-j-1} > 0$ nicht gleich 0 sein kann und somit $x = y$ erzwingt.

Wir erhalten also eine Abbildung $a \mapsto a^{\frac{1}{m}}$, $[0, \infty[\to [0, \infty[$, die gerade die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^m$, $[0, \infty[\to [0, \infty[$ ist. Wir beachten, dass letztere Funktion streng monoton wachsend ist, daher auch die Wurzelfunktion.

Der Weg zu rationalen Potenzen: Aus der Eindeutigkeit der allgemeineren Wurzel folgt zunächst für $m, n \in \mathbb{N}$ die Formel $(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$, weil jede dieser Zahlen die Eigenschaft $s^{mn} = a$ hat. Weiters erhalten wir zusätzlich für $k \in \mathbb{N}$ auch die Gleichung $(a^m)^{\frac{1}{k}} = (a^{mn})^{\frac{1}{kn}}$, weil die k-te Potenz der Zahlen auf beiden Seiten gleich a^m ist. Diese Relation garantiert nun, dass wir für die rationale Zahl $r = \frac{m}{k} = \frac{mn}{kn}$ die Potenz a^r definieren können, ohne darauf achten zu müssen, ob der Bruch für r vollständig durchgekürzt ist.

Für eine positive rationale Zahl $r = \frac{m}{k}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ definieren wir also

$$a^r := (a^m)^{\frac{1}{k}} \quad \text{und} \quad a^{-r} := \frac{1}{a^r}.$$

Zusätzlich setzen wir noch $a^0 := 1$, dann gelten für $r, s \in \mathbb{Q}$ und $a, b > 0$ die Rechenregeln

$$\boxed{a^{r+s} = a^r a^s, \quad a^{rs} = (a^r)^s, \quad (ab)^r = a^r b^r.}$$

Warum haben wir eigentlich $a^0 := 1$ gesetzt? Es wird durch das folgende Resultat nahegelegt, falls wir uns eine Grenzwertregel in der Form $a^{r_n} \to a^r$ für $r_n \to r$ wünschen.

Satz: Für $a > 0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Beweis: 1. Fall $a > 1$: Wir schreiben $a = 1 + h$ mit $h > 0$. Die Bernoulli-Ungleichung besagt nun zunächst

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{h}{n} = 1 + h$$

und daher auch $(1 + h)^{1/n} \leq 1 + \frac{h}{n}$. Die Monotonie der Wurzelfunktion ergibt zusätzlich die erste Ungleichung in der folgenden Kette

$$1 < (1 + h)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{h}{n} \quad \to 1 \quad (n \to \infty),$$

woraus mit dem Sandwichlemma nun $a^{1/n} = (1 + h)^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt.

2. Fall $a = 1$: Hier ist wegen $a^{1/n}$ nichts zu tun.

3. Fall $0 < a < 1$: Wir betrachten $b := \frac{1}{a} > 1$ und wissen aus dem ersten Fall bereits, dass $b^{1/n} \to 1$ gilt. Daher folgt

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{1} = 1 \quad (n \to \infty).$$

□

Bemerkung: Noch stärker als im eben bewiesenen Satz ist das Resultat

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{5.1}$$

Einen Beweis mittels Methoden aus dem nachfolgenden Kapitel 6 gibt es z.B. in [FK1, §, Beispiel 9.5(b)]. Alternativ **Ü̇Ü̇** kann für $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes eine Abschätzung in der Form $n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$ gefunden werden, die auf $a_n \to 0$ und somit ans Ziel führt.

5.6. Intervallschachtelung und Dezimalbruchentwicklung

Im *Intervallschachtelungsprinzip* ist eine Folge von kompakten Intervallen $[a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ vorgelegt, die zwei Bedingungen erfüllt:

(a) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Intervalle sind ineinander geschachtelt,

und

(b) $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. die Längen der Intervalle bilden eine Nullfolge.

Behauptung: Es gibt genau eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $s \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und überdies gilt $s = \lim a_n = \lim b_n$.

Die Beweisidee ist, ausgehend von $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$ zunächst $s := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zu setzen. Dann ergibt sich leicht $a_n \leq s \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters ist $0 \leq s - a_n \leq b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, was schon mal $s = \lim a_n$ zeigt. Ebenso ist $0 \leq b_n - s \leq b_n - a_n \to 0$, also auch $s = \lim b_n$.

Wir können das obige Prinzip anwenden, um ein Verfahren für die *Dezimalbruchentwicklung* einer beliebig vorgegeben reellen Zahl $x \geq 0$ anzugeben: Zunächst definieren wir den ganzzahligen Anteil $x_0 := [x]$, $Z := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ als Menge der möglichen Ziffern und dann die Ziffer an der ersten Nachkommastelle durch

$$x_1 := \max\{k \in Z \mid x_0 + \frac{k}{10} \leq x\}.$$

Nun gehen wir induktiv vor: Wenn wir die Ziffern $x_1, \ldots, x_n$ bereits bestimmt haben und

$$a_n := x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_n}{10^n}$$

setzen, dann kommt im nächsten Schritt

$$x_{n+1} := \max\{k \in Z \mid a_n + \frac{k}{10^{n+1}} \leq x\}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$a_n \leq x < a_n + \frac{1}{10^n} =: b_n \quad \text{und} \quad b_n - a_n = \frac{1}{10^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

sowie $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Daher erhalten wir durch $[a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung und x ist die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist. Im Rahmen dieser Prozedur ist die Ziffernfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eindeutig und wir schreiben auch

$$x = x_0\,,\, x_1\, x_2 \cdots \quad \text{oder} \quad x = x_0\,.\, x_1\, x_2 \cdots$$

Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n = 0$ für alle $n > N$, dann gilt

$$x = a_N = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_N}{10^N} \in \mathbb{Q}.$$

Bemerkung: Es ist gar nicht schwierig mit Hilfe der Dezimalentwicklung zu argumentieren, dass die Teilmenge $[0, 1[$ von $\mathbb{R}$ niemals durch eine Aufzählung in der Form $[0, 1[= \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschrieben werden kann (siehe z.B. [FK1, §2, 8.4]), in diesem Sinne also *überabzählbar* ist. Anders ausgedrückt, kann es schon gar keine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ geben.

5.7. Uneigentliche Grenzwerte und bestimmt divergente Folgen

Zwar kann die Konvergenz von Folgen auf vielfältige Weise scheitern, aber eine besondere Form der Divergenz einer Folge verdient doch unsere Aufmerksamkeit: Wir nennen die Folge (a_n) *(bestimmt) divergent* gegen ∞ und schreiben $a_n \to \infty$, falls zu jedem $K > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$a_n > K \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt.}$$

Ähnlich definieren wir $a_n \to -\infty$, falls es einen Index gibt, ab dem immer $a_n < -K$ gilt.

- Eine bestimmt divergente Folge ist stets unbeschränkt.

  Die Umkehrung davon gilt aber i.A. nicht, denn z.B. ist die Folge $\big((1 + (-1)^n)n\big)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 4, 0, 8, 0, \ldots, 0, 2n, 0, \ldots)$ zwar unbeschränkt, aber nicht bestimmt divergent.

- Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$a_n \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a_n} \to \infty.$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Zu gegebenem $K > 0$ wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 1/K$ und dann $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $0 < a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Daraus folgt $1/a_n > 1/\varepsilon > K$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $K \in \mathbb{R}$ mit $K > 1/\varepsilon$ und dann $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{a_n} > K$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt $0 < a_n < 1/K < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

6. Konvergenzkriterien für Folgen

In unseren bisherigen Untersuchungen zur Konvergenz von Folgen waren wir eigentlich immer darauf angewiesen, einen möglichen Grenzwert vorab im Wesentlichen erraten zu müssen und anschließend die Konvergenz gegen diesen nachzuweisen. Im Unterschied dazu wollen wir nun Methoden diskutieren, die allenfalls einen Schluss auf die Konvergenz einer Folge erlauben, ohne den Grenzwert bereits zu kennen oder zu erahnen.

6.1. Monotoniekriterium

Behauptung: Ist die Folge (a_n) nach oben beschränkt, d.h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq K$ $(n \in \mathbb{N})$, und *monoton wachsend*, d.h. $a_n \leq a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, dann ist (a_n) konvergent, d.h. es gibt eine (eindeutige) Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

Eine analoge Aussage gilt für nach unten beschränkte monoton fallende Folgen.

Beweis: Wir setzen $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und zeigen $a_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Supremumseigenschaft gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Für jedes $n \geq n_0$ folgt dann wegen der Monotonie $a_{n_0} \leq a_n \leq a$, also insgesamt $|a - a_n| = a - a_n \leq a - a_{n_0} < \varepsilon$. $\square$

Beispiel: Wir betrachten die Folge (a_n) mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$. Dann ist $a_2 = \sqrt{2} > 1 = a_1$ und weiters folgt induktiv

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{1 + a_n} - \sqrt{1 + a_{n-1}} = \frac{(1 + a_n) - (1 + a_{n-1})}{\sqrt{1 + a_n} + \sqrt{1 + a_{n-1}}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{1 + a_n} + \sqrt{1 + a_{n-1}}} \geq 0,$$

also $a_{n+1} \geq a_n$, d.h. (a_n) ist monoton wachsend. Speziell folgt $1 = a_1 \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen ebenfalls induktiv, dass (a_n) nach oben durch 2 beschränkt ist: Es ist $a_1 \leq 2$; angenommen $a_n \leq 2$, so erhalten wir $a_{n+1}^2 = 1 + a_n \leq 2 + a_n \leq 2 + 2 = 4$, somit $a_n \leq 2$.

Nach dem Monotoniekriterium ist (a_n) konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$ und wegen $1 \leq a_n \leq 2$ $(n \in \mathbb{N})$ ist auch $1 \leq a \leq 2$. Wie können wir $a = \lim a_n$ konkret bestimmen?

Ü Als Übungsaufgabe kann zunächst $\sqrt{1 + a_n} \to \sqrt{1 + a}$ gezeigt werden, dann erhalten wir

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{1 + a_n} = \sqrt{1 + a}, \quad \text{d.h. } a^2 = 1 + a$$

und somit $a^2 - a - 1 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, wovon $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ wegen $a \geq 1$ nicht in Frage kommt. Also ist $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

6.2. Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Beweisidee: Wenn $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann liegen alle Folgenglieder im Intervall $[-M, M]$. Zumindest in einer der beiden Intervallhälften $[-M, 0]$ oder $[0, M]$ muss für unendlich viele n gelten, dass a_n darin enthalten ist. Aus diesen wählen wir den ersten Index n_1, halbieren das entsprechende Teilintervall nochmals und fahren auf analoge Art mit Auswahl von Indizes und Intervallhalbierung fort. Es entsteht eine Intervallschachtelung und die entsprechend ausgewählte Teilfolge konvergiert gegen den eindeutigen Punkt, der durch diese Intervallschachtelung fixiert wird. □

Es gibt also in diesem Fall für die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, d.h. $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Ein solcher Punkt a wird als *Häufungswert* der (ursprünglichen) Folge (a_n) bezeichnet.

Beispiel: Die alternierende Folge $((-1)^n)$ ist beschränkt und hat die beiden Häufungswerte -1 und 1, denn die Teilfolge $((-1)^{2k}) = (1, 1, 1, \ldots)$ konvergiert gegen 1 und die Teilfolge $((-1)^{2k+1}) = (-1, -1, -1, \ldots)$ konvergiert gegen -1.

6.3. Cauchy-Kriterium

Behauptung: Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine *Cauchy-Folge* ist, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt für alle $n, m \geq n_\varepsilon$.

Bemerkung: Dies beschreibt den Begriff der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ im Sinne der normierten Vektorräume (oder allgemeiner der metrischen Räume), wie wir ihn im 2. Semester im Rahmen der mehrdimensionalen Analysis verwenden werden.

Beweis: 1) Sei zuerst (a_n) eine konvergente Folge mit $a = \lim a_n$. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Dann können wir für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_\varepsilon$ stets auf

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

schließen, also ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

2) Sei nun (a_n) eine Cauchy-Folge. Wir müssen zeigen, dass ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ gibt.

Wir zeigen zunächst, dass (a_n) beschränkt ist: Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1$ für $m, n \geq N$. Für jedes $n \geq N$ gilt dann die Abschätzung

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Mit $M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_1-1}|, 1 + |a_{n_1}|\}$ gilt daher insgesamt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und wir können $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ setzen. Wir zeigen nun, dass (a_n) konvergent gegen a ist: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Aus der Cauchy-Folgen-Eigenschaft erhalten wir ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ für alle $m, n \geq n_\varepsilon$. Wegen $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$ gibt es insbesondere ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_\varepsilon$ mit $|a - a_{n_k}| < \varepsilon/2$. Für jedes $n \geq n_\varepsilon$ gilt nun (u.a. wegen $n_k \geq k \geq n_\varepsilon$)

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

6.4. Umgebungen, offene und abgeschlossene Teilmengen

Wir führen hier einige Begriffe ein, die sich vor allem in der mehrdimensionalen Analysis als grundlegend erweisen werden, aber auch im Kontext von $\mathbb{R}$ gute Dienste zur Präzisierung der Lage von Punkten und Teilmengen zueinander leisten.

Umgebungen: Für $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir das spezielle Intervall

$$U_\varepsilon(a) :=]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

als *ε-Umgebung* von a. Allgemeiner wird eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ als *Umgebung* des Punktes a bezeichnet, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subseteq U$.

Die Konvergenz einer Folge (a_n) gegen a lässt sich nun so formulieren: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad (n \geq n_\varepsilon)$$

gilt, d.h. alle bis auf endlich viele Folgenglieder a_n liegen in der ε-Umgebung von a. (Dieser Umstand wird auch in der Form „fast alle Folgenglieder liegen in der ε-Umgebung von a“ ausgedrückt.)

Bemerkung: Übrigens lässt sich auch der Begriff des Häufungswertes einer Folge gut mittels Umgebungen charakterisieren, weil es sich ja um Grenzwerte von Teilfolgen handelt, in denen zwar nicht alle, aber doch immer unendlich viele Folgenglieder mitspielen: a ist Häufungswert der Folge (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich oft $a_n \in U_\varepsilon(a)$ gilt.

Offene Teilmengen: Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, falls es zu jedem Punkt $x \in V$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq V$. (Anders ausgedrückt ist also V eine Umgebung für jeden ihrer Punkte.)

Z.B. sind die Intervalle der Form $]c, d[$ und $]-\infty, c[$ auch offene Mengen in diesem Sinne.

Vereinigungen von offenen Mengen sind stets auch wieder offen.

Abgeschlossene Teilmengen: Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ *abgeschlossen*, falls ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

Z.B. ist das Intervall $[c, \infty[$ abgeschlossen in diesem Sinne, weil $\mathbb{R} \setminus [c, \infty[=]-\infty, c[$ offen ist.

Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen sind stets auch wieder abgeschlossen.

Vorsicht: Es gibt natürlich Teilmengen von $\mathbb{R}$, die weder offen noch abgeschlossen sind. Z.B. ist für $a < b$ das halboffene Intervall $I :=]a, b]$ nicht offen, weil I keine Umgebung für $b \in I$ ist, und nicht abgeschlossen, weil $\mathbb{R} \setminus I =]-\infty, a] \cup]b, \infty[$ nicht offen ist (die Menge $\mathbb{R} \setminus I$ ist keine Umgebung für ihren Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus I$).

Charakterisierung von abgeschlossenen Teilmengen durch Folgen: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Für jede Folge (a_n) in A, d.h. $a_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$, mit $a_n \to a$ muss stets auch $a \in A$ sein.

Begründung: Sei zunächst A abgeschlossen und (a_n) eine Folge wie angegeben, aber mit $a \in \mathbb{R} \setminus A$. Wegen der Offenheit von $\mathbb{R} \setminus A$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, also $U_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$, was im Widerspruch zur Konvergenz $a_n \to a$ steht. Ist andererseits A nicht abgeschlossen (Kontraposition), also $\mathbb{R} \setminus A$ nicht offen, dann gibt es einen Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus A$, für den jede Umgebung $U_{1/n}(a)$ einen Punkt $a_n \in A$ enthält. Die Folge (a_n) konvergiert aber laut Konstruktion gegen a, somit ist die Folgenbedingung verletzt.

Kompakte Teilmengen: Wir nennen eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ *kompakt*, wenn gilt: Jede Folge (x_n) in K, d.h. $x_n \in K$ $(n \in \mathbb{N})$, hat einen Häufungswert $x \in K$. D.h. jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge, die gegen einen Punkt in K konvergiert.

Satz von Heine-Borel: Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis: 1) Sei zunächst K beschränkt und abgeschlossen. Ist (x_n) eine Folge in K, dann ist diese auch beschränkt, also gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$. Wegen der Abgeschlossenheit von K muss nun $x \in K$ gelten, also ist insgesamt nachgewiesen, dass K kompakt ist.

2) Sei nun K kompakt. Dann ist K jedenfalls abgeschlossen, denn wir können die obige Charakterisierung durch Folgen verwenden: Ist (x_n) eine Folge in K, die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist x insbesondere auch der einzige Häufungswert von (x_n) und muss somit wegen der Kompaktheit zu K gehören.

Wäre K nach oben unbeschränkt, dann könnten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $x_n \in K$ mit $x_n > n$ finden. Die Folge (x_n) aus K hätte dann aber keinen Häufungswert, was im Widerspruch zur Kompaktheit von K stünde. Analog ergibt sich, dass K nach unten beschränkt sein muss. Also ist K auch beschränkt. □

Beispiele: Die kompakten Intervalle $[a, b]$ sind also auch im obigen Sinne kompakt. Ein Intervall der Form $[c, \infty[$ ist abgeschlossen, aber nicht kompakt. Ein Intervall der Form $[a, b[$ mit $a < b$ ist zwar beschränkt, aber nicht abgeschlossen und daher auch nicht kompakt.

6.5. Limes inferior und Limes superior

Wir betrachten hier eine *beschränkte* Folge reeller Zahlen (a_n). Dann sind auch die beiden durch

$$\beta_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad \text{und} \quad \gamma_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gegebenen Folgen (β_n) und (γ_n) beschränkt. Weil das Infimum für eine Teilmenge nicht kleiner sein kann, gilt $\beta_{n+1} \geq \beta_n$. Ähnlich kann das Supremum für eine Teilmenge nicht größer sein, weshalb stets $\gamma_{n+1} \leq \gamma_n$ gilt. Daher ist (β_n) monoton wachsend, während (γ_n) monoton fallend ist. Nach dem Monotoniekriterium 6.1 existieren daher die beiden Zahlen

$$\liminf a_n := \lim_{n\to\infty} \beta_n \quad \text{und} \quad \limsup a_n := \lim_{n\to\infty} \gamma_n.$$

Wir nennen $\liminf a_n$ den *Limes inferior* und $\limsup a_n$ den *Limes superior* der Folge (a_n).

Folgende **Eigenschaften** lassen sich zeigen (vgl. z.B. [Heu1, 28.3-5]):

(i) $\limsup a_n$ bzw. $\liminf a_n$ ist der *größte bzw. kleinste aller Häufungswerte* der beschränkten Folge (a_n), was auch die Namensgebung erklärt.

(ii) Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und $\liminf a_n = \limsup a_n$ gilt (d.h. die Folge besitzt nur einen Häufungswert).
In diesem Falle gilt $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Die Aussage in (i) folgt auch aus einer typischen **ε-Charakterisierung**, die wir hier zumindest für den Limes superior im Detail angeben:

Ist (a_n) beschränkt und $\gamma \in \mathbb{R}$, so gilt $\gamma = \limsup a_n$ genau dann, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$a_n \geq \gamma + \varepsilon \ \text{ nur für endlich viele } n \text{ gilt} \quad \text{und} \quad a_n > \gamma - \varepsilon \ \text{ für unendlich viele } n \text{ gilt.}$$

Beweis: (a) Sei $\gamma := \limsup a_n$ und $\varepsilon > 0$, dann wissen wir $\gamma = \lim \gamma_n$ mit der monoton fallenden Folge (γ_n) aus der obigen Definition. Mit $S_n := \{a_k \mid k \geq n\}$ ist daher $\gamma \leq \gamma_n = \sup S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus die zweite Bedingung folgt, weil $\gamma - \varepsilon$ für keine der Mengen S_n eine obere Schranke sein kann. Wegen $\gamma = \lim \gamma_n$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq \gamma_n < \gamma + \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$, woraus auch die erste Bedingung folgt.

(b) Nun nehmen wir an, dass die beiden angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Wir übernehmen die Bezeichnung der Mengen S_m ($m \in \mathbb{N}$) aus (a). Aus der zweiten Bedingung und $a_n \in S_m$ für $n \geq m$ folgt $\gamma_m = \sup S_m > \gamma - \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$. Daher ist $\limsup a_n = \lim \gamma_m \geq \gamma$. Wegen der ersten Bedingung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_ε, sodass $a_n < \gamma + \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt. Daraus folgt $\gamma_n \leq \gamma + \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss auch $\limsup a_n = \lim \gamma_n \leq \gamma$ gelten, insgesamt also $\limsup a_n = \gamma$. □

Beispiel: Die Folge (a_n) mit $a_n := (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ hat wegen

$$a_n = \begin{cases} -1 - \frac{1}{2k+1} & \text{für } n = 2k+1 \text{ ungerade,} \\ 1 + \frac{1}{2k} & \text{für } n = 2k \text{ gerade.} \end{cases}$$

die beiden Häufungswerte -1 und 1, somit ist $\liminf a_n = -1$ und $\limsup a_n = 1$. Wir sehen auch unmittelbar, dass für 1 das ε-Kriterium des Limes superior erfüllt ist, weil $1 + \frac{1}{2k} \to 1$ für $k \to \infty$ und $a_n < 0$ für alle ungeraden n gilt.

Ausdehnung auf unbeschränkte Folgen: Für eine *nach unten unbeschränkte* Folge (a_n) ist die anfangs konstruierte Folge (β_n) offensichtlich bestimmt divergent gegen $-\infty$, weshalb wir in diesem Fall

$$\liminf a_n := -\infty$$

setzen.

Ist (a_n) eine *nach oben unbeschränkte* Folge, dann ist die entsprechend konstruierte Folge (γ_n) sicherlich bestimmt divergent gegen ∞ und wir setzen in diesem Fall

$$\limsup a_n := \infty.$$

7. Polynomfunktionen und rationale Funktionen

7.1. Polynomfunktionen

Jede reelle *Polynomfunktion* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch ihre *Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ festgelegt mit der Zuordnungsvorschrift

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n = p(x).$$

Wir legen den *Grad* von p fest als $\max\{k \in \{0, \ldots, n\} \mid a_k \neq 0\}$ bzw. als $-\infty$, wenn $a_k = 0$ für alle k, in welchem Falle p die Nullfunktion bzw. das *Nullpolynom* ist. Wir können also konstante Funktionen (ungleich 0) als Polynomfunktionen vom Grad 0 auffassen.

Koeffizientenvergleich: Ist der Grad von p gleich n und $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ eine weitere Polynomfunktion vom Grad m, dann gilt:

$$p = q \text{ als Funktionen } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad m = n \text{ und } a_j = b_j \quad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Beweis: $\boxed{\Leftarrow}$ ist klar. $\boxed{\Rightarrow}$ zeigen wir so: Die Differenz $p - q$ ist auch eine Polynomfunktion von der Form $r(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k$ mit $k \leq \max\{m, n\}$ und $c_0, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Wegen $p = q$ ist allerdings $r = 0$, daher speziell $c_0 = r(0) = 0$. Also gilt $0 = r(x) = x(c_1 + c_2 x + \ldots + c_k x^{k-1})$, woraus wir für $x \neq 0$ auf $c_1 + c_2 x + \ldots + c_k x^{k-1} = 0$ schließen dürfen. Setzen wir $x_n := 1/n$ ein, so erhalten wir im Limes für $n \to \infty$ die Bedingung $0 = c_1$. Also gilt $0 = r(x) = x(c_2 + c_3 x + \ldots + c_k x^{k-2})$, woraus wir für $x \neq 0$ auf $c_2 + c_3 x + \ldots + c_k x^{k-2} = 0$ schließen dürfen und so geht dieses Spiel weiter, bis wir sukzessive $c_0 = c_1 = \ldots = c_k = 0$ nachgewiesen haben. $\square$

Das Produkt $pq\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Polynomfunktionen p und q ist ebenfalls eine Polynomfunktion, weil wir nach punktweisem Ausmultiplizieren und Sortieren nach Potenzen von x auf die Darstellung

$$p(x)q(x) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \ldots + a_n b_m x^{n+m}$$

kommen. Weiters sehen wir daraus, dass sich der Grad von pq als die Summe der Grade von p und von q ergibt. Wenn wir künstlich Nullen als Koeffizienten $a_j := 0$ für $j > n$ und $b_k := 0$ für $k > m$ hinzufügen, dann können wir folgende Formel für das Produkt angeben

$$p(x)q(x) = \sum_{l=0}^{n+m} c_l\, x^l \quad \text{mit} \quad c_l := \sum_{\substack{0 \leq j,k \leq l,\\ j+k=l}} a_j b_k = \sum_{j=0}^{l} a_j b_{l-j}. \tag{7.1}$$

Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist natürlich auch $\alpha p + \beta q$ eine Polynomfunktion, wobei der Grad höchstens so groß ist wie das Maximum der ursprünglichen Grade.

7.2. Nullstellen und Polynomdivision

Division mit Rest: Sind p_1 und p_2 Polynome und der Grad von p_2 mindestens 1, dann gibt es eindeutige Polynome q und r mit

$$p_1 = q \cdot p_2 + r,$$

wobei der Grad von r kleiner ist als jener von p_2. Wir illustrieren das im folgenden

Beispiel: Für $p_1(x) = -4x^5 + 2x^4 - 14x^3 + 6x^2 - 14x + 10$ und $p_2(x) = 2x^3 + 3x - 1$ können wir zunächst in der höchsten Ordnung Übereinstimmung von $p_1(x)$ mit $p_2(x) \cdot (-2x^2) = -4x^5 - 6x^3 + 2x^2$ erreichen und wir erhalten

$$r_1(x) := p_1(x) - p_2(x) \cdot (-2x^2) = 2x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 14x + 10.$$

Als Nächstes bemerken wir Gleichheit der höchsten Ordnung zwischen $r_1(x)$ und $p_2(x) \cdot x = 2x^4 + 3x^2 - x$ und betrachten

$$r_2(x) := r_1(x) - p_2(x) \cdot x = -8x^3 + x^2 - 13x + 10.$$

Wir sehen, dass die höchste Ordnung von $r_2(x)$ und $p_2(x) \cdot (-4) = -8x^3 - 12x + 4$ übereinstimmen und berechnen

$$r_3(x) := r_2(x) - p_2(x) \cdot (-4) = x^2 - x + 6.$$

Der Grad von $r_3(x)$ ist kleiner als der Grad von p_2 und wir können nun alles zusammensetzen:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (-2x^2) \cdot p_2(x) + r_1(x) = (-2x^2) \cdot p_2(x) + xp_2(x) + r_2(x) \\ &= (-2x^2) \cdot p_2(x) + x \cdot p_2(x) + (-4) \cdot p_2(x) + r_3(x) = \underbrace{(-2x^2 + x - 4)}_{q(x)} \cdot p_2(x) + \underbrace{r_3(x)}_{r(x)}. \end{aligned}$$

Die gesamte Prozedur lässt sich für praktische Zwecke in einem Schema entwickeln:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
-4x^5 & + & 2x^4 & - & 14x^3 & + & 6x^2 & - & 14x & + & 10 & : & (2x^3 + 3x - 1) = -2x^2 + x - 4 \\
-4x^5 & & & - & 6x^3 & + & 2x^2 & & & & & & \\
\hline
 & & 2x^4 & - & 8x^3 & + & 4x^2 & - & 14x & & & & \\
 & & 2x^4 & & & + & 3x^2 & - & x & & & & \\
\hline
 & & & & -8x^3 & + & x^2 & - & 13x & + & 10 & & \\
 & & & & -8x^3 & & & - & 12x & + & 4 & & \\
\hline
 & & & & & & x^2 & - & x & + & 6 & &
\end{array}$$

Nullstellenfaktorisierung: Aus der Polynomdivision können wir folgende Beobachtung für eine Nullstelle λ von p machen: Bei der Division durch p_2 mit $p_2(x) := (x - \lambda)$ ergibt sich

$$p(x) = (x - \lambda) \cdot q(x) + r(x),$$

wobei der Grad des Restes kleiner als jener von $x - \lambda$ sein muss, also kann r höchstens den Grad 0 haben, ist also von der Form $r(x) = r_0$ mit $r_0 \in \mathbb{R}$. Setzen wir $x = \lambda$ ein, so finden wir aus der obigen Gleichung $0 = 0 \cdot q(\lambda) + r_0 = r_0$, also

$$p(x) = (x - \lambda)q(x).$$

Falls λ auch noch eine Nullstelle des Polynoms q ist, dann können wir $q(x) = (x-\lambda)q_1(x)$ mit einem Polynom q_1 schreiben. Wir erhalten in diesem Fall also $p(x) = (x-\lambda)^2 q_1(x)$. Allenfalls geht dieses Spiel nun mit q_1 weiter.

Eine Zahl λ heißt *k-fache Nullstelle* des Polynoms p, falls es ein Polynom q gibt mit

$$p(x) = (x-\lambda)^k q(x) \quad \text{und} \quad q(\lambda) \neq 0.$$

Wir bezeichnen in diesem Fall k auch als die *Vielfachheit* oder *Ordnung* der Nullstelle.

Ein Polynom p vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen: Sind nämlich $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ Nullstellen von p mit der Eigenschaft $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, dann können wir für jedes $j = 1, \ldots, N$ eine Faktorisierung wie oben durchführen und gelangen zu

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_N)q(x),$$

wobei q nicht das Nullpolynom sein kann (weil sonst $p = 0$ wäre, im Widerspruch zu Grad $n \geq 1$). Also hat q einen Grad $m \geq 0$. In der obigen Gleichung steht links ein Polynom vom Grad n und die Summe der Grade für das Produkt auf der rechten Seite ergibt $N + m$, weshalb $N \leq N + m = n$ gelten muss.

7.3. Rationale Funktionen

Hier handelt es sich um Funktionen mit einer Abbildungsvorschrift in der Form

$$x \mapsto \frac{p_1(x)}{p_2(x)},$$

wobei p_1 und p_2 Polynomfunktionen sind. Als Definitionsbereich können wir stets die Menge

$$D := \{x \in \mathbb{R} \mid p_2(x) \neq 0\}$$

angeben. Durch geschickte Polynomdivision kann der Definitionsbereich mitunter noch erweitert werden, wie sich in dem Beispiel mit $p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = x - 1$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ zeigt: Für $x \neq 1$ gilt zunächst

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1.$$

Der äquivalente Ausdruck ganz rechts ist aber auch für $x = 1$ sinnvoll und somit kann die ursprüngliche gegebene rationale Funktion auch auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet werden (und stimmt in diesem Fall sogar mit einer Polynomfunktion überein).

Wir können natürlich stets versuchen, einen gemeinsamen polynomialen Faktor g von p_1 und p_2 zu suchen, d.h. $p_1 = gq_1$ und $p_2 = gq_2$ mit geeigneten Polynomen q_1 und q_2, um eine Reduktion

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{g(x)q_1(x)}{g(x)q_2(x)} = \frac{q_1(x)}{q_2(x)}$$

zu erreichen.

Schließlich ist allenfalls auch eine Polynomdivision $p_1 = qp_2 + r$ brauchbar, um daraus die Darstellung

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p_2(x)}$$

zu gewinnen, in der r einen kleineren Grad hat als p_2.

In dem Beispiel aus 7.2 erhalten wir auf diese Weise

$$\frac{-4x^5 + 2x^4 - 14x^3 + 6x^2 - 14x + 10}{2x^3 + 3x - 1} = -2x^2 + x - 4 + \frac{x^2 - x + 6}{2x^3 + 3x - 1}.$$

8. Exponentialfunktion und Logarithmus

8.1. Eine vorbereitende Intervallschachtelung

Bekanntlich führt die Verzinsung eines Grundkapitals $K_0 > 0$ mit dem Zinssatz x in n Teilintervallen auf den Betrag

$$K_0 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{a_n}$$

und wir sehen, dass dieser für $x > 0$ auch einen Wert größer als K_0 ergibt.

Beim radioaktiven Zerfall von $N_0 \in \mathbb{N}$ Atomen mit der Zerfallsrate $\beta = x/t$ für $t > 0$ in n Teilintervallen wird die Anzahl der nach der Zeit t noch nicht zerfallenen Atome durch $N(t) = N_0(1 - \beta\frac{t}{n})^n$ beschrieben, was im Falle $x > 0$ tatsächlich kleiner als N_0 ist. Wollen wir ausgehend von $N(t)$ „zurückrechnen“, dann finden wir mittels

$$N_0 = N(t) \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}}_{b_n}$$

die ursprüngliche Anzahl an Atomen.

Bei beliebigem festen $x \in \mathbb{R}$ wollen wir „aus technischen Gründen“ durch eine Bedingung $n \geq n_0$ garantieren, dass sowohl a_n als auch b_n positiv ist, was gleichwertig mit $1 \pm \frac{x}{n} > 0$ ist. Für $x \geq 0$ funktioniert das mit $n_0 := 1$, im Falle $x < 0$ nehmen wir $n_0 := [-x] + 1 > -x$.

Wir studieren nun die beiden oben auftretenden Folgen $(a_n)_{n \geq n_0}$ und $(b_n)_{n \geq n_0}$ der Form

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

im Detail und werden sehen, dass $[a_n, b_n]$ $(n \geq n_0)$ eine Intervallschachtelung definiert.

$\boxed{\text{(a)}}$ $a_n \leq a_{n+1}$ und für $x \neq 0$ gilt sogar $a_n < a_{n+1}$.

Wegen $0 < (1+\frac{x}{n+1})/(1+\frac{x}{n}) < 1$ gibt es ein $h \in \mathbb{R}$ mit $-1 < h < 0$, sodass $(1+\frac{x}{n+1})/(1+\frac{x}{n}) =$

$1+h$ gilt, d.h. $h = \frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} - 1$. Mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung finden wir

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)(1+h)^{n+1} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)(1+\overbrace{(n+1)h}^{\frac{n+1+x}{1+\frac{x}{n}}-(n+1)}) \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{n+x+1}{1+\frac{x}{n}} - n - 1\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{n+x+1-n(1+\frac{x}{n})}{1+\frac{x}{n}} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{n+x+1-n-x}{1+\frac{x}{n}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{1}{1+\frac{x}{n}} = 1,
\end{aligned}$$

also folgt $a_{n+1} \geq a_n$. Da die Bernoulli-Ungleichung für $h \neq 0$ sogar strikt $(1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h$ ergibt, erhalten wir für $x \neq 0$ in der ersten Zeile oben $>$ statt $\geq$ und somit sogar die strenge Monotonie $a_{n+1} > a_n$.

$\boxed{\text{(b)}}$ $b_n \geq b_{n+1}$ und für $x \neq 0$ gilt sogar $b_n > b_{n+1}$.

Hier lässt sich zunächst ganz ähnlich wie in (a) argumentieren, dass (für $x \neq 0$) die Folge $\left((1-\frac{x}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton wachsend ist. Daraus folgt dann, dass die Kehrwerte $b_n = 1/(1-\frac{x}{n})^n$ eine (streng) monoton fallende Folge ergeben.

$\boxed{\text{(c)}}$ $a_n \leq b_n$.

Dies folgt direkt aus $\dfrac{a_n}{b_n} = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = \left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$.

$\boxed{\text{(d)}}$ $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Wiederum hilft die Bernoulli-Ungleichung bei der Abschätzung von

$$\begin{aligned}
0 \leq b_n - a_n = b_n \cdot \left(1 - \frac{a_n}{b_n}\right) &= b_n \cdot \Big(1 - \underbrace{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}_{\geq 1 - n\frac{x^2}{n^2}}\Big) \\
&\leq b_n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) = b_n\frac{x^2}{n} \leq b_{n_0}\frac{x^2}{n} \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

8.2. Die Exponentialfunktion

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ legt die Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ $(n \geq n_0)$ aus 8.1 eine eindeutige Zahl fest, die wir mit $\exp(x)$ bezeichnen. Dadurch wird eine Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, deren Werte $\exp(x)$ sich wahlweise als Limes der monoton wachsenden Folge $(a_n) = \left((1+\frac{x}{n})^n\right)$ oder der monoton fallenden Folge $(b_n) = \left((1-\frac{x}{n})^{-n}\right)$ schreiben lassen, d.h.

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}. \tag{8.1}$$

Speziell ist $\exp(0) = 1$ offensichtlich. Weiters ist

$$\exp(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

denn für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist $1 + \frac{x}{n} > 0$, sobald n groß genug ist.

Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (oder Exponentialgesetz):

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{8.2}$$

Beweis: Wir schreiben zunächst mit Hilfe der Definition von exp und der Eigenschaften von Grenzwerten

$$\exp(x+y) - \exp(x)\exp(y) = \lim_{n\to\infty} \Big(\big(\underbrace{1 + \frac{x+y}{n}}_{c} \big)^n - \big(\underbrace{1 + \frac{x}{n}}_{a} \big)^n \big(\underbrace{1 + \frac{y}{n}}_{b} \big)^n \Big)$$

und berechnen

$$d_n := c^n - a^n b^n = c^n - (ab)^n = (c - ab) \sum_{k=1}^{n} c^{n-k} (ab)^{k-1}.$$

Wir beachten $c - ab = 1 + \frac{x+y}{n} - (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{y}{n}) = -\frac{xy}{n^2}$ sowie $|ab| \le (1 + \frac{|x|}{n})(1 + \frac{|y|}{n})$ und

$$|c| \le 1 + \frac{|x+y|}{n} \le 1 + \frac{|x|+|y|}{n} \le 1 + \frac{|x|+|y|}{n} + \frac{|x||y|}{n^2} = \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)\left(1 + \frac{|y|}{n}\right),$$

woraus wir zunächst folgende Abschätzung gewinnen:

$$\begin{aligned} |d_n| &\le \frac{|x||y|}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)\left(1 + \frac{|y|}{n}\right) \right)^{n-k} \left(\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)\left(1 + \frac{|y|}{n}\right) \right)^{k-1} \\ &= \frac{|x||y|}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \big(\underbrace{1 + \frac{|x|}{n}}_{\ge 1} \big)^{n-1} \big(\underbrace{1 + \frac{|y|}{n}}_{\ge 1} \big)^{n-1} \le \frac{|x||y|}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Wir erinnern, dass für jedes $r \in \mathbb{R}$ die definierende Folge $\left((1 + \frac{r}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen $\exp(r)$ strebt. Daher gelten für die Terme in der letzten Summe die Ungleichungen $\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \le \exp(|x|)$ und $\left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^n \le \exp(|y|)$ und die oben begonnene Abschätzung setzt sich fort zu

$$\begin{aligned} |d_n| &\le \frac{|x||y|}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \exp(|x|)\exp(|y|) = \frac{|x||y|}{n^2} \cdot n \exp(|x|)\exp(|y|) \\ &= \exp(|x|)\exp(|y|)\frac{|x||y|}{n} \quad \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Somit folgt $\exp(x+y) - \exp(x)\exp(y) = \lim d_n = 0$. □

Wegen $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$ erhalten wir aus der Funktionalgleichung auch sofort noch die

Folgerung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

8.3. Die Exponentialfunktion als e-Funktion

Wir definieren die *Eulersche Zahl* durch

$$e := \exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Die Exponentialfunktion als Abbildung $x \mapsto e^x$: Ist $m \in \mathbb{N}$, dann folgt durch sukzessive Anwendung Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion unmittelbar

$$e^m = \exp(1)^m = \exp(1)\cdots\exp(1) = \exp(1 + \ldots + 1) = \exp(m).$$

Nun betrachten wir $x = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$e^m = \exp(m) = \exp(nx) = \exp(x + \ldots + x) = \exp(x)\cdots\exp(x) = \exp(x)^n$$

und somit mit Hilfe der n-ten Wurzel

$$\exp(x) = (e^m)^{1/n} = e^{\frac{m}{n}} = e^x.$$

Diese Formel haben wir jetzt für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ hergeleitet, aber für $x < 0$ können wir $x = -m/n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ schreiben und erhalten

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} = \frac{1}{e^{\frac{m}{n}}} = e^{-\frac{m}{n}} = e^x.$$

Insgesamt also wissen wir schon, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ die Formel

$$e^x = \exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

gültig ist. Vor diesem Hintergrund scheint es nicht ganz abwegig, für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nun einfach

$$e^x := \exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

einzuführen, weil dies ja zumindest konsistent mit den Eigenschaften für rationale x ist. Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgt nun auch direkt

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{und} \quad e^x > 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

Weitere Eigenschaften:

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt $\boxed{e^x > 1 + x.}$ (Für $x = 0$ ist $e^0 = 1 = 1 + 0$.)

Im Falle $x \leq -1$ ist $1+x \leq 0 < \exp(x) = e^x$. Wenn $x > -1$ und $x \neq 0$ ist, dann ergibt 8.1, (a) (wegen $n_0 = 1$) für $n \geq 2$ die Ungleichung

$$1 + x = a_1 < a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = e^x$$

(ii) Die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend.

Für $x < y$ ist nämlich $y - x > 0$, daher nach (i) nun $e^{y-x} - 1 > y - x > 0$ und somit

$$e^y - e^x = e^x(\underbrace{e^{y-x} - 1}_{>0}) > 0.$$

(iii) Für $|x| < 1$ ist $|e^x - 1| \leq \dfrac{|x|}{1 - |x|}$.

Für $-1 < x < 1$ ergibt die Monotonie in 8.1, (b) $\big($wegen $n_0 = 1\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $e^x \leq (1 - \frac{x}{n})^{-n}$, speziell für $n = 1$ also

$$e^x - 1 \leq (1-x)^{-1} - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-(1-x)}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Für $0 \leq x < 1$ dürfen wir hierin x durch $|x|$ ersetzen und sind fertig. Im Falle $-1 < x < 0$ verwenden wir $e^x > 1 + x$ gemäß (i) und erhalten daraus und wegen $1 - |x| < 1$

$$|e^x - 1| = 1 - e^x < -x = |x| < \frac{|x|}{1-|x|}.$$

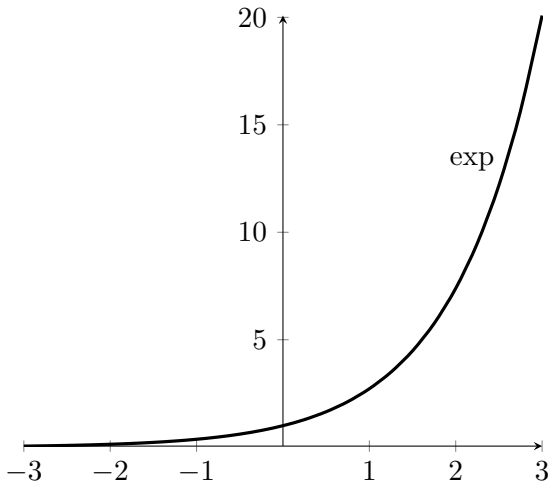
(iv) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 4n^2$ folgt $e^x > x^n$.

Für $\sqrt{x} > 2n$ ist $\frac{x}{2n} > \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ und daher wieder mit der strengen Monotonie nach 8.1, (a) nun

$$e^x > \left(1 + \frac{x}{2n}\right)^{2n} > \left(1 + \sqrt{x}\right)^{2n} > \left(\sqrt{x}\right)^{2n} = x^{\frac{2n}{2}} = x^n.$$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} e^n = \infty$.

Nach (i) gilt $e^n > 1 + n$ und somit ist $e^n \to \infty$ klar. Aus 5.7 und $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$ folgt nun $e^{-n} \to 0$ (ohne Rückgriff auf 5.7 auch mittels $0 \leq e^{-n} < \frac{1}{1+n} \to 0$).



8.4. Der (natürliche) Logarithmus

Wie wir in (8.3) und 8.3(ii) gesehen haben, hat die Funktion exp nur positive Werte und ist streng monoton wachsend. Daher ist exp als Abbildung $\mathbb{R} \to]0, \infty[$ injektiv und wir behaupten, dass sie mit dieser Zielmenge auch surjektiv ist: Zu jedem $y > 0$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $e^a = y$.

Beweis: Die Menge $A := \{x \in \mathbb{R} \mid e^x < y\}$ ist nämlich wegen 8.3(v) nicht leer und dank 8.3(i) auch nach oben beschränkt, weil für $x \in A$ somit $x \leq e^x - 1 < y - 1$ gilt.

Wir setzen $a := \sup A$ und müssen noch zeigen, dass $e^a = y$ gilt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in A$ mit $a - \frac{1}{n} < x_n \leq a$. Nach der Funktionalgleichung ist $e^{a \pm \frac{1}{n}} = e^a e^{\pm \frac{1}{n}}$ und 8.3(iii) mit $n \geq 2$ besagt $\left|e^{\pm 1/n} - 1\right| \leq \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$, also $e^{\pm 1/n} \to 1$ und weiters $e^{a \pm \frac{1}{n}} \to e^a$ für $n \to \infty$.

Beachten wir die strikte Monotonie von exp sowie $x_n \in A$ und $a + \frac{1}{n} \notin A$, so erhalten wir die Ungleichungskette

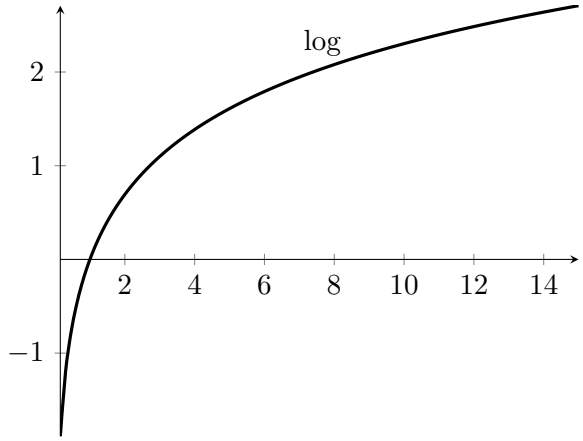
$$e^{a - \frac{1}{n}} < e^{x_n} < y \leq e^{a + \frac{1}{n}},$$

wobei die äußersten Folgenglieder für $n \to \infty$ gegen e^a streben. Nach dem Sandwichlemma aus 5.4 folgt nun $e^a \leq y \leq e^a$, also tatsächlich $y = e^a$. □

Insgesamt ist also $\exp\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ streng monoton wachsend und bijektiv, daher ist auch die Umkehrfunktion

$$\log\colon]0, \infty[\to \mathbb{R} \quad \text{streng monoton wachsend und bijektiv.}$$

Diese Funktion heißt *natürlicher Logarithmus* und wird auch oft mit ln statt log bezeichnet.



Eigenschaften des Logarithmus: Von den folgenden Aussagen und Rechenregeln lassen sich (i)-(vi) als Ü direkt aus den Eigenschaften von exp bzw. von log als ihrer Umkehrfunktion begründen:

(i) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ gilt $e^{\log(y)} = y$ und $\log(e^x) = x$;

(ii) $\log(1) = 0$ und $\log(e) = 1$;

(iii) für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \quad \text{und} \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b);$$

(iv) für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\log(x^n) = n\log(x)$;

(v) für $x > -1$, $x \neq 0$ gilt $\log(1+x) < x$;

(vi) für beliebig vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass $c > 1/n$ garantiert ist, gilt

$$\log(x) < \frac{x}{n} < cx \quad \text{für alle } x > 4n^2;$$

qualitativ ausgedrückt heißt dies, dass der Logarithmus für große x schwächer wächst als jede lineare Funktion.

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \log n = \infty$ und $\lim\limits_{2\leq n\to\infty} \dfrac{1}{\log n} = 0$

Die zweite Aussage folgt mit 5.7 wegen $\log n > 0$ für $n \geq 2$ direkt aus der ersten. Um die erste Aussage zu zeigen, sei $K > 0$ beliebig vorgegeben. Wir können ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen mit $n_0 > e^K$ (Archimedische Eigenschaft), dann gilt für alle $n \geq n_0$ wegen der Monotonie von log stets $\log n \geq \log n_0 > \log e^K = K$.

8.5. Allgemeine Potenzfunktion

Für eine rationale Potenz $y \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ haben wir x^y in 5.5 bereits definiert. Wir behaupten nun, dass in diesem Falle die Formel

$$x^y = e^{y\log(x)}$$

eine gleichwertige Alternative wäre: Für $y = 0$ ist nichts zu zeigen und, falls $y < 0$ ist, können wir die Frage mittels $y\log(x) = -y\log(1/x)$ auf die Situation mit $y > 0$ zurückspielen. Ist $y = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, dann berechnen wir

$$n\log\left(x^y\right) = n\log\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = n\log\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = m\cdot n\log\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = m\log\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = m\log(x),$$

woraus $\log(x^y) = y\log(x)$ folgt und daher $x^y = e^{y\log(x)}$.

Somit ist die Festlegung

$$\boxed{x^y := e^{y\log(x)}}$$

für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ konsistent und wir erhalten mühelos auch die folgenden grundlegenden Eigenschaften: Für $x, y, r, s \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gilt $x^0 = 1$ sowie

$$(xy)^r = x^r y^r, \quad (x^r)^s = x^{rs}, \quad x^{r+s} = x^r x^s \quad \text{und} \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}.$$

Behauptung: Ist $x > 0$ und (a_n) eine Nullfolge, dann gilt $x^{a_n} \to 1$.

Beweis: Wegen $a_n \to 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| < \frac{1}{2|\log x|}$ gilt für alle $n \geq n_0$. Mit Hilfe der Eigenschaft 8.3(iii) erhalten wir nun für jedes $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$|x^{a_n} - 1| = \left|e^{a_n \log x} - 1\right| \leq \frac{|a_n \log x|}{1 - |a_n \log x|} \leq \frac{|a_n||\log x|}{1 - \frac{1}{2}} = 2|\log x||a_n|,$$

wobei der Ausdruck ganz rechts für $n \to \infty$ gegen 0 geht. □

Zehnerlogarithmus: Als Spezialfall ist die Funktion $x \mapsto 10^x = e^{x \log 10}$ streng monoton wachsend und bijektiv als Abbildung $\mathbb{R} \to]0, \infty[$. Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir mit $\log_{10} \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ und nennen sie den *Zehnerlogarithmus*. Als Übungsaufgabe ergibt sich leicht die Umrechnungsformel Ü

$$\log_{10}(x) = \frac{\log(x)}{\log(10)} \quad (x > 0).$$

9. Trigonometrische Funktionen

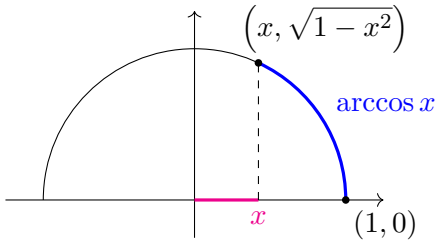
9.1. Bogenlänge, π, Arcuskosinus und Kosinus

Wir werden hier den Begriff der Bogenlänge entlang von Teilstücken des Einheitskreises

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

in der Ebene auf „naive“ Weise verwenden — eine allgemeinere Präzisierung des Begriffes der Länge von Kurvenstücken erfolgt im zweiten Semester. Die Bogenlänge des oberen Halbkreises $\{(x, y) \in S^1 \mid y \geq 0\}$ des Einheitskreises bezeichnen wir mit π.

Für $-1 \leq x \leq 1$ liegen die Punkte $(x, \sqrt{1 - x^2})$ auf dem oberen Halbkreis und wir bezeichnen die Bogenlänge vom Ausgangspunkt $(1, 0)$ entlang des Kreises bis zum Punkt $(x, \sqrt{1 - x^2})$ mit $\arccos x$ und nennen dies den *Arcuskosinus* von x.



Offensichtlich ist $\arccos 1 = 0$ (Endpunkt $(1, 0)$ gleich dem Ausgangspunkt) und $\arccos(-1) = \pi$ (voller Halbkreisbogen von $(1, 0)$ bis $(-1, 0)$) und die Werte $\arccos x$ für $x \in]-1, 1[$ liegen allesamt dazwischen und fallen, wenn x größer wird (weil wir jeweils laut Vereinbarung den Halbkreisbogen bei $(1, 0)$ beginnend bis nach $(x, \sqrt{1 - x^2})$ durchmessen). Wir haben somit

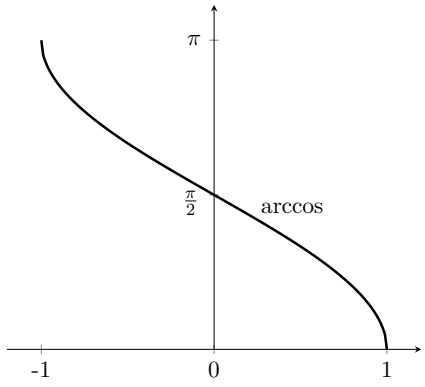
$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

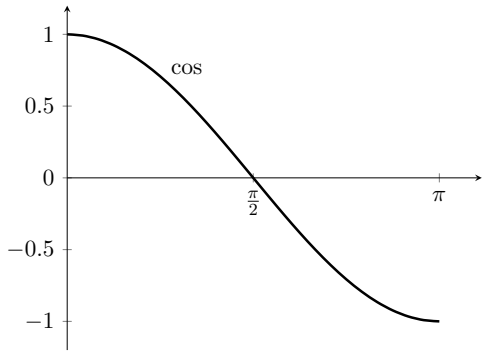
als streng monoton fallende (daher injektive) und surjektive[1] Funktion erhalten. Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir als *Kosinusfunktion*

$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1],$$

die somit ebenfalls streng fallend und bijektiv ist. Speziell ist $\cos 0 = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (aus Symmetriegründen) und $\cos(\pi) = -1$.

[1] Wir haben die Surjektivität nur plausibel gemacht (weil für variierendes $x \in [-1, 1]$ jede Bogenlänge zwischen 0 und π auftreten sollte) und nicht bewiesen; dies gelingt aber mittels Stetigkeit und Zwischenwertsatz (vgl. Teil C).





9.2. Sinus und Kosinus als 2π-periodische Funktionen

Für $x \in [-1, 1]$ gilt $x = \cos\varphi$ mit einem eindeutigen Winkel $\varphi \in [0, \pi]$. Die Größe[2]

$$\sin\varphi := \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - x^2}$$

entspricht dann gerade der zweiten Koordinate des Punktes $(x, \sqrt{1 - x^2}) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ am Einheitskreis, was sich auch in der Relation

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

widerspiegelt. Die Zuordnung $\varphi \mapsto \sin\varphi$ definiert die *Sinusfunktion*. Speziell ergeben sich daraus auch die Werte $\sin 0 = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\sin\pi = 0$ sowie die stets gültigen Schranken

$$-1 \leq \cos\varphi \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \sin\varphi \leq 1.$$

Aus Gründen der Symmetrie im oberen Halbkreis erhalten wir übrigens auch

$$\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi \quad \text{und} \quad \sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi.$$

Wir können den unteren Halbkreis als Spiegelbild des oberen Halbkreises ansehen und entsprechend für Winkelwerte $\psi \in]-\pi, 0[$ nun einfach $\cos(\psi) := \cos(-\psi)$ und $\sin(\psi) := -\sin(-\psi)$ ansetzen.

Eine komplette Umrundung des Einheitskreises entspricht der Bogenlänge 2π (doppelter Halbkreisbogen) und gelangt ausgehend von $(1, 0)$ wieder zurück an ebendiesen Punkt, von wo aus sich alles wiederholt. Wir können das im Winkelmaß so ausdrücken, dass wir allgemein für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ die Funktionen wie folgt auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen:

$$\cos(\varphi + 2k\pi) := \cos\varphi \quad \text{und} \quad \sin(\varphi + 2k\pi) := \sin\varphi.$$

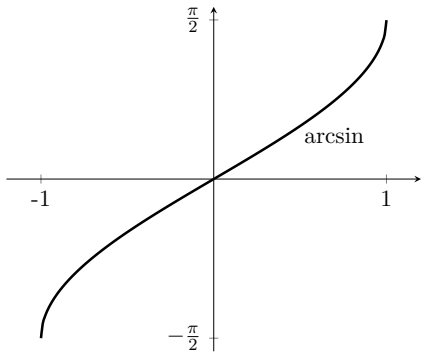
Hierbei entsprechen die Winkel $2n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$ einer n-fachen Umrundung gegen den Uhrzeigersinn und die Winkel $-2n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$ einer n-fachen Umrundung im Uhrzeigersinn.

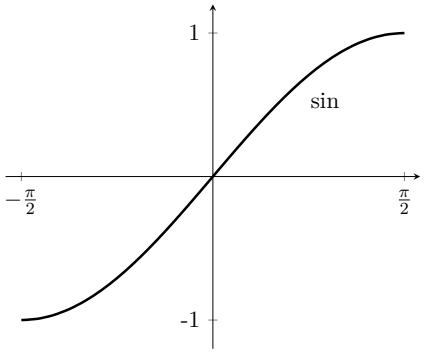
[2] Wir schreiben f^2 für die Funktion $x \mapsto f(x)^2$ und somit auch oft $f^2(x)$ statt $f(x)^2$.

Betrachten wir die Einschränkung des Sinus auf das Winkelintervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, das geometrisch dem rechten Halbkreisbogen $\{(x, y) \in S^1 \mid x \geq 0\}$ entspricht, so erhalten wir eine vom Wert $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ bis zum Wert $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ streng wachsende Funktion, deren Umkehrfunktion

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

der streng wachsende *Arcussinus* ist. Geometrisch ist für $0 \leq y \leq 1$ der Wert $\varphi := \arcsin y$ gerade die Länge des Kreisbogens von $(1, 0)$ nach $(\sqrt{1-y^2}, y)$, denn mit $y = \sin\varphi$ und $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ erhalten wir $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2(\varphi)} = \cos\varphi$.





9.3. Weitere Eigenschaften der Winkelfunktionen

Aus den Symmetrieeigenschaften bei Spiegelung des Einheitskreises an der x-Achse erhalten wir die Relationen

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \quad \text{und} \quad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi,$$

aus jenen bei Spiegelung am Ursprung die Formeln

$$\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi \quad \text{und} \quad \sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$$

und Spiegelung an der y-Achse liefert

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi.$$

Additionstheoreme: Für beliebige $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gelten die Formel

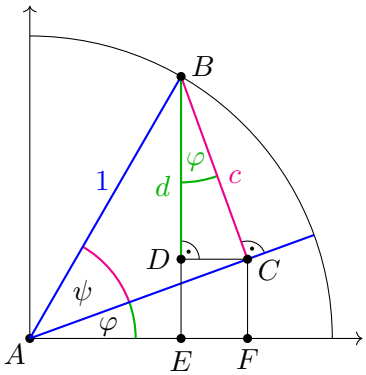
$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \tag{9.1}$$

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi. \tag{9.2}$$

Der Spezialfall mittels $\varphi = \psi$ darin führt zusammen mit $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ auf die sogenannten Halbwinkelformeln

$$\cos(2\varphi) = 1 - 2\sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 \quad \text{und} \quad \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi \tag{9.3}$$

Ü Als Übungsaufgabe können Sie mit Hilfe der folgenden Skizze einen elementargeometrischen Beweis der Additionstheoreme mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken nachvollziehen:



Wir sehen $c = \sin\psi$, $\overline{AC} = \cos\psi$, $\overline{AF} = \overline{AC} \cdot \cos\varphi = \cos\psi \cdot \cos\varphi$ und $\overline{DC} = c \cdot \sin\varphi = \sin\psi \cdot \sin\varphi$, daher folgt

$$\cos(\varphi+\psi) = \overline{AE} = \overline{AF} - \overline{DC} = \cos\psi \cdot \cos\varphi - \sin\psi \cdot \sin\varphi.$$

Weiters gilt $d = c \cdot \cos\varphi = \sin\psi \cdot \cos\varphi$ und $\overline{DE} = \overline{CF} = \overline{AC} \cdot \sin\varphi = \cos\psi \cdot \sin\varphi$ und somit

$$\sin(\varphi+\psi) = \overline{BE} = d + \overline{DE} = \sin\psi \cdot \cos\varphi + \cos\psi \cdot \sin\varphi.$$

Abschließend erwähnen wir noch zwei grundlegende Ungleichungen:

$$|\sin\varphi| \leq |\varphi|, \tag{9.4}$$

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} \leq \cos\varphi \leq 1. \tag{9.5}$$

Die erste Ungleichung (9.4) ist aus dem Vergleich einer Sehne (mit Länge $|\sin\varphi|$) mit dem entsprechenden Kreisbogen (mit Länge $|\varphi|$) durch dieselben Kreispunkte unmittelbar plausibel. Die zweite Ungleichung (9.5) folgt dann aus der ersten mit Hilfe der ersten Halbwinkelformel in (9.3) wegen $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \leq 2\frac{\varphi^2}{4} = \frac{\varphi^2}{2}$.

9.4. Tangens und Arcustangens

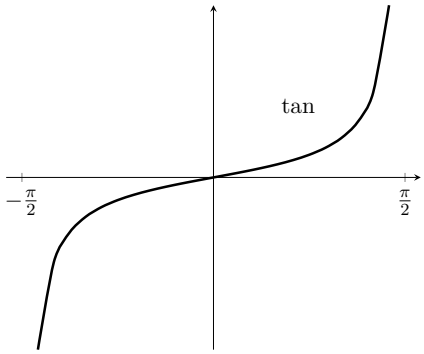
Wir definieren den *Tangens* $\tan\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ durch

$$\tan\varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

und erhalten für $\varphi, \psi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mit $\varphi < \psi$ aus den Additionstheoremen Ü

$$\tan\psi - \tan\varphi = \frac{\sin(\psi-\varphi)}{\cos\varphi\cos\psi} > 0,$$

woraus sofort folgt, dass tan streng monoton wachsend ist. Weiters ist $\tan(-\varphi) = -\tan\varphi$ (wegen $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ und $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$), $\tan 0 = 0$ und $\tan\varphi > 0$ für $0 < \varphi < \pi/2$.

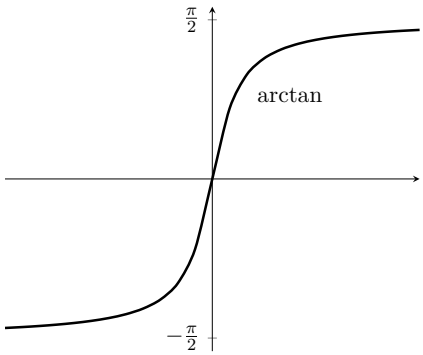


Der Funktionsgraph legt auch nahe, dass tan surjektiv ist, was mit Methoden aus Teil C auch sehr leicht nachzuprüfen ist. (Die uneigentlichen Grenzwerte von $\tan\varphi$ sind $-\infty$ beim linken Randpunkt und ∞ beim rechten Randpunkt. Außerdem ist tan stetig auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, sodass der Zwischenwertsatz Anwendung finden kann, um zu argumentieren, dass jede Zahl $y \in \mathbb{R}$ in der Bildmenge von tan liegt.)

Die Umkehrfunktion ist der streng monoton wachsende *Arcustangens*

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

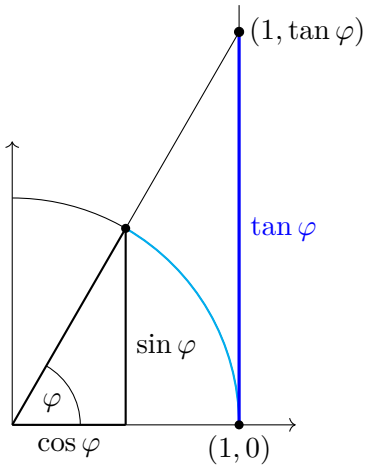
mit den Eigenschaften $\arctan(-x) = -\arctan x$, $\arctan 0 = 0$ sowie $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (beachte $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$ aus Symmetriegründen im Viertelkreis von $(1,0)$ nach $(0,1)$). Als Ü lässt sich übrigens aus der Betrachtung des gleichseitigen Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(\cos\frac{\pi}{6}, -\sin\frac{\pi}{6})$ und $(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6})$ auch der Funktionswert $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ ermitteln.



Eine grundlegende Ungleichung für den Tangens lautet

$$\frac{\tan\varphi}{\varphi} \geq 1 \qquad (0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}) \tag{9.6}$$

und besagt geometrisch, dass der Tangentenabschnitt zwischen $(1,0)$ und $(1, \tan\varphi)$ länger ist als der Kreisbogen von $(1,0)$ nach $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. (Eine ausführlichere Begründung dafür findet sich in [FK1, §3, 8.7].)



Wir können den Tangens mit derselben Formel $\tan\varphi := \sin\varphi/\cos\varphi$ definieren für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\cos\varphi \neq 0$, das sind also die Winkel $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Diese Fortsetzung ist dann

eine π-periodische Funktion, denn wir erhalten

$$\tan(\varphi + \pi) = \frac{\sin(\varphi + \pi)}{\cos(\varphi + \pi)} = \frac{-\sin\varphi}{-\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi.$$

Der Kehrwert des Tangens wird *Kotangens* genannt und ist z.B. im Bereich $0 < \varphi < \pi$ definiert durch

$$\cot\varphi := \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

10. Exponential- und Polynomfunktionen im Komplexen

10.1. Komplexe Exponentialfunktion

Wenn wir an die Polarkoordinatendarstellung von komplexen Zahlen zurückdenken, so haben wir für zwei Zahlen am Einheitskreis

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

die Darstellungen $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi =: f(\varphi)$ und $\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi =: f(\psi)$ und die Multiplikation ergab

$$f(\varphi)f(\psi) = f(\varphi + \psi),$$

was frappierend ähnlich zur Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist. Suchen wir eine Ausdehnung $E\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. $E(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$, so werden wir von E die Gültigkeit der Funktionalgleichung

$$E(z)E(w) = E(z + w) \qquad \text{für beliebige } z, w \in \mathbb{C}$$

erwarten. Speziell ergäbe sich daraus mit $z = x + \mathrm{i}y$ die Bedingung

$$E(x + \mathrm{i}y) = E(x)E(\mathrm{i}y) = e^x E(\mathrm{i}y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Wir sehen, dass wir mit $E(\mathrm{i}y) = f(y)$ eine Lösung hätten, d.h. also $E(x + \mathrm{i}y) = e^x f(y)$, und definieren nun die *komplexe Exponentialfunktion* durch

$$\exp(z) = e^z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \qquad \text{für } z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}.$$

Eigenschaften: (Beweis in allen Fällen als einfache Ü oder klar aus der Definition.)

(i) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\boxed{e^z \cdot e^w = e^{z+w},}$

(ii) für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $\boxed{e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y,}$

(iii) $\{e^{\mathrm{i}t} \mid t \in \mathbb{R}\} = S^1$,

(iv) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$,

(v) $e^z = e^w \quad \Longleftrightarrow \quad$ es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = w + 2\pi\mathrm{i}k$,

(vi) ist $z \neq 0$ und $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r > 0$, dann folgt $e^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{z}{|z|}$ und $r = |z|$.

Während in (vi) die Zahl r eindeutig ist, gilt dies für den Winkel φ nicht, wie wir aus (v) sehen. Falls wir aber zusätzlich $-\pi < \varphi \leq \pi$ vereinbaren, dann wird φ eindeutig und heißt das *Argument* von z; wir schreiben dann auch $\varphi = \arg z$.

10.2. Polynome mit komplexen Koeffizienten und Variablen

Wir betrachten hier Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $z \mapsto p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ mit Konstanten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $z = x + \mathrm{i}y$. Für diese komplexen Polynomfunktionen gilt unverändert die Aussage über den Koeffizientenvergleich, d.h. eine solche Funktion ist eindeutig durch ihre Koeffizienten festgelegt. Ebenso wird der Grad von p analog zum reellen Fall definiert.

Eine wesentliche Frage, nämlich die nach der Existenz von Nullstellen, ist für Polynome im Komplexen viel besser zu beantworten als im Reellen, denn es gilt der

Fundamentalsatz der Algebra:

Ist p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, dann besitzt p jedenfalls Nullstellen in $\mathbb{C}$. Es gibt (nicht notwendig verschiedene) Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $p(z)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$p(z) = a_n(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n).$$

(Einen Beweis davon könnten wir grundsätzlich im dritten Semester dieses VO-Zyklus mit Hilfe von Methoden aus der komplexen Analysis geben.)

Spezialfall mit reellen Koeffizienten: Falls $a_k \in \mathbb{R}$ für alle Koeffizienten des Polynoms p gilt und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, dann ist auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von p.

Zum Beweis müssen wir ja nur bemerken, dass $\overline{a_k} = a_k$ gilt und daher

$$p(\overline{\lambda}) = a_0 + a_1\overline{\lambda} + \ldots a_n\overline{\lambda}^n = \overline{a_0 + a_1\lambda + \ldots a_n\lambda^n} = \overline{p(\lambda)} = 0.$$

Beispiel: Das Polynom $p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ hat die Nullstelle $1 + \mathrm{i}$, wie sich unter Beachtung von $(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}$ und $(1+\mathrm{i})^3 = (1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^2 = (1+\mathrm{i})2\mathrm{i} = -2 + 2\mathrm{i}$ sehr rasch verifizieren lässt:

$$(1+\mathrm{i})^3 - 3(1+\mathrm{i})^2 + 4(1+\mathrm{i}) - 2 = -2 + 2\mathrm{i} - 3 \cdot 2\mathrm{i} + 4 + 4\mathrm{i} - 2 = 0.$$

Weil p reelle Koeffizienten hat, muss auch $1 - \mathrm{i}$ eine Nullstelle sein. Somit enthält $p(z)$ auf jeden Fall das quadratische Polynom $(z - 1 - \mathrm{i})(z - 1 + \mathrm{i}) = z^2 - 2z + 2$ als Faktor und Polynomdivision $(z^3 - 3z^2 + 4z - 2) : (z^2 - 2z + 2)$ würde uns auch den restlichen Faktor vom Grad 1 enthüllen und somit die dritte Nullstelle. Alternativ können wir aber auch schließen, dass eine dritte Nullstelle λ von p reell sein muss, weil ja auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle sein muss, p aber nur Grad 3 hat. Falls $\lambda \in \mathbb{Z}$ ist, muss es ein Teiler[1] des ganzzahligen Koeffizienten

[1] Dies folgt immer im Falle $a_n = 1$ und ganzzahligen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aus der Zerlegung $p(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$, weil demnach $a_0 = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ gelten muss.

$a_0 = -2$ sein, was nur die Möglichkeiten ± 1 übrig lässt. Und in der Tat ist $\lambda = 1$ die dritte Nullstelle, denn $p(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$. Also haben wir insgesamt

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = p(z) = (z-1)(z-1-\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i}).$$

10.3. Die komplexen Einheitswurzeln

Während wir für reelle x die Gleichungen $x^n = 1$ für ungerades $n \in \mathbb{N}$ nur die Lösung $x = 1$ und für gerades $n \in \mathbb{N}$ nur die Lösungen $x = \pm 1$ hat, sieht die Sache weit interessanter aus, wenn es um die komplexen Nullstellen des Polynoms $z^n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$ geht.

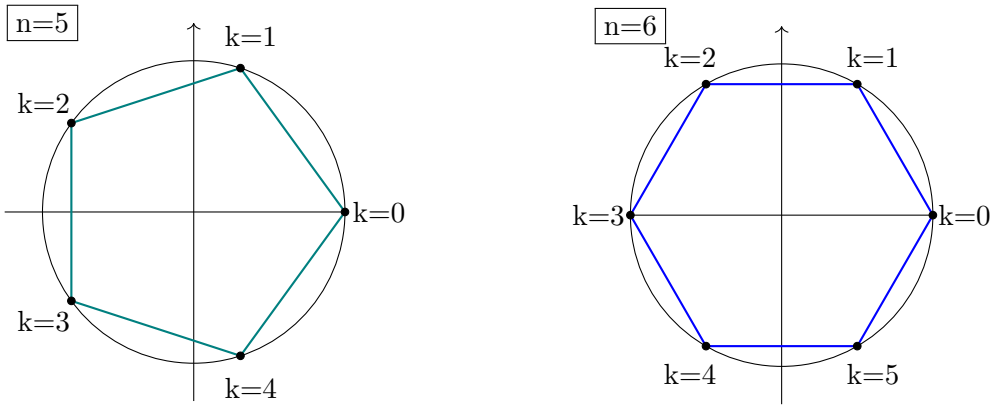
Wir können direkt verifizieren, dass wir für $z^n - 1$ die n verschiedenen Nullstellen

$$w_k := e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n}} \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

haben, denn

$$w_k^n = e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n} \cdot n} = e^{2\pi \mathrm{i} k} = \cos(2\pi k) + \mathrm{i}\sin(2\pi k) = 1 + \mathrm{i}0 = 1.$$

Natürlich ist $w_0 = 1$. Die Punkte $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ liegen am Einheitskreis S^1 und bilden gleichzeitig die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Eckes, weil die entsprechenden Sehnen vom Ursprung aus gesehen stets denselben Winkel $2\pi/n$ einschließen.



***n*-te Wurzeln aus allgemeinen Zahlen $c \neq 0$:** Wenn wir die Gleichung $z^n = c$ lösen wollen, dann brauchen wir nur die Polarkoordinatendarstellung von $c = re^{\mathrm{i}\varphi}$ zu bemühen, $c_0 = r^{1/n} e^{\mathrm{i}\varphi/n}$ zu setzen und erhalten die Lösungen in der Form $z_k := c_0 w_k$, d.h. also

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\mathrm{i}\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

11. Reihen

11.1. Grundbegriffe

Wenn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge ist, dann wollen wir versuchen, der unendlichen Summe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ einen Sinn zu geben. Dazu bilden wir zunächst die *Folge der Partialsummen*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und nennen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die *Reihe* mit den *Gliedern* a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$.

Falls die Partialsummenfolge (s_n) konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ ist, d.h. $a = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ gilt, dann schreiben wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$$

und nennen die Reihe *konvergent* mit *Summe* a. Andernfalls nennen wir die Reihe *divergent*.

Vorsicht: Die Notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ oder $\sum a_k$ für eine Reihe verwenden wir typischer Weise auch unabhängig von ihrer Konvergenz oder Divergenz.

Wir betrachten oft auch Reihen $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$, deren Gliederfolge erst ab einem Index $N \in \mathbb{N}$ beginnt, d.h. die Partialsummen lauten dann $s_n := \sum\limits_{k=N}^{n} a_k$ für $n \geq N$.

Beispiele:

1) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ betrachten wir die *geometrische Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Diese Reihe ist konvergent, denn die geometrische Summenformel (2.2) ergibt für die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

und wegen $q^{n+1} \to 0$ gilt $s_n \to \frac{1}{1-q}$ für $n \to \infty$. Also erhalten wir in diesem Fall

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

Bemerkung: Für $|q| \geq 1$ ist die entsprechende Reihe divergent. (Dies folgt aus dem „Sätzchen“ weiter unten, weil die Reihenglieder q^k in dem Fall wegen $|q|^k \geq 1$ keine Nullfolge bilden.)

2) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent, denn wir können $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ schreiben und erhalten

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \to 1 \quad (n \to \infty),$$

d.h. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

3) Ü $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent. Der konkrete Wert der Summe wird sich allerdings erst viel später als „Nebenprodukt“ einer Fourierreihenanalyse in (21.9) ergeben.

4) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ ist divergent, denn es ist $s_{2m+1} = 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 = 0$ und $s_{2m} = 1$, somit die Partialsummenfolge (s_n) nicht konvergent.

5) Die *harmonische Reihe* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, weil sich ihre Partialsummenfolge (s_n) als unbeschränkt erweist und somit nicht konvergent sein kann (vgl. Eigenschaft (iv) in 5.4):

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)}_{>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{4 \cdot \frac{1}{8}}_{1/2} + \ldots + \underbrace{2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}}_{1/2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Zwei Folgerungen aus den Eigenschaften konvergenter Folgen:

(i) Sind $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=N}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen mit Summen $\sum_{k=N}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=N}^{\infty} b_k = b$, dann ist für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergent mit Summe $\alpha a + \beta b$.

(ii) Abänderung von endlich vielen Gliedern einer Reihe ändert nicht deren Konvergenzverhalten, d.h. ob die Reihe konvergent oder divergent ist, sehr wohl aber die Summe im Falle der Konvergenz.

„Sätzchen“: Wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist, dann muss die Folge der Glieder $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge sein.

„Beweischen“: Sei a die Summe der Reihe und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|a - s_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Für jedes $n \geq n_\varepsilon + 1$ folgt somit

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - a + a - s_{n-1}| \leq |s_n - a| + |a - s_{n-1}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Daher gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. $\square$

Vorsicht: Wie das obige Beispiel 5) der harmonischen Reihe zeigt, kann i.A. die Aussage des Sätzchens nicht umgekehrt werden, denn $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist zwar offensichtlich eine Nullfolge, aber die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergent.

Wir merken uns daher: (a) Aus der Eigenschaft von (a_k) eine Nullfolge zu sein können wir i.A. nicht auf die Konvergenz der Reihe $\sum a_k$ schließen.

(b) Allerdings dürfen wir auf die Divergenz von $\sum a_k$ schließen, falls die Glieder (a_k) keine Nullfolge bilden. Dies wäre im obigen Beispiel 4) anwendbar gewesen.

11.2. Erste Konvergenzkriterien und absolute Konvergenz

Reihen mit nichtnegativen Gliedern: Sei $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum a_k$, dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{ist konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{ist nach oben beschränkt.}$$

Beweis: Ist (s_n) konvergent, dann natürlich auch beschränkt (Eigenschaft (iv) in 5.4). Die Partialsummenfolge ist wegen $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ monoton wachsend. Somit folgt mit dem Monotoniekriterium 6.1 aus der Beschränktheit auch die Konvergenz. □

Cauchy-Kriterium für Reihen: Die Reihe $\sum a_k$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n > m \geq n_\varepsilon.$$

Beweis: Wir müssen nur $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ beachten und das Cauchy-Kriterium 6.3 auf die Partialsummenfolge (s_n) anwenden. □

Definition:

Eine Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Majorantenkriterium: (i) Gilt $|a_k| \leq b_k$ für $k \geq N$ und ist $\sum b_k$ konvergent, dann folgt die absolute Konvergenz von $\sum a_k$, d.h. $\sum |a_k|$ ist konvergent. Die Reihe $\sum b_k$ ist in diesem Fall eine *konvergente Majorante* für die Reihe $\sum a_k$.

(ii) Aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum a_k$ folgt die Konvergenz und $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Beweis: (ii) folgt unmittelbar aus (i) wegen $a_k \leq |a_k|$ und $|\sum_{k=0}^{n} a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ für alle n.

(i): Wegen $b_k \geq |a_k|$ ist natürlich $b_k \geq 0$ für $k \geq N$. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach dem Cauchy-Kriterium für die konvergente Reihe $\sum b_k$ ein $n_\varepsilon \geq N$ mit $0 \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k < \varepsilon$ für $n > m \geq n_\varepsilon$. Daraus erhalten wir nun

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \varepsilon,$$

also ist das Cauchy-Kriterium für die Reihe $\sum |a_k|$ erfüllt. □

Divergente Minorante: Ist $\sum d_k$ eine divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern $d_k \geq 0$ und $a_k \geq d_k$ für $k \geq N$, dann ist auch die Reihe $\sum a_k$ divergent.
In diesem Fall nennen wir $\sum d_k$ eine *divergente Minorante* für die Reihe $\sum a_k$.
(Wäre nämlich $\sum a_k$ konvergent, dann müsste es nach dem Majorantenkriterium auch $\sum d_k$ sein.)

Vorsicht: *Konvergente Reihen sind i.A. nicht absolut konvergent.*

Z.B. werden wir später (mittels Leibniz-Kriterium) sehen, dass die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

mit den Gliedern $a_k = (-1)^{k-1}/k$ konvergent ist, während die Reihe der Absolutbeträge $\sum |a_k| = \sum \frac{1}{k}$ gerade die divergente harmonische Reihe ergibt.

11.3. Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Für eine Folge (a_k) mit nichtnegativen Gliedern $a_k \geq 0$ hat die Reihe der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ oder auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1} a_k = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ wechselndes Vorzeichen der Summenglieder.

Leibniz-Kriterium:

Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, dann ist die alternierende Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent und für die Summe s gilt mittels der Partialsummenfolge (s_m) überdies die Fehlerabschätzung

$$|s - s_m| \leq a_m \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Wir haben wegen der Monotonie von (a_n) für die Partialsummenfolge

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq s_{2n-1} = s_{2(n-1)+1}$$

sowie

$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2} = s_{2(n-1)}, \quad s_{2n} - s_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0$$

und wegen $a_n \to 0$ auch noch

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Daher definiert $[s_{2n+1}, s_{2n}]$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ eine Intervallschachtelung und es gibt eine eindeutige Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $s = \lim s_{2n} = \lim s_{2n+1}$. Es gilt weiters für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} |s_{2n} - s| &= s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \leq a_{2n}, \\ |s_{2n+1} - s| &= s - s_{2n+1} \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}, \end{aligned}$$

d.h. zusammengefasst

$$|s_m - s| \leq a_m \to 0 \qquad \text{für } m \to \infty,$$

womit die Konvergenz der Reihe gegen s und auch die Fehlerabschätzung gezeigt ist. □

Beispiele:

1) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ist konvergent, weil $(\frac{1}{k})$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

2) Auch die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$ ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, denn die Folge $(\frac{1}{\log k})_{k \geq 2}$ ist wegen $\log k \leq \log(k+1)$ monoton fallend und $\frac{1}{\log k} \to 0$ wissen wir aus 8.4(vii).

11.4. Wurzeltest und Quotiententest

Die folgenden praktikablen Tests für absolute Konvergenz von Reihen sind direkte Anwendungen des Majorantenkriteriums zusammen mit den Eigenschaften der geometrischen Reihe.

Wurzeltest:

(a) Wenn mit einer Zahl $0 \leq q < 1$ und einem Index N die Abschätzung $|a_k|^{1/k} \leq q$ für alle $k \geq N$ gilt, dann ist die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(b) Wenn $|a_k|^{1/k} \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis: (a): Wegen $|a_k| \leq q^k$ und $0 \leq q < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum q^k$ eine konvergente Majorante, daher folgt die absolute Konvergenz von $\sum a_k$.

(b): Wir erhalten $|a_k| \geq 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$, weshalb (a_k) sicherlich keine Nullfolge ist und somit $\sum a_k$ nicht konvergent sein kann. □

Quotiententest:

(a) Wenn mit einer Zahl $0 \le q < 1$ und einem Index N sowohl $a_k \neq 0$ als auch die Abschätzung $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \le q$ für alle $k \ge N$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(b) Wenn $a_k \neq 0$ und $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \ge 1$ für $k \ge N$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis: (a): Für $k \ge N$ gilt

$$|a_k| = \underbrace{\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|}_{\le q} \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\right|}_{\le q} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|}_{\le q} \cdot |a_N| \le q^{k-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{q^N} \cdot q^k,$$

daher ist $\frac{|a_N|}{q^N} \sum q^k$ eine konvergente Majorante.

(b) Wegen $|a_{k+1}| \ge |a_k| \ge \ldots \ge |a_N| > 0$ für alle $k \ge N$ kann (a_k) keine Nullfolge sein. $\square$

Folgerungen: (i) Angenommen die Folge $(|a_k|^{1/k})$ ist konvergent und $\alpha := \lim |a_k|^{1/k}$:

(a) Im Falle $\alpha < 1$ ist $\sum a_k$ absolut konvergent, (b) im Falle $\alpha > 1$ ist $\sum a_k$ divergent.

(ii) Angenommen die Folge $\left(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\right)$ ist konvergent und $\alpha := \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$:

(a) Im Falle $\alpha < 1$ ist $\sum a_k$ absolut konvergent, (b) im Falle $\alpha > 1$ ist $\sum a_k$ divergent.

Ü Beweis der Folgerung als Übungsaufgabe.

Vorsicht: Typische Fehler in der Anwendung der obigen Tests sind unter anderem diese:

Im Falle $|a_k|^{1/k} < 1$ oder $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ für $k \ge N$ auf die Konvergenz zu schließen. Gegenbeispiel ist die divergente harmonische Reihe mit $a_k = 1/k$.

Bei $\alpha = 1$ in der Folgerung auf Konvergenz zu schließen. Gegenbeispiel ist die divergente harmonische Reihe mit $a_k = 1/k$.

Bei $\alpha = 1$ in der Folgerung auf Divergenz zu schließen. Gegenbeispiel ist die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Beispiele:

1) Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent, denn mit $a_k := x^k/k!$ erhalten wir

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left|\frac{x^{k+1}\,k!}{(k+1)!\,x^k}\right| = \frac{|x|}{k+1} \quad \to \quad 0 \quad (k \to \infty).$$

2) Für $|q| < 1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$ ist absolut konvergent, denn mit $a_k := kq^k$ erhalten wir

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \left|\frac{(k+1)q^{k+1}}{kq^k}\right| = \frac{k+1}{k}\,|q| \quad \to \quad |q| \quad (k \to \infty).$$

3) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}}$ ist absolut konvergent. Wir haben $a_k := \frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}} = 2\frac{2+(-1)^k}{2^k}$ und verwenden den Wurzeltest. Zunächst ist $\frac{1}{2^k} \le |a_k|$ und somit

$$\frac{1}{2} \le |a_k|^{1/k} = \frac{|2+(-1)^k|^{1/k}}{(2^{k-1})^{1/k}} \le \frac{(2+1)^{1/k}}{(2^k/2)^{1/k}} = 3^{1/k}2^{1/k} \cdot \frac{1}{2} = 6^{1/k} \cdot \frac{1}{2}.$$

Wegen $6^{1/k} \to 1$ für $k \to \infty$ (gemäß der Behauptung in 8.5) folgt nun aus dem Sandwichlemma

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung: Im letzten Beispiel hätte der Quotiententest wegen

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

nicht zum Ziel geführt. Andererseits lässt sich zeigen, dass eine Reihe, die dem positiven Fall des Quotiententests genügt, immer auch die Bedingungen des Wurzelkriteriums für Konvergenz erfüllt (vgl. etwa den Beweis des Quotientenkriteriums in [BFI, Abschnitt 5.3]).

11.5. Komplexe Folgen und Reihen

Eine komplexe Folge (z_n) ist formal eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, deren Werte bei $n \in \mathbb{N}$ wir mit $z_n \in \mathbb{C}$ notieren. Da der Absolutbetrag von komplexen Zahlen stets eine nichtnegative reelle Zahl ist, können wir ganz einfach folgende Definition geben:

Eine komplexe Folge (z_n) ist *konvergent* gegen $z \in \mathbb{C}$, falls $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$ gilt.

Die Konvergenz von (z_n) gegen $z \in \mathbb{C}$ ist äquivalent dazu, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit

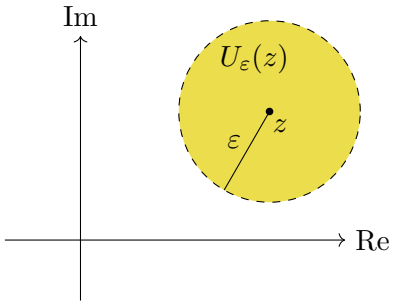
$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge n_\varepsilon.$$

Diese Bedingung wiederum lässt sich mit der komplexen Fassung der *ε-Umgebung*

$$U_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$$

umformulieren in

$$z_n \in U_\varepsilon(z) \quad \text{für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}.$$



Schreiben wir die Folgenglieder als $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ und $z = x + \mathrm{i}y$, so gilt:

$$\boxed{z_n \to z \text{ in } \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \to x \text{ und } y_n \to y \text{ in } \mathbb{R}.}$$

Für $\boxed{\Rightarrow}$ müssen wir nur $|x_n - x| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| \to 0$ und $|y_n - y| = |\operatorname{Im}(z_n - z)| \leq |z_n - z| \to 0$ beachten.
Für $\boxed{\Leftarrow}$ genügt die Beobachtung $|z_n - z|^2 = (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 \to 0 + 0 = 0$.

Es gelten auch in $\mathbb{C}$ die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte, z.B. betreffend Linearkombinationen und Produkte von konvergenten Folgen usw. und speziell auch die Verträglichkeit mit komplexer Konjugation (was leicht durch Übergang zu Real- und Imaginärteilen zu zeigen ist)

$$z_n \to z \quad \Rightarrow \quad \overline{z_n} \to \overline{z}.$$

Das Cauchy-Kriterium gilt auch für komplexe Folgen, wie sich aus der obigen Äquivalenz der Konvergenz mit jener der Real und Imaginärteile direkt argumentieren lässt. D.h. eine komplexe Folge (z_n) ist genau dann konvergent, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_\varepsilon.$$

Dies ist auch gleichzeitig der Ausdruck der *Vollständigket* von $\mathbb{C}$.

Außerdem ist das Konzept der Reihenkonvergenz analog zu $\mathbb{R}$, auch der Wurzel- und Quotiententest für absolute Konvergenz sind verfügbar.

Beispiele:

1) Die komplexe geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist für $|z| < 1$ (absolut) konvergent mit Summe $\frac{1}{1-z}$ und für $|z| \geq 1$ divergent. Analog zu unseren früheren Überlegungen ist nämlich

$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

und für $|z| < 1$ gilt $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, während für $|z| \geq 1$ die Folge der Reihenglieder wegen $|z^k| = |z|^k \geq 1$ keine Nullfolge sein kann.

Als Anwendung können wir $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $0 < r < 1$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ betrachten. Hier ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{\mathrm{i}k\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(re^{\mathrm{i}\varphi}\right)^k = \frac{1}{1 - re^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{1 - re^{-\mathrm{i}\varphi}}{1 - 2r\cos\varphi + r^2},$$

wobei wir für den letzten Schritt den Bruch einfach mit $1 - re^{-\mathrm{i}\varphi} = \overline{1 - re^{\mathrm{i}\varphi}}$ erweitert und die Formel $e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi} = 2\cos\varphi$ verwendet haben.

2) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut konvergent, wie wir mittels Quotiententest sehen können:

$$\frac{|z^{k+1}|k!}{(k+1)!|z^k|} = \frac{|z|}{k+1} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

11.6. Vorzüge der absoluten Konvergenz einer Reihe

Hier berichten wir nur ganz kurz über zwei der wichtigsten Resultate und verweisen für deren (etwas technische) Beweise getrost auf die Fülle an Lehrbüchern.

Absolut konvergente Reihen sind robust gegenüber Umordnungen der Glieder: Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ eine (reelle oder komplexe) *absolut* konvergente Reihe mit Summe $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $h\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung (als „Umordnungsschema“), dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{h(k)}$ absolut konvergent und es gilt wieder $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{h(k)}$.

Cauchy-Produkt für absolut konvergente Reihen: Ähnlich wie schon bei der Produktformel (7.1) für Polynome können wir beim Produkt der Summen $\sum_{j=0}^{M} a_j$ und $\sum_{k=0}^{N} b_k$ mit sehr vielen Gliedern die entstehenden Terme $a_j b_k$ organisieren, indem wir jeweils die mit fester Indexsumme $j+k$ zusammenfassen:

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots)(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$$

Dies führt auf das sogenannte *Cauchy-Produkt* für Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_j$ als Reihe $\sum c_n$ mit den Gliedern

$$c_n := \sum_{\substack{0 \le j,k \le n \\ j+k=n}} a_j\, b_k = \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_{n-j}. \tag{11.1}$$

Satz: Sind die (reellen oder komplexen) Reihen $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut* konvergent mit den Summen $a = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $b = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit den Gliedern (11.1) ebenfalls absolut konvergent und es gilt

$$ab = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Anwendung: Wegen der absoluten Konvergenz in Beispiel 2) aus 11.5 können wir die Funktion $E\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definieren, für die wir $E(0) = 1$ erhalten. Wir berechnen $E(z)E(w)$ mittels Cauchy-Produkt und müssen also (11.1) für diesen Fall auswerten mit $a_j = z^j/j!$ und $b_k = w^k/k!$. Dies führt mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes auf

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \frac{1}{n!}(z+w)^n,$$

d.h. also schließlich

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = E(z+w).$$

Somit erfüllt E auch die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und wir werden später sehen, dass in der Tat $E(z) = e^z$ gilt (siehe Beispiel 3) in 16.1).

Teil C

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

12. Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

12.1. Grenzwerte von Funktionen

Wir betrachten ein nichtleeres Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, das nicht nur aus einem Punkt[1] besteht. Ist nun $a \in I$, dann gilt $I \setminus \{a\} \neq \emptyset$ und es gibt stets Folgen (x_n) mit $x_n \in I \setminus \{a\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to a$. (Denn es gibt $b \in I$ mit $b \neq a$ und im Falle $a < b$ gilt $]a, b] \subseteq I \setminus \{a\}$, im Falle $a > b$ gilt $[b, a[\subseteq I \setminus \{a\}$.)

Definition:

Für eine Funktion $f\colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\lim_{x \in I,\, x \to a} f(x) = c \quad \text{bzw. kürzer} \quad \lim_{x \to a} f(x) = c,$$

falls für *jede* Folge (x_n) mit den Eigenschaften $x_n \in I \setminus \{a\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ auch stets $c = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ gilt.

Wir sagen in diesem Fall, dass f an der Stelle a den *Grenzwert* c hat.

Wir betonen, dass es für die obige Definition *unerheblich* ist, ob f auch in a einen definierten Funktionswert $f(a)$ besitzt. Im Wesentlichen werden wir auf folgende Situationen treffen:

(a) In vielen Anwendungen, z.B. Stetigkeitsfragen, haben wir es mit einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ zu tun und interessieren uns dafür, ob $c := \lim_{x \to a} f(x)$ existiert und wie sich dieser Grenzwert c zum Funktionswert $f(a)$ verhält.

(b) Oft ist eine Funktion f auf „natürliche Weise“ auf $I \setminus \{a\}$ gegeben und wir interessieren uns dafür, was „mit den Funktionswerten $f(x)$ passiert“, wenn x beliebig nahe an a herankommt.

Für die Lage des Punktes $a \in I$ bzgl. des Intervalls I in obiger Definition (immer noch unter der Voraussetzung $I \setminus \{a\} \neq \emptyset$) gibt es drei mögliche Fälle:

(i) a ist linker Randpunkt von I, dann nennen wir c einen *rechtsseitigen Grenzwert* und schreiben

$$c = \lim_{x \to a+} f(x),$$

weil nur Folgen $x_n \to a$ mit $x_n > a$ in Frage kommen;

[1] So etwas würde im Fall $I = [a, b]$ mit $a = b$ passieren.

(ii) a ist rechter Randpunkt von I, dann nennen wir c einen *linksseitigen Grenzwert* und schreiben

$$c = \lim_{x \to a-} f(x),$$

weil nur Folgen $x_n \to a$ mit $x_n < a$ in Frage kommen;

(iii) a ist *innerer Punkt* von I, d.h. es gibt ein $r > 0$ mit $]a - r, a + r[\subseteq I$, dann schreiben wir

$$c = \lim_{x \to a} f(x)$$

und es gibt Folgen $x_n \to a$, deren Glieder beidseitig von a liegen können.

Für die Praxis der Grenzwertberechnungen ist folgender Vergleichssatz sehr nützlich, der sich direkt durch Rückführung auf Folgen aus der entsprechenden Eigenschaft in 5.4 ergibt.

Sandwichlemma: Seien $\delta > 0$ und f, g, h Funktionen auf $]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ mit

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{für } 0 < |x - a| < \delta.$$

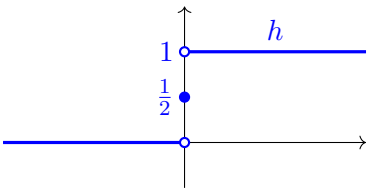
Falls nun $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = c$ gilt, dann folgt auch $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$.

(Davon gibt es auch entsprechende Varianten für einseitige Grenzwerte.)

Beispiele:

1) Für die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1/2 & x = 0, \\ 1 & x > 0, \end{cases}$$



ist $\lim\limits_{x \to 0-} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} h(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ existiert nicht.

2) Die Ungleichungen $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$ aus (9.5) zusammen mit $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 1$ ergeben $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$, denn dieselbe Ungleichung wie in 2) besagt auch $0 \leq |1 - \cos x| = 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$, was für $x \neq 0$ auf die folgende Sandwich-Situation führt:

$$0 \leq \left| \frac{1 - \cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{2}|x| \to 0 \quad (x \to 0).$$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, denn $|\sin x| \leq |x| \leq \tan x$ für $|x| < \pi/2$ gemäß (9.4) und (9.6) ergeben für $0 < |x| < \pi/2$ nun

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot \frac{\sin x}{x} \geq \frac{x}{\tan x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \cos x \to 1 \quad (x \to 0).$$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$: Eigenschaft (iii) aus 8.3 lautete $|e^x-1| \le \frac{|x|}{1-|x|}$ für $|x|<1$, woraus wir für $0<|x|<1$ direkt eine obere Schranke in der Form

$$\frac{e^x-1}{x} \le \frac{|e^x-1|}{|x|} \le \frac{1}{1-|x|}$$

erhalten.

Wir behaupten, dass wir für $0<|x|<1$ auch die Unterschranke

$$\frac{e^x-1}{x} > \frac{1}{1+|x|}$$

haben, woraus dann insgesamt wegen $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1\pm|x|} = 1$ die Grenzwertaussage folgt.

Eigenschaft (i) aus 8.3 besagt $e^x > 1+x$ für $x \ne 0$. Für $x>0$ ist daher sicherlich

$$\frac{e^x-1}{x} > \frac{x}{x} = 1 > \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+|x|}.$$

Im Falle $-1<x<0$ ist $e^{-x} > 1-x$, d.h. $\frac{1}{1-x} > \frac{1}{e^{-x}}$ und daher

$$1-e^x = 1-\frac{1}{e^{-x}} > 1-\frac{1}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = \frac{-x}{1-x},$$

somit weiters wegen $-x>0$ auch

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1-e^x}{-x} > \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+|x|}.$$

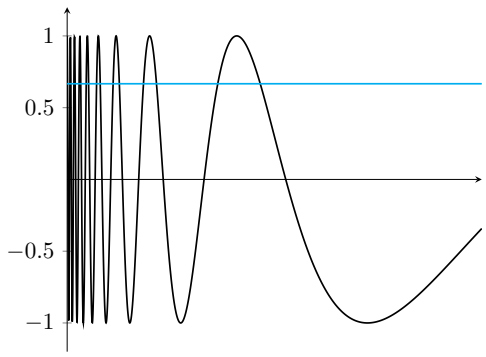
6) $\lim\limits_{x\to 0+} e^{-1/x} = 0$, denn für $x>0$ ist mittels der üblichen Ungleichung $e^y > 1+y$ für $y \ne 0$ (Eigenschaft (i) in 5.4)

$$0 < e^{-1/x} = \frac{1}{e^{1/x}} < \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1} \to 0 \quad (x\to 0).$$

7) $\lim\limits_{x\to 0-} e^{-1/x}$ existiert nicht, denn z.B. für die Folge $x_n := -1/n \to 0$ ist $e^{-1/x_n} = e^n > 1+n$ unbeschränkt.

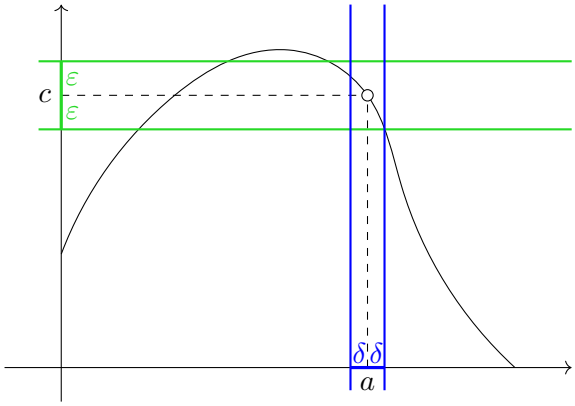
In diesem Beispiel könnten wir auch für jede Folge $x_n < 0$ mit $x_n \to 0$ die Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-1/x_n} = \infty$ nachweisen und daher mit gutem Recht auch $\lim\limits_{x\to 0-} e^{-1/x} = \infty$ schreiben.

8) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin\dfrac{1}{x}$ existiert nicht:
Zu jedem $c \in [-1,1]$ gibt es nämlich eine Folge (x_n) mit $x_n>0$ und $x_n \to 0$, sodass $\sin\frac{1}{x_n} = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Konkret könnten wir z.B. $x_n = 1/(2\pi n + \arcsin c)$ wählen.)



12.2. Weitere Eigenschaften und Techniken für Grenzwerte

Im folgenden Satz geben wir eine Charakterisierung für den Grenzwert einer Funktion mit Hilfe von Umgebungen.
Hier ist wie üblich $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält, $a \in I$, $f\colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in \mathbb{R}$.



ε-δ-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen:

$$\lim_{x\in I, x\to a} f(x) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ sodass } |f(x) - c| < \varepsilon \text{ gilt für alle } x \in I \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta.$$

Beweis: $\boxed{\Leftarrow}$ Sei (x_n) eine Folge in $I \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$, sodass $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $0 < |x - a| < \delta$ erfüllt ist. Wegen $x_n \to a$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Für diese Indizes n gilt daher auch $|f(x_n) - c| < \varepsilon$, was die Konvergenz $f(x_n) \to c$ zeigt.

$\boxed{\Rightarrow}$ Wir nehmen indirekt an es gäbe ein $\varepsilon > 0$, sodass zu jedem (als $\delta > 0$ gewähltem) $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein $x_n \in I$ existiert mit

$$0 < |x_n - a| < 1/n \quad \text{und} \quad |f(x_n) - c| \geq \varepsilon.$$

Hieraus ergibt sich nun aber sowohl $x_n \to a$ als auch $f(x_n) \not\to c$ — Widerspruch ↯. □

Zwei direkte Folgerungen aus dem ε-δ-Kriterium:

(i) Ist $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) > c/2$ für $0 < |x - a| < \delta$.

(ii) Ist $a \in I$ ein innerer Punkt, dann gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a-} f(x) \text{ und } \lim_{x\to a+} f(x) \text{ existieren beide und sind gleich.}$$

Grenzwerte für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$: Wenn wir es mit einer Funktion $f\colon [\alpha, \infty[\to \mathbb{R}$ zu tun haben, schreiben wir im Falle der Existenz von $c = \lim\limits_{x\to 0+} f(1/x)$ auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$.

Äquivalent zu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ ist dann das folgende Kriterium: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$, sodass $|f(x) - c| < \varepsilon$ gilt für alle $x > R$.

Analog führen wir $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ zurück auf $\lim\limits_{x\to 0-} f(1/x)$.

Rechenregeln: Hier stehe lim jeweils durchgängig für eine der besprochenen Varianten mit $x \in I, x \to a$ oder $x \to \infty$ usw., dann ergeben sich alle genannten Eigenschaften direkt durch Rückführung auf Folgen. Unter der Bedingung $\lim f(x) = c$ und $\lim g(x) = d$ gilt:

(a) Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Linearität $\lim(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha c + \beta d$;

(b) $\lim(f(x)g(x)) = c \cdot d$;

(c) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{c}{d}$, falls $d \neq 0$.

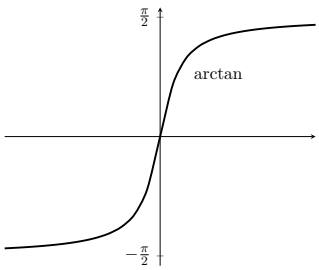
Beispiele:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}$ ist wegen der Eigenschaften von $e^{-1/|x|}$ klar.

2) Die Eigenschaften

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$

sind zwar aus dem Funktionsgraphen plausibel, benötigen aber im Detail noch ein bisschen Argumentation.



Wir haben $\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ als streng monoton wachsende und bijektive Umkehrfunktion der ebenfalls streng wachsenden bijektiven Funktion $\tan\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ eingeführt. Wegen der Eigenschaft $\arctan(-x) = -\arctan x$ können wir uns auf $x \to \infty$ konzentrieren. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es (wegen der Bijektivität von arctan als Abbildung $]0,\infty[\to]0, \frac{\pi}{2}[$) ein eindeutiges $R > 0$ mit $\arctan R = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Für jedes $x > R$ ist dann (wegen der strikten Monotonie) stets $\frac{\pi}{2} - \varepsilon = \arctan R < \arctan x < \frac{\pi}{2}$. Somit ist $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ gezeigt.

3) Für $b_m \neq 0$ ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \dfrac{a_m}{b_m}$, denn für $k \in \mathbb{N}$ gilt offensichtlich $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{-k} = 0$ und auf den Ausdruck

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_m x^m} = \frac{a_0 x^{-m} + a_1 x^{-(m-1)} + \ldots + a_{m-1}x^{-1} + a_m}{b_0 x^{-m} + b_1 x^{-(m-1)} + \ldots + b_{m-1}x^{-1} + b_m}$$

können wir mehrfach obige Rechenregeln (a) und (c) anwenden.

Speziell ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$, wenn p und q Polynomfunktionen sind und der Grad von p kleiner als jener von q ist (weil in dem Fall $a_m = 0$ und $b_m \neq 0$ ist).

4) Ü $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$ existiert nicht, wenn p und q Polynomfunktionen sind und der Grad von p größer als jener von q ist.

12.3. Stetige Funktionen

Hier sei stets $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht, und $a \in I$.

Definition:

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* im Punkt a, falls f an der Stelle a den Grenzwert $f(a)$ besitzt, d.h. $\lim\limits_{x\in I, x\to a} f(x)$ existiert und es gilt $\lim\limits_{x\in I, x\to a} f(x) = f(a)$.
Wir nennen f *stetig auf* I, falls f in jedem Punkt aus I stetig ist.

Satz:

Für eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $a \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) f ist stetig in a.
(ii) **Folgenkriterium:** Für jede Folge (x_n) in I mit $x_n \to a$ gilt $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.
(iii) **ε-δ-Kriterium:** Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I \text{ mit } |x - a| < \delta. \tag{12.1}$$

Beweis: Die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii) ergibt sich genau aus dem ε-δ-Kriterium für Grenzwerte in 12.2 und die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) ist klar nach Definition des Grenzwertes von Funktionen. Um (i) $\Rightarrow$ (ii) zu begründen, müssen wir nur bemerken, dass im Falle $x_n = a$ natürlich $f(x_n) = f(a)$ gilt, was die Konvergenzeigenschaften der Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht verändert. $\square$

Bemerkungen: (a) Die Bedingungen in (12.1) können mit Hilfe von Umgebungen (vgl. 6.4) auch in der Form

$$f(x) \in U_\varepsilon(f(a)) \quad \text{für alle} \quad x \in U_\delta(a) \cap I$$

ausgedrückt werden.

(b) Im Hinblick auf (ii) im obigen Satz können wir auch eine Funktion f auf einem einpunktigen Intervall $I = \{a\}$ problemlos als stetig erklären, denn es bleibt ohnehin nur $x_n = a$ und somit $f(x_n) = f(a)$ an zu betrachtenden Folgen.

(c) Weiters wollen wir künftig für Definitionsmengen $A \subseteq \mathbb{R}$, die aus einer disjunkten Vereinigung von Intervallen bestehen, eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ als stetig bezeichnen, wenn die Einschränkung von f auf jedes Teilintervall stetig ist.

Folgerung: Wenn $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in a ist und $f(a) > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(x) > f(a)/2$ gilt für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$.

Für die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall I führen wir folgende Notation ein:

$$C(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } I\}.$$

Beispiele:

1) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $x \mapsto c$ stetig auf $\mathbb{R}$. Die Identität $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist ebenfalls stetig.

2) Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn $x_n \to a$ impliziert $|x_n| \to |a|$.

3) Die Funktionen sin und cos gehören zu $C(\mathbb{R})$: Zunächst sehen wir, dass beide Funktionen stetig in 0 sind, denn $|\sin x| \leq |x|$ zeigt $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$ hatten wir bereits in Beispiel 2) aus 12.1. Daraus folgen nun auch für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ die Aussagen

$$\lim_{x\to a} \sin(x-a) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a} \cos(x-a) = 1.$$

Wegen $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ genügt es, die Stetigkeit von sin auf $\mathbb{R}$ nachzuweisen. Dazu verwenden wir das Additionstheorem (9.2) für den Sinus und erhalten

$$\sin x = \sin((x-a)+a) = \sin(x-a)\cdot\cos a + \cos(x-a)\cdot\sin a \to 0\cdot\cos a + 1\cdot\sin a = \sin a \quad (x \to a).$$

4) $\exp \in C(\mathbb{R})$, denn wir erhalten für $|x-a| < 1$ mit der Ungleichung (iii) aus 8.3 direkt

$$|e^x - e^a| = |e^a(e^{x-a} - 1)| = e^a|e^{x-a} - 1| \leq e^a \frac{|x-a|}{1-|x-a|} \to e^a \frac{0}{1-0} = 0 \quad (x \to a).$$

5) Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 1) in 12.1 ist stetig in jedem $a \neq 0$ und unstetig in 0, denn auf $]-\infty, 0[$ bzw. $]0, \infty[$ ist h konstant und bei 0 hat h keinen Grenzwert.

6) Ü Die sogenannte *Dirichlet-Funktion* $\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist unstetig in jedem Punkt von $\mathbb{R}$.

7) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ ist stetig in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wegen $f(-x) = -f(x)$ genügt es, wenn wir uns auf den Fall $a > 0$ konzentrieren.

Für $x \geq a/2$ erhalten wir durch einfache Abschätzung

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-x}{ax}\right| = \frac{|a-x|}{ax} \leq \frac{|a-x|}{aa/2} = \frac{2}{a^2}|a-x| \to 0 \quad (x \to a).$$

12.4. Einfache Eigenschaften stetiger Funktionen

Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in I$, dann sind folgende Aussagen mittels Folgenkriterium unmittelbar klar:

- Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha f + \beta g$ stetig in a;
- die Produktfunktion fg ist stetig in a;
- im Falle $g(a) \neq 0$ ist auch die Funktion $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ als Abbildung $\{x \in I \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Folgerung: Polynomfunktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$. Eine rationale Funktion $\frac{p}{q}$ mit Polynomfunktionen p und q ist definiert und stetig in allen Punkten aus $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$.

Die Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig: Sind I, J Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon I \to J$ stetige Funktionen, dann ist auch die Funktion $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $a \in I$ und (x_n) eine Folge in I mit $x_n \to a$. Dann gilt $y_n := g(x_n) \in J$ und $y_n = g(x_n) \to g(a) =: b \in J$ für $n \to \infty$ wegen der Stetigkeit von g im Punkt a. Nun folgt wegen der Stetigkeit von f im Punkt b auch

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = f(y_n) \to f(b) = f(g(a)) = (f \circ g)(a) \quad (n \to \infty).$$

Somit folgt $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a)$. □

Beispiele:

1) Sind $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ stetig, dann auch die Funktion $h \colon I \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ für jedes $x \in I$, für die wir etwas salopper Weise auch die Notation $h = \max(f, g)$ verwenden. Die Stetigkeit von h folgt unmittelbar aus den obigen Eigenschaften, wenn wir die Gleichung (punktweise zu beweisen als **Ü**)

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

beachten.

2) Aus der Stetigkeit von exp schließen wir für beliebiges $b > 0$ auf die Stetigkeit der Funktion $x \mapsto b^x = e^{x \log b}$, $\mathbb{R} \to]0, \infty[$, weil es eine Verknüpfung stetiger Funktionen ist.

12.5. Stetige Fortsetzung

In der Situation, wo eine Funktion f auf der Menge $I \setminus \{a\}$ definiert und dort stetig ist, können wir uns fragen: Gibt es eine Funktion $\tilde{f} \colon I \to \mathbb{R}$, die *stetig* ist und f *fortsetzt* in dem Sinne, dass $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in I \setminus \{a\}$ gilt?

Die Antwort ist einfach: Falls so eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f existiert, muss wegen der Stetigkeit $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ gelten, also muss $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existieren. Wenn andererseits $c := \lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert, dann ergibt $\tilde{f}(a) := c$ und $\tilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in I \setminus \{a\}$ eine stetige Fortsetzung.

Wir halten somit fest, dass in obiger Situation gilt:

$$f \text{ ist stetig fortsetzbar in } a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) \text{ existiert.}$$

Wir erinnern daran, dass gemäß 12.2, Folgerung (ii) die Existenz von $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ wiederum gleichwertig damit ist, dass beide einseitigen Grenzwerte bei a existieren und übereinstimmen.

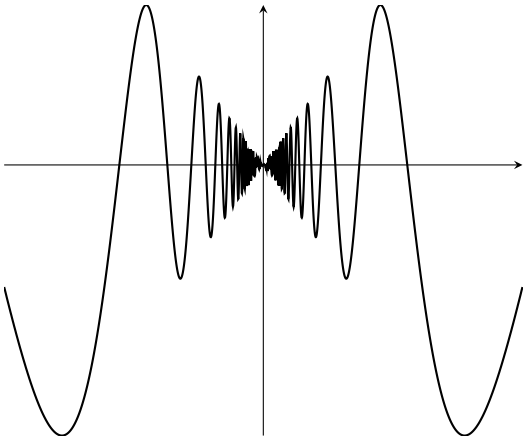
Beispiele:

1) Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ aus Beispiel 7) in 12.3 besitzt keine stetige Fortsetzung im Punkt 0, weil $\lim\limits_{x \to 0} 1/x$ nicht existiert. In diesem Fall existiert auch keiner der beiden einseitigen Grenzwerte bzw. hätten wir $\lim\limits_{x \to 0-} 1/x = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 0+} 1/x = \infty$.

2) Wir betrachten die Funktion $g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \sin(1/x)$. Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist g stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aus Beispiel 8) in 12.1 wissen wir, dass $\lim\limits_{x \to 0+} \sin(1/x)$ nicht existiert, daher kann die Funktion g keine stetige Fortsetzung in 0 besitzen.

3) Betrachten wir nun die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x\sin(1/x) = xg(x)$ mit der Funktion g aus 2). Diese Funktion ist ebenfalls stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und wir fragen uns, ob es eine stetige Fortsetzung in 0 gibt.



In diesem Fall ist leicht zu sehen, dass $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ gilt, weil $|\sin(1/x)| \leq 1$ für alle $x \neq 0$ gilt und somit

$$0 \leq |x\sin(1/x)| \leq |x| \to 0 \quad (x \to 0).$$

Somit erhalten wir eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

13. Hauptsätze über stetige Funktionen

Wir haben es in diesem Abschnitt häufig mit einem kompakten Intervall $[a, b]$ zu tun und erinnern in diesem Zusammenhang an eine wichtige Eigenschaft: Ist (x_n) eine beliebige Folge in $[a, b]$, dann ist (x_n) beschränkt und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 6.2 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Setzen wir $c := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von $[a, b]$ (vgl. 6.4) jedenfalls $c \in [a, b]$.

13.1. Beschränktheit auf kompakten Intervallen

Satz:

Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis: Indirekt nehmen wir an, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, aber unbeschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $|f(x_n)| > n$. Die Folge (x_n) besitzt eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_0 := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a, b]$. Wegen der Stetigkeit von f gilt nun $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$. Als konvergente Folge ist $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ jedenfalls beschränkt (Eigenschaft (iv) in 5.4), d.h. es gibt ein $M \geq 0$ mit $k \leq n_k < |f(x_{n_k})| \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ — Widerspruch ↯ □

Bemerkung: In dem Satz darf weder die Voraussetzung der Stetigkeit von f noch die der Kompaktheit des Intervalls abgeschwächt werden. Z.B. ist die Funktion $f\colon]0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ auf einem halboffenen Intervall stetig, aber unbeschränkt. Weiters ist die unstetige Funktion $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1/x$ für $0 < x \leq 1$ und $g(0) := 0$ auf einem kompakten Intervall unbeschränkt.

13.2. Maximum und Minimum auf kompakten Intervallen

Satz:

Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es Punkte $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ mit der Eigenschaft

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Es ist also $f(\xi_1) = \min f([a, b])$ und $f(\xi_2) = \max f([a, b])$.

Beweis: Es genügt, die Aussage über das Maximum zu beweisen, weil dann das Maximum von $-f$ gerade dem Minimum von f entspricht.

Laut dem vorigen Satz ist f beschränkt, daher existiert $s := \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$.

Die Folge (x_n) besitzt als beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir setzen $\xi_2 := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$ und erhalten wegen der Stetigkeit von f zunächst $f(\xi_2) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Weiters ist

$$|s - f(x_{n_k})| = s - f(x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

weshalb auch $s = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi_2)$ gilt und somit $f(x) \leq s = f(\xi_2)$ für alle $x \in [a,b]$. $\square$

Bemerkung: Auch in diesem Satz darf weder die Voraussetzung der Stetigkeit von f noch die der Kompaktheit des Intervalls abgeschwächt werden. Z.B. ist die Funktion $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ auf einem offenen Intervall stetig, besitzt aber weder Maximum noch Minimum. Weiters besitzt die (bei -1 und 1) unstetige Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x$ für $-1 < x < 1$, $g(-1) := 0$ und $g(1) := 0$ auf einem kompakten Intervall weder Maximum noch Minimum.

13.3. Stetige Funktionen bilden Intervalle auf Intervalle ab

Zwischenwertsatz:

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sind $\alpha, \beta \in [a,b]$ mit $\alpha < \beta$ und $f(\alpha) \neq f(\beta)$, dann gibt es zu jeder Zahl c zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ ein $t \in]\alpha,\beta[$ mit der Eigenschaft $f(t) = c$. Insbesondere muss f in den Fällen $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ oder $f(\alpha) > 0 > f(\beta)$ eine Nullstelle im Teilintervall $]\alpha,\beta[$ besitzen.

Beweis: Es genügt, den Spezialfall mit der Nullstelle zu beweisen, weil wir sonst die (ebenfalls stetige) Funktion $f - c$ an Stelle von f betrachten können. Außerdem kann der Fall $f(\alpha) > 0 > f(\beta)$ mittels Betrachtung von $-f$ stets auf die Situation $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ zurückgeführt werden. D.h. wir haben nur Folgendes zu zeigen:
Wenn $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ gilt, dann gibt es ein $t \in]\alpha,\beta[$ mit $f(t) = 0$.

Wir werden t durch sukzessive Intervallhalbierungen eingrenzen und beginnen mit den Randpunkten $x_1 := \alpha$ und $y_1 := \beta$.

Wir sind bereits fertig, falls $f(\frac{x_1+y_1}{2}) = 0$ ist. Andernfalls setzen wir

- $x_2 := \frac{x_1+y_1}{2}$ und $y_2 := y_1$ (rechte Intervallhälfte), falls $f(\frac{x_1+y_1}{2}) < 0$ ist;
- $x_2 := x_1$ und $y_2 := \frac{x_1+y_1}{2}$ (linke Intervallhälfte), falls $f(\frac{x_1+y_1}{2}) > 0$ ist.

Wir machen in dieser Weise induktiv weiter und sind fertig, falls $f(\frac{x_n+y_n}{2}) = 0$ ist. Andernfalls fahren wir fort mit

- $x_{n+1} := \frac{x_n+y_n}{2}$ und $y_{n+1} := y_n$ (rechte Intervallhälfte), falls $f(\frac{x_n+y_n}{2}) < 0$ ist;
- $x_{n+1} := x_n$ und $y_{n+1} := \frac{x_n+y_n}{2}$ (linke Intervallhälfte), falls $f(\frac{x_n+y_n}{2}) > 0$ ist.

Falls das Verfahren nicht nach endlich vielen Schritten abbricht (mit $f(t) = 0$ für $t = (x_n+y_n)/2$), dann erhalten wir nach Konstruktion eine Intervallschachtelung durch $[x_n, y_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ mit Intervalllängen $y_n - x_n = \frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}$. Wir setzen $t := \lim x_n = \lim y_n$ und erhalten wegen der Stetigkeit von f

$$\text{sowohl} \quad f(t) = \lim f(x_n) \leq 0 \quad \text{als auch} \quad f(t) = \lim f(y_n) \geq 0.$$

Daher muss $f(t) = 0$ gelten. $\square$

Folgerungen: (i) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (nichtleeres) Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist die Bildmenge $f(I)$ ein (nichtleeres) Intervall, d.h. die Bildmenge hat in diesem Fall „keine Lücken“.

(Laut Zwischenwertsatz hat nämlich die Menge $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ die Eigenschaft, dass mit je zwei Punkten auch das dazwischen liegende Intervall ganz zu $f(I)$ gehört. Diese Eigenschaft zeichnet aber gerade Intervalle unter den nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{R}$ aus (siehe [FK1, §8, 4.7]).)

(ii) Noch spezieller: Wenn $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem *kompakten* Intervall I ist, dann ist auch die Bildmenge $f(I)$ ein *kompaktes* Intervall.

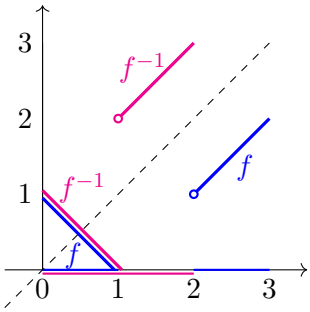
(Laut (i) ist $f(I)$ ein Intervall, das gemäß Satz 13.2 sowohl ein Maximum als auch ein Minimum besitzt. Also muss die Bildmenge von der Form $f(I) = [y_1, y_2]$ sein.)

13.4. Stetigkeit der Umkehrfunktion

Vorbemerkung: Wie das folgende Beispiel zeigen wird, ist es *i.A. nicht richtig*, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to A$ einer stetigen bijektiven Funktion $f\colon A \to J$ stetig sein muss, soferne $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht als (ein einziges) Intervall gegeben ist.

Beispiel: Wir betrachten die stückweise lineare Funktion $f\colon [0,1]\cup]2,3] \to [0,2]$, gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1, \\ x-1 & 2 < x \le 3. \end{cases}$$



Die Funktion f ist stetig und bijektiv mit der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,2] \to [0,1]\cup]2,3]$ gegeben durch $f^{-1}(y) = 1-y$ für $0 \le y \le 1$ und $f^{-1}(y) = y+1$ für $1 < y \le 2$. Wir sehen, dass f^{-1} bei 1 unstetig ist, denn

$$\lim_{y\to 1-} f^{-1}(y) = \lim_{y\to 1-}(1-y) = 0 \neq 2 = \lim_{y\to 1+}(y+1) = \lim_{y\to 1+} f^{-1}(y).$$

Satz:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton (wachsend bzw. fallend). Dann ist $J := f(I)$ ein Intervall und $f^{-1}\colon J \to I$ stetig und streng monoton (wachsend bzw. fallend).

Beweis: Es genügt, die Aussage für streng wachsendes f zu zeigen, weil wir andernfalls zu $-f$ übergehen können. Dass J ein Intervall ist, wissen wir bereits aus Folgerung (i) in 13.3.

Wie schon als Ü zu monotonen Funktionen besprochen, ist f als streng monoton wachsende Funktion injektiv, somit automatisch bijektiv als Abbildung $I \to J$, und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ ist auch streng wachsend. Es bleibt noch zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist.

Seien $y_0 \in J$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es gibt ein (eindeutiges) $x_0 \in I$ mit $y_0 = f(x_0)$, d.h. $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

1. Fall, x_0 kein Randpunkt von I: Wir wählen ε_1 mit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ und so klein, dass wir $[x_0-\varepsilon_1, x_0+\varepsilon_1] \subseteq I$ garantieren können. Nun setzen wir $y_1 := f(x_0-\varepsilon_1)$ und $y_2 := f(x_0+\varepsilon_1)$, was wegen der strikten Monotonie $y_1 < y_0 < y_2$ nach sich zieht. Weiters definieren wir $\delta := \min\{y_0-y_1, y_2-y_0\}$, dann gilt für jedes $y \in J$ mit $|y-y_0| < \delta$ natürlich die Ungleichungskette

$$y_1 \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq y_2.$$

Wenden wir darauf die streng wachsende Funktion f^{-1} an, so ergibt sich

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon_1 = x_0 - \varepsilon_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon_1 = f^{-1}(y_0) + \varepsilon_1$$

und somit

$$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

weshalb die Stetigkeit von f^{-1} im Punkt y_0 nachgewiesen ist.

2. Fall, x_0 ist linker Randpunkt von I: Wir wählen nun ε_1 mit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ und klein genug, sodass $[x_0, x_0+\varepsilon_1] \subseteq I$ gilt. Die Argumentation ist dann mittels $\delta := f(x_0+\varepsilon_1)-y_0$ ähnlich wie im 1. Fall via die Ungleichung $y_0 \leq y < y_0+\delta \leq f(x_0+\varepsilon_1)$.

3. Fall, x_0 ist rechter Randpunkt von I: Analog zum 2. Fall nun mit $[x_0-\varepsilon_1, x_0] \subseteq I$ und $\delta := y_0 - f(x_0-\varepsilon_1)$ usw. $\square$

Eine Variante des obigen Satzes: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist f streng monoton (wachsend bzw. fallend), $J := f(I)$ ein Intervall und $f^{-1}\colon J \to I$ stetig und streng monoton (wachsend bzw. fallend).

(Es bleibt nur zu zeigen, dass f in der gegebenen Situation streng monoton sein muss (siehe dazu [FK1, §8, Beweisteil (a) von Satz 5.1]). Der Rest folgt dann aus obigem Satz.)

Beispiele:

1) $\log\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig als Umkehrfunktion von $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$.

2) Aus der Stetigkeit von log schließen wir für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ auf die Stetigkeit der Funktion $x \mapsto x^a = e^{a \log x}$, $]0,\infty[\to]0,\infty[$, weil es eine Verknüpfung stetiger Funktionen ist.

3) arccos und arcsin sind auf $[-1,1]$ stetig als Umkehrfunktionen von $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ und $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.

4) $\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist stetig als Umkehrfunktion von $\tan\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

5) $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig $[0,\infty[\to [0,\infty[$ als Umkehrfunktion von $x \mapsto x^2$ auf $[0,\infty[$.

13.5. Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen

Satz:

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f *gleichmäßig stetig* auf $[a,b]$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, x_0 \in [a,b] \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Der Gleichmäßigkeitsbegriff bezieht sich hier darauf, dass wir für die Stetigkeitsbedingung bei jedem $x_0 \in [a,b]$ dasselbe δ verwenden können, während bei der gewöhnlichen Stetigkeit an der Stelle x_0 die Wahl von δ sowohl von ε als auch vom Punkt x_0 abhängen kann.

Beweis: Wir nehmen indirekt an, f sei stetig und nicht gleichmäßig stetig auf $[a, b]$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ (denken wir an $\delta := 1/n$) Punkte $x_n, x'_n \in [a, b]$ existieren mit den Eigenschaften

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Die Folge (x_n) besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \in [a, b]$. Aus $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < 1/n_k \leq 1/k$ folgt nun auch $x'_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ und daher dank der Stetigkeit von f weiters

$$0 < \varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0 \quad (k \to \infty)$$

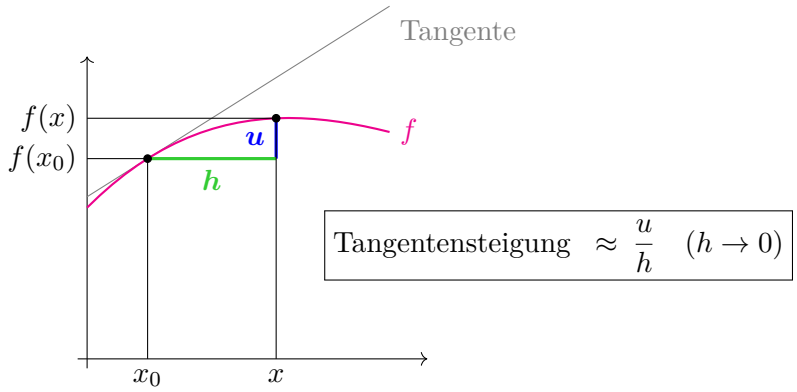
— Widerspruch ↯ $\square$

Bemerkung: Eine stetige Funktion auf einem nichtkompakten Intervall muss i.A. nicht *gleichmäßig* stetig sein, wie das Beispiel $f\colon\ ]0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ lehrt. **Ü**

14. Differenzierbare Funktionen

Der physikalische Begriff der Momentangeschwindigkeit entspricht geometrisch einer Tangentenkonstruktion an eine Kurve. Im Spezialfall von Kurven in der Form von Funktionsgraphen für $f\colon I \to \mathbb{R}$ führt dies auf die Frage nach der Tangentensteigung im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Falls es diese Tangente und somit ihre Steigung gibt, erwarten wir gute Approximationen dafür durch die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (x \in I, x \neq x_0, h = x - x_0).$$



14.1. Differenzierbarkeit

Definition:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $I \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in x_0, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \in I, x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. In diesem Fall schreiben wir

$$f'(x_0) := \lim_{x \in I, x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und nennen diesen Wert die *Ableitung* von f an der Stelle x_0.
Falls f differenzierbar in jedem Punkt von I ist, dann heißt f auf dem Intervall I differenzierbar und $f'\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heißt *Ableitung(sfunktion)* von f.

Weitere gebräuchliche Schreibweisen für die Ableitung $f'(x_0)$ sind auch $\frac{d}{dx} f(x_0)$, $\frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ etc.; für Funktionen $t \mapsto f(t)$, wo t z.B. einen Zeitparameter darstellt und t_0 statt x_0 einen Zeitpunkt bezeichnet, wird oft auch $\dot{f}(t_0)$ statt $f'(t_0)$ verwendet.

Einseitige Ableitungen in den Randpunkten: Wenn f auf I differenzierbar und $x_1 \in I$ linker Randpunkt von I ist, dann ist $f'(x_1)$ die *rechtsseitige Ableitung*

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Ist $x_2 \in I$ rechter Randpunkt von I, dann ist $f'(x_2)$ die *linksseitige Ableitung*

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Satz über die Differentiation als lineare Approximation:

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$ genau dann, wenn Folgendes gilt: Es gibt eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \in I, x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{14.1}$$

In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt durch die Ableitung, d.h. $a = f'(x_0)$.

Beweis: (a) Nehmen wir zunächst an, dass f differenzierbar in x_0 ist und setzen einfach $R(x, x_0) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Dann folgt für $x \in I$ mit $x \neq x_0$ auch direkt

$$\frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \to \quad f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \quad (x \to x_0).$$

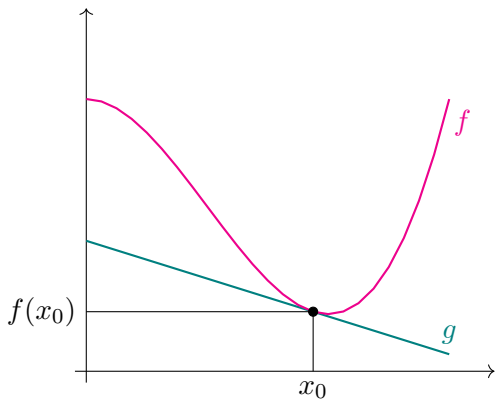
(b) Nehmen wir nun an, dass (14.1) gilt. Für $x \neq x_0$ erhalten wir dann

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} \quad \to \quad a + 0 = a \quad (x \to x_0).$$

Daher ist f differenzierbar in x_0 mit Ableitung $f'(x_0) = a$. □

Geometrische Interpretation und Tangentenkonstruktion: Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt x_0 und $a := f'(x_0)$, dann betrachten wir im $\mathbb{R}^2$ durch die Gerade g mit der Gleichung

$$y = f(x_0) + a(x - x_0).$$



Durch $g(x) := f(x_0) + a(x - x_0)$ erhalten wir eine (affin) lineare Approximation an den Graphen von f in der Nähe von $(x_0, f(x_0))$ mit der Berührungseigenschaft erster Ordnung

$$\frac{|g(x) - f(x)|}{|x - x_0|} = \frac{|R(x, x_0)|}{|x - x_0|} \to 0 \quad (x \to x_0).$$

Die Gerade g heißt *Tangente* im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an den Funktionsgraphen von f und hat die *Steigung* $a = f'(x_0)$.

Beispiele:

1) Konstante Funktionen sind stets differenzierbar mit Ableitung 0.

2) Die Funktion $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist differenzierbar mit Ableitung konstant gleich 1.

3) $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$, denn für $x \neq x_0$ ist

$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \quad \to \quad 2x_0 \quad (x \to x_0).$$

4) exp ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\exp' = \exp$, denn für $x \neq x_0$ erhalten wir dank der Eigenschaft $(e^r - 1)/r \to 1$ $(r \to 0)$ (vgl. 12.1(v))

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\frac{e^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \quad \to \quad e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0} \quad (x \to x_0).$$

5) Die Funktionen sin und cos sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$: Ist nämlich $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h = x - x_0 \neq 0$, dann folgen aus den Additionstheoremen (9.1), (9.2) zusammen mit den Beispielen 3), 4) aus 12.1 die beiden Grenzwerteigenschaften

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} &= \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \quad \to \quad \sin x_0 \cdot 0 + \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0 \quad (x \to x_0)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} &= \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} \quad \to \quad \cos x_0 \cdot 0 - \sin x_0 \cdot 1 = -\sin x_0 \quad (x \to x_0).\end{aligned}$$

6) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$, denn für $x_0 \neq 0$, $h \neq 0$ und $0 < |h| < |x_0|$ ist

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}\right) = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{hx_0(x_0 + h)} = \frac{-h}{hx_0(x_0 + h)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} \quad \to \quad \frac{-1}{x_0^2} \quad (h \to 0).$$

7) **Ü** Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \neq 0$ und nicht differenzierbar in 0.

Differenzierbare Funktionen sind stetig: Ist nämlich $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, dann folgt wegen $R(x, x_0) = \frac{R(x,x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0) \to 0 \cdot 0$ für $x \to x_0$ auch direkt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0) \quad \to \quad f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0) \quad (x \to x_0).$$

Bemerkung: Die Umkehrung der vorigen Aussage gilt i.A. nicht, denn z.B. ist die Funktion $x \mapsto |x|$ stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht differenzierbar in 0.

14.2. Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

(i) Linearität: Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\alpha f + \beta g$ differenzierbar und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

(ii) Produkt- oder Leibniz-Regel: Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist auch fg differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

(iii) Kettenregel: Ist $g\colon I \to J$ differenzierbar in x_0 und $f\colon J \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 := g(x_0)$, dann ist auch $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Wenn f und g differenzierbar auf den jeweiligen Intervallen sind, dann ist $f \circ g$ differenzierbar auf I und es gilt

$$\frac{d}{dx}\Big(f(g(x))\Big) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Hier bezeichnen wir oft $x \mapsto f'(g(x))$ als *äußere* und $x \mapsto g'(x)$ als *innere* Ableitung.

(iv) Quotientenregel: Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Speziell ergibt sich mit $f = 1$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ die Formel

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Beweis: (i): Wir berechnen für $x \neq x_0$ direkt

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} \\
&\qquad = \alpha\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad \to \quad \alpha\, f'(x_0) + \beta\, g'(x_0) \quad (x \to x_0).
\end{aligned}$$

(ii): Wir berechnen für $x \neq x_0$ mittels Einschieben von Termen im Zähler dank der Stetigkeit von g

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad \to \quad f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad (x \to x_0).
\end{aligned}$$

(iii): Wir schreiben $f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y-y_0) + R(y,y_0) = f(y_0) + (f'(y_0) + r(y,y_0))(y-y_0)$ mit $r(y,y_0) := \frac{R(y,y_0)}{y-y_0}$ und $\lim\limits_{y\to y_0} r(y,y_0) = 0$. Analog ist $g(x) = g(x_0) + (g'(x_0) + s(x,x_0))(x-x_0)$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} s(x,x_0) = 0$. Mit $y_0 = g(x_0)$ und $y := g(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x) - (f\circ g)(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(y_0) \\
&= (f'(y_0) + r(y,y_0))(y-y_0) = (f'(g(x_0)) + r(g(x),g(x_0)))\cdot \underbrace{(g(x)-g(x_0))}_{(g'(x_0)+s(x,x_0))(x-x_0)} \\
&= f'(g(x_0))\,g'(x_0)(x-x_0) + \\
&\quad + \Big(\underbrace{r(g(x),g(x_0))\,g'(x_0) + f'(g(x_0))\,s(x,x_0) + r(g(x),g(x_0))\,s(x,x_0)}_{\rho(x,x_0)}\Big)(x-x_0) \\
&= f'(g(x_0))\,g'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\rho(x,x_0)(x-x_0)}_{\tilde{R}(x,x_0)} = f'(g(x_0))\,g'(x_0)(x-x_0) + \tilde{R}(x,x_0),
\end{aligned}$$

wobei $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\tilde{R}(x,x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \rho(x,x_0) = 0$ gilt. Daher ist $f\circ g$ differenzierbar in x_0 mit Ableitung $(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\,g'(x_0)$. Die zweite Aussage folgt nun direkt aus der ersten.

(iv) Wir zeigen zuerst die zweite Formel: Mit der Funktion $F(y) := 1/y$ $(y \neq 0)$ und $F'(y) = -1/y^2$ ergibt sich nach der Kettenregel für $F\circ g = 1/g$ die behauptete Gleichung $(\frac{1}{g})' = -\frac{1}{g^2}\cdot g'$.

Um nun die erste Formel zu zeigen, können wir alles auf einem Teilintervall um x_0 betrachten, wo stets $g(x) \neq 0$ gilt, und dort die Produktregel anwenden:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

□

Beispiele:

1) Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$. (Wobei wir im Falle $n < 1$ auch $x \neq 0$ annehmen.)

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt dies einfach induktiv aus $\frac{d}{dx}x^1 = \frac{d}{dx}x = 1 = 1x^{1-1}$ und mittels Produktregel

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^n x) = \left(\frac{d}{dx}x^n\right)\cdot x + x^n\frac{d}{dx}x = nx^{n-1}\cdot x + x^n\cdot 1 = (n+1)x^{n+1-1}.$$

Für $n = 0$ ist $\frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0 = 0x^{0-1}$.

Für $-n \in \mathbb{N}$ verwenden wir $x^n = F(x^{-n})$ mit $F(y) := 1/y$ und wenden die Kettenregel an:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}F(x^{-n}) = F'(x^{-n})\cdot(x^{-n})' &= \frac{-1}{(x^{-n})^2}\cdot(-nx^{-n-1}) \\
&= \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

2) Für die Ableitungen von Polynomfunktionen erhalten wir

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

3) Im Bereich $x > 0$ ist $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, denn

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \quad \to \quad \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (x \to x_0).$$

4) $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, denn nach der Quotientenregel ist

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\text{bzw.} \quad \tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

5) Für $a > 0$ ist $\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x \log a} = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$.

14.3. Lokale Extrema

Wir nehmen weiterhin an, dass $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, das nicht nur aus einem Punkt besteht.

Definition:

Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ besitzt ein *lokales Maximum* im Punkt $x_0 \in I$, falls es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung $f(x) \leq f(x_0)$ gilt.
Das Maximum wird *strikt* genannt, falls $f(x) < f(x_0)$ gilt für alle $x \in I$, $x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$.
Analog wird der Begriff eines *lokalen Minimums* mittels $f(x) \geq f(x_0)$ für x nahe x_0 definiert; für ein *striktes lokales Minimum* verlangen wir $f(x) > f(x_0)$ für x nahe x_0 und $x \neq x_0$.
Wir sagen, die Funktion f habe ein *lokales Extremum* in x_0, wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum besitzt.

Satz:

Sei x_0 ein *innerer Punkt* von I und f differenzierbar in x_0. Wenn f ein lokales Extremum in x_0 besitzt, dann muss $f'(x_0) = 0$ gelten.

Beweis: Ein lokales Minimum von f ist ein lokales Maximum von $-f$, daher genügt es, den Fall eines lokalen Maximums in x_0 zu untersuchen.

Wegen der Differenzierbarkeit von f in x_0 stimmt die Ableitung $f'(x_0)$ mit den beiden einseitigen Ableitungen überein (dies folgt aus der Existenz des Grenzwertes der Differenzenquotienten).

Wir wählen $\delta > 0$ wie in der Definition des lokalen Maximums, dann gilt für $x_0 < x < x_0 + \delta$ stets $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ und somit

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Entsprechend gilt für $x_0 - \delta < x < x_0$ stets $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ und daher

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Also folgt insgesamt $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ und somit $f'(x_0) = 0$. □

14.4. Mittelwertsätze und Anwendungen

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a,b[$, dann gibt es ein $\theta \in]a,b[$ mit der Eigenschaft

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\theta).$$

Spezialfall (Satz von Rolle): Gilt unter denselben Voraussetzungen $f(a) = f(b)$, dann gibt es ein $\theta \in]a,b[$ mit $f'(\theta) = 0$.

Beweis: 1. Fall, f konstant: Hier ist die Aussage klar.

2. Fall, f nicht konstant und $f(a) = f(b) = 0$: Wegen der Stetigkeit von f auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ besitzt f ein Maximum und ein Minimum (vgl. 13.2). Falls das Maximum an einer Stelle $\theta \in]a,b[$ im Inneren angenommen wird, dann folgt $f'(\theta) = 0$. Andernfalls gilt $f(x) \leq f(a) = f(b) = 0$ für alle $x \in]a,b[$ und f muss als nichtkonstante Funktion einen negativen Minimalwert besitzen. Wegen $f(a) = f(b) = 0$ muss dieser an einer Stelle $\theta \in]a,b[$ im Inneren angenommen werden, daher folgt auch $f'(\theta)$.

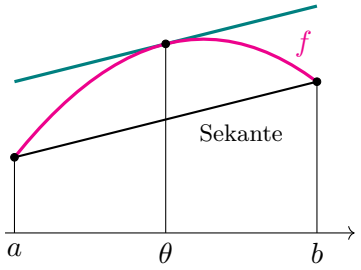
3. Im allgemeinen Fall betrachten wir die ebenfalls stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die durch

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

definiert wird. Im offenen Intervall $]a,b[$ ist g auch differenzierbar und es gilt $g(a) = 0 = g(b)$. Auf die Funktion g ist nun also Fall 1 oder 2 anwendbar, daher gibt es ein $\theta \in]a,b[$ mit $g'(\theta) = 0$. Das bedeutet nun wegen $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ aber

$$0 = g'(\theta) = f'(\theta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

womit der Mittelwertsatz bewiesen wäre. □



In der Situation des Mittelwertsatzes gibt es also im Inneren des Intervalls mindestens eine Stelle, an der die Ableitung übereinstimmt mit der Steigung der Sekante durch den Anfangs- und Endpunkt des Funktionsgraphen.

Monotonie und Ableitung: Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall I, dann gilt:

(i) f ist monoton wachsend auf I $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$;

(ii) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ $\quad\Longrightarrow\quad$ f ist streng monoton wachsend auf I.

Analoge Aussagen gelten für monoton fallendes f mittels $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$.

Beweis: Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ beliebig, dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\theta \in]x_1, x_2[$, sodass

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot f'(\theta)$$

gilt. Daraus folgt unmittelbar die Aussage in (ii) und auch die Implikation $\boxed{\Leftarrow}$ in (i).

Bleibt noch die Implikation $\boxed{\Rightarrow}$ in (i) zu zeigen: Aus der Monotonie folgt $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \geq 0$ für alle $\xi, x \in I$ mit $\xi \neq x$, wie wir in den beiden Fällen $\xi > x$ und $x < \xi$ unmittelbar sehen können. Daher ist

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0.$$

□

Bemerkung: Die Aussage in (ii) ist i.A. nicht umkehrbar, wie das Beispiel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3$ zeigt. Die Funktion f ist nämlich streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, aber $f'(0) = 0$. (Natürlich ist $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Verschwindende Ableitung auf einem Intervall: Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall I und $f' = 0$, dann muss f konstant sein.

Beweis: Sei $a \in I$ beliebig und fest gewählt. Zu $x \in I$, $x \neq a$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein θ zwischen x und a mit

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(\theta) = 0,$$

d.h. wir erhalten $f(x) = f(a)$. □

Bemerkung: In der obigen Aussage ist es wesentlich, dass I ein *Intervall* ist. Betrachten wir z.B. die Funktion $f\colon [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1$ für $0 \leq x \leq 1$ und $f(x) := 2$ für $2 \leq x \leq 3$, dann ist f differenzierbar mit $f' = 0$, aber die Werte von f sind nicht auf dem ganzen Definitionsbereich gleich einer einzigen Konstanten.

Beispiel: **Anwendung auf eine Differentialgleichung** Sei I ein Intervall und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir suchen zunächst differenzierbare Funktionen $u\colon I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\boxed{u' = \alpha\, u.}$

Wir wissen bereits aus Beispiel 4) in 14.1, dass exp die Eigenschaft $\exp' = \exp$ hat und sehen sofort, dass $u(t) := e^{\alpha t}$ wegen $u'(t) = e^{\alpha t}\alpha = \alpha\, u(t)$ eine Lösung ist.

Wir fragen uns, welche weiteren Lösungen der Gleichung $u' = \alpha u$ es geben könnte. Wir bilden dazu die differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f(t) := u(t)\exp(-\alpha t)$ und erhalten nach der Leibniz-Regel

$$f'(t) = \underbrace{u'(t)}_{\alpha u(t)} e^{-\alpha t} + u(t)\left(e^{-\alpha t}\right)' = \alpha u(t)e^{-\alpha t} - \alpha u(t)e^{-\alpha t} = 0 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Daher gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $t \in I$ die Gleichung $c = f(t) = u(t)e^{-\alpha t}$ besteht, d.h. es muss $u(t) = ce^{\alpha t}$ gelten. Wir sehen weiters, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $u(t) = ce^{\alpha t}$ auch tatsächlich eine Lösung von $u' = \alpha u$ ist.

Ist nun t_0 ein beliebiger Punkt in I, so können wir z.B. aus $u(t_0) = ce^{\alpha t_0}$ die Konstante c berechnen, falls der *Anfangswert* $u(t_0) := u_0$ vorgegeben ist. Es ergibt sich nämlich $c = u_0 e^{-\alpha t_0}$ und somit die Lösung des *Anfangswertproblems* $\boxed{u' = \alpha u \text{ mit } u(t_0) = u_0}$ also in der Form

$$u(t) = u_0 e^{\alpha(t-t_0)} \quad (t \in I). \tag{14.2}$$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a,b[$. Gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$, dann gibt es ein $\theta \in]a,b[$ mit der Eigenschaft

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}.$$

Anmerkung: Der anfangs formulierte Mittelwertsatz ist davon der Spezialfall mit $g(x) = x$.

Beweis: Wegen $g(b) - g(a) = (b-a)g'(\theta_1)$ für ein geeignetes $\theta_1 \in]a,b[$ ist $g(b) - g(a) \neq 0$ garantiert. Wir betrachten nun die stetige Funktion $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\psi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x) - g(a)).$$

Dann ist ψ auch auf $]a,b[$ differenzierbar und erfüllt $\psi(a) = 0 = \psi(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\theta \in]a,b[$ mit

$$0 = \psi'(\theta) = f'(\theta) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\theta).$$

□

14.5. Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Seien I und J Intervalle in $\mathbb{R}$. Angenommen $f\colon I \to J$ ist eine bijektive differenzierbare Funktion mit *differenzierbarer* Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$. Dann können wir in der Gleichung

$$y = f(f^{-1}(y)) \quad (y \in J)$$

auf beiden Seiten die Ableitung bzgl. y bilden und erhalten nach der Kettenregel die Relation

$$1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) \quad \text{mit } x := f^{-1}(y) \text{ bzw. } f(x) = y.$$

Wir sehen, dass notwendigerweise $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ gelten muss, weil sonst der Widerspruch $1 = 0$ auftritt. In obiger Situation erhalten wir nun die bestechende Formel

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x) \tag{14.3}$$

für die Ableitung der Umkehrfunktion.

Für die Praxis bleibt nur noch die Frage offen, unter welcher Bedingung an eine differenzierbare bijektive Funktion wir garantieren können, dass auch die Umkehrfunktion differenzierbar ist. Dabei stellt sich heraus, dass die oben erwähnte Bedingung $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ auch hinreichend ist.

Satz: Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall I und ist dort f' stets positiv bzw. stets negativ, dann ist f streng monoton wachsend bzw. fallend, die Bildmenge $J := f(I)$ ist ein Intervall, f als Abbildung $I \to J$ bijektiv und $f^{-1}\colon J \to I$ ist differenzierbar. Für die Ableitung von f^{-1} gilt dann die Formel (14.3).

Beweis: Die strenge Monotonie von f folgt aus den Erkenntnissen in 14.4 und weiters die Stetigkeit der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ auf dem Intervall $J = f(I)$ aus dem entsprechenden Satz in 13.4. Um die Differenzierbarkeit von f^{-1} auf J zu zeigen, notieren wir zunächst für $y_0, y \in I$ mit $y \neq y_0$ und $x := f^{-1}(y)$, $y_0 := f^{-1}(x_0)$ die Gleichung

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Wegen der Stetigkeit von f^{-1} folgt aus $y \to y_0$ auch $x \to x_0$ und somit gilt

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

woraus auch nochmals die Formel $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$ ablesbar ist. □

Beispiele:

1) Mit log als Umkehrfunktion von $\exp\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ und $y = e^x$, $x = \log y$ erhalten wir

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \quad (y > 0).$$

2) Für beliebiges $b \in \mathbb{R}$ ist $\dfrac{d}{dx} x^b = \dfrac{d}{dx} e^{b \log x} = e^{b \log x} \cdot \dfrac{b}{x} = x^b \cdot \dfrac{b}{x} = b\, x^{b-1}$ im Bereich $x > 0$.

3) Wir hatten in Beispiel 4) aus 14.2 die Gleichung $\tan' = 1 + \tan^2$. Aus dieser gewinnen wir nun für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ die Formel

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4) Auf ähnliche Weise wie gerade vorhin bekommen wir aus den Gleichungen $\sin' = \cos = \sqrt{1-\sin^2}$ und $\cos' = -\sin = -\sqrt{1-\cos^2}$ für $|x| < 1$ die Ableitungsformeln

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

14.6. Die Regeln von de l'Hospital für Grenzwertberechnungen

Beim Versuch der direkten Berechnung von $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ stoßen wir gelegentlich auf einen zunächst unbestimmten Ausdruck der Form „$\dfrac{0}{0}$“, falls

$$(0/0) \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a+} g(x)$$

gilt. Ähnlich können wir auch auf undefinierte Ausdrücke „$\dfrac{\infty}{\infty}$“ oder „$-\dfrac{\infty}{\infty}$“ treffen, wenn beide Funktionen uneigentliche Limiten für $x \to a+$ besitzen, d.h.

$$(\infty/\infty) \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a+} g(x) \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty = \mp \lim_{x\to a+} g(x).$$

Der folgende Satz zeigt, dass wir in beiden Fällen $(0/0)$ und (∞/∞) *dennoch zum Ziel kommen können, falls zusätzlich*

$$(f'/g') \qquad \textit{der Grenzwert} \quad \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \textit{existiert.}$$

Satz: Die Funktionen f, g seien differenzierbar auf dem offenen Intervall $]a,b[$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$. Weiters treffe eine der Voraussetzungen $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a+} g(x)$ oder $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$ oder $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = -\infty$ zu. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne) existiert und somit (f'/g') erfüllt ist, dann gilt

$$(14.4) \qquad \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ein analoger Satz gilt für linksseitige Limiten $x \to b-$, für beidseitige Limiten und auch für Grenzwerte mit $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.

Beweisidee: Für die Situation mit $f(a_+) := \lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a+} g(x) =: g(a_+)$ können wir für jedes $x \in]a,b[$ den verallgemeinerten Mittelwertsatz aus 14.4 anwenden und ein $\theta_x \in]a,x[$ wählen mit der Eigenschaft

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a+)}{g(x) - g(a_+)} = \frac{f'(\theta_x)}{g'(\theta_x)}.$$

Bemerken wir noch, dass $x \to a+$ wegen $a < \theta_x < x$ auch $\theta_x \to a+$ erzwingt, dann werden wir schon auf die Formel (14.4) geführt. (Für einen ausführlichen Beweis siehe [Heu1, Satz 50.1].)

Beispiele:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \boxed{?}$

Wir haben $f(x) := e^x - e^{-x}$ und $g(x) := \sin x$ und bemerken $f(0) = 0 = g(0)$. Betrachten wir den Quotienten der Ableitungen, so ergibt sich $g'(x) = \cos x \neq 0$ für $|x| < \pi/2$ und

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \quad \to \quad \frac{2}{1} = 2 \quad (x \to 0).$$

Daher schließen wir auf

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

2) Für $\alpha > 0$ ist wegen $x^\alpha \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\alpha x^{\alpha-1} \neq 0$ für $x > 0$ auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

3) Auch eine mehrfache Anwendung der Regeln von de l'Hospital kann manchmal zum Ziel führen: Bei $f(x) := x - \sin x$ und $g(x) := x^3$ ist $f(0) = 0 = g(0)$ und wegen $f_1(x) := f'(x) = 1 - \cos x$, $g_1(x) := g'(x) = 3x^2$ auch noch $f_1(0) = 0 = g_1(0)$.

Auch mit einer zweiten Anwendung mittels $f_2(x) := f_1'(x) = \sin x$, $g_2(x) := g_1'(x) = 6x$ sind wir wegen $f_2(0) = 0 = g_2(0)$ noch nicht durch. Aber mit $f_2'(x) = \cos x$, $g_2'(x) = 6 \neq 0$ erhalten wir sukzessive

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

15. Höhere Ableitungen und deren Anwendungen

15.1. Mehrfach differenzierbare Funktionen

Höhere Ableitungen: Wenn $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf dem Intervall I ist und auch die Ableitung $f'\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann heißt f *zweimal differenzierbar* und die Funktion $f'' := (f')'\colon I \to \mathbb{R}$ die *zweite Ableitung* von f. In diesem Fall ist also

$$f''(x_0) = \lim_{x \in I, x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Falls nun auch f'' wiederum differenzierbar ist, können wir auch $f''' := f^{(3)} := (f'')'$ definieren etc.; induktiv, wenn $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ differenzierbar sind, also f n-mal differenzierbar ist, dann nennen wir $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'\colon I \to \mathbb{R}$ die n-te Ableitung von f (oder Ableitung der Ordnung n). Wir schreiben auch $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$ und $f^{(2)} := f''$, damit wir in Formeln stets $f^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ verwenden können.

Zum Beispiel können wir für zweimal differenzierbare Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ durch zweifache Anwendung der Leibniz-Formel wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}(fg)^{(2)} = (fg)'' = (f'g + fg')' &= (f'g)' + (fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' \\ &= f''g + 2f'g' + fg'' = f^{(2)}g + 2f^{(1)}g^{(1)} + fg^{(2)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} f^{(k)} g^{(2-k)}.\end{aligned}$$

Allgemeiner durch Induktion, wenn f und g n-mal differenzierbar sind, ergibt sich die Leibniz-Formel höherer Ordnung zu

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Stetig differenzierbare Funktionen: Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar* oder C^1-Funktion, falls f differenzierbar ist und die Ableitung $f'\colon I \to \mathbb{R}$ stetig ist. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *n-mal stetig differenzierbar* oder C^n-Funktion, falls f n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}\colon I \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Wir definieren die Mengen $C^0(I) := C(I)$ (stetige Funktionen auf I) und für $n \in \mathbb{N}$ jeweils

$$C^n(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

Schließlich bezeichnen wir $f\colon I \to \mathbb{R}$ als C^∞-Funktion, falls $f \in C^n(I)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben auch $C^\infty(I)$ für die Menge aller C^∞-Funktionen auf I und erhalten insgesamt folgende (strikte) Inklusionskette:

$$C^0(I) = C(I) \supseteq C^1(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \cdots \supseteq C^n(I) \supseteq C^{n+1}(I) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(I).$$

Beispiele:

1) $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\exp^{(n)} = \exp$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

2) Wegen $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$ sind cos und sin zweimal (stetig) differenzierbar und es gilt

$$\cos'' = -\sin' = -\cos \quad \text{und} \quad \sin'' = \cos' = -\sin\,.$$

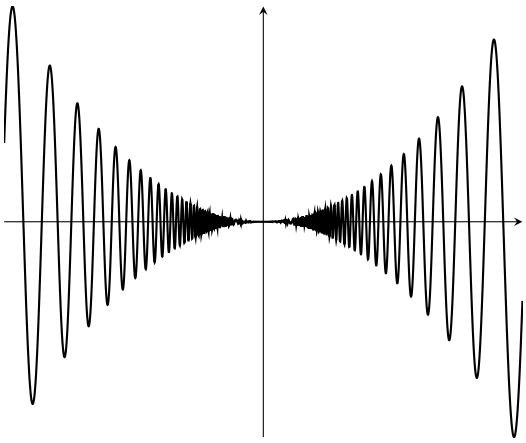
Abgesehen von Vorzeichenwechsel sind alle Ableitungen wieder durch cos oder sin gegeben und daher auch stetig differenzierbar, insgesamt also erhalten wir $\cos, \sin \in C^\infty(\mathbb{R})$.

3) Jede Polynomfunktion $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ ist eine C^∞-Funktion und es gilt

$$p^{(m)} = m!\, a_m, \quad p^{(m+k)} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

4) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := 0$ und $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ ist differenzierbar und hat als Ableitung $f'\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f'(0) = 0$ und $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ für $x \neq 0$. Für $x \neq 0$ ist das klar nach der Kettenregel und für 0 berechnen wir direkt unter Beachtung der Beschränktheit von $\sin(1/x)$)

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = x\sin(1/x) \quad \to \quad 0 \quad (x \to 0).$$



Die Ableitungsfunktion f' ist nicht stetig in 0, denn Ü $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht. Somit kann f' auch nicht differenzierbar sein in 0.

(In $]-\infty, 0[$ und in $]0, \infty[$ sind die Einschränkungen von f sogar C^∞-Funktionen.)

5) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(0) := 0$ und $g(x) := e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ ist eine C^∞-Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ mit $g^{(n)}(0) = 0$. Für $x \neq 0$ ist das nach der Kettenregel klar, nur für die Differenzierbarkeit und Ableitungen in 0 ist eine separate Untersuchung nötig.

Zunächst berechnen wir für die erste Ableitung mit Hilfe einer Substitution $y = 1/x$ und der Regel von de l'Hospital (wegen $e^{y^2} \to \infty$ für $y \to \pm\infty$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

womit $g'(0) = 0$ gezeigt ist. Außerdem ist $g'(x) = e^{-1/x^2}(-1/x^2)' = e^{-1/x^2}(-x^{-2})' = 2x^{-3}e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$.

Im Bereich $x \neq 0$ folgt induktiv nun direkt aus mehrfachen Anwendungen der Kettenregel und der Leibniz-Formel, dass wir für die n-te Ableitung mit einem gewissen Polynom p_n stets

$$g^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$

erhalten. Zusätzlich nehmen wir an, dass auch bereits $g^{(k)}(0) = 0$ für $k = 1, \ldots, n$ nachgewiesen sei. Mit $y = 1/x$ ergibt sich daraus für den Differenzenquotienten bei 0 der Ausdruck

$$\frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{g^{(n)}(x)}{x} = yp_n(y)e^{-y^2} = \frac{yp_n(y)}{e^{y^2}}.$$

Ein Limes $x \to 0$ auf der linken Seite entspricht wieder den Limiten $y \to \pm\infty$ auf der rechten Seite. Auf Letztere ist die Regel von de l'Hospital anwendbar, wobei das Polynom im Zähler nach endlich vielen Anwendungen durch Differentiationen konstant wird, während im Nenner nach jeder Differentiation stets ein nichtkonstantes Polynom mal $\exp(y^2)$ steht und gegen $\pm\infty$ strebt. Somit gilt schließlich

$$\lim_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{yp_n(y)}{e^{y^2}} = 0,$$

d.h. $g^{(n)}$ ist differenzierbar in 0 und $g^{(n+1)}(0) = 0$.

Anwendung auf die Differentialgleichung $u'' + \lambda^2 u = 0$ für $\lambda > 0$: Aus dem obigen Beispiel 2) lernen wir, dass die Funktionen $u_1, u_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u_1(x) := \cos(\lambda x)$ und $u_2(x) := \sin(\lambda x)$ Lösungen der angegebenen Gleichung sind, weil $u_1''(x) = (u_1'(x))' = (-\lambda\sin(\lambda x))' = -\lambda^2\cos(\lambda x) = -\lambda^2 u_1(x)$ und $u_2''(x) = (u_2'(x))' = (\lambda\cos(\lambda x))' = -\lambda^2\sin(\lambda x) = -\lambda^2 u_2(x)$ gilt.

Wegen der Linearität der Ableitung ist für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ daher auch $u := c_1u_1 + c_2u_2$ eine Lösung der Gleichung $u'' + \lambda^2 u = 0$. Dies ist das *Superpositionsprinzip* für *lineare homogene Differentialgleichungen*, bei denen die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur auf lineare Weise auf der linken Seite auftreten und deren rechte Seite 0 ist.

Es lässt sich auch zeigen, dass jede zweimal differenzierbare Lösung $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gleichung $\boxed{u'' + \lambda^2 u = 0}$ von der Form

$$u(x) = c_1\cos(\lambda x) + c_2\sin(\lambda x) \tag{15.1}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sein muss.

Beweis: Wir machen dazu einen kurzen Ausflug ins Komplexe, indem wir annehmen, u sei eine Lösung und die Funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $v(x) := u'(x) + \mathrm{i}\lambda u(x)$ betrachten. Wir erklären die Differenzierbarkeit und Ableitung einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ einfach durch Rückführung auf Real- und Imaginärteile, also auf die beiden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ und $x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$. Dann folgt für v nämlich $v' - \mathrm{i}\lambda v = (u' + \mathrm{i}\lambda u)' - \mathrm{i}\lambda(u' + \mathrm{i}\lambda u) = u'' + \mathrm{i}\lambda u' - \mathrm{i}\lambda u' + \lambda^2 u = -\lambda^2 u + \lambda^2 u = 0$, d.h.

$$v' = \mathrm{i}\lambda v.$$

Durch direkte Erweiterung des Beispiels aus 14.4 auf konstante komplexe Faktoren in der Differentialgleichung erhalten wir $v(x) = ce^{\mathrm{i}\lambda x}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$. Daher gilt

$$u'(x) + \mathrm{i}\lambda u(x) = ce^{\mathrm{i}\lambda x}.$$

Setzen wir nun $w(x) := u(x)e^{\mathrm{i}\lambda x} - \frac{c}{2\mathrm{i}\lambda}e^{2\mathrm{i}\lambda x}$, so folgt

$$w'(x) = u'(x)e^{\mathrm{i}\lambda x} + u(x)\mathrm{i}\lambda e^{\mathrm{i}\lambda x} - \frac{c}{2\mathrm{i}\lambda}2\mathrm{i}\lambda e^{2\mathrm{i}\lambda} = \underbrace{(u'(x) + \mathrm{i}\lambda u(x))}_{ce^{\mathrm{i}\lambda x}} e^{\mathrm{i}\lambda x} - ce^{2\mathrm{i}\lambda x} = 0.$$

Daher gibt es eine Konstante $d \in \mathbb{C}$ mit $d = w(x) = u(x)e^{\mathrm{i}\lambda x} - \frac{c}{2\mathrm{i}\lambda}e^{2\mathrm{i}\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, woraus nun die Relation

$$u(x) = de^{-\mathrm{i}\lambda x} + ce^{\mathrm{i}\lambda x} = d(\cos(\lambda x) - \mathrm{i}\sin(\lambda x)) + c(\cos(\lambda x) + \mathrm{i}\sin(\lambda x)) = (c+d)\cos(\lambda x) + \mathrm{i}(c-d)\sin(\lambda x)$$

folgt. Nachdem wir (hier) nur an reellwertigen Lösungen interessiert sind, verlangen wir $c + d \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{i}(c-d) \in \mathbb{R}$. Letzteres Ü ist gleichwertig mit $\overline{c} = d$ und wir erhalten schließlich mit $c_1 := 2\operatorname{Re} d$ und $c_2 := 2\operatorname{Im} d$ die Form

$$u(x) = c_1\cos(\lambda x) + c_2\sin(\lambda x)$$

wie in der Gleichung (15.1) behauptet. □

15.2. Taylorentwicklung

Wir hatten in (14.1) gesehen, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion als lineare Approximation in der Nähe eines Punktes aufgefasst werden kann. Bei der Taylorentwicklung geht es nun darum, unter stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen höherer Ordnung eine Approximation durch Polynome entsprechenden Grades zu erreichen.

Satz von Taylor

Sei I ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^{n+1}(I)$. Für $x \in I$ gilt dann

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{15.2}$$

mit dem *Restglied* $R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta)\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, wobei θ zwischen x_0 und x liegt.

Das Polynom $p_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt *Taylorpolynom n-ter Ordnung* von f an der Stelle x_0. Mit diesem erhalten wir in etwas kompakterer Notation

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x).$$

Beweis: Für $x = x_0$ ist die Aussage einfach $f(x_0) = f(x_0)$ und somit trivial, weshalb wir ab nun $x \neq x_0$ annehmen und fixieren. Wir definieren die Polynomfunktionen $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}}{n!}(x-t)^n, \quad G(t) := \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Es folgt $G'(t) = -(x-t)^n/n!$ und somit auch $G'(t) \neq 0$ für t zwischen x_0 und x. Weiters ist

$$\begin{aligned} F'(t) = {} & -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) - \ldots \\ & \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \\ & = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

und Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes aus 14.4 ergibt nun

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\theta)}{G'(\theta)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x-\theta)^n}{-\frac{(x-\theta)^n}{n!}} = f^{(n+1)}(\theta)$$

mit einem gewissen θ zwischen x_0 und x. Wegen $F(x) = 0 = G(x)$ folgt daraus schließlich

$$f(x) - p_n(x) = F(x_0) = f^{(n+1)}(\theta)\, G(x_0) = f^{(n+1)}(\theta)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = R_n(x).$$

□

Beispiele:

1) Es gilt $\exp^{(n)} = \exp$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher folgt für $x_0 := 0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit einem passenden θ zwischen 0 und x die Entwicklung

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{p_n(x)} + e^\theta \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Wegen $|\theta| \le |x|$ und der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ (Beispiel 1) in 11.4) gilt $|x|^k/k! \to 0$ $(k \to \infty)$ und somit

$$|e^x - p_n(x)| = |R_n(x)| \le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty).$$

2) Wir betrachten $f\colon\ ]-1,\infty[\ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \log(1+x)$. Wir berechnen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad \ldots$$

und kommen induktiv auf

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \in \mathbb{N}, x > -1).$$

Mit $x_0 := 0$ im Satz von Taylor erhalten wir

$$\log(1+x) = \underbrace{0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n}_{p_n(x)} + R_n(x)$$

mit dem Restglied $R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta)^{n+1}}$ und θ zwischen 0 und x.

Für $0 \le \theta \le x \le 1$ haben wir die Abschätzung $|R_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{n+1}$ und daher für $x \in [0,1]$ auch

$$|\log(1+x) - p_n(x)| = |R_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

3) Wir erinnern an $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$ etc., woraus sich für $m \in \mathbb{N}_0$ die allgemeine Formel

$$\cos^{(m)} = \begin{cases} (-1)^k \cos & \text{für } m = 2k, \\ (-1)^{k+1} \sin & \text{für } m = 2k+1, \end{cases}$$

ergibt. Mit $x_0 := 0$ und $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$, $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$ erhalten wir aus dem Satz von Taylor (mit $2n+1$ statt n) daher

$$\cos x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{p_{2n+1}(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\theta}_{R_{2n+1}(x)}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x).$$

mit einem θ zwischen 0 und x.

Analog ergibt sich für $m \in \mathbb{N}_0$ auch

$$\sin^{(m)} = \begin{cases} (-1)^k \sin & \text{für } m = 2k, \\ (-1)^k \cos & \text{für } m = 2k+1, \end{cases}$$

und daraus wiederum mit $x_0 := 0$ wegen $\sin^{(2k)}(0) = 0$, $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ die Taylorentwicklung

$$\sin x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{p_{2n}(x)} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\theta_1}_{R_{2n}(x)}$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

mit geeignetem θ_1 zwischen 0 und x.

Wiederum aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ (Beispiel 1) in 11.4) folgt nun, dass sowohl $|x|^{2n+2}/(2n+2)! \to 0$ $(n \to \infty)$ als auch $|x|^{2n+1}/(2n+1)! \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt. Beachten wir zusätzlich noch $|\cos\theta| \leq 1$, $|\cos\theta_1| \leq 1$, so gelangen wir zu den beiden Aussagen

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| = |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty),$$
$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = |R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty).$$

15.3. Vergleich von Größenordnungen und die Landau-Symbole

Wir führen hier eine Schreibweise für einen qualitativen Vergleich des Wachstumsverhaltens von zwei Funktionen ein.

(a) Für zwei Funktionen $f, g\colon\ ]a, \infty[\to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to \infty),$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $R > a$ existiert, sodass $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ für alle $x \geq R$ gilt. Wir sagen in dem Fall, dass $f(x)$ ein „Klein-Oh“ von $g(x)$ ist für x gegen unendlich.

Gilt für ein $R_0 > a$ stets $g(x) \neq 0$ für $x \geq R_0$, dann ist obige Definition gleichbedeutend mit der Aussage

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Entsprechend schreiben wir

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to \infty),$$

falls $K > 0$ und $R > a$ gibt mit der Eigenschaft $|f(x)| \leq K|g(x)|$ für alle $x \geq R$. Wir sagen $f(x)$ ist ein „Groß-Oh“ von $g(x)$ für x gegen unendlich.

(b) Ist I ein Intervall, das nicht nur aus einem Punkt besteht, $x_0 \in I$ und $f, g\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, dann schreiben wir

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \in I, x \to x_0),$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Wir sagen in dieser Situation $f(x)$ ist ein “Klein-Oh“ von $g(x)$ für x gegen x_0. Gilt $g(x) \neq 0$ für $x \in I \setminus \{x_0\}$, dann ist dies wieder gleichbedeutend mit

$$\lim_{x \in I, x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Schließlich schreiben wir

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \in I, x \to x_0),$$

falls es $K > 0$ und $\delta > 0$ gibt mit der Eigenschaft $|f(x)| \leq K|g(x)|$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Wir sagen $f(x)$ ist ein „Groß-Oh“ von $g(x)$ für x gegen x_0.

(c) Nützlich sind auch Schreibweisen wie z.B.

$$f_1(x) = f_2(x) + o(g(x)) \quad (x \to x_0),$$

die einfach $f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ bedeuten soll.

Beispiele:

1) $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = O(x^m)$ $(x \to \infty)$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $p(x) = o(x^{m+k})$ $(x \to \infty)$.

2) Für $m > n$ ist $x^m = o(x^n)$ für $x \to 0$.

3) Gemäß Beispiel 2) in 14.6 gilt $\log x = o(x^\alpha)$ $(x \to \infty)$ für jedes $\alpha > 0$.

4) Ist f stetig in x_0, dann gilt $f(x) - f(x_0) = o(1)$ $(x \to x_0)$.

5) Ist f differenzierbar in x_0, dann gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad (x \to x_0).$$

6) Die Taylorapproximation von $x \mapsto \log(1 + x)$ in Beispiel 2) aus 15.2 ergab für $x \geq 0$ die Entwicklung

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_n(x)$$

mit $R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta)^{n+1}}$ und $0 \leq \theta \leq x$. Mit $I = [0, \infty[$ erhalten wir

$$R_n(x) = O(x^{n+1}) = o(x^n) \quad (x \geq 0, x \to 0).$$

15.4. Bedingungen für lokale Maxima und Minima

Wir erinnern zunächst daran (siehe 14.3), dass für eine differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ und einen inneren Punkt $x_0 \in I$ gilt: Wenn f ein lokales Extremum in x_0 besitzt, dann ist notwendigerweise $f'(x_0) = 0$.

Satz:

Sei I ein *offenes* Intervall, $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, also eine C^2-Funktion, dann gelten folgende Aussagen:
(a) Notwendige Bedingung für lokales Maximum/Minimum: Wenn f in x_0 ein lokales Minimum besitzt, dann gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \geq 0.$$

Falls f in x_0 ein lokales Maximum besitzt, dann folgt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \leq 0.$$

(b) Hinreichende Bedingung für lokales Maximum/Minimum: Wenn

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann besitzt f in x_0 ein (striktes) lokales Minimum.
Unter den Bedingungen

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0$$

besitzt f in x_0 ein (striktes) lokales Maximum.

Beweis: (a): Wenn f in x_0 ein lokales Maximum annimmt, dann wissen wir $f'(x_0) = 0$ bereits aus der obigen Vorbemerkung. Wäre $f''(x_0) > 0$ (und daher f nicht konstant), so folgte aus (b), dass f in x_0 ein striktes lokales Minimum hat — Widerspruch ↯. Also muss $f''(x_0) \leq 0$ sein.

Analog ist das Argument für ein lokales Minimum.

(b): Wir zeigen die Aussage für ein Minimum, jene für ein Maximum lässt sich durch Übergang zu $-f$ daraus ableiten.

Wegen der Stetigkeit von f'' und der Eigenschaft $f''(x_0) > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ garantiert ist.

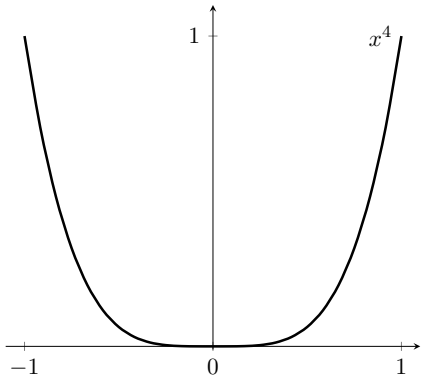
Nach dem Satz von Taylor mit $n = 1$ gibt es nun für $x \in I$ mit $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \delta$ ein θ zwischen x_0 und x, sodass

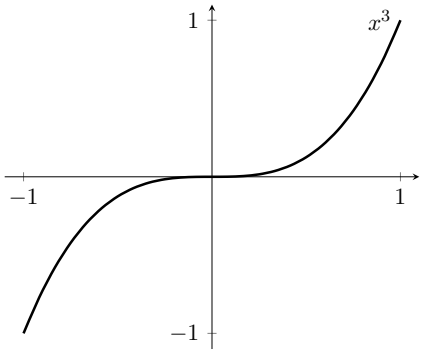
$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{0}(x - x_0) + \underbrace{f''(\theta)}_{>0} \frac{\overbrace{(x - x_0)^2}^{>0}}{2} > f(x_0)$$

gilt. □

Bemerkungen: (i) Die Funktion $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$ besitzt offensichtlich ein striktes lokales Minimum in $x_0 = 0$, aber $f''(0) = 0$ ist nicht strikt positiv. Dies zeigt, dass in einem strikten lokalen Minimum nicht notwendig $f''(x_0) > 0$ gelten muss.

(ii) Die Funktion $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$ erfüllt zwar $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0 \geq 0$, besitzt in x_0 aber kein lokales Minimum. Daher sind die Bedingungen im Teil (a) des obigen Satzes i.A. nicht hinreichend.





Vorgangsweise auf kompakten Intervallen: Eine Funktion $f \in C^2([a,b])$ besitzt als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ gemäß 13.2 jedenfalls ein (globales) Minimum in einem Punkt $\xi_1 \in [a,b]$ und ein (globales) Maximum in einem Punkt $\xi_2 \in [a,b]$.

Im Falle $a < \xi_1 < b$ ist sicherlich $f'(\xi_1) = 0$ und $f''(\xi_1) \geq 0$. Ist ξ_1 allerdings ein Randpunkt, so muss nicht mal $f'(\xi_1) = 0$ gelten. (Z.B. $f = \mathrm{id}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\xi_1 = 0$ und $f'(0) = 1 \neq 0$.)

Entsprechend gilt für $a < \xi_2 < b$ garantiert $f'(\xi_2) = 0$ und $f''(\xi_2) \leq 0$, während im Randpunktfall wieder keine Aussage über $f'(\xi_2)$ oder $f''(\xi_2)$ getroffen werden kann. (Im Beispiel $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ wird das Maximum im Randpunkt 1 angenommen und wir haben $f'(1) = 2 = f''(1)$, also $f'(1) \neq 0$ und $f''(1) \not\leq 0$.)

Daher empfiehlt sich bei der Suche nach lokalen und globalen Maxima und Minima einer C^2-Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folgende *systematische Vorgangsweise:*

1. Bestimmung aller *kritischen Stellen*, das sind die „Kandidaten“ für lokale Extrema, im Inneren $]a, b[$ durch Lösung der Gleichung

$$f'(x) = 0 \quad \text{mit } a < x < b.$$

Die Lösungsmenge bezeichnen wir mit $L \subseteq]a, b[$.

2. Berechnung von $f''(z)$ für jeden Punkt $z \in L$. In den Punkten $z \in L$ mit $f''(z) > 0$ gibt es (strikte) lokale Minima, in den Punkten $z \in L$ mit $f''(z) < 0$ (strikte) lokale Maxima.

3. Die Punkte $z \in L$ mit $f''(z) = 0$ müssen wir extra daraufhin untersuchen, ob sie Eigenschaften eines lokalen Extremums gemäß 14.3 haben. (Z.B. in kleinen Teilintervallen links und rechts von z auf Monotonie prüfen oder mit anderen Methoden Funktionswerte in kleinen Umgebungen vergleichen oder abschätzen.)

4. Untersuchung, ob in einem der Randpunkte a bzw. b die Bedingung aus 14.3 für ein lokales Extremum erfüllt ist. Im Wesentlichen durch Vergleich der Funktionswerte $f(a)$ bzw. $f(b)$ mit jenen für nahegelegene $x \in [a, b]$.

5. Vergleich der Funktionswerte $f(a)$ bzw. $f(b)$ mit den Werten $f(\xi)$ für alle im Inneren gefundenen lokalen Extrema $\xi \in]a, b[$, um das globale Minimum und Maximum zu finden.

Beispiel: Wir betrachten $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$.

1. Kritische Stellen: $f'(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1)$ hat die Nullstellen $x_0 := 0$ und $1 \pm \sqrt{1-1} = 1$ doppelt. Wir setzen $x_1 := 1$, dann ist in obiger Notation $L = \{x_0, x_1\} = \{0, 1\}$.

2. Wegen $f''(x) = 3x^2 - 4x + 1$ ist $f''(0) = 1 > 0$ und $f''(1) = 0$. In $x_0 = 0$ haben wir also jedenfalls ein lokales Minimum mit Funktionswert $f(0) = 0$.

3. Untersuchung des Punktes $x_1 = 1$: Wegen $f'(x) = x(x-1)^2$ ist $f'(x) > 0$ für $0 < x < 1$ und $1 < x \leq 2$, somit f sicherlich streng monoton wachsend auf den Teilintervallen $]0, 1[$ und $]1, 2]$. Für beliebige Zahlen ξ, η mit $0 < \xi < 1 < \eta < 2$ ist daher wegen der Stetigkeit von f auch

$$f(\xi) < \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1+} f(x) < f(\eta),$$

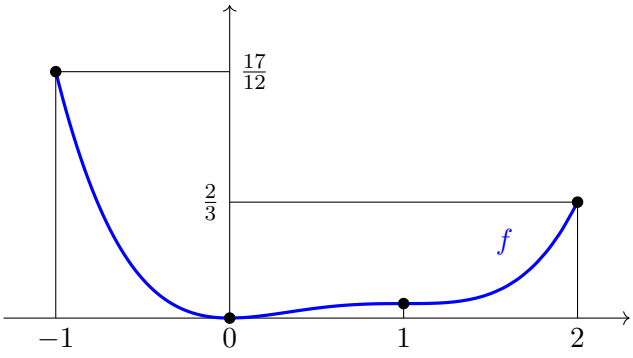
weshalb in 1 kein lokales Maximum oder Minimum von f sitzen kann.

4. Randpunkte: Für $-1 \leq x < 0$ ist $f'(x) = x(x-1)^2 < 0$, also f streng monoton fallend in $[-1, 0[$ und somit ein (striktes) lokales Maximum im linken Randpunkt -1. Wegen der bereits in 3. vermerkten strengen Monotonie von f im Teilintervall $]1, 2]$ hat f auch im rechten Randpunkt 2 ein (striktes) lokales Maximum.

5. Vergleich der Funktionswerte $f(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3+8+6}{12} = \frac{17}{12} > 1$, $f(0) = 0$ und $f(2) = \frac{16}{4} - \frac{2 \cdot 8}{3} + \frac{4}{2} = 4 - \frac{16}{3} + 2 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{18-16}{3} = \frac{2}{3} < 1$ nimmt f in 0 das globale Minimum und in -1 das globale Maximum an.

In der beigefügten Skizze werden die Resultate anschaulich:

Globales Minimum in 0,
globales Maximum in -1,
lokales Maximum in 2
und kein Extremum in $x = 1$.



Teil D

Folgen, Reihen und Integrale von Funktionen

16. Taylorreihen und Potenzreihen

16.1. Taylorreihen

Wir können für eine Funktion $f \in C^\infty(I)$ und $x_0, x \in I$ die Taylorentwicklung gemäß 15.2 für beliebige Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x).$$

Falls nun $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ gilt, dann folgt daraus die Darstellung als *Taylorreihe* in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Beispiele:

1) Für exp haben wir in Beispiel 1) aus 15.2 mit $x_0 = 0$ bereits gesehen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt. Daher erhalten wir unmittelbar die Taylorreihenentwicklung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2) Aus Beispiel 3) in 15.2 wissen wir, dass auch die Restglieder der Taylorentwicklungen für cos und sin um $x_0 = 0$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gegen 0 streben. Daher erhalten wir die beiden Taylorreihenentwicklungen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

und

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3) Für $y \in \mathbb{R}$ folgern wir aus 2) (und der absoluten Konvergenz der Reihen) nun

$$\begin{aligned}\cos y + \mathrm{i} \sin y &= (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots) + \mathrm{i}(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots) \\ &= 1 + \mathrm{i}y + \frac{(\mathrm{i}y)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}y)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}y)^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!} = E(\mathrm{i}y),\end{aligned}$$

wobei wir am Ende die in 11.6 definierte Funktion $E\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ wiedererkannt haben. Nach 1) gilt bereits $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = E(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, sodass wir nun insgesamt mit $z = x + \mathrm{i}y$, der Definition $e^z := e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$ (vgl. 10.1) und der Funktionalgleichung für E aus 11.6 auf die Gleichung

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y) = E(x)E(\mathrm{i}y) = E(x + \mathrm{i}y) = E(z)$$

stoßen. Somit haben wir $e^z = E(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ nachgewiesen und dürfen auch gleich noch die folgende komplexe Reihenentwicklung notieren:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

4) Wir hatten in Beispiel 2) aus 15.2 die Taylorentwicklung

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_n(x)$$

mit $|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x}{1+\theta} \right|^{n+1}$ und der Aussage $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für $0 \le x \le 1$. Wir können Letzteres auch noch auf $-\frac{1}{2} \le x < 0$ ausdehnen, weil dann $-\frac{1}{2} \le \theta < 0$ und somit $1 + \theta \ge \frac{1}{2}$ gelten muss, was nun $|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{|x|}{1+\theta} \right)^{n+1} \le \frac{1}{n+1} \left(\frac{1/2}{1/2} \right)^{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ ergibt. Zusammenfassend haben wir also die Taylorreihenentwicklung

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \left(-\frac{1}{2} \le x \le 1 \right).$$

(Wir werden in 16.2 sehen, dass diese Entwicklung auch im größeren Bereich $-1 < x \le 1$ gültig ist.)

Als Spezialfall mit $x = 1$ erhalten wir noch die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2.$$

5) **Binomialreihe:** Wir suchen eine Verallgemeinerung der Relation $(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$ gemäß Binomischem Lehrsatz für Potenzen $\alpha \in \mathbb{R}$ statt $m \in \mathbb{N}$. Dazu definieren wir die Funktion $f\colon\ ]-1, 1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (1 + x)^\alpha$ und erhalten (vgl. Beispiel 2) in 14.5) direkt

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}, \ldots,$$
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k} = k! \binom{\alpha}{k} (1 + x)^{\alpha-k}$$

und folglich $f^{(k)}(0) = k! \binom{\alpha}{k}$, d.h. die Taylorentwicklung bis zur Ordnung n lautet

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x).$$

Das Restglied ist für ein gewisses θ zwischen 0 und x in der Form

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta)^{\alpha-n-1}x^{n+1} = (1+\theta)^{\alpha-n-1}\frac{(\alpha-n-1)x}{n+1}\cdot\frac{(\alpha-n)x}{n}\cdots\frac{(\alpha-N-1)x}{N+1}\cdot\binom{\alpha}{N}x^N,$$

wobei wir $n > N \geq \alpha$ annehmen dürfen, weil wir Konvergenz für $n \to \infty$ untersuchen wollen.

Wir behaupten, dass für $0 \leq x < 1$ in der Tat $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ gilt.

Wegen $0 \leq \theta \leq x$ ist dann $(1+\theta)^{\alpha-n-1} \leq 1$ für alle $n \geq \alpha$, sodass wir zunächst

$$|R_n(x)| \leq \frac{|\alpha-n-1|x}{n+1}\cdot\frac{|\alpha-n|x}{n}\cdots\frac{|\alpha-N-1|x}{N+1}\cdot\binom{\alpha}{N}x^N = b_{n+1}b_n\cdots b_{N+1}|a_N|,$$

erhalten, wobei wir $a_N := \binom{\alpha}{N}x^N$ und $b_k := \frac{|\alpha-k|x}{k}$ gesetzt haben. Wählen wir $q \in \mathbb{R}$ mit $x < q < 1$, dann gibt es wegen $0 \leq b_k \to x$ $(k \to \infty)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq b_k < q$ für $k \geq n_0$. Fixieren wir nun $N := \max\{\alpha, n_0\}$, dann gewinnen wir aus obiger Ungleichung für alle $n > N$ wegen $0 < q < 1$ die Aussage

$$|R_n(x)| \leq q^{n-N+1}|a_N| \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty).$$

Zusammenfassend haben wir folgende Taylorreihenentwicklung gezeigt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \quad (0 \leq x < 1).$$

(Wir werden später sehen, dass diese Entwicklung auch im größeren Bereich $-1 < x < 1$ gültig ist.)

6) Die Taylorreihe für arctan um den Punkt $x_0 = 0$ lässt sich zwar mit einigen Tricks (vgl. [FK1, §10, 1.6]) fast direkt aus dem Satz von Taylor erschließen, aber **Ü** viel eleganter und rascher kann dies mit Hilfe von ein bisschen Potenzreihentheorie hergeleitet werden, weil $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sich für $|x| < 1$ als geometrische Reihe schreiben lässt. Die resultierende Reihe ist dann auch noch in den Randpunkten $x = -1$ und $x = 1$ konvergent (gegen die richtigen Funktionswerte [Heu1, (65.3)]) und führt auf die Entwicklung

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Speziell für $x = 1$ ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

und für $x = 1/\sqrt{3}$ die Summenformel

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k},$$

die eine noch viel rascher konvergente Approximation an π liefert.

Bemerkung: Es kann vorkommen, dass die Taylorreihe für $x \neq x_0$ zwar konvergent ist, aber nicht die Funktion darstellt. (D.h. in diesem Fall geht das Restglied nicht gegen 0.) Für die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$ und $g(0) = 0$ aus Beispiel 5) aus 15.1 haben wir gesehen, dass $g^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Somit ist die Taylorreihe um $x_0 = 0$ für jedes x konvergent, nämlich identisch 0, stellt also für $x \neq 0$ sicher nicht die Funktion dar.

16.2. Potenzreihen

Für eine komplexe *Koeffizientenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und einen *Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ ist die entsprechende *Potenzreihe* für $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch die komplexe Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Wir sehen unmittelbar, dass *jede Taylorreihe eine Potenzreihe definiert.*

Beispiele: Hier allesamt mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

1) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für e^z (Beispiel 1) in 16.1) konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

2) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| \geq 1$.

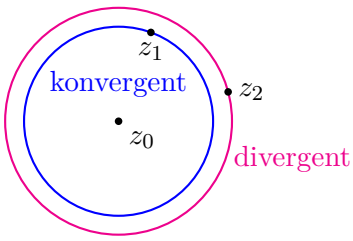
3) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ konvergiert nur für $z = 0$ (gleich z_0), denn für $z \neq 0$ gilt bekanntlich $(1/|z|)^n/n! \to 0$ (dies folgt z.B. aus 1) wegen der Konvergenz der Exponentialreihe für $1/|z|$) und daher kann die Folge der Reihenglieder keine Nullfolge sein:

$$|n!z^n| = n!|z|^n = \frac{1}{\frac{(1/|z|)^n}{n!}} \quad \to \quad \infty \quad (n \to \infty).$$

Der Konvergenzbereich beinhaltet offene Kreisscheiben und hat keine Löcher:

(a) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für ein $z_1 \neq z_0$ konvergiert, dann ist die Reihe absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.

(b) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ divergent ist für ein $z_2 \in \mathbb{C}$, dann ist die Reihe auch divergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > |z_2 - z_0|$.



Ein Loch im Konvergenzbereich würde bedeuten, dass es Divergenzpunkte gibt, deren Abstand zu z_0 geringer ist als jener von gewissen Konvergenzpunkten, was aber nach (a) und (b) unmöglich ist.

Beweis: (a): Aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ folgt $|a_n||z_1-z_0|^n \to 0$ für $n \to \infty$ und insbesondere gibt es eine Schranke $M \geq 0$, sodass $|a_n||z_1-z_0|^n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |z_1-z_0|$. Dann ist $q := \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < 1$ und weiters

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n||z-z_0|^n = |a_n||z_1-z_0|^n q^n \leq Mq^n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Daher ist $\sum Mq^n$ eine konvergente Majorante für $\sum |a_n||z-z_0|^n$, woraus die behauptete absolute Konvergenz folgt.

(b): Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > |z_2-z_0|$. Wäre $\sum a_n(z-z_0)^n$ konvergent, dann nach (a) auch die divergente Reihe $\sum a_n(z_2-z_0)^n$ — Widerspruch $\lightning$. $\square$

Beispiel: Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ mit $z_0 = 0$ (vgl. Taylorreihe für $\log(1+x)$, Beispiel 4) in 16.1) ist konvergent für $z_1 = 1$ (Leibniz-Kriterium) und divergent für $z_2 = -1$ (harmonische Reihe), daher schließen wir, dass wir (absolute) Konvergenz in der offenen Kreisscheibe $K_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ haben und Divergenz für $|z| > 1$.

Über die Randpunkte von $K_1(0)$ mit $|z| = 1$ gibt es oben in (a), (b) keine allgemeinen Aussagen. In der Tat haben wir ja gesehen, dass im vorliegenden Beispiel die Reihe im Randpunkt 1 konvergiert, aber im Randpunkt -1 divergiert.

16.3. Der Konvergenzradius einer Potenzreihe

Wir betrachten die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und setzen vorübergehend $w := z - z_0 \in \mathbb{C}$, um den *Konvergenzradius* R der Potenzreihe wie folgt zu definieren:

- $R := \infty$, falls $\sum a_n w^n$ für alle $w \in \mathbb{C}$ konvergent ist,
- $R := \sup\{|w| \mid \sum a_n w^n \text{ ist konvergent}\}$, falls es eine Zahl $w_2 \in \mathbb{C}$ gibt, für die $\sum a_n w_2^n$ divergent ist. (In diesem Fall ist $\sum a_n w^n$ nach den Erkenntnissen aus 16.2 für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > |w_2|$ divergent und somit $\{|w| \mid \sum a_n w^n \text{ ist konvergent}\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt.)

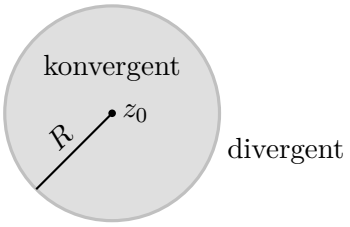
Die Konvergenzeigenschaften der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ lassen sich so zusammenfassen:

1. Fall $R = \infty$: Die Potenzreihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut.
2. Fall $0 < R < \infty$: Die Potenzreihe ist absolut konvergent für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < R$ und divergent für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > R$.
3. Fall $R = 0$: Die Potenzreihe konvergiert nur für $z = z_0$ und ist sonst divergent.

Im zweiten Fall ist also Konvergenz auf der offenen Kreisscheibe

$$K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$$

vom Radius R mit Mittelpunkt z_0 in $\mathbb{C}$ garantiert.



Über das Konvergenzverhalten auf dem Rand von $K_R(z_0)$ – das sind die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| = R$ – gibt der Konvergenzradius selbst keine allgemein gültige Information und diese Fälle müssten bei Bedarf jeweils direkt untersucht werden.

Beispiele:

1) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ hat den Konvergenzradius $R = 1$, weil wir am Ende von 16.2 bereits gesehen haben, dass sie für $|z| < 1$ konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert. Außerdem ist sie im Randpunkt $z = 1$ konvergent, aber im Randpunkt $z = -1$ divergent.

2) Für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $R = 1$ und wir haben Divergenz in allen Randpunkten $|z| = 1$, wie wir aus Beispiel 2) in 16.2 wissen.

3) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ hat den Konvergenzradius $R = 1$ und konvergiert in allen Randpunkten $|z| = 1$, denn für $|z| > 1$ bilden die Reihenglieder $|z|^n/n^2$ keine Nullfolge (bzw. der Quotiententest ergibt $\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}/(n+1)^2}{|z|^n/n^2} = |z| > 1$) und für $|z| \leq 1$ finden wir mittels $|z|^n/n^2 \leq 1/n^2$ eine konvergente Majorante.

Methoden zur Bestimmung des Konvergenzradius: In den obigen Beispielen konnten wir stets den Konvergenzradius R durch Auffinden von geeigneten Konvergenz- und Divergenzpunkten festnageln und diese Vorgangsweise funktioniert in vielen konkreten Beispielen auch hinreichend gut, zumindest um in der Praxis eine brauchbare obere oder untere Abschätzung für R zu finden. Systematischer sind die beiden folgenden Bestimmungsmethoden.

(a) *Quotientenmethode:* Falls für irgendein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ die Folge $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)_{n \geq n_0}$ konvergent oder bestimmt divergent gegen ∞ ist, dann gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \tag{16.1}$$

(Achtung: Hier treten im Vergleich zum Quotiententest für Reihen genau die Kehrwerte auf.)

Beweis: Wir wenden den Quotiententest auf die Reihe $\sum a_n(z-z_0)^n$ an und bestimmen

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(z-z_0)|^{n+1}}{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z-z_0| \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}.$$

Im Falle $\alpha < 1$ haben wir Konvergenz, d.h. für $|z-z_0| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, und im Falle $\alpha > 1$ Divergenz, d.h. für $|z-z_0| > \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. □

(b) *Hadamard-Formel:* Mit der Konvention „$\frac{1}{0} = \infty$“ und „$\frac{1}{\infty} = 0$“ gilt

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}. \tag{16.2}$$

(Für den Begriff des Limes superior, lim sup, erinnern wir an 6.5.)

Ist speziell die Folge $(|a_n|^{1/n})$ konvergent, dann gilt

$$R = \frac{1}{\lim |a_n|^{1/n}}. \tag{16.3}$$

Beweis: Wir wenden den Wurzeltest auf die Reihe $\sum a_n(z-z_0)^n$ an und betrachten

$$\beta := \limsup |a_n(z-z_0)^n|^{1/n} = |z-z_0| \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Im Falle $\beta < 1$, d.h. $|z-z_0| < \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$, wählen wir eine Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\beta < \gamma < 1$. Dann gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n(z-z_0)^n|^{1/n} \leq \gamma < 1$ für alle $n \geq N$, woraus die Konvergenz nach dem Wurzeltest folgt.

Im Falle $\beta > 1$, d.h. $|z-z_0| > \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$, gilt $|a_n(z-z_0)^n|^{1/n} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, daher ergibt der Wurzeltest hier Divergenz.

Ist zusätzlich $(|a_n|^{1/n})$ konvergent, dann gilt wegen $\limsup |a_n|^{1/n} = \lim |a_n|^{1/n}$ die zweite Aussage. □

Beispiele:

4) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ hat den Konvergenzradius $R = \lim \frac{n}{(n+1)} = 1$.

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n(z-2)^n$ hat den Konvergenzradius $R = \lim \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$, d.h. diese Potenzreihe ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{1}{2}$ konvergent, divergiert aber für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| > \frac{1}{2}$.

6) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ hat Konvergenzradius $R = 0$, konvergiert also nur für $z = 0$, denn es gilt $\limsup |n^n|^{1/n} = \limsup n = \lim n = \infty$.

Bemerkung: Falls wir eine Potenzreihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}(z-z_0)^{2k+1}$ vorliegen haben, wo also nur die ungeraden Potenzen vorkommen und somit $a_{2k} = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, dann können wir die Formel (16.1) nicht direkt anwenden. Falls aber $a_{2k+1} \neq 0$ ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und die Folge $\left(\frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k+3}|}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergent oder bestimmt divergent ist, dann können wir wie folgt vorgehen, um den Konvergenzradius R zu bestimmen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}(z-z_0)^{2k+1} = (z-z_0)\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}(z-z_0)^{2k} = (z-z_0)\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}w^k \quad \text{mit } w := (z-z_0)^2$$

und der Konvergenzradius R_1 der letzten Potenzreihe ist $R_1 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k+3}|}$; die Bedingung $|w| < R_1$ ist gleichbedeutend mit $|z-z_0| < \sqrt{R_1}$, daher gilt $R = \sqrt{R_1}$.

Analog ist die Vorgangsweise bei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(z-z_0)^{2k}$ mit geraden Potenzen.

16.4. Die Summenfunktion einer Potenzreihe

Für eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$, ist die Summenfunktion

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{jedenfalls auf der Menge } K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$$

definiert, weil die Konvergenz der Reihe dort garantiert ist. Im Falle $R = \infty$ ist $K = \mathbb{C}$ und für $0 < R < \infty$ ist $K = K_R(z_0)$ eine offene Kreisscheibe wie bereits im 2. Fall in 16.3 festgestellt.

Ab nun konzentrieren wir uns auf den Spezialfall eines *reellen Entwicklungspunktes* $x_0 \in \mathbb{R}$ (statt $z_0 \in \mathbb{C}$) mit *reellen Koeffizienten* $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (statt $a_n \in \mathbb{C}$) und betrachten für das offene Intervall $I := K \cap \mathbb{R}$ die *reelle* Funktion

$$f\colon I \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{16.4}$$

Im Falle $R = \infty$ erhalten wir $I = \mathbb{R}$ und für $0 < R < \infty$ ist $I =]x_0 - R, x_0 + R[$.

Jetzt könnten wir etwas übermütig die Summe als „sehr ähnlich zu einem Polynom“ auffassen und gliedweise differenzieren, also die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

betrachten (der Term mit $n = 0$ war konstant und ist deshalb weggefallen).

Wir behaupten: Die „abgeleitete Reihe“ hat denselben Konvergenzradius R.

Für $x \neq x_0$ ist die Konvergenzeigenschaft unverändert, falls wir mit $x - x_0$ multiplizieren, was uns zur Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n$ führt; für deren Konvergenzradius R_1 berechnen wir nach der Hadamard-Formel (16.2) mit Hilfe des Resultats von (5.1), d.h. $n^{1/n} \to 1$ $(n \to \infty)$ nun direkt

$$R_1 = \frac{1}{\limsup |n a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup (n^{1/n} |a_n|^{1/n})} = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} = R.$$

In dieser Art können wir zu höheren gliedweisen Ableitungsreihen gehen und bewahren immer den Konvergenzradius. Es bleibt allerdings die Frage, ob die so erhaltenen Reihen nun auch $f'(x)$ usw. darstellen. Dies lässt sich aber mit den Methoden aus Kapitel 20 später mühelos nachweisen und das werden wir dort auch nachholen. Wir notieren aber aus praktischen Gründen hier gleich das Ergebnis.

Satz: Die in (16.4) definierte Summenfunktion einer reellen Potenzreihe ist auf I beliebig oft differenzierbar und es gelten für $x \in I$ die Formeln aus der gliedweisen Differentiation der Reihen, d.h.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}, \\
&\dots \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Die Taylorreihe der Summenfunktion ist gerade die ursprüngliche Potenzreihe: Werten wir nämlich obige Darstellungen für $f(x)$ und die Ableitungen bei $x = x_0$ aus, so erhalten wir sukzessive

$$f(x_0) = a_0, f'(x_0) = 1 \cdot a_1 = a_1, f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2!\, a_2, \dots, f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k, \dots$$

D.h. für a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) ergeben sich daraus mit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

genau die Koeffizienten der Taylorreihe von f.

Folgerung – Identitätssatz („Koeffizientenvergleich"): Sind die Summenfunktionen der beiden reellen Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mit Entwicklungspunkt x_0 identisch auf einem offenen Intervall der Form $]x_0 - r, x_0 + r[$ mit $r > 0$, dann müssen die Koeffizientenfolgen übereinstimmen, d.h. $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Wir setzen $f(x) := \sum a_n(x-x_0)^n$ und $g(x) := \sum b_n(x-x_0)^n$ für $|x - x_0| < r$ und erhalten $f = g$ als C^∞-Funktionen $]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$. Nach der obigen Erkenntnis stimmen die Taylorreihen von f und g mit den jeweiligen Potenzreihen überein, also folgt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} = b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

□

Beispiele:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$, denn wir berechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

2) Wir wissen aus Beispiel 4) in 16.1, dass die Entwicklung

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

zumindest für $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ gültig ist und werden dies hier nun auf den Bereich $-1 < x \leq 1$ ausdehnen: Dazu bemerken wir zunächst, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe auf der rechten Seite 1 ist (analog zu Beispiel 1) in 16.3) und erhalten für $|x| < 1$ die Beziehung

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}\log(1+x).$$

Die Ableitungen stimmen also überein, weshalb die Differenz der beiden Funktionen konstant ist. Wegen $\log(1+0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} 0^n$ ist diese Konstante 0.

3) Für die Binomialreihe mit $\alpha \in \mathbb{R}$ hatten wir in Beispiel 5) aus 16.1 die Taylorreihenentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

bereits für $0 \leq x < 1$ gezeigt. Wir dehnen dies nun auf $|x| < 1$ aus: Zunächst weisen wir nach, dass der Konvergenzradius R der Potenzreihe auf der rechten Seite gleich 1 ist. Wir verwenden dazu (16.1) und berechnen

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|}{n!}}{\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha-n|} = 1.$$

Wir betrachten nun $g, f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) := (1+x)^\alpha$ und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Dann gilt einerseits $(1+x)g'(x) = (1+x)\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha g(x)$ und dank $n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha-1}{n-1}$ und $\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \binom{\alpha}{n}$ erhalten wir auch

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} \\
&= \alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^n\right) = \alpha\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^n\right) \\
&= \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}\right) x^n = \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha f(x).
\end{aligned}$$

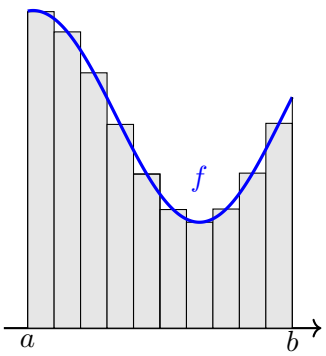
Daher folgt

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{\frac{\alpha f(x)}{1+x} g(x) - f(x)\frac{\alpha g(x)}{1+x}}{g(x)^2} = 0 \quad \text{für alle } x \in]-1,1[,$$

also ist $\frac{f(x)}{g(x)}$ konstant. Wegen $f(0) = 1 = g(0)$ folgt daher $f(x) = g(x)$ für alle $x \in]-1,1[$.

17. Integrale

Die geometrisch-intuitive Fragestellung nach dem Flächeninhalt unterhalb des Graphen einer (nichtnegativen) Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ führt rasch auf die Idee der Approximation dieser Fläche durch mehrere schmale Rechtecke.
Interpretieren wir die oberen horizontalen Seiten dieser schmalen Rechtecke als Funktionswerte entlang des entsprechenden Teilintervalls, so gelangen wir zum Begriff der Treppenfunktion. Solche bilden den Ausgangspunkt für den schrittweisen Aufbau von Konzepten zur Integrierbarkeit und für das Integral von Funktionen.



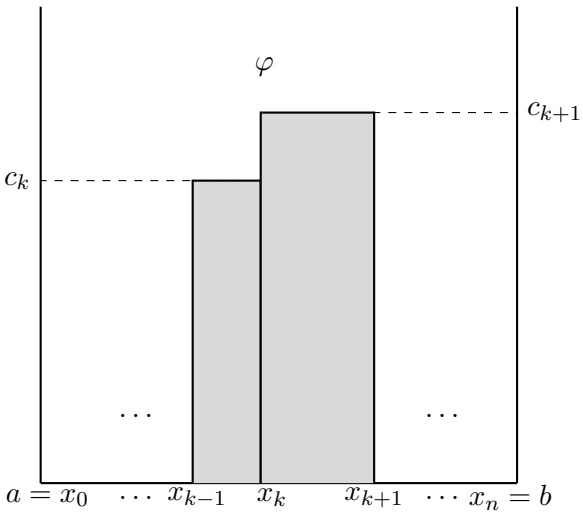
Zur „Vorwarnung“ sei schon angekündigt, dass es nun im vorliegenden Kapitel zu einer eher konzeptuell-theoretischen „Durststrecke“ kommt, bis konkrete Berechnungen von Integralen erst ab dem folgenden Kapitel 18 praktikabel werden.

17.1. Treppenfunktionen

(a) Wir betrachten zunächst stückweise konstante Funktionen auf einem kompakten nichtleeren Intervall $[a,b]$, die wir als *Treppenfunktionen* bezeichnen: Eine solche ist gegeben durch eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ als Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = c_j \quad \text{für } x_{j-1} < x < x_j, 1 \leq j \leq n.$$

D.h. φ ist konstant auf jedem Teilintervall $]x_{j-1}, x_j[$ und die Funktionswerte in den Teilungspunkten x_j selbst sind beliebig.



(b) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, das nicht nur aus einem Punkt besteht, dann heißt $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion auf I, falls es $a, b \in I$ mit $a < b$ gibt, sodass φ eingeschränkt auf $[a, b]$ eine Treppenfunktion im Sinne von (a) ist und φ auf $I \setminus [a, b]$ verschwindet.

(c) Ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, die auf $I \setminus [a, b]$ verschwindet und auf $[a, b]$ eine Darstellung wie in (a) hat, dann definieren wir das *Integral* durch

$$\int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}).$$

Hat I die Randpunkte $\alpha < \beta$, wobei $\alpha = -\infty$ oder $\beta = \infty$ zugelassen ist, dann schreiben wir meistens

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{statt} \quad \int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir sehen, dass die Funktionswerte an den Teilungspunkten der Zerlegung für eine Treppenfunktion keinen Einfluss auf den Wert des Integrals haben.

Monotonieeigenschaft: Sind $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $\varphi \le \psi$, d.h. $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in I$, dann folgt

$$\int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le \int_I \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

17.2. Nullmengen und Gültigkeit von Aussagen fast überall

Für ein beschränktes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit den Randpunkten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \le \beta$, bezeichnen wir hier die Länge mit

$$|J| := \beta - \alpha.$$

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele beschränkte Intervalle $J_k \subseteq \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$) gibt, sodass

$$M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \le \varepsilon$$

gilt. Hier ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in J_k\}$ und wir können $J_k = \emptyset$ für $k \ge N + 1$ setzen, falls endlich viele Intervalle $J_1, \ldots, J_N$ ausreichen sollten.

Beispiel: Jede endliche oder abzählbare Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist eine Nullmenge. Wir überprüfen das im Falle, dass M abzählbar unendlich ist, der Fall endlicher Mengen ist einfacher. Wir können also $M = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ schreiben. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$J_k := \left[x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right] \quad (k \in \mathbb{N})$$

und erhalten $x_k \in J_k$ und daher $M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ sowie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Speziell ist also $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}$.

Eigenschaften: (i) Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.

(ii) Die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

(Siehe z.B. [Heu1, Hilfssatz 84.1] für Beweise.)

Wenn $\mathcal{A}(x)$ eine Aussage in Abhängigkeit von $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ ist, dann sagen wir die Aussage $\mathcal{A}(x)$ gilt *fast überall*, abkürzend f.ü., falls es eine Nullmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathcal{A}(x)$ wahr ist für alle $x \in D \setminus M$. Wir sagen in dieser Situation auch $\mathcal{A}(x)$ gelte *für fast alle* $x \in D$.

17.3. Integrierbare Funktionen

Sei wiederum $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten $\alpha < \beta$, wobei $\alpha = -\infty$ oder $\beta = \infty$ erlaubt ist. Die entscheidende Erweiterung des Integralbegriffes auf eine große Klasse von Funktionen auf I gelingt uns mittels Approximation durch *monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen*, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist eine Treppenfunktion $\varphi_n \colon I \to \mathbb{R}$ gegeben und es gilt $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$.

Wir bezeichnen mit $L^+(I)$ die Menge aller Funktionen $f \colon I \to \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine monoton wachsende Folge (φ_n) von Treppenfunktionen auf I, sodass

- $\varphi_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für fast alle $x \in I$ gilt
- und die Zahlenfolge $\left(\int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist; wegen der Monotonieeigenschaft aus 17.1 genügt schon die Beschränktheit dieser Integralfolge.

Für $f \in L^+(I)$ setzen wir

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

(und überspringen den Nachweis, dass dieser Wert nicht von der Wahl der approximierenden Treppenfunktionsfolge abhängt; vgl. dazu [Heu2, Abschnitt 123] oder [ASV, Kapitel 4]).

Schließlich bezeichnen wir mit $L(I)$ die Menge aller Funktionen $f = g - h$ mit $g, h \in L^+(I)$ und definieren das *Integral* von f durch

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta h(x)\,\mathrm{d}x$$

(und bemerken nur, dass dies unabhängig von der Wahl von g und h ist; vgl. [Heu2, 123] oder [ASV, Kapitel 4]).

Die Menge $L(I)$ heißt Menge der *integrierbaren* Funktionen. Genauer sind dies die *Lebesgue-integrierbaren* bzw. *L-integrierbaren* Funktionen auf I.

Einfache Eigenschaften des Integrals: (Beweise z.B. in [Heu2, Abschnitt 123] oder [ASV, Kapitel 4].)

(i) Linearität: Sind $f, g \in L(I)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda f + \mu g \in L(I)$ und es gilt

$$\int_\alpha^\beta (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Für $\alpha < c < \beta$ gilt: $f \in L(I)$ genau dann, wenn f integrierbar auf $]\alpha, c[$ und auf $]c, \beta[$. In diesem Fall gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(iii) Sind $f, g \in L(I)$ mit $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in I$, dann folgt $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$.

(iv) Monotonie: Sind $f, g \in L(I)$ mit $f(x) \leq g(x)$ für fast alle $x \in I$, dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(v) Sind $f, g \in L(I)$, dann sind auch $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ integrierbar.

(vi) Ist $f \in L(I)$ und $\int_\alpha^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$, dann folgt $f(x) = 0$ fast überall.

(vii) Dreiecksungleichung: Für $f \in L(I)$ gilt

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Zwei Konventionen: Wir setzen $\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x := 0$ und $\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$, führen also durch Zweiteres eine Orientierung des Integrationsintervalls I ein.

Integrierbarkeitskriterium: Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $I = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ mit aufsteigenden Teilintervallen $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I$ gilt, sodass f auf jedem I_k ($k \in \mathbb{N}$) integrierbar ist und die Folge

$$\Big(\int_{I_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x \Big)_{n \in N} \quad \text{beschränkt ist.}$$

In diesem Fall gilt

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Beweis in [ASV, Kapitel 4] oder [Heu2, Satz 125.5].)

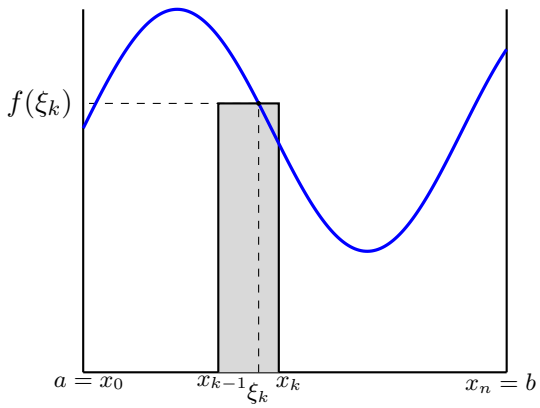
Dieses Kriterium eignet sich gut für unbeschränkte Intervalle, wie z.B. $I =]0, \infty[$ mit $I_k :=]0, k[$ $(k \in \mathbb{N})$, falls f auf allen kompakten Intervallen integrierbar ist. Letzteres trifft z.B. immer für (stückweise) stetige Funktionen zu, wie wir bald sehen werden.

17.4. Riemann-Summen und R-Integrierbarkeit

Hier betrachten wir ein kompaktes Intervall der Form $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

Wir führen nun spezifische, an f „adaptierte“ Treppenfunktionen φ auf $[a, b]$ ein: Dazu sei eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ beschrieben durch die Menge ihrer Teilungspunkte $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und die entsprechenden Intervalle $J_k := [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$. Die Zahl $m(Z) := \max\{|J_1|, \ldots, |J_n|\}$ nennen wir die *Feinheit* der Zerlegung Z. Nun wählen für die Zerlegung Z einen *Zwischenvektor* $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in I_k$ und betrachten die Treppenfunktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = f(\xi_k) \quad \text{für } x_{k-1} < x < x_k, 1 \leq k \leq n.$$



Die *Riemann-Summe* von f zur Zerlegung Z mit Zwischenvektor ξ ist dann definiert durch

$$S(Z, \xi) := \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Die Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt nun *R-integrierbar* oder *Riemann-integrierbar*, falls es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jede Zerlegung Z mit Feinheit $m(Z) < \delta$ gilt

$$|S(Z, \xi) - s| < \varepsilon \quad \text{für jeden Zwischenvektor } \xi \text{ zur Zerlegung } Z.$$

In diesem Fall ist durch

$$\text{R-}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := s$$

das *Riemann-Integral* von f definiert.

Das R-Integral auf $[a,b]$ ist ein Spezialfall des L-Integrals, denn es gilt der folgende

Satz: Eine R-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch L-integrierbar und es gilt

$$\text{R-}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Beweis durch [Heu1, Sätze 108.2 und 108.3] wie in [Heu2, Abschnitt 123] erwähnt; siehe auch [Str, Theorem 6.29].)

Gleichmäßige Approximation durch Treppenfunktionen: Für beschränkte Funktionen, die sich in der unten beschriebenen Art approximieren lassen, führt dies auf den spezifischeren Begriff des Cauchy- oder Regelintegrals, wie es z.B. in [FK1, §11] verwendet wird.

Wir sprechen von *gleichmäßiger Approximation* einer beschränkten Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch eine Folge von Treppenfunktionen (φ_n) auf $[a,b]$, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\|f - \varphi_n\| := \sup\{|f(x) - \varphi_n(x)| \mid x \in [a,b]\} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{17.1}$$

In diesem Fall ist f R-integrierbar ([Heu1, Satz 104.4]), daher auch L-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17.2}$$

17.5. Stückweise stetige und monotone Funktionen sind auf kompakten Intervallen integrierbar

(a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine Treppenfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\|f - \varphi\| = \sup\{|f(x) - \varphi(x)| \mid x \in [a,b]\} \le \varepsilon.$$

Beweis: Nach 13.5 ist f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$, daher können wir ein $\delta > 0$ wählen, sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x - y| < \delta$. Dann wählen wir noch $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $h := (b-a)/N < \delta$ garantiert ist, und setzen Teilungspunkte $x_k := a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$ an. Nun definieren wir $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x_{k-1}) & \text{für } x_{k-1} \le x < x_k (1 \le k \le N) \\ f(b) & \text{für } x = b \end{cases}$$

und erhalten wegen $0 < x_k - x_{k-1} = h < \delta$ laut Konstruktion eine Treppenfunktion mit der Eigenschaft $|f(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$. □

Durch sukzessive Anwendung auf $\varepsilon = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ können wir so eine Folge von Treppenfunktionen (φ_n) finden, die wegen

$$\|f - \varphi_n\| \le \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

die Eigenschaft (17.1) erfüllt. Daher ist die stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(b) Wir nennen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ gibt, sodass f auf jedem Teilintervall $]a_{k-1}, a_k[$ stetig ist ($k = 1, \ldots, N$) und in den Teilungspunkten einseitige Grenzwerte besitzt (links und rechts in $a_1, \ldots, a_{N-1}$, rechts in $a = a_0$ und links in $b = a_N$).

In diesem Fall ist jede Einschränkung von auf $]a_{k-1}, a_k[$ eindeutig stetig fortsetzbar zu einer *stetigen* Funktion f_k auf dem kompakten Intervall $[a_{k-1}, a_k]$ und wir erhalten die Integrierbarkeit von f auf $[a,b]$ und das Integral aus der Eigenschaft (ii) in 17.3 mittels

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Nun sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Auch in diesem Fall ist es leicht, eine gleichmäßige Approximation durch Treppenfunktionen zu finden und daraus dann wie in (a) auf die Integrierbarkeit zu schließen.

(Wir nehmen f als monoton wachsend an, für fallendes f gehen wir zu $-f$ über. Für $N \in \mathbb{N}$ groß genug setzen wir zunächst $h := (f(b) - f(a))/N$ und unterteilen das Intervall $[f(a), f(b)]$ mittels $y_k := f(a) + kh$ ($k = 0, 1, \ldots, N$). Durch

$$a_k := \sup\{x \in [a,b] \mid f(x) \le y_k\} \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$$

erhalten wegen der Monotonie $a = a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_N = n$ mit der Eigenschaft, dass entweder $a_{k-1} = a_k$ gilt oder

$$y_{k-1} < f(x) \le y_k \quad \text{für } a_{k-1} < x < a_k.$$

Schließlich definieren eine Treppenfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := y_k$, falls $a_{k-1} < x < a_k$.)

Bemerkung: Eine monotone Funktion f auf $[a,b]$ hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen ([Heu1, Satz 39.5]) und ist beschränkt (wegen $|f(x)| \le \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$). Nun sind allgemein beschränkte Funktionen auf $[a,b]$ mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen wiederum garantiert R-integrierbar ([Heu1, Satz 84.3]), somit auch L-integrierbar.

18. Stammfunktionen

18.1. Mittelwertsätze

Hier sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und beschränkt durch $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt die Ungleichung

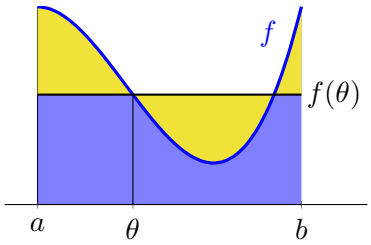
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Beweis: Die konstanten Funktionen mit den Werten m und M auf $[a,b]$ sind Treppenfunktionen mit trivialer Zerlegung $a = x_0 < x_1 = b$ und den Integralen $m(b-a)$ und $M(b-a)$. Daher folgt die Behauptung aus der Monotonie des Integrals nach 17.3, Eigenschaft (iv). □

(b) Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es eine Stelle $\theta \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\theta)(b-a).$$

Anschaulich gesprochen bedeutet diese Aussage, dass die Fläche unter dem Funktionsgraphen gleich der Rechtecksfläche mit Breite $b-a$ und Höhe $f(\theta)$ ist.



Beweis: Als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist f beschränkt und nimmt einen Minimalwert m und einen Maximalwert M an gewissen Stellen $\xi, \eta \in [a,b]$ an, sagen wir $f(\xi) = m$ und $f(\eta) = M$. Damit gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ und wir erhalten aus (a) die Ungleichung

$$f(\xi) = m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \leq M = f(\eta).$$

Falls in der linken oder der rechten Ungleichung Gleichheit besteht, sind wir bereits fertig. Andernfalls gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein θ im offenen Intervall aufgespannt von ξ und η, sodass $f(\theta) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x/(b-a)$ gilt. □

18.2. Stammfunktionen

Hier sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall.

Definition:

Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* der Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, falls gilt

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

Beispiele:

1) Jede konstante Funktion auf I ist eine Stammfunktion der Nullfunktion.

2) Auf $\mathbb{R}$ ist durch $F(x) = -e^{-x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = e^{-x}$ gegeben.

3) Auf $\mathbb{R}$ ist sin eine Stammfunktion von cos und $-\cos$ ist eine Stammfunktion von sin.

4) Für $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist $F(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}$, denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n.$$

Satz: Ist F eine Stammfunktion von f auf dem Intervall I und bezeichnen wir die konstante Funktion mit Wert $c \in \mathbb{R}$ auf I ebenfalls mit c, dann gilt:

(i) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f.

(ii) Jede Stammfunktion von f auf dem Intervall I ist von der Form $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus $(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f$.

(ii) Ist $G\colon I \to \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von f, dann erhalten wir

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in I.$$

Daher ist $G - F$ konstant auf dem Intervall I, also gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F + c$. □

18.3. Stammfunktionen und Integration

Hier ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall.

Sind $a, b \in I$ mit $a < b$ und f integrierbar auf $[a, b]$, dann können wir durch

$$U(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \in [a, b])$$

eine Funktion $U\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren. Diese Funktion U ist stetig (vgl. [Heu2, Satz 131.1]).

Wir können dies zumindest in dem Fall, dass f zusätzlich auf $[a,b]$ *beschränkt* ist, sehr leicht nachweisen: Nehmen wir an, dass $|f(t)| \leq M$ für alle $t \in [a,b]$ gilt. Sei nun $x_0 \in [a,b]$ beliebig. Dann erhalten wir für $x \in [a,b]$ mit $x \geq x_0$ aus den Eigenschaften des Integrals in 17.3 und schließlich dem Mittelwertsatz

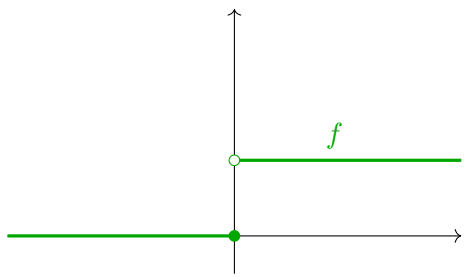
$$\begin{aligned}|U(x) - U(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M(x - x_0).\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für $x \in [a,b]$ mit $x < x_0$ zunächst $U(x_0) - U(x) = \int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ und dann die Ungleichung $|U(x_0) - U(x)| \leq M(x_0 - x)$, also insgesamt

$$|U(x) - U(x_0)| \leq M|x - x_0| \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Daraus lässt sich die Stetigkeit von U mit dem ε-δ-Kriterium direkt ablesen.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 0$ für $x \leq 0$, $f(x) := 1$ für $x > 0$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist f auf $[-N, N]$ integrierbar, denn die Einschränkung stimmt dort mit einer (sehr einfachen) Treppenfunktion überein.



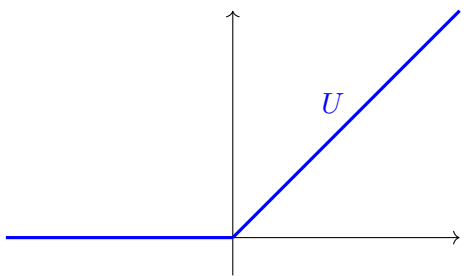
Für $-N \leq x \leq 0$ ist wegen $f(t) = 0$ für $-N \leq t \leq x$ sicherlich $U(x) = 0$. Für $0 < x \leq N$ ist

$$U(x) = \int_{-N}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x.$$

Somit ergibt sich die Funktion $U\colon [-N, N] \to \mathbb{R}$ mit

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

die zwar stetig ist, aber in 0 nicht differenzierbar.



Wir werden nun sehen, dass wir unter der *stärkeren Voraussetzung der Stetigkeit* an f durch die obige Integralformel für U eine differenzierbare Funktion erhalten, die auch eine Stammfunktion von f ist.

Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(a) Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es eine Stammfunktion für f auf I. Konkret können wir für beliebiges $x_0 \in I$ die Funktion

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \in I)$$

betrachten, dann ist F eine Stammfunktion von f auf I mit der Eigenschaft $F(x_0) = 0$.
(b) Für jede Stammfunktion F der stetigen Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ gilt für beliebige $a, b \in I$ die Auswertungsformel

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) =: F(x)\big|_a^b =: [F(x)]_a^b\,.$$

Beweis: (a): Für jedes $x \in I$ ist f als stetige Funktion integrierbar auf einem beliebigen kompakten Teilintervall, das sowohl x_0 als auch x enthält, weshalb die Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ gemäß der angegebenen Formel definiert werden kann. Dann ist $F(x_0) = 0$ klar.

Sei nun $x \in I$ ein beliebiger fester Punkt, in dem wir die Differenzierbarkeit von F nachweisen wollen. Für $y \in I$ mit $y > x$ ist

$$F(y) - F(x) = \int_{x_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t$$

und auch im Falle $y < x$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) = \int_{x_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_{x_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\int_{y}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz 18.1(b) gibt es ein θ zwischen x und y mit der Eigenschaft

$$\int_{x}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\theta)(y - x),$$

wobei sich das Vorzeichen im Falle $y < x$ wegen $y - x < 0$ richtig einstellt. Daher erhalten wir

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x}\int_{x}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\theta)$$

mit θ zwischen x und y. Mit $y \to x$ strebt auch $\theta \to x$ und wegen der Stetigkeit gilt dann auch $f(\theta) \to f(x)$. Somit folgt aus der obigen Gleichung nun

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x),$$

woraus die Differenzierbarkeit von F mit Ableitung $F'(x) = f(x)$ folgt.

(b): Wir wissen aus (a), dass $U(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f mit $U(a) = 0$ ist. Weiters gibt es nach 18.2, Satzteil (ii), eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $F = U + c$. Daraus folgt nun

$$F(b) - F(a) = U(b) + c - (U(a) + c) = U(b) - U(a) = U(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

18.4. Integration als „Umkehrung“ der Differentiation

Hier ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall.

Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt für alle $x_0, x \in I$ die Gleichung

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis: Dies folgt wegen der Stetigkeit von $f'\colon I \to \mathbb{R}$ direkt aus Teil (b) des ersten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung in 18.3. □

Bemerkung: Die Gleichung $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ gilt auch dann noch, wenn f stetig auf $[a, b]$ ist und differenzierbar im Inneren $]a, b[$ mit integrierbarer Ableitung f' (vgl. [ASV, Kapitel 4] oder [Heu1, Abschnitt 79]).

18.5. Beispiele zur Integralauswertung mit Stammfunktionen

1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha$ auf $I =]0, \infty[$, daher ist für $\alpha \neq -1$ durch $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ eine Stammfunktion von x^α gegeben. Für $0 < a < b$ ist also in diesem Fall

$$\int_a^b x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Für $\alpha = -1$ und $0 < a < b$ haben wir wegen $\log'(x) = 1/x$ stattdessen

$$\int_a^b x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(x)|_a^b = \log b - \log a = \log\frac{b}{a}.$$

2) Wegen $(e^{\gamma x})' = \gamma e^{\gamma x}$ ist für $\gamma \neq 0$ durch $\frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}$ eine Stammfunktion für $e^{\gamma x}$ auf $I = \mathbb{R}$ gegeben und wir erhalten für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ einfach

$$\int_a^b e^{\gamma x}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}\right|_a^b = \frac{1}{\gamma}(e^{\gamma b} - e^{\gamma a}).$$

3) $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x|_a^b$ gilt wegen $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$.

4) Für $-1 < a < b < 1$ ist $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)|_a^b$, denn $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

5) Die Funktion *sinus hyperbolicus* $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $\sinh(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, ist streng monoton wachsend und surjektiv Ü . Ihre Umkehrfunktion wird mit Arsinh bezeichnet, heißt *Area sinus hyperbolicus* und erfüllt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Für beliebige $a < b$ ist daher

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arsinh}(x)|_a^b\,.$$

Wir können aber auch eine Darstellung von $\operatorname{Arsinh}(x)$ mittels anderer Funktionen finden: Die Auflösung der Gleichung $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ gelingt nämlich z.B. mittels Substitution $u := e^y$, was zunächst auf

$$2x = u - \frac{1}{u}$$

führt und daraus weiter auf

$$u^2 - 2xu - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $u_\pm = x \pm \sqrt{x^2+1}$, wovon u_- wegen $u = e^y > 0 > u_-$ eliminiert werden kann. Wir erhalten somit $e^y = u = u_+ = x + \sqrt{x^2+1}$, d.h.

$$y = \operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Die Geschwisterfunktion *cosinus hyperbolicus* ist $\cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ und die Namensgebung erhellt sich aus der Relation

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1,$$

weil somit die Punkte $(\cosh x, \sinh x)$ im $\mathbb{R}^2$ stets auf einer Hyperbel liegen. Die Einschränkung von cosh auf $[0,\infty[$ ist invertierbar Ü mit Umkehrfunktion $\operatorname{Arcosh}\colon [1,\infty[\to [0,\infty[$, genannt *Area cosinus hyperbolicus*, ist für $x > 1$ differenzierbar mit Ableitung Ü

$$\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

19. Integrationstechniken

19.1. Partielle Integration

Sind $f, g \in C^1([a,b])$ (also stetig differenzierbar auf $[a,b]$), dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = (f(x)g(x))|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{19.1}$$

Beweis: Nach der Produktregel gilt $(fg)' = f'g + fg'$ und damit folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$(f(x)g(x))|_a^b = \int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

In den Anwendungen wird (19.1) natürlich auch in der folgenden direkten Umformulierung eingesetzt: Ist $f \in C^1([a,b])$, $h \in C([a,b])$ und H eine Stammfunktion von h, dann gilt

$$\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = (f(x)H(x))|_a^b - \int_a^b f'(x)H(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiele:

1) Im folgenden Integral fassen wir x^2 als $f(x)$ und e^x als $h(x)$ auf, dann ergibt sich mit $f'(x) = 2x$, $H(x) = e^x$ zunächst

$$\int_a^b x^2 e^x\,\mathrm{d}x = (x^2 e^x)\Big|_a^b - \int_a^b 2xe^x\,\mathrm{d}x.$$

Nun wenden wir im letzten Term wieder partielle Integration an und erhalten dafür

$$\int_a^b 2xe^x\,\mathrm{d}x = (2xe^x)|_a^b - \int_a^b 2e^x\,\mathrm{d}x = (2xe^x)|_a^b - (2e^x)|_a^b = (2e^x(x-1))|_a^b$$

und daher insgesamt

$$\int_a^b x^2 e^x\,\mathrm{d}x = (x^2e^x - 2e^x(x-1))\Big|_a^b = (e^x(x^2 - 2x + 2))\Big|_a^b.$$

Wir sehen, dass in dieser Weise eine m-fache partielle Integration immer bei Integralen

$$\int_a^b p(x)e^x \,\mathrm{d}x$$

mit einem Polynom p vom Grad m zum Ziel führen wird.

2) Mit $b > a > 0$ und $f(x) = \log(x)$, $g'(x) = x$ erhalten wir

$$\int_a^b x \log x \,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\log x\right)\Bigg|_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\log x\right)\Bigg|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_a^b$$

und ähnlich verfahren wir im Falle $\int_a^b p(x)\log x\,\mathrm{d}x$ mehrmals, wenn p ein Polynom ist. Speziell mit $p(x) = 1$ bekommen wir

$$\int_a^b \log x\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1\cdot\log x\,\mathrm{d}x = (x\log x)|_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (x\log x)|_a^b - \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = (x(\log x - 1))|_a^b\,.$$

3) Auch folgender Trick ist oft brauchbar:

$$C := \int_a^b \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_a^b \cos x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = (\cos x\sin x)|_a^b + \int_a^b \underbrace{\sin x\cdot\sin x}_{\sin^2 x = 1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= (\cos x\sin x)|_a^b + \int_a^b 1\,\mathrm{d}x - \int_a^b \cos x\,\mathrm{d}x = (\cos x\sin x)|_a^b + x|_a^b - C = (\cos x\sin x + x)|_a^b - C$$

und daher $2C = (\cos x\sin x + x)|_a^b$, d.h.

$$\int_a^b \cos^2 x\,\mathrm{d}x = C = \frac{1}{2}\,(\cos x\sin x + x)|_a^b\,.$$

4) Mittels $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ folgt aus 3) nun auch direkt

$$\int_a^b \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1\,\mathrm{d}x - \int_a^b \cos^2 x\,\mathrm{d}x = x|_a^b - \frac{1}{2}\,(\cos x\sin x + x)|_a^b = \frac{1}{2}\,(x - \cos x\sin x)|_a^b$$

5) Ähnlich wie in 3) führt nun

$$C := \int_a^b \underbrace{e^x}_{g'(x)}\,\underbrace{\sin x}_{f(x)}\,\mathrm{d}x = (e^x\sin x)|_a^b - \int_a^b e^x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= (e^x\sin x)|_a^b - (e^x\cos x)|_a^b - \int_a^b e^x\sin x\,\mathrm{d}x = (e^x(\sin x - \cos x)|_a^b - C$$

auf das Resultat

$$\int_a^b e^x \sin x \,\mathrm{d}x = C = \left(\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right)\Big|_a^b .$$

19.2. Substitutionsregel

Ist $u\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$ stetig differenzierbar und $f \in C([\alpha,\beta])$, dann gilt

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{19.2}$$

Beweis: Ist F eine Stammfunktion von f, dann ergibt die Kettenregel

$$\frac{d}{dx}(F(u(x))) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x).$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt nun

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(x))|_a^b = \int_a^b \frac{d}{dx}(F(u(x)))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Anwendungsvarianten: (a) Auf ein Integral $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, in dem wir geeignete Funktionen f und u erkennen, sodass sich $g(x) = f(u(x))u'(x)$ schreiben lässt. Dann ist

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Auf ein Integral $\int_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y$, in dem wir $y = u(x)$ substituieren, wobei $u\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$ eine bijektive C^1-Funktion ist. Dann ergibt sich mittels Merkregel $\frac{dy}{dx} = u'(x)$ die Formel

$$\int_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f(\underbrace{u(x)}_{y})\,\underbrace{u'(x)\,\mathrm{d}x}_{„dy“}.$$

Wie schon einmal in 13.4 bemerkt, muss eine injektive stetige Funktion auf einem Intervall streng monoton sein (Beweis davon z.B. in [FK1, §8, Beweisteil (a) von Satz 5.1]), daher ist nach 14.4 entweder $u'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ oder $u'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Beachten Sie, dass im zweiten Fall dann $u^{-1}(\beta) < u^{-1}(\alpha)$ ist.

(c) Wenn wir in der Situation von (b) die Umkehrfunktion $\varphi = u^{-1}$ gut angeben können, dann lautet $u(x) = y$ nun also $x = \varphi(y)$ und die Merkregel $\dfrac{dx}{dy} = \varphi'(y)$ ergibt nun formal „$dy = \frac{dx}{\varphi'(u(x))}$“ für die Berechnung

$$\int_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{f(u(x))}{\varphi'(u(x))}\,\mathrm{d}x.$$

Beispiele:

1) Bei $\int_a^b xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ versuchen wir es mit $f(t) = e^{-t}$ und $u(x) = x^2/2$, dann erhalten wir gemäß (a)

$$\int_a^b xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{a^2/2}^{b^2/2} e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\,e^{-t}\Big|_{a^2/2}^{b^2/2} = e^{-a^2/2} - e^{-b^2/2}.$$

2) Wir nehmen hier an, dass $u(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Im Integral $\int_a^b \dfrac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x$ erkennen wir $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{d}{dx}\big(\log(u(x))\big)$, d.h. mit $f(t) = 1/t$ nach (a)

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{dt}{t} = \log(t)\big|_{u(a)}^{u(b)} = \log(u(b)) - \log(u(a)) = \log\frac{u(b)}{u(a)}.$$

3) Eine Anwendung von 2) ist

$$\int_a^b \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\cos'(x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\log\frac{\cos b}{\cos a}.$$

4) In Verallgemeinerung von 3) können wir notieren

$$\int_a^b \sin x \cdot f(\cos x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \cos'(x)\cdot f(\cos x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\cos a}^{\cos b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5) Für $r > 0$ beschreibt der Graph der Funktion $f\colon [-r,r] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ den oberen Halbkreis im $\mathbb{R}^2$ vom Radius r um den Ursprung $(0,0)$. Mit $x = r\cos t$ und „$dx = -r\sin t\,dt$“ wie in (b) (aber mit anderen Variablenbezeichnungen) erhalten wir wegen $r\cos\pi = -r$ und $r\cos 0 = r$ zunächst

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_\pi^0 \underbrace{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2(t)}}_{r\sqrt{1-\cos^2(t)} = r\sin t}\cdot(-r\sin t)\,\mathrm{d}t = r^2\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit Hilfe von Beispiel 4) in 19.1 gelangen wir somit zum erwarteten Ergebnis

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = r^2 \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{r^2}{2} \underbrace{(t - \cos t \sin t)|_0^{\pi}}_{\pi - 0 - 0 + 0} = \frac{r^2 \pi}{2}.$$

6) Bei $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ wüssten wir eigentlich direkt aus Beispiel 5) in 18.5, dass Arsinh eine Stammfunktion des Integranden ist, aber falls wir das „vergessen“ haben, können wir jetzt so draufkommen[1]: Mit $x = \sinh t$ ergibt sich $1 + x^2 = 1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$ und „$dx = \cosh(t)dt$“, daher nach (b) nun

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{\sinh^{-1}(a)}^{\sinh^{-1}(b)} \frac{\cosh(t)\,\mathrm{d}t}{\cosh(t)} = \int_{\mathrm{Arsinh}(a)}^{\mathrm{Arsinh}(b)} 1\,\mathrm{d}t = \mathrm{Arsinh}(x)|_a^b\,.$$

7) Für $0 < a < b$ betrachten wir $\int_a^b \frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ und wenden (b) mit etwas vertauschten Bezeichnungen an: Wir setzen $x = t^2$ und erhalten wegen „$dx = 2tdt$“ und dank Beispiel 2) in 19.1 direkt

$$\int_a^b \frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{\log t}{t} 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \log(t)\,\mathrm{d}t = 2\,(t(\log t - 1))|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\,.$$

8) Zwei Varianten für die Berechnung von $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ mit $0 < a < b < \pi$.

Eine Möglichkeit ist (mit Hilfe der Zerlegung $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t})$)

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int_a^b \frac{\sin(x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2(x)} = -\int_a^b \frac{\cos'(x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2(x)} = -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \frac{1}{2}\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{\log(1-t) - \log(1+t)}{2}\Big|_{\cos a}^{\cos b} = \frac{1}{2}\log\frac{1-t}{1+t}\Big|_{\cos a}^{\cos b}.$$

Die andere Möglichkeit baut auf die Substitution $t = \tan\frac{x}{2} =: \varphi(x)$ (also verwenden wir (c) mit „verdrehten“ Bezeichnungen) und $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2}) = \frac{1+t^2}{2}$. Bleibt noch die kleine Schwierigkeit $\sin x$ als Funktion von $t = \varphi(x) = \varphi(u(t))$ umzuschreiben, was wir durch

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

[1] Vgl. Österreichisches Wörterbuch, öbv & hpt, Wien, 39. Auflage 2001.

erreichen. Somit kommen wir via $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{\sin u(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\varphi'(u(t))}$ auf

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\limits_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int\limits_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log(t)\big|_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} = \log \frac{\tan(b/2)}{\tan(a/2)}.$$

Warum stimmen die beiden errechneten Resultate überein? Das folgt mit Hilfe der Halbwinkelformeln $\cos(s/2) = \sqrt{1+\cos s}/\sqrt{2}$ und $\sin(s/2) = \sqrt{1-\cos s}/\sqrt{2}$ aus

$$\begin{aligned}\log \frac{\tan(b/2)}{\tan(a/2)} = \log \frac{\sin(b/2)\cos(a/2)}{\cos(b/2)\sin(a/2)} &= \log \frac{\sqrt{1-\cos b}\cdot\sqrt{1+\cos a}}{\sqrt{1+\cos b}\cdot\sqrt{1-\cos a}} \\ &= \frac{1}{2}\log \frac{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}}{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos b}{1+\cos b} - \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \frac{1}{2}\log\frac{1-t}{1+t}\Big|_{\cos a}^{\cos b}.\end{aligned}$$

9) Die zweite Methode im vorigen Beispiel machte Gebrauch von der etwas mysteriösen Substitution

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \text{mit} \quad „dx = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}“$$

und hat auf die Darstellung

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

geführt. Mit ein bisschen weiterer Rechnung ergibt sich auch noch

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(Denn $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{\sqrt{(1+t^2)^2-4t^2}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{1+2t^2+t^4-4t^2}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{1-2t^2+t^4}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{(1-t^2)^2}}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.)

„There is method in our madness“ insofern als wir dadurch die trigonometrischen Funktionen in rationale Funktionen umwandeln können. Das bringt Vorteile, wann immer wir auf ein Integral der Form

$$\int\limits_a^b R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$$

treffen, wobei der Ausdruck $R(y,z)$ eine rationale Funktion[2] von y und z ist. Die angegebene Substitution ergibt dann nämlich

$$\int\limits_a^b R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int\limits_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{p_1(t)}{p_2(t)}\,\mathrm{d}t$$

mit gewissen Polynomfunktionen p_1 und p_2. Daher kann also das ursprüngliche Integral zurückgeführt werden auf eines mit einer rationalen Funktion als Integranden.

[2] D.h. $R(y,z)$ ist ein Bruch, in dem Zähler und Nenner durch endliche Summen von Termen der Form $a_{jk}y^j z^k$ mit $j,k \in \mathbb{N}_0$ und $a_{jk} \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

19.3. Schreibweise der unbestimmten Integrale

Es kann gelegentlich lästig oder auch unnötig sein, in allen Zwischenschritten immer die Integrationsgrenzen mitzuschleppen oder bei mehrfachen Substitutionen jeweils korrekt umzuschreiben. Daher ist es auch gebräuchlich, das Symbol

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

für irgendeine Stammfunktion F einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ zu verwenden (oder manchmal sogar für die Menge aller Stammfunktion) und als *unbestimmtes Integral* zu bezeichnen. Z.B. schreibt sich in dieser Art die Substitutionsregel (19.2) einfach als

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) = \int f(t)\,\mathrm{d}t \text{ mit } t = u(x).$$

Beispiel: Zur Berechnung von $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}}$ unterscheiden wir entsprechend der Nullstellen $\lambda_\pm = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$ von $x^2+\alpha x+\beta$ drei Fälle.

1. Fall $\alpha^2 = 4\beta$: Es gibt nur die doppelte Nullstelle $-\alpha/2$ und wegen $x^2+\alpha x+\frac{\alpha^2}{4} = (x+\frac{\alpha}{2})^2$ ist einfach

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{\alpha}{2}} = \log\left(x+\frac{\alpha}{2}\right).$$

2. Fall $\alpha^2 < 4\beta$: Es gibt keine reelle Nullstelle und quadratische Ergänzung liefert

$$x^2+\alpha x+\beta = \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \underbrace{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}_{=:c>0} = c(t^2+1) \quad \text{mit } t = u(x) := \frac{1}{\sqrt{c}}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Daher kommen wir mit $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}$ zu

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}} = \sqrt{c}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}} = \sqrt{c}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{c(t^2+1)}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$$

und dieses letzte Integral kennen wir bereits aus Beispiel 6) in 19.2 bzw. Beispiel 5) in 18.5.

3. Fall $\alpha^2 > 4\beta$: Es gibt die beiden reellen Nullstellen $\lambda_- < \lambda_+$ und daher gilt die Zerlegung $x^2+\alpha x+\beta = (x-\lambda_-)(x-\lambda_+) = (\lambda_- - x)(\lambda_+ - x)$, was nur in den beiden Intervallen $]-\infty, \lambda_-[$ und $]\lambda_+, \infty[$ positive Werte liefert und der Integrand ist nur dort definiert.

- Im Bereich $x < \lambda_-$ schreiben wir $x^2+\alpha x+\beta = (\lambda_- - x)(\lambda_+ - x)$ und setzen $t = \sqrt{\lambda_- - x} =: u(x)$, d.h. $x = \lambda_- - t^2$. Mit $u'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_- - x}}$ und $\lambda_+ - x = \lambda_+ - (\lambda_- - t^2) = t^2 + \lambda_+ - \lambda_-$ ergibt sich

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}} = -2\int \frac{u'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda_+ - x}} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+\lambda_+-\lambda_-}},$$

  was uns wegen $\lambda_+ - \lambda_- > 0$ auf den 2. Fall zurückbringt.

- Im Bereich $x > \lambda_+$ schreiben wir $x^2 + \alpha x + \beta = (x - \lambda_-)(x - \lambda_+)$ und setzen $t = \sqrt{x - \lambda_+} =: u(x)$, d.h. $x = t^2 + \lambda_+$. Mit $u'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-\lambda_+}}$ und $x - \lambda_- = t^2 + \lambda_+ - \lambda_-$ kommen wir nun auf

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}} = 2\int \frac{u'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x - \lambda_-}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 + \lambda_+ - \lambda_-}},$$

und durch $\lambda_+ - \lambda_- > 0$ auch wieder zum 2. Fall zurück.

19.4. Integration von rationalen Funktionen

Für Integrale der Form $\displaystyle\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x$ mit Polynomen p_1 und p_2 vergleichen wir zuerst den Zählergrad m_1 von p_1 mit dem Nennergrad m_2 von p_2. Im Falle $m_1 \geq m_2$ führen wir eine Polynomdivision gemäß 7.2 durch und erhalten

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x = \int q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

wobei q und r Polynome sind und der Grad von r kleiner als der von p_2 ist. Das erste Integral $\int q(x)\,\mathrm{d}x$ bereitet uns überhaupt keine Schwierigkeiten, weshalb wir uns ab nun ganz auf den folgenden Fall konzentrieren können:

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit Polynomen } p_1, p_2 \text{ und Grad von } p_1 \text{ kleiner als Grad von } p_2.$$

Von hier aus geht es ganz systematisch mit klassischen Methoden und Fallunterscheidungen nach der Art der Nullstellen im Nennerpolynom weiter, zuerst mit einer sogenannten *Partialbruchzerlegung* und dann Term für Term in der verbleibenden Summe mit Bausteinen der Form ($\alpha, \beta, \lambda, c, d \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$)

$$\int \frac{\alpha}{(x-\lambda)^m}\,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + cx + d)^m}\,\mathrm{d}x.$$

Die exakte Berechnung ist somit einerseits Computern sehr zugänglich und andererseits gibt es sehr gute ausführlichere Darstellungen der Methodik in der Lehrbuchliteratur (vg. z.B. [Heu1, Abschnitte 69 und 78], [FK1, §11, Abschnitt 8] und [ASM, Abschnitt 12.4]), sodass wir uns hier mit Andeutungen in wenigen Beispielen begnügen.

Beispiele:

1) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2}$: Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $\lambda_\pm = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, d.h. $\lambda_- = 1$ und $\lambda_+ = 2$. Daher hat der Integrand die Gestalt $\frac{x}{(x-1)(x-2)}$, die uns auf den hoffnungsvollen Ansatz

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

mit geeigneten Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ bringt. Nach Multiplikation mit $(x-1)(x-2)$ bedeutet dies

$$x = A(x-2) + B(x-1).$$

Nun gibt es zwei schöne Möglichkeiten zur Bestimmung von A und B: (a) Einsetzen von $x = 1$ liefert $A = -1$, für $x = 2$ folgt $B = 2$. (b) Obige Gleichung führt auf $x = (A+B)x - (2A+B)$ und Koeffizientenvergleich ergibt $A + B = 1$ sowie $2A + B = 0$.

In jedem Fall gilt

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = -\log(x-1) + 2\log(x-2) = \log\frac{(x-2)^2}{x-1}.$$

2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4 - x}\,\mathrm{d}x$: Das Nennerpolynom $x^4 - x = x(x^3 - 1)$ besitzt offensichtlich die Nullstellen 0 und 1, daher gilt $x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1)$ (wir erinnern an $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$). Die beiden weiteren Nullstellen sind $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ sind nicht reell, weshalb wir hier beim quadratischen Faktor $x^2 + x + 1$ bleiben und einen Ansatz in der Form

$$\frac{x+1}{x^4 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + x + 1}$$

machen, wobei wir geeignete Zahlen $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ finden müssen. Multiplikation mit allen Nennern ergibt die Polynomidentität

$$x + 1 = (A(x-1) + Bx)(x^2 + x + 1) + (\alpha x + \beta)x(x-1),$$

aus der wir für die gesuchten Zahlen durch Koeffizientenvergleich Bedingungen ableiten könnten. Etwas kürzer geht es auch durch Einsetzen von passenden speziellen x-Werten. Wir beginnen mit den ursprünglichen einfachen Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$, woraus sich sofort die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x = 0\colon &\quad 1 = -A, \\ x = 1\colon &\quad 2 = 3B, \end{aligned}$$

ergeben, somit muss $A = -1$ und $B = 2/3$ gelten. Mit Hilfe der Werte $x = -1$ und $x = 2$ erhalten wir nun zwei Gleichungen für α und β, nämlich

$$\begin{aligned} x = -1\colon &\quad 0 = \frac{4}{3} + 2(\beta - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta = \frac{2}{3}, \\ x = 2\colon &\quad 3 = \frac{7}{3} + 2(2\alpha + \beta) \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + \beta = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aus diesen folgt $3\alpha = (2\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 1$, also $\alpha = 1/3$ und somit $\beta = -1/3$. Insgesamt erreichen wir dadurch eine Aufteilung als Summe

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^4 - x}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{x-1}^{\frac{2x+1}{2} - \frac{3}{2}}}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{6}\int \frac{\overbrace{2x+1}^{(x^2+x+1)'}}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}, \end{aligned}$$

wovon wir die ersten drei Stammfunktionen im Grunde schon kennen und mit Hilfe von Logarithmen ausdrücken können, wie bereits mehrfach gesehen. Beim vierten Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ erinnern wir uns an Beispiel 3) aus 18.5, wo wir bereits $\arctan(y)$ als Stammfunktion von $\frac{1}{y^2+1}$ eingesetzt hatten: Wir schreiben

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left(y^2+1\right) \quad \text{mit } y=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

und kommen mittels Substitution und der Stammfunktion $\arctan y$ und zum Ziel.

19.5. Integrierbare Funktionen auf unbeschränkten Intervallen

Wir betrachten hier die Situation eines unbeschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, die auf jedem kompakten Teilintervall von I integrierbar ist.

1. Fall $\boldsymbol{I=[a,\infty[}$: Dank des Integrierbarkeitskriteriums am Ende von 17.3 ist f genau dann auf $[a,\infty[$ integrierbar, falls die Integrale $\int\limits_a^r |f(x)|\,\mathrm{d}x$ für $r\to\infty$ beschränkt bleiben und in diesem Falle gilt

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}\int\limits_a^r f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Fall $\boldsymbol{I=]-\infty,b]}$: Nach dem Integralkriterium ist $f\colon I\to\mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn $\int\limits_{-r}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ für $r\to\infty$ beschränkt bleibt und dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Fall $\boldsymbol{I=\mathbb{R}}$: Die Funktion $f\colon I\to\mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls sie sowohl auf $]-\infty,0]$ als auch auf $[0,\infty[$ integrierbar ist und dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Im 1. Fall gilt wegen der Monotonie $\int\limits_a^{r_1}|f(x)|\,\mathrm{d}x\le\int\limits_a^{r_2}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ für $r_1\le r_2$ natürlich auch $\int\limits_a^\infty|f(x)|\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_a^r|f(x)|\,\mathrm{d}x$ und Analoges gilt für den 2. Fall. Ähnlich wie bei Reihen sagen wir daher auch, das Integral $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ sei absolut konvergent (und oft nur konvergent).

Beispiele:

1) Für $r > 1$ ist $\int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}x}{|x^2|} = \int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^r = 1 - \frac{1}{r} \to 1$ $(r \to \infty)$, daher ist $1/x^2$ integrierbar auf $[1, \infty[$ und es gilt

$$\int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1.$$

2) Die Funktion $1/x$ ist nicht integrierbar auf $[1, \infty[$, denn für $r > 1$ ist

$$\int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}x}{|x|} = \int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log r \to \infty \quad (r \to \infty).$$

3) Für $\lambda > 0$ ist $e^{-\lambda x} > 0$ für alle x und wir erhalten mit beliebigem $a \in \mathbb{R}$ die Aussage

$$\int\limits_a^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int\limits_a^r e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \left.\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)\right|_a^r = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}.$$

4) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $1/(1+x^2) > 0$ und

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{s\to-\infty} \int\limits_s^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim_{r\to\infty} \int\limits_0^r \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \lim_{s\to-\infty} (\underbrace{\arctan 0}_{0} - \arctan s) + \lim_{r\to\infty} (\arctan r - \underbrace{\arctan 0}_{0}) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Majorantenkriterium: Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall von I integrierbar ist. Wenn es eine nichtnegative Funktion g gibt, die auf I integrierbar und $|f(x)| \le g(x)$ für fast alle $x \in I$ erfüllt, dann ist f integrierbar auf I.

Beweis: Es genügt, dies für den Fall $I = [a, \infty[$ zu zeigen, die anderen sind analog. Wir haben für alle $r > a$ die Abschätzung

$$\int\limits_a^r |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^r g(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x,$$

daher folgt die Aussage aus dem Integrierbarkeitskriterium □

Beispiel: 5) $e^{-x^2/2}$ ist integrierbar auf $\mathbb{R}$, d.h. das Integral $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ ist konvergent, d.h. endlich. Wegen der Symmetrie unter $x \mapsto -x$ genügt es, die Integrierbarkeit auf $[0, \infty[$ zu untersuchen. Mit der Funktion

$$g(x) := \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1, \\ e^{-x/2} & x > 1, \end{cases}$$

gilt $0 \le e^{-x^2/2} \le g(x)$ für alle $x \ge 0$. Weiters gilt

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 1 + \left(-2e^{-x/2}\right)\Big|_1^\infty = 1 + 2 = 3,$$

also ist g eine integrierbare nichtnegative Majorante für $e^{-x^2/2}$.

Wir werden im 2. Semester den konkreten Wert $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ ermitteln.

Partielle Integration und Substitutionsregel: Für diese Integrationstechniken gibt es sinngemäße Ausdehnungen auf den Fall unbeschränkter Intervalle. Bei der partiellen Integration bedarf es zusätzlich der Bedingung nach Integrierbarkeit von fg, $f'g$ und fg'. Wir verzichten hier auf die gesonderte Ausformulierung der Details und verweisen dafür auf [FK1, §12, Abschnitt 5].

Die Gamma-Funktion: Als Anwendung betrachten wir hier für jedes $x > 0$ das Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{19.3}$$

Zunächst ist zu klären, dass die Funktion $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ integrierbar auf $[0,\infty[$ ist. Für $x < 1$ wird sie unbeschränkt bei $t \to 0+$, ist aber nach dem Majorantenkriterium integrierbar, denn für $0 < t < 1$ gilt $\left|t^{x-1}e^{-t}\right| \le t^{x-1}$ und

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{t^x}{x}\Big|_0^1 = \frac{1}{x}.$$

Auf dem Teilintervall $[1,\infty[$ wiederum folgt die Integrierbarkeit für jedes feste $x > 0$ mittels Majorante $\left|t^{x-1}e^{-t}\right| \le t^x e^{-t} = (t^x e^{-t/2})e^{-t/2} \le Ce^{-t/2}$ für geeignetes $C > 0$, weil $\lim\limits_{t\to\infty} t^x e^{-t/2} = 0$ gilt. Die Integrierbarkeit von $e^{-t/2}$ ist klar bzw. wurde im obigen Beispiel 5) genützt.

Somit wird durch (19.3) eine Funktion $\Gamma\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert, deren Eigenschaften wir nun ein wenig studieren wollen.

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$
- $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$, denn mit partieller Integration erhalten wir

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = t^x(-e^{-t})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + x\Gamma(x).$$

- Speziell für $x = n \in \mathbb{N}$ erhalten wir sukzessive $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!$, $\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3!$ und induktiv

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

In [FK1, §12, Abschnitt 5.5] wird u.a. auch noch gezeigt, dass $x \mapsto \Gamma(x)$ differenzierbar ist.

19.6. Unbeschränkte, aber integrierbare Funktionen

Wir betrachten hier die Situation einer Funktion f und einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, wobei f für x nahe x_0 und $x < x_0$ oder $x > x_0$ definiert sein soll, mit der Eigenschaft

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty.$$

Durch Zerlegung des ursprünglichen Integrationsintervalls können wir dies auf die Situation reduzieren, wo I ein beschränktes halboffenes Intervall $]a, b]$ oder $[a, b[$ ist und $x_0 = a$ oder $x_0 = b$. Wir nehmen an, dass f auf jedem kompakten Teilintervall von I integrierbar ist.

Skizzieren wir der Einfachheit halber jetzt nur den Fall $I =]a, b]$ und $\lim\limits_{x \to a+} |f(x)| = \infty$, der andere ist analog. Nach dem Integrierbarkeitskriterium müssen wir nur noch die Beschränktheit von $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)| \, \mathrm{d}x$ für $\varepsilon \to 0+$ überprüfen und erhalten im positiven Fall die Integrierbarkeit von f auf $]a, b]$ und

$$\int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Wir sagen auch in dieser Situation, das Integral $\int_I f(x) \, \mathrm{d}x$ sei (absolut) konvergent.

Es gibt auch wie schon im Fall unbeschränkter Intervalle ein **Majorantenkriterium** und auch die sinngemäß angewandten Rechenregeln und Integrationstechniken.

Beispiel: Für alle $x > 0$ ist $1/\sqrt{x} > 0$ und es gilt $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$. Für $0 < \varepsilon < b$ gilt

$$\int\limits_\varepsilon^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int\limits_\varepsilon^b x^{-1/2} \, \mathrm{d}x = 2x^{1/2}\Big|_\varepsilon^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{\varepsilon}) \to 2\sqrt{b} \quad (\varepsilon \to 0+),$$

daher ist $1/\sqrt{x}$ integrierbar auf $]0, b]$ mit dem Integral

$$\int\limits_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{b}.$$

19.7. Uneigentliche, nicht absolut konvergente Integrale

Die Integrierbarkeit einer Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$ ist äquivalent zur Integrierbarkeit der nichtnegativen Funktion $x \mapsto |f(x)|$, wie aus Eigenschaft (v) und dem Integrierbarkeitskriterium in

17.3 folgt. Letzteres heißt insbesondere $\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ und z.B. auf $I = [a, \infty[$ folgt daraus dann auch

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{19.4}$$

Wir betonen aber ausdrücklich, dass umgekehrt *allein die Existenz des Limes in* (19.4) *nicht notwendig die Integrierbarkeit von f auf I nach sich zieht.*

Beispiel: Wir betrachten auf $I = [1, \infty[$ die Funktion $f\colon [1, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\sin x}{x}$.

Die Funktion f ist auf $I = [1, \infty[$ nicht (absolut) integrierbar.

Vorbereitend erhalten wir aus den Eigenschaften des sin, dass $\sin(x + \pi) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, $\sin x \geq 0$ für $0 \leq x \leq \pi$ und daher für jedes $k \in \mathbb{N}$ weiters

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = (-\cos x)|_0^\pi = 1 - (-1) = 2.$$

Schließlich erinnern wir an die Divergenz der harmonischen Reihe in der für alle $n \in \mathbb{N}$ gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_1^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x &= \int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}\int_0^\pi |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Dennoch existiert $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Denn für $1 \leq s < r$ ergibt sich durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\left|\int_s^r \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Big|_s^r - \int_s^r \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\frac{\cos s}{s} - \frac{\cos r}{r}\right| + \left|\int_s^r \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{|\cos s|}{s} + \frac{|\cos r|}{r} + \int_s^r \frac{|\cos x|}{x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \int_s^r \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_s^r = \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{r} = \frac{2}{s}\end{aligned}$$

und im Falle $1 \leq r < s$ analog $\left|\int_s^r \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{r}$. Ist nun (r_n) eine Folge in $[1, \infty[$ mit der Eigenschaft $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$, dann betrachten wir die zugehörige Integralfolge $a_n := \int_1^{r_n} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann erhalten wir für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $r_n, r_m \geq 2/\varepsilon$ aus den obigen Ungleichungen nun die Abschätzung

$$|a_n - a_m| = \left|\int_{r_n}^{r_m} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{\min\{r_n r_m\}} \leq \varepsilon.$$

Daher ist (a_n) eine Cauchy-Folge und somit konvergent.

Wie wir bereits aus Beispiel 4) in 12.1 wissen, gilt $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0$, daher ist f stetig fortsetzbar in 0 mit $f(0) := 1$ und das Integral $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ völlig harmlos. Verblüffender Weise gilt

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

was wir hier aber jetzt nicht zeigen können. (Dies gelingt z.B. durch Tricks mit Parameterintegralen wie in [Heu1, Aufgabe 107.5] oder als „Abfallprodukt“ der Fourieranalyse wie in [Heu2, Abschnitt 147] beschrieben.)

Ähnliche Effekte sind für unbeschränkte Integranden auf beschränkten halboffenen Intervallen zu beobachten. Wir sprechen in diesen Fällen von einem *uneigentlichen Integral*, also wenn das Integral zwar nicht im Sinne der Definition der Integrierbarkeit existiert, aber als Grenzwert wie im obigen Beispiel. Übrigens sind gegenüber dem Lebesgue-Integral für einen engeren Integralbegriff, wie z.B. dem Riemann- oder Cauchy-Integral, einige Integrale als *uneigentlich* aufzufassen, obwohl sie als L-Integrale existieren, z.B. allein schon deshalb, weil beim R-Integral nicht standardmäßig über unbeschränkte Intervalle integriert wird.

19.8. Integral-Vergleichskriterium für Reihen

Ist $m \in \mathbb{N}$ und $f\colon [m, \infty[\to [0, \infty[$ eine monoton fallende Funktion, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \text{ ist konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \int\limits_m^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ist konvergent.}$$

Beweis: Als monotone Funktion ist f auf jedem kompakten Intervall $[m, r]$ mit $r > m$ integrierbar und auf jedem Intervall $[k, k+1]$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$ gilt $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ und somit

$$f(k) \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq f(k+1).$$

Daher gilt für die Partialsummen bis $n > m$ jeweils

$$(*) \qquad \sum_{k=m}^{n} f(k) \geq \int\limits_m^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=m}^{n} f(k+1) = \sum_{k=m+1}^{n+1} f(k).$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Konvergenz der Reihen in $(*)$ und $|f(x)| = f(x) \geq 0$ für alle $x \in [m, \infty[$ besagt, dass die Integrale $\int_m^r |f(x)|\,\mathrm{d}x$ für $r \to \infty$ beschränkt bleiben, somit folgt die Integrierbarkeit von f.

$\boxed{\Leftarrow}$ Aus der Konvergenz des Integrals und $(*)$ folgt die Beschränktheit der Partialsummen der Reihe mit nichtnegativen Gliedern, woraus gemäß 11.2 die Konvergenz der Reihe folgt. $\square$

Beispiele:

1) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert genau im Falle $\alpha > 1$. **Ü**

2) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\alpha}$ konvergiert genau für $\alpha > 1$. Wir überprüfen nach dem Integralkriterium also gleichwertig die Konvergenz von $\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\alpha}$. Mit der Substitution $y = \log x$, „$dy = dx/x$“, erhalten wir

$$\int\limits_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^\alpha} = \int\limits_{\log 2}^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha},$$

weshalb die behauptete Aussage aus dem vorigen Beispiel folgt.

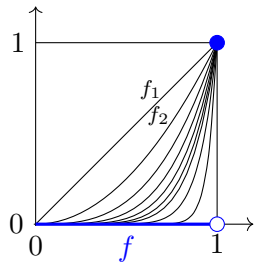
20. Konvergenz von Funktionenfolgen

20.1. Punktweise Konvergenz

Beispiele:

1) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := x^n$.

- Für $0 \leq x < 1$ gilt $f_n(x) = x^n \to 0$ $(n \to \infty)$.
- Für $x = 1$ gilt $f_n(1) = 1^n \to 1$ $(n \to \infty)$.

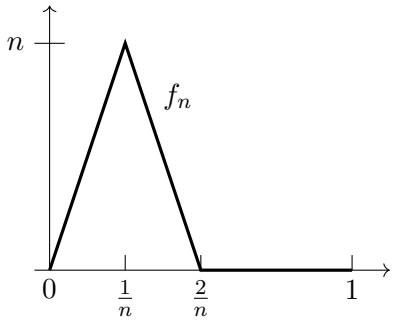


Somit gilt für jedes $x \in [0,1]$: $f_n(x) \to f(x)$ mit $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Jede der Funktionen f_n ist stetig, während die Grenzfunktion f unstetig in 1 ist.

2) Für die stückweise linearen Funktionen f_n $(n \in \mathbb{N})$ wie in der Skizze angegeben gilt:



- für $x = 0$ gilt $f_n(0) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$;
- für $0 < x \leq 1$ gilt $f_n(x) = 0$, falls $n > 2/x$, somit $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Somit gilt für jedes $x \in [0,1]$: $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Das Integral über f_n entspricht genau der Dreiecksfläche mit Grundlinie $2/n$ und Höhe n, daher sehen wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = 1 \neq 0 = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definition: Ist M eine nichtleere Menge und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n \colon M \to \mathbb{R}$, dann sagen wir die Folge (f_n) *konvergiert punktweise* gegen die Funktion $f \colon M \to \mathbb{R}$, falls für jedes $x \in M$ gilt $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$. (Analog auch für komplexwertige Funktionen.)

In den obigen Beispielen 1) und 2) hatten wir jeweils punktweise Konvergenz, aber in einem Fall blieb die Stetigkeit nicht im Limes erhalten und im anderen war die Folge der Integrale nicht entsprechend konvergent gegen das Integral der Grenzfunktion.

20.2. Gleichmäßige Konvergenz

Für Mengen $\emptyset \neq M \subseteq D$ und eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ (oder auch komplexwertig) sagen wir, dass f *auf der Menge M beschränkt* ist, falls die Menge $\{|f(x)| \mid x \in M\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist. In diesem Fall heißt

$$\|f\|_M := \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}$$

die *Supremumsnorm* von f auf M.

Eigenschaften der Supremumsnorm: (i) Es ist stets $\|f\|_M \geq 0$. Weiters gilt $\|f\|_M = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in M$ ist.

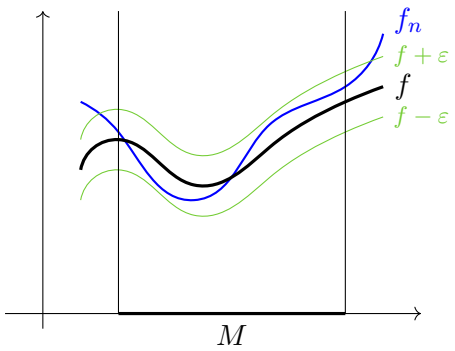
(ii) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$) gilt $\|cf\|_M = |c| \cdot \|f\|_M$.

(iii) Ist g ebenfalls beschränkt auf M, so gilt die Dreiecksungleichung $\|f+g\|_M \leq \|f\|_M + \|g\|_M$.

Definition:

Sind die Funktionen f und f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt auf M, dann sagen wir die Folge (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen f (auf M), falls $\|f_n - f\|_M \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

Anschaulich gesprochen bleiben über der Menge M für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktionsgraphen von f_n schließlich im (grün begrenzten) ε-Schlauch um den Graphen von f:



Anmerkungen und Eigenschaften: (a) Gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen f impliziert auch die punktweise Konvergenz, denn für alle $x \in M$ gilt die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_M \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(b) Die Umkehrung in (a) gilt i.A. nicht, wie die Folge aus Beispiel 1) in 20.1 zeigt, die zwar punktweise gegen f strebt, aber nicht gleichmäßig konvergent auf $M = [0,1]$ sein kann:

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} \geq \sup_{0 \leq x < 1} |\underbrace{f_n(x)}_{x^n} - \underbrace{f(x)}_{0}| = \sup_{0 \leq x < 1} x^n = 1 \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$

Übrigens sehen wir mit einer ähnlichen Überlegung, dass dieselbe Folge (f_n) auf jedem Teilintervall $[0, r]$ mit $0 < r < 1$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, denn

$$\|f_n\|_{[0,r]} = \sup_{0 \le x \le r} x^n = r^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(c) Den Unterschied zwischen gleichmäßiger und punktweiser Konvergenz können wir auch mittels „Epsilontik“ illustrieren: Wenn (f_n) *gleichmäßig* gegen f strebt, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für } n \ge n_\varepsilon \text{ und für alle } x \in M.$$

Bei *punktweiser* Konvergenz $f_n \to f$ gilt, dass es für jedes $x \in M$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon(x) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für } n \ge n_\varepsilon(x).$$

(d) Aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ folgt auch, dass die Folge (f_n) *gleichmäßig beschränkt* ist, d.h. es gibt eine Konstante $C \ge 0$, sodass

$$\|f_n\|_M \le C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Zu $\varepsilon := 1$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_M < 1$ für $n > n_1$, daher auch

$$\|f_n\|_M = \|f_n - f + f\|_M \le \|f_n - f\|_M + \|f\|_M < 1 + \|f\|_M =: C_1 \quad \text{für alle } n > n_1.$$

Für $n = 1, \ldots, n_1$ gilt selbstverständlich $\|f_n\|_M \le \max\{\|f_1\|_M, \ldots, \|f_{n_1}\|_M\} =: C_2$, sodass wir insgesamt

$$\|f_n\|_M \le \max\{C_1, C_2\} =: C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erhalten. □

20.3. Gleichmäßige Konvergenz bewahrt Stetigkeit

Satz:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wenn (f_n) auf I gleichmäßig gegen die Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist auch f stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz können wir ein $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $\|f_n - f\|_I < \varepsilon/3$. Wegen der Stetigkeit von f_n bei x_0 gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ gilt für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Somit erhalten wir für jedes $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\le \|f - f_n\|_I + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \|f_n - f\|_I < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Stetigkeit von f in x_0. □

20.4. Gleichmäßige Konvergenz von Reihen

Ist (f_k) eine Folge von beschränkten Funktionen auf der Menge M, dann nennen wir die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent, falls die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig konvergiert.

Majorantenkriterium von Weierstraß

Falls es eine reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_k \geq 0$ gibt, sodass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{konvergent ist} \quad \text{und} \quad \|f_k\|_M \leq a_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt,}$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent.

Beweis: Für jedes beliebige fixe $x \in M$ ist $|f_k(x)| \leq \|f_k\|_M \leq a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Daher ist nach dem Majorantenkriterium für Zahlenreihen die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergent. Wir können daher eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in M).$$

Se $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$, sodass für $m > n \geq N$ stets $\sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon$ bleibt. Für jedes $x \in M$ gilt daher

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon$$

und daraus weiter mit $m \to \infty$ die Abschätzung $|f(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in M$ und $n \geq N$. Das bedeutet nun

$$\|f - s_n\|_M = \sup_{x\in M} |f(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon \quad (n \geq N),$$

weshalb wir auf die gleichmäßige Konvergenz $s_n \to f$ schließen dürfen. □

Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ mit $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k^2}$ ist gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$, denn

$$\left| \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{gilt für alle } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

20.5. Dominierte Konvergenz in Integralen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ integrierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Folge (f_n) punktweise fast überall gegen eine Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$ und gibt es eine integrierbare Funktion $g \colon I \to \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|f_n(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in I$ zutrifft, dann ist f integrierbar auf I und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Beweise davon finden sich z.B. in [ASV, Kapitel 4] oder [Heu2, Satz 126.1].)

Auf einem kompakten Intervall ist jede konstante Funktion integrierbar, weshalb wir folgenden Spezialfall für die Praxis vermerken wollen.

Folgerung für ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$: Die Folge (f_n) von integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ sei punktweise fast überall gegen eine Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergent und gleichmäßig beschränkt, d.h. $|f_n(x)| \leq C$ für alle $x \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$, dann ist f integrierbar auf $[a, b]$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Schließlich machen wir für die Anwendung auch noch die offensichtliche Bemerkung, dass aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ stets die punktweise Konvergenz fast überall folgt.

20.6. Vertauschung gleichmäßiger Limiten mit Integralen oder Differentiation auf kompakten Intervallen

(A) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(a1) Folgen und Integrale: Wenn die Folge (f_n) auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen die Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ strebt, dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Nach Eigenschaft (d) aus 20.2 ist die Folge (f_n) gleichmäßig beschränkt, daher ist nach der Folgerung in 20.5 die Funktion f integrierbar und es gilt die Grenzwertaussage, weil die gleichmäßige Konvergenz insbesondere punktweise Konvergenz nach sich zieht. □

(a2) Gliedweise Integration einer Reihe: Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies folgt direkt aus (a1) durch Anwendung auf die Partialsummenfolge $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$.

(B) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(b1) Folgen und Ableitung: Wenn die Folge (f_n) auf $[a,b]$ punktweise gegen die Funktion $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ strebt und die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig gegen die Funktion $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist f stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$, d.h.

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Beweis: Für beliebiges $x_0 \in [a,b]$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für alle $x \in [a,b]$ die Gleichung

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t,$$

in der wir zum Grenzwert für $n \to \infty$ übergehen dürfen und gemäß (a1) auch Limes und Integral vertauschen dürfen. Wir erhalten

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

mit der nach 20.3 stetigen Funktion g. Wiederum nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist f stetig differenzierbar mit Ableitung $f' = g$. □

(b2) Gliedweise Differentiation einer Reihe: Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ punktweise für alle $x \in [a,b]$ gilt und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ gleichmäßig konvergent ist, dann ist $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Dies folgt direkt aus (b1) durch Anwendung auf die Partialsummenfolge $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$.

20.7. Anwendung auf Potenzreihen

Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen auf kompakten Kreisscheiben

Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ konvergiert gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$ mit $0 < r < R$.

Beweis: Wir können das Majorantenkriterium von Weierstraß aus 20.4 anwenden, denn für alle $z \in \overline{K_r(z_0)}$ gilt

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n| \cdot |z-z_0|^n \le |a_n|\, r^n$$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n$ ist wegen $r < R$ konvergent (absolute Konvergenz nach 16.3). □

Bemerkung: Wir können i.A. nicht erwarten, dass die Konvergenz der Potenzreihe gleichmäßig auf der gesamten offenen Kreisscheibe $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ stattfindet, weil bekanntlich das Konvergenzverhalten zum Rand hin problematisch werden kann.

(Z.B. bei der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist $R = 1$, $s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ und für $|z| < 1$ ergibt sich die Summenfunktion

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} s_n(z) = \frac{1}{1-z};$$

jedoch gilt $|f(z) - s_n(z)| = \left|\frac{1-(1-z^{n+1})}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \to \infty$ für $|z| \to 1$, somit ist sogar $\|f - s_n\|_{K_1(0)} = \infty$.)

Wir wenden uns nun wie im Abschnitt 16.4 wieder speziell Potenzreihen mit *reellem Entwicklungspunkt* und *reellen Koeffizienten* zu und betrachten entsprechend Gleichung (16.4) die zugehörige Summenfunktion.

Gliedweise Differentiation und Integration von Potenzreihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}_0$), Konvergenzradius $R > 0$ und Summenfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I =]x_0 - R, x_0 + R[$. Dann ist $f \in C^\infty(I)$ und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \quad \text{etc.} \tag{20.1}$$

sowie für $[a, b] \subseteq I$ auch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}\Big|_a^b. \tag{20.2}$$

Beweis: Aus dem obigen Satz über die gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen wissen wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ für jedes $0 < r < R$ auf dem kompakten Intervall $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$ gleichmäßig konvergent ist.

Wir zeigen (20.2): Für beliebige $a, b \in I$ mit $a < b$ können wir ein passendes $r > 0$ finden, sodass $[a, b] \subseteq [x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$ gilt. Daher ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$ und wir können (a2) aus 20.6 anwenden und die Potenzreihe gliedweise integrieren

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x - x_0)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}\Big|_a^b.$$

Wir zeigen (20.1): Wir wissen aus 16.4, dass die gliedweise abgeleiteten Potenzreihen denselben Konvergenzradius R haben. Für jeden Punkt $x \in I$ und kleines $\varepsilon > 0$ können wir ein passendes $r > 0$ finden, sodass $U_\varepsilon(x) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq [x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$ gilt und somit

gleichmäßige Konvergenz sowohl der Reihe als auch aller gliedweise differenzierten Reihen in einer fixen Umgebung von x garantiert ist. Daher können wir (b2) aus 20.6 anwenden und die Potenzreihe gliedweise differenzieren. $\square$

21. Fourier-Reihen

Vorbemerkung: Wir werden hier auch komplexwertige Funktionen auf reellen Intervallen studieren, wie es z.B. für die Darstellung

$$e^{ix} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

nützlich sein kann. D.h. wir schreiben im allgemeineren Fall für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $f\colon I \to \mathbb{C}$ einfach

$$f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x) \quad \text{mit } f_1(x) := \operatorname{Re} f(x) \text{ und } f_2(x) := \operatorname{Im} f(x) \quad (x \in I)$$

und spielen Integrale oder Ableitungen auf die reellwertigen Funktionen $f_1, f_2\colon I \to \mathbb{R}$ zurück, d.h. einfach

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I f_1(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_I f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

wenn f_1 und f_2 integrierbar sind, oder

$$f'(x) := f_1'(x) + \mathrm{i} f_2'(x),$$

falls f_1 und f_2 differenzierbar sind.

21.1. Lösungen von $u'' + \lambda^2 u = 0$ für $\lambda > 0$ mit Periodizität

Die Überlegungen, die auf (15.1) geführt haben, sind auch auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ an Stelle von $\mathbb{R}$ gültig, daher sind alle Lösungen $u\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung von der Form

$$u(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x) \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

mit reellen Konstanten a und b. Falls wir komplexwertige Lösungen $v\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit $v'' = -\lambda v$ zulassen, zeigt „das Kleingedruckte“ nach (15.1), dass in diesem Falle

$$v(x) = de^{-\mathrm{i}\lambda x} + ce^{\mathrm{i}\lambda x} \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

mit komplexen Konstanten d und c.

Wir sind an Lösungen $u \neq 0$, $v \neq 0$ interessiert und verlangen zusätzlich die *Randbedingungen*

$$u(-\pi) = u(\pi), u'(-\pi) = u'(\pi) \quad \text{bzw.} \quad v(-\pi) = v(\pi), v'(-\pi) = v'(\pi). \tag{21.1}$$

Dies erlaubt die Funktionen 2π-periodisch und stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ fortzusetzen (z.B. mittels $u(x + 2\pi k) := u(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$, $-\pi \leq x \leq \pi$). Durch Einsetzen in obige Lösungsformel bedeuten die jeweils ersten Gleichungen in (21.1) nun

$$a\cos(\lambda\pi) - b\sin(\lambda\pi) = a\cos(\lambda\pi) + b\sin(\lambda\pi) \quad \text{bzw.} \quad de^{\mathrm{i}\lambda\pi} + ce^{-\mathrm{i}\lambda\pi} = de^{-\mathrm{i}\lambda\pi} + ce^{\mathrm{i}\lambda\pi}$$

und weiters

$$(*) \qquad b\sin(\lambda\pi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (d-c)e^{2\mathrm{i}\lambda\pi} = d - c.$$

1. Fall $b = 0$ bzw. $d-c = 0$: Dann ist $u(x) = a\cos(\lambda x)$ bzw. $v(x) = d(e^{-\mathrm{i}\lambda x}+e^{\mathrm{i}\lambda x}) = 2d\cos(\lambda x)$ und $u'(x) = -\lambda a\sin(\lambda x)$ bzw. $v'(x) = -2\lambda d\sin(\lambda x)$, was in den jeweils zweiten Gleichungen in (21.1) auf die Bedingung

$$\lambda a\sin(\lambda\pi) = -\lambda a\sin(\lambda\pi) \quad \text{bzw.} \quad \lambda d\sin(\lambda\pi) = -\lambda d\sin(\lambda\pi)$$

führt. Um $u \neq 0$, $v \neq 0$ zu garantieren, muss $a \neq 0$, $d \neq 0$ gelten und daher

$$\lambda\sin(\lambda\pi) = 0.$$

Wegen $\lambda > 0$ erzwingt dies die Bedingung $\sin(\lambda\pi) = 0$ und somit

$$(**) \qquad \lambda \in \mathbb{N}.$$

2. Fall $b \neq 0$ bzw. $d - c \neq 0$: Hier folgt aus $(*)$ unmittelbar

$$\sin(\lambda\pi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad e^{2\mathrm{i}\lambda\pi} = 1,$$

was in beiden Varianten wegen $\lambda > 0$ ebenfalls auf $(**)$ hinausläuft.

Schreiben wir $\lambda_k = k \in \mathbb{N}$, dann haben wir also für jedes $k \in \mathbb{N}$ reelle Lösungen u_k von $u_k'' + k^2 u_k = 0$ in der Form

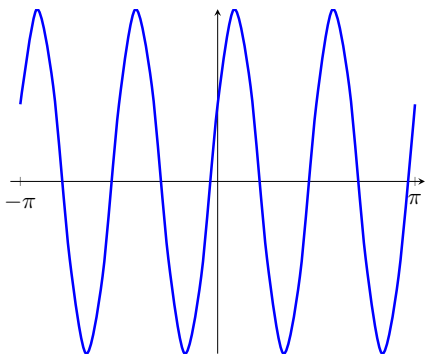
$$(21.2) \qquad u_k(x) = a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) \quad (x \in [-\pi,\pi], k \in \mathbb{N})$$

mit Konstanten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und entsprechend komplexe Lösungen v_k von $v_k'' + k^2 v_k = 0$ der Gestalt

$$(21.3) \qquad v_k(x) = d_k e^{-\mathrm{i}kx} + c_k e^{\mathrm{i}kx} \quad (x \in [-\pi,\pi], k \in \mathbb{N})$$

mit Konstanten $d_k, c_k \in \mathbb{C}$.

Die Lösungen in (21.2) können wir als „stehende Wellen“ mit Frequenz k interpretieren. In der nebenstehenden Skizze das Beispiel $\cos(4x) + 2\sin(4x)$.



Konstante Funktionen $u_0(x) = a_0/2$ (der Faktor 1/2 wird sich später als „praktisch“ erweisen) bzw. $v_0(x) = c_0$ sind natürlich 2π-periodisch und wir können diese wegen $u_0'' = 0$ bzw. $v_0'' = 0$ als zusätzlichen Sonderfall für die Frequenz $\lambda_0 = 0$ auffassen.

Jede der Lösungen in (21.2) bzw. (21.3) hat eine 2π-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$. Endliche Summen davon entsprechen einer Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen $0, 1, 2, \ldots, n$ und ergeben wiederum eine 2π-periodische Funktion:

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big). \tag{21.4}$$

Ein Ausdruck wie jener auf der rechten Seite von (21.4) heißt *trigonometrische Polynom.*

Umgekehrt können wir die grundlegende Frage stellen: „Lässt sich jede 2π-periodische Funktion u durch Überlagerung solcher Wellen darstellen oder zumindest approximieren?“

Mit anderen Worten und etwas Übermut fragen wir, ob für die „beliebige“ 2π-periodische Funktion u auf dem Grundintervall $[-\pi, \pi]$ eine Reihenentwicklung

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big) \tag{21.5}$$

gelten kann, wobei wir uns natürlich auch um die Konvergenzeigenschaften kümmern müssen.

21.2. Fourierkoeffizienten und Fourier-Reihen

(a) Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Darstellungen: Für das trigonometrische Polynom (21.4) können wir vermöge

$$\cos(kx) = \frac{e^{\mathrm{i}kx} + e^{-\mathrm{i}kx}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(kx) = \frac{e^{\mathrm{i}kx} - e^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}}$$

auch eine komplexe Darstellung wählen

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kx}.$$

Daraus lesen wir die Zusammenhänge

$$c_k = \frac{1}{2} \begin{cases} a_{-k} + \mathrm{i}b_{-k} & k < 0, \\ a_0 & k = 0, \\ a_k - \mathrm{i}b_k & k > 0, \end{cases} \tag{21.6}$$

sowie umgekehrt

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \tag{21.7}$$

ab.

(b) Eindeutigkeit der Koeffizienten: Sei $u\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $u(-\pi) = u(\pi)$. Angenommen es gilt die Darstellung (21.5) mit gleichmäßiger Konvergenz, dann ist u stetig und es folgt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t \quad (k \in \mathbb{N})$$

und

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,e^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Beweis: Wir führen den Beweis im Detail für die komplexe Darstellung

$$u(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kx} =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}. \tag{21.8}$$

Die Formeln für a_0, a_k und b_k folgen daraus mittels (21.7).

Alle Summanden in (21.5) bzw. (21.8) sind stetig, daher folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe gemäß 20.3 die Stetigkeit von u. Nach (a2) in 20.6 dürfen wir gliedweise integrieren und erhalten mit $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}(k-m)t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{\mathrm{i}(k-m)t}}{\mathrm{i}(k-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$ für $k \neq m$ nun

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t)e^{-\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kt}e^{-\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}(k-m)t}\,\mathrm{d}t}_{\begin{cases}0 & k \neq m,\\ 2\pi & k = m\end{cases}} = 2\pi c_m.$$

□

Bemerkungen: (i) Ist u eine *gerade Funktion*, d.h. $u(-x) = u(x)$, dann gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, denn mit der Substitution $s = -t$ sehen wir

$$\pi b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{u(t)}_{u(-t)} \cdot \underbrace{\sin(kt)}_{-\sin(-kt)}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{-\pi} u(s)\sin(ks)\,\mathrm{d}s = -\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\sin(ks)\,\mathrm{d}s = -\pi b_k.$$

(ii) Ist u eine *ungerade Funktion*, d.h. $u(-x) = -u(x)$, dann gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Ü

(iii) Für die Funktion u wie oben ist die 2π-periodische Fortsetzung $\tilde{u}(x + 2k\pi) := u(x)$ $(x \in [-\pi,\pi], k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ wegen $u(-\pi) = u(\pi)$ stetig.

Definition:

Ist $u\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, dann heißen

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t \quad (k \in \mathbb{N})$$

und

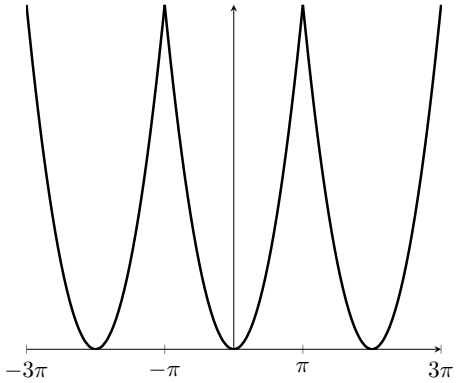
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,e^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t \quad (k \in \mathbb{Z})$$

die *Fourierkoeffizienten* von u. Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$s_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)$$

definiert die *Fourier-Reihe* von u (unabhängig von deren Konvergenzverhalten).

Beispiel: Wir betrachten die stetige Funktion $u\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = x^2$. Da u gerade ist, verschwinden alle Sinus-Koeffizienten b_k der zugehörigen Fourier-Reihe. Eine Skizze eines Ausschnittes der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion u auf $\mathbb{R}$ sieht wie folgt aus:



Zunächst ist $\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$, daher $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$.

Weiters ist für $k \geq 1$ mittels zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}
\pi a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \overbrace{x^2\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}}^{0} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{k}\left(x\frac{(-\cos(kx))}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \overbrace{\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x}^{\frac{1}{k^2}\sin(kx)\big|_{-\pi}^{\pi}=0}\right) = -\frac{2}{k^2}\Big(-\pi\cos(k\pi) - \pi\overbrace{\cos(-k\pi)}^{\cos(k\pi)}\Big) \\
&= \frac{4\pi}{k^2}\cos(k\pi) = \frac{4\pi}{k^2}(-1)^k
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad b_k = 0 \quad (k \geq 1), \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Somit lautet die Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4\cos(kx)}{k^2}.$$

Wegen $\left|(-1)^k \frac{4\cos(kx)}{k^2}\right| = \frac{4|\cos(kx)|}{k^2} \leq \frac{4}{k^2}$ (gleichmäßig bzgl. x) ist diese Reihe nach dem Majorantenkriterium von Weierstraß 20.4 gleichmäßig konvergent. Wir werden unten noch sehen, dass wir im vorliegenden Fall für jedes $x \in [-\pi, \pi]$ Konvergenz gegen $u(x)$ garantieren können, weil u stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$ ist. Somit gilt also

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4\cos(kx)}{k^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Werten wir das speziell bei $x = 0$ aus, so folgern wir aus $0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2}$ nun

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

Bei $x = \pi$ wiederum haben wir

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k\pi)}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

und erhalten daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{3\pi^2 - \pi^2}{12} = \frac{2\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{21.9}$$

Umrechnung auf andere Periodenlängen: Sei $L > 0$. Eine Funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt $2L$-periodisch, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $v(x + 2kL) = v(x)$ gilt. Es ist direkt zu sehen, dass v genau dann $2L$-periodisch ist, wenn die Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $u(x) := v(Lx/\pi)$ 2π-periodisch ist. Damit können die Techniken der Fourier-Reihen bei Bedarf systematisch auf $2L$-periodische Funktionen übertragen und auch entsprechende Formeln für die Koeffizienten abgeleitet werden.

21.3. Punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe

Wir nennen eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig differenzierbar*, wenn f stückweise stetig mittels Zerlegung $a = a_0 < \dots < a_N = b$ ist (vgl. 17.5(b)) und die Einschränkungen von f auf $]a_{k-1}, a_k[$ jeweils zu C^1-Funktionen auf $[a_{k-1}, a_k]$ fortsetzbar sind, d.h. die Ableitung f' ist stückweise stetig.

Satz: Sei $u\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar mit $u(-\pi) = u(\pi)$. Mit der Bezeichnung $u(x\pm) := \lim\limits_{y\to x\pm} u(y)$ gilt dann für die Partialsummen s_n der Fourier-Reihe von u die folgende punktweise Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{u(x-)+u(x+)}{2} \quad \text{für jedes } x \in [-\pi,\pi].$$

Da in einem Stetigkeitspunkt x von u natürlich $\frac{u(x-)+u(x+)}{2} = u(x)$ gilt, konvergiert in diesen Punkten die Fourier-Reihe von u gegen den Funktionswert. Darüber hinaus konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen u auf allen kompakten Intervallen ohne Sprungstellen von u.

Beweisskizze: Wir setzen die Integralformeln für die Koeffizienten in die Partialsumme der (komplexen Version der) Fourier-Reihe ein und berechnen

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, e^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t \cdot e^{\mathrm{i}kx} = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}k(x-t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei $D_n(s) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}ks}$ der sogenannte *Dirichlet-Kern* ist.

Sowohl u als auch D_n sind 2π-periodisch und außerdem ist D_n offensichtlich gerade. Daher können wir das Integrationsintervall um x verschieben, dann zerlegen und einmal $x-t=s$ und das andere Mal $x-t=-s$ substituieren:

$$\begin{aligned}
(*)\quad s_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} u(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-\pi}^{x+\pi} u(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x-\pi}^{x} u(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{x+\pi} u(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{0} u(x-s) D_n(s)\,\mathrm{d}s + \int_{0}^{\pi} u(x+s)\overbrace{D_n(-s)}^{D_n(s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{0}^{\pi} u(x-s) D_n(s)\,\mathrm{d}s + \int_{0}^{\pi} u(x+s) D_n(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Der Dirichlet-Kern hat offensichtlich die Eigenschaft $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iks}\,\mathrm{d}s = 1$, weil $\int_{-\pi}^{\pi} e^{iks}\,\mathrm{d}s = 0$ für $k \neq 0$ und $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0s}\,\mathrm{d}s = 2\pi$ gilt. Wegen $D_n(-s) = D_n(s)$ schließen wir daraus auch

$$\int_{0}^{\pi} D_n(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2} = \int_{-\pi}^{0} D_n(s)\,\mathrm{d}s.$$

Mittels $\dfrac{1}{2}u(x\pm) = \displaystyle\int_{0}^{\pi} u(x\pm) D_n(s)\,\mathrm{d}s$ kommen wir aus der obigen Darstellung $(*)$ nun auf

$$s_n(x) - \frac{u(x-)+u(x+)}{2} = \int_{0}^{\pi} \big(u(x-s)-u(x-)\big) D_n(s)\,\mathrm{d}s + \int_{0}^{\pi} \big(u(x+s)-u(x+)\big) D_n(s)\,\mathrm{d}s$$

und die verbleibende technische Schwierigkeit ist der Nachweis, dass beide Integrale für $n\to\infty$ gegen 0 streben, sowie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Stetigkeitsintervallen von u (vgl. [FK2, §6, Abschnitt 2.5]). $\square$

Beispiel: Die Funktion $u\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = |x|$ erfüllt $u(-\pi) = u(\pi)$, ist stetig und auch stückweise stetig differenzierbar. Außerdem ist u gerade, weshalb $b_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) gilt.

Zuerst berechnen wir wieder $\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = x^2\big|_0^{\pi} = \pi^2$, d.h. $a_0 = \pi$. Für $k \geq 1$ ist weiters mit partieller Integration

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \overbrace{2x\frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi}}^{0} - 2\int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{k}\cdot\frac{(-\cos(kx))}{k}\bigg|_0^{\pi} = -\frac{2}{k^2}(\cos 0 - \cos(k\pi)) = -\frac{2}{k^2}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{k^2} & k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

daher also $a_{2l} = 0$ und $a_{2l-1} = -\frac{4}{\pi(2l-1)^2}$ für $l \in \mathbb{N}$. Wir erhalten die Darstellung

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos((2l-1)x)}{(2l-1)^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz. Wir schreiben dies zur Illustration noch kurz um auf

$$\cos x + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}|x|.$$

Auswertung bei $x = 0$ ergibt die Summenformel

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

21.4. Approximation im quadratischen Mittel

Wir betrachten hier *quadratisch integrierbare Funktionen* $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, die durch die Eigenschaft definiert sind, dass die Funktion $x \mapsto |f(x)|^2$ integrierbar ist, und bezeichnen diese auch als L^2*-Funktionen*. Für jede L^2-Funktion f können wir das *quadratische Mittel* oder die L^2*-Norm* einführen

$$\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Diese Funktionenklasse ist im Hinblick auf Fourier-Reihen deshalb von besonderer Bedeutung, weil sich für eine beliebig gegebene L^2-Funktion $u\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit den Partialsummen s_n der zugehörigen Fourier-Reihe Folgendes zeigen lässt (vgl. [Heu2, Abschnitte 134 und 141]):

(i) Optimale L^2-Approximation: Bezeichnet T_n die Menge aller trigonometrischen Polynome mit maximaler Frequenz n, dann gilt

$$\|u - s_n\|_2 \leq \|u - p\|_2 \quad \text{für alle } p \in T_n;$$

(ii) L^2-Konvergenz: $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - s_n\|_2 = 0.$

Eine elegante Interpretation der Fourier-Reihenentwicklung erschließt sich durch die Einführung des Skalarproduktes[1]

$$\langle f|g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\,\mathrm{d}x \quad (f, g\ L^2\text{-Funktionen}),$$

woraus sich die L^2-Norm durch $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f\rangle}$ ausdrücken lässt. Die Folge der Funktionen $e_k\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $e_k(x) := e^{\mathrm{i}kx}/\sqrt{2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ bildet dann wegen

$$\langle e_n|e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}(m-n)x}\,\mathrm{d}x = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m, \end{cases}$$

ein orthonormales System.

Betrachten wir eine Summendarstellung (endlich oder unendlich) der Form

$$u(x) = \sum_l c_l e^{\mathrm{i}kx} = \sum_l c_l \sqrt{2\pi} e_l(x),$$

dann ist dies abstrakter geschrieben

$$u = \sqrt{2\pi}\sum_{l=-N}^{N} c_l e_l, \quad \text{daher} \quad \langle e_k|u\rangle = \sqrt{2\pi}\sum_{l=-N}^{N} c_l \overbrace{\langle e_k|e_l\rangle}^{\delta_{kl}} = \sqrt{2\pi}c_k,$$

d.h. wir erhalten genau die passende Formel für die Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle e_k|u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}kx} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Somit ist die Fourier-Reihenentwicklung analog zur Darstellung eines Vektors in einem unitären Vektorraum mittels einer Orthonormalbasis. Bekanntlich lässt sich aus so einer Orthonormalbasisentwicklung ja auch das Quadrat der Norm eines Vektors als Summe über die Koeffizientenquadrate ausdrücken und in diesem Kontext gilt ([Heu2, 142.1] oder [FK2, §9, 4.5]) dann auch für die Fourierkoeffizienten die

Parseval-Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\|u\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2 + b_k^2}{2}. \tag{21.10}$$

[1] Nur die Eigenschaft der positiven Definitheit ist noch nicht strikt erfüllt, denn $\langle f|f\rangle = 0$ impliziert $f = 0$ f.ü.; das kann aber durch Übergang zu L^2-Klassen von f.ü. gleichen Funktionen strukturell behoben werden.

Appendix: Ein kurzer Blick auf gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen spielen eine wesentliche Rolle bei vielen Modellbildungen zu physikalischen Fragestellungen und Sie werden diesen wohl schon mehrfach in anderen Vorlesungen begegnet sein. Wir wollen und können hier im Anschluss an diese erste Analysis-VO (und außerhalb des curricular festgelegten Stoffes) nur einen ganz kurzen Blick auf sogenannte *gewöhnliche Differentialgleichungen* versuchen, bei denen es also um Gleichungen für Funktionen einer reellen Variablen und deren Ableitungen geht. Beispiele dafür hatten wir bereits in 14.4 und 15.1 ein wenig studiert. Mehr Hintergrundwissen und Details für eine Einführung finden sich z.B. in [FK1, §13] und [FK2, Kapitel II, §2-3].

Grundbegriffe und elementare Lösungstechniken

Grundsätzlich kann eine skalare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$y' = f(x, y) \tag{DGL}$$

geschrieben werden, wobei f eine gegebene Funktion sein soll und eine entsprechende Funktion $x \mapsto y(x)$ gesucht wird. Genauer heißt eine Funktion $u\colon I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung* von (DGL), wenn u differenzierbar ist und

$$u'(x) = f(x, u(x)) \quad \text{für alle } x \in I \text{ gilt.} \tag{L}$$

Beispiel: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := \lambda y$ hat

$$y' = \lambda y$$

die Lösungen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = ce^{\lambda x}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir bemerken, dass hier immer $c = u(0)$ ist.

Unter einem *Anfangswertproblem* für die gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) verstehen wir die zusätzliche Vorgabe eines Wertes $y_0 \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$, d.h.

$$y' = f(x, y) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0. \tag{AWP}$$

Eine Funktion $u\colon I \to \mathbb{R}$ ist also eine Lösung von (AWP), wenn u differenzierbar ist und sowohl $u'(x) = f(x, u(x))$ $(x \in I)$ als auch $u(x_0) = y_0$ gilt. Hier ist f eine gegebene reellwertige Funktion $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Von einem *System (der Größe n) von gewöhnlichen Differentialgleichungen* sprechen wir, falls f eine vektorwertige Abbildung $I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist. In diesem Fall ist $u\colon I \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto$

$(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ eine Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems mit $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$, falls jedes $u_j \colon I \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$ differenzierbar ist und sowohl $u(x_0) = y_0$ als auch

$$u'(x) := \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{pmatrix} = f(x, u(x)) \quad \text{für alle } x \in I \text{ gilt.}$$

Beispiel: Betrachten wir $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y_1, y_2) := \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}$, dann erhalten wir das folgende System (der Größe 2) von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\text{(S)} \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}$$

für die gesuchten Funktionen $x \mapsto y_1(x)$ und $x \mapsto y_2(x)$. Wir bemerken, dass sich in diesem Fall $y_1'' = y_2' = -\sin y_1$ ergibt, d.h. y_1 ist eine Lösung der folgenden *skalaren gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung* des ungedämpften Pendels

$$\text{(P)} \qquad y'' + \sin y = 0.$$

Skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung: Suchen wir eine n-fach differenzierbare Funktion $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ mit der Vorgabe

$$y^{(n)} = h(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

dann können wir stattdessen die n Funktionen $y_1 := y$, $y_2 := y'$, $\ldots$, $y_n := y^{(n-1)}$ betrachten und erhalten für die vektorwertige $z \colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $z(x) := (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ nun wegen $y_n' = y^{(n)} = h(x, y_1, \ldots, y_n) = h(x, z)$ das folgende System erster Ordnung (der Größe n):

$$z' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ h(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix} =: f(x, z).$$

Insofern genügt für grundsätzliche Fragen eine Theorie von Systemen erster Ordnung.

Beispiel: Die obige skalare Gleichung des ungedämpften Pendels (P) ist von zweiter Ordnung und wird durch $y_1 := y$ und $y_2 := y'$ gleichwertig in das System (S) übergeführt.

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen bzw. Systeme: Falls für jedes fixe $x \in I$ die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$ linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist, sprechen wir von einem *linearen System von gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Es ist also dann für jedes $x \in I$ die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$ durch eine $(n \times n)$-Matrix $A(x)$ in der Form $y \mapsto A(x) \cdot y$ gegeben und wir erhalten das System

$$y' = A(x) \cdot y.$$

Elementare Methoden für einige skalare Gleichungen

Wir betrachten hier einige Spezialfälle des Anfangswertproblems für skalare Differentialgleichungen

$$y' = f(x, y) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0,$$

wobei $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben sind.

(A) Homogene lineare Differentialgleichung: In diesem Fall ist $f(x, y) = a(x) \cdot y$ mit einer Funktion $a\colon I \to \mathbb{R}$, d.h. wir betrachten

$$\text{(HLD)} \qquad y' = a(x)y, \quad y(x_0) = y_0.$$

Wir nehmen nun an, dass a stetig ist und legen dazu die (eindeutige) Stammfunktion $g\colon I \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = 0$ in der Form

$$g(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s$$

fest. Setzen wir

$$u_1(x) := e^{g(x)},$$

dann erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$u_1'(x) = \left(e^{g(x)}\right)' = g'(x)e^{g(x)} = a(x)e^{g(x)} = a(x)u_1(x) \quad \text{für alle } x \in I,$$

also mittels u_1 immer eine Lösung der Differentialgleichung mit dem speziellen Anfangswert $u_1(x_0) = e^{g(x_0)} = e^0 = 1$. Durch $u(x) := y_0 u_1(x)$, d.h. im Detail

$$\text{(EL)} \qquad u(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s\right) \quad (x \in I),$$

erhalten wir wegen $u'(x) = y_0 u_1'(x) = a(x)y_0 u_1(x) = a(x)u(x)$ und $u(x_0) = y_0 u_1(x_0) = y_0$ eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems (HLD).

Die in (EL) konstruierte Lösung ist übrigens die *eindeutige Lösung* des Anfangswertproblems (HLD): Ist nämlich $v\colon I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung, dann betrachten wir $w(x) := v(x)\exp(-g(x))$ und erhalten

$$w'(x) = \underbrace{v'(x)}_{a(x)v(x)}\, e^{-g(x)} - v(x)a(x)e^{-g(x)} = 0.$$

Somit ist w konstant auf dem Intervall I und wegen $w(x) = w(x_0) = v(x_0)e^{-0} = v(x_0) = y_0$ ergibt sich $y_0 = v(x)\exp(-g(x))$, d.h.

$$v(x) = y_0 e^{g(x)} = u(x) \quad (x \in I).$$

Suchen wir allgemein nach Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot y,$$

ohne die Anfangswerte festzulegen, so können wir folgende Beobachtung anstellen: Sind y_1 und y_2 Lösungen, dann ist für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ auch die Linearkombination $z := c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung, denn

$$z'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = c_1 a(x) y_1(x) + c_2 a(x) y_2(x) = a(x) z(x) \quad (x \in I).$$

Ganz speziell sind natürlich auch $c_1 y_1$ sowie $c_2 y_2$ Lösungen und z wird in der Physik auch oft als *Superposition* dieser beiden bezeichnet.

(B) Inhomogene lineare Differentialgleichung – Variation der Konstanten: Nun ist f von der Form $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ mit einer weiteren stetigen Funktion $b\colon I \to \mathbb{R}$, d.h. wir wollen das Anfangswertproblem

$$\text{(ILD)} \qquad y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

lösen.

Wir machen im Hinblick auf die Lehren aus (A) und mit der dortigen Notation den Ansatz

$$\text{(ELC)} \qquad y(x) = c(x)\, e^{g(x)} = c(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\, \mathrm{d}s \right) \quad (x \in I)$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion $c\colon I \to \mathbb{R}$, die als „variierte Konstante“ fungiert. Wir berechnen zunächst

$$y'(x) = c'(x) e^{g(x)} + c(x) a(x) e^{g(x)} = c'(x) e^{g(x)} + a(x) y(x)$$

und erhalten

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \Leftrightarrow \quad b(x) = c'(x) e^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad c'(x) = e^{-g(x)} b(x).$$

Ist also c eine Stammfunktion von be^{-g}, dann gilt für $y := ce^g$ tatsächlich die Differentialgleichung

$$y' = c' e^g + c\, a\, e^g = b\, e^{-g}\, e^g + a\, c\, e^g = b + a\, y.$$

Für die Anpassung an die Anfangsbedingung bemerken wir noch, dass $y(x_0) = c(x_0) e^{g(x_0)} = c(x_0)$ wegen $g(x_0) = 0$ gilt. Zusammenfassend erhalten wir eine Lösung von (ILD) durch den Ansatz (ELC), wenn c die (eindeutige) Stammfunktion von be^{-g} mit $c(x_0) = y_0$ ist.

(C) Separierte Variablen: Hier nehmen wir an, dass f von Produktform $f(x, y) = g(x)h(y)$ mit stetigen Funktionen g und h (auf geeigneten Intervallen) ist. Das entsprechende Anfangswertproblem hat die Gestalt

$$\text{(SVD)} \qquad y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Im Falle $h(y_0) = 0$ ist natürlich die konstante Funktion $y(x) := y_0$ automatisch eine Lösung.

Wir nehmen nun für das Weitere an, dass $h(y_0) \neq 0$ gilt. Dank der Stetigkeit von h gilt dann auch $h(y) \neq 0$ für alle y in einer geeigneten Umgebung von y_0. Wegen der Stetigkeit von y ist dann auch $h(y(x)) \neq 0$ für alle x in einem passend gewählten Intervall I um x_0.

Die Differentialgleichung können wir dann umschreiben auf die Form

$$\frac{y'(r)}{h(y(r))} = g(r) \quad (r \in I)$$

und auf beiden Seiten bzgl. r integrieren mit den Grenzen x_0 und $x \in I$. Wir erhalten zunächst

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(r)}{h(y(r))}\,\mathrm{d}r = \int_{x_0}^{x} g(r)\,\mathrm{d}r =: G(x).$$

Substituieren wir im ersten Integral $s = y(r)$, somit „$\mathrm{d}s = y'(r)\,\mathrm{d}r$“, dann ergibt sich

$$G(x) = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{h(s)} = H(y(x)),$$

wobei wir unter Beachtung von $y(x_0) = y_0$ noch

$$\text{(HIF)} \qquad H(z) := \int_{y_0}^{z} \frac{\mathrm{d}s}{h(s)} \quad (z \in I)$$

gesetzt haben. Wir würden also gerne noch die Gleichung

$$\text{(GHL)} \qquad G(x) = H(y(x))$$

für jedes $x \in I$ nach $y(x)$ auflösen. Das geht zumindest im Prinzip, denn h ist ja nach unseren Annahmen nullstellenfrei, daher entweder ständig negativ oder ständig positiv auf dem Integrationsintervall in (HIF). Somit ist H mit Sicherheit streng monoton und daher injektiv, was die Eindeutigkeit von $y(x)$ regelt. Außerdem ist H auf seiner Bildmenge auch umkehrbar und wir dürfen daher

$$\text{(LSV)} \qquad y(x) = H^{-1}(G(x)), \quad G(x) := \int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s, \quad H(z) := \int_{y_0}^{z} \frac{\mathrm{d}s}{h(s)}$$

als eine Art Lösungsformel betrachten.

Beispiele:

1) (Eine spezielle Riccati-Differentialgleichung, vgl. [FK1, §13, 2.1], [Köh, Aufgabe 17.8].) Wir betrachten

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = y_0 > 0,$$

d.h. wir haben $g(x) = 2x$ und $h(y) = y^2$. Die Differentialgleichung schreiben wir um auf die Form

$$2r = \frac{y'(r)}{y(r)^2},$$

integrieren bzgl. r von 0 bis x und substituieren unterwegs $s = y(r)$, sodass wir

$$x^2 = \int_0^x \frac{y'(r)\,\mathrm{d}r}{y(r)^2} = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{s^2} = \frac{-1}{s}\bigg|_{y_0}^{y(x)} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(x)}$$

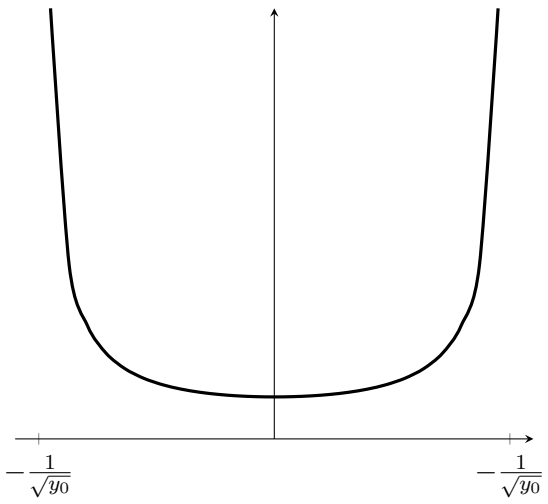
erhalten. Daher ist $\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{y_0} - x^2 = \frac{1-y_0x^2}{y_0}$ und somit

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0x^2},$$

was jedenfalls für $|x| < 1/\sqrt{y_0}$ definiert ist und auch $y(0) = y_0$ erfüllt. Außerdem ist dies tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung, denn die Probe ergibt

$$y'(x) = -\frac{y_0}{(1 - y_0x^2)^2} \cdot (-2y_0x) = 2x\frac{y_0^2}{(1 - y_0x^2)^2} = 2xy(x)^2.$$

Strebt x von innerhalb des Definitionsintervalls gegen einen der Randpunkte $\pm 1/\sqrt{y_0}$, dann gilt jeweils $y(x) \to \infty$. Daher können wir das Existenzintervall dieser Lösung nicht ausdehnen.



2) (Modell eines auslaufenden Bechers, vgl. [FK1, §13, 2.2], wobei $y(t)$ die Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t ist.) Wir wollen das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -2\sqrt{y(t)}, \quad y(0) = y_0 > 0$$

lösen. Aus der Integration der Gleichung $y'/\sqrt{y} = -2$ in den Grenzen 0 und t erhalten wir mit der üblichen Substitution zunächst

$$-2t = \int_0^t \frac{y'(r)\,\mathrm{d}r}{\sqrt{y(t)}} = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}} = 2\sqrt{s}\Big|_{y_0}^{y(t)} = 2\left(\sqrt{y(t)} - \sqrt{y_0}\right).$$

Also ist $\sqrt{y(t)} = \sqrt{y_0} - t$ und somit

$$y(t) = (\sqrt{y_0} - t)^2$$

für $t \leq \sqrt{y_0}$ definiert. Die Probe ergibt auch direkt $y'(t) = -2(\sqrt{y_0} - t) = -2\sqrt{y(t)}$ sowie $y(0) = (\sqrt{y_0})^2 = y_0$.

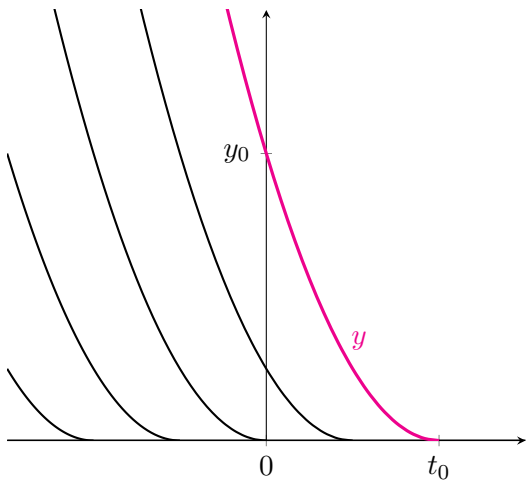
Bemerkung: Wir erhalten am rechten Rand $t_0 := \sqrt{y_0}$ des Definitionsintervalls obiger Lösung den Funktionswert $y(t_0) = 0$ und für die Ableitung $y'(t_0) = 0$. Daher ist durch

$$u_0(t) := \begin{cases} (t_0 - t)^2 & t \leq t_0, \\ 0 & t > t_0, \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare Funktion $u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $u_0(t_0) = 0$ und $u_0'(t) = -2\sqrt{u_0(t)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nun hat aber auch für jedes $\lambda > 0$ die Funktion $u_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_\lambda(t) := u_0(t+\lambda)$, deren Graph gegenüber u_0 um λ nach links verschoben wurde, die Eigenschaften $u_\lambda(t_0) = 0$ und $u_\lambda'(t) = -2\sqrt{u_\lambda(t)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit hat das Anfangswertproblem

$$u'(t) = -2\sqrt{u(t)}, \quad u(t_0) = 0$$

unendlich viele Lösungen. (Sobald das Wasser einmal vollständig aus dem Becher ausgelaufen ist, lässt sich nicht mehr eindeutig rekonstruieren, wann der Becher davor wie voll war.)



Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir kommen zurück zum allgemeinen Anfangswertproblem

(AWP) $$y' = f(x, y) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

und wollen für den skalaren Fall nun ganz grob skizzieren, wie man die Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen zumindest nahe x_0 unter gewissen Bedingungen nachweisen kann. Eine grundlegende Methode dafür ist die Umwandlung in eine äquivalente *Integralgleichung* unter der Annahme, dass für stetiges y auch die Funktion $s \mapsto f(s, y(s))$ stetig ist.

Ausgehend von (AWP), geschrieben in der Form

$$y'(s) = f(s, y(s)), \quad y(x_0) = y_0,$$

integrieren wir bzgl. s von x_0 bis x und gelangen nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(s)\,\mathrm{d}s = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s,$$

d.h. wir erhalten die Integralgleichung

$$\text{(IG)} \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s.$$

Gehen wir umgekehrt von der Integralgleichung (IG) aus, so dürfen wir wiederum nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ableiten und bekommen

$$y'(x) = 0 + \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s\right) = f(x, y(x))$$

sowie natürlich $y(x_0) = y_0$, also erfüllt y auch das Anfangswertproblem (AWP).

Wir halten fest: $\boxed{\text{(AWP)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(IG)}}$.

Sukzessive Approximation durch Picard-Iteration: Wenn wir die konstante Funktion y_0 als ganz krude erste Näherung für eine Lösung betrachten, können wir vielleicht auf etwas Verbesserung hoffen, indem wir diese auf der rechten Seite von (IG) einsetzen:

$$u_1(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\,\mathrm{d}s.$$

Daraus wiederum definieren wir die zweite Näherungslösung durch Einsetzen von u_1 auf der rechten Seite von (IG), d.h.

$$u_2(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u_1(x))\,\mathrm{d}s.$$

In diesem Schema können wir induktiv fortfahren mittels

$$\text{(PIt)} \qquad u_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u_{n-1}(x))\,\mathrm{d}s \quad (n \in \mathbb{N})$$

und erhalten eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Funktionen $I \to \mathbb{R}$.

Die folgenden Resultate und Schlüsse gelten jedenfalls, wenn f eine sogenannte *Lipschitz-Bedingung*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

in hinreichend kleinen Umgebungen und jeweils mit geeigneten Konstanten $L \geq 0$ erfüllt. Wir wollen dies also nun zusätzlich annehmen.

Zunächst stellt sich heraus, dass die Folge (u_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Somit können wir in (PIt) auf beiden Seiten zum Limes für $n \to \infty$ übergehen und erhalten

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s,$$

weshalb y eine *Lösung* der Integralgleichung (IG) und somit auch des Anfangswertproblems (AWP) ist, von der sich zeigen lässt, dass sie zumindest in einer Umgebung von x_0 auch *eindeutig* ist.

Bemerkung: Wir hatten oben in der Bemerkung zu Beispiel 2) gesehen, dass das Anfangswertproblem $y' = -2\sqrt{y}$, $y(x_0) = 0$ mehr als eine Lösung besitzt. In der Tat ist hier mit $f\colon \mathbb{R} \times [0, \infty[$, $f(x, y) = -2\sqrt{y}$ bei $y_1 = 0$ die Lipschitz-Bedingung verletzt, denn für jedes $y_2 > 0$ gilt $|f(x, 0) - f(x, y_2)| = 2\sqrt{y_2}$ und somit

$$2\sqrt{y_2} = |f(x, 0) - f(x, y_2) \leq L|0 - y_2| = Ly_2 \quad \text{für } y_2 > 0.$$

Dies würde aber $2 \leq L\sqrt{y_2}$ bedeuten, was für $y_2 \to 0$ auf einen Widerspruch führt.

Ein entsprechendes Resultat zur lokal eindeutigen Lösbarkeit gilt auch für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dies ist somit insbesondere auch im eingangs erwähnten Beispiel der Gleichung (P) des ungedämpften Pendels bzw. des äquivalenten Systems (S)

$$y'' + \sin y = 0, \quad y_1 := y, y_2 := y', \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}$$

anwendbar. Weil aber in solchen Fällen meist keine expliziten Lösungsformeln mehr gewonnen werden können, sind *qualitative* und *geometrische* Methoden oftmals hilfreich, um dennoch an gute Informationen über das Lösungsverhalten zu gelangen. Zum Beispiel kann die rechte Seite von obigem System (S) als sogenanntes *Hamilton'sches Vektorfeld* zur Funktion

$$F(y_1, y_2) := \frac{y_2^2}{2} - \cos y_1$$

interpretiert werden. Ohne auf diesen Begriff eingehen zu müssen, können wir eine wichtige Konsequenz daraus auch elementar nachvollziehen. Entlang von Lösungskurven $x \mapsto (y_1(x), y_2(x))$ ist F nämlich konstant:

$$\frac{d}{dx}\left(F(y_1(x), y_2(x))\right) = \frac{2y_2(x)}{2} \underbrace{y_2'(x)}_{-\sin y_1(x)} + \sin y_1(x) \underbrace{y_1'(x)}_{y_2(x)} = 0.$$

Daher ist $F(y_1(x), y_2(x)) = F(y_1(0), y_2(0)) =: c_0$ und die Lösungskurve durch den Anfangspunkt $(y_1(0), y_2(0))$ in der (y_1, y_2)-Ebene wird durch die Gleichung

$$\frac{y_2^2}{2} - \cos y_1 = c_0$$

beschrieben, was ein sogenanntes *Phasenporträt* ergibt.

Literaturverzeichnis

[AEI] H. Amann und J. Escher: *Analysis I*
Birkhäuser Verlag, 3. Auflage 2006.

[ASM] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel: *Mathematik*
Springer Spektrum, 5. Auflage 2022.

[ASV] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel: *Ergänzungen und Vertiefungen zu Arens et al., Mathematik*
Springer Spektrum, 2. Auflage 2017.

[BFI] M. Barner und F. Flohr: *Analysis I*
Walter de Gruyter, 5. Auflage 2000.

[BZ1] M. Brokate, J. Zimmer und F. Lindemann: *Analysis 1*
Springer Spektrum 2023.

[Con] A. Constantin: *Analysis I*
Springer Spektrum 2024.

[Dei] A. Deitmar: *Analysis*
Springer Spektrum, 3. Auflage 2021.

[FL1] O. Forster und F. Lindemann: *Analysis 1*
Springer Spektrum, 13. Auflage 2023.

[FK1] H. Fischer und H. Kaul: *Mathematik für Physiker, Band 1*
Springer Spektrum, 8. Auflage 2018.

[FK2] H. Fischer und H. Kaul: *Mathematik für Physiker, Band 2*
Springer Spektrum, 4. Auflage 2014.

[Fri] K. Fritzsche: *Mathematik für Einsteiger*
Springer Spektrum, 5. Auflage 2015.

[Hil] S. Hildebrandt *Analysis 1*
Springer-Verlag, 2. Auflage 2006.

[HW] E. Hairer und G. Wanner: *Analysis in historischer Entwicklung*
Springer-Verlag 2011.

[Heu1] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*
Vieweg+Teubner, 17. Auflage 2009.

[Heu2] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*
Vieweg+Teubner, 14. Auflage 2008.

[JAP] K. Jänich: *Analysis für Physiker und Ingenieure*
Springer-Verlag, 4. Auflage 2001.

[JM1] K. Jänich: *Mathematik 1: geschrieben für Physiker*
Springer-Verlag, 2. Auflage 2005.

[JM2] K. Jänich: *Mathematik 2: geschrieben für Physiker*
Springer-Verlag, 2. Auflage 2011.

[KvW] H. Kerner und W. von Wahl: *Mathematik für Physiker*
Springer Spektrum, 3. Auflage 2013.

[Köh] G. Köhler: *Analysis*
Heldermann Verlag 2006.

[Kö1] K. Königsberger: *Analysis 1*
Springer-Verlag, 6. Auflage 2004.

[SS] H. Schichl und R. Steinbauer: *Einführung in das mathematische Arbeiten*
Springer Spektrum, 3. Auflage 2018.

[Str] K. R. Stromberg: *An Introduction to Classical Real Analysis*
American Mathematical Society 1981.

[WR1] R. Walter: *Analysis 1*
Walter de Gruyter 2007.

[WW1] W. Walter: *Analysis 1*
Springer-Verlag, 7. Auflage 2004.

Stichwortverzeichnis

L^2-Funktionen, 180
L^2-Norm, 180
ε-δ-Kriterium für Stetigkeit, 88
ε-δ-Kriterium für Grenzwerte, 86
äquivalent, 16
überabzahlbar, 41

Abbildung, 9
abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, 45
Ableitung, 99
absolut konvergent, 73
Absolutbetrag, 7
abzählbar unendlich, 23
Anfangswertproblem, 183
archimedische Eigenschaft von $\mathbb{Q}$, 23
archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$, 24
Arcuskosinus, 61
Arcussinus, 63
Arcustangens, 65
Area cosinus hyperbolicus, 148
Area sinus hyperbolicus, 148
Argument einer komplexen Zahl, 68
Aussage, mathematische, 3

Bernoulli-Ungleichung, 17
beschränkt, 23
beschränkte Folde, 35
bestimmt divergente Folge, 41
Betrag einer komplexen Zahl, 27
Betrag einer reellen Zahl, 7
Beweis durch Widerspruch, 16
bijektiv, 12
Bild, 10
Bildmenge, 10
Binomialkoeffizient, 20
Binomialreihe, 126
Binomischer Lehrsatz, 20

Cauchy-Folge, 44
Cauchy-Produkt für Reihen, 79
cosinus hyperbolicus, 148

definierende Gleichheit, 4
Definitionsmenge, 9
Dezimalbruchentwicklung, 41
differenzierbar, 99
Differenzmenge, 9
Dirichlet-Funktion, 89
Dirichlet-Kern, 179
disjunkte Mengen, 8
divergent, 33
divergente Minorante, 74
divergente Reihe, 71
Durchschnitt von Mengen, 8

Entwicklungspunkt einer Potenzreihe, 128
Eulersche Zahl, 56
Exponentialfunktion
    komplexe Exponentialfunktion, 67

fast uberall, 137
Feinheit einer Zerlegung, 139
Fibonacci-Folge, 33
Folge, 33
Fourier-Reihe, 177
Fourierkoeffizienten, 177
Fundamentalsatz der Algebra, 68
Funktion, 9
Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, 55

Gamma-Funktion, 160
ganze Zahlen, 3
geometrische Folge, 33
geometrische Reihe, 71
Geometrische Summenformel, 19
gerade Funktion, 176
gerade Zahl, 6

gewöhnliche Differentialgleichung, 183
Gleichheit von Abbildungen, 10
gleichmäßig beschränkt, 167
gleichmäßig stetig, 96
gleichmäßige Approximation durch Treppenfunktionen, 140
gleichmäßige Konvergenz, 166
Glieder einer Reihe, 71
Grad eines Polynoms, 49
Grenzwert, 33
Grenzwert von Funktionen, 83

Häufungswert, 44
Hadamard-Formel für den Konvergenzradius, 130
harmonische Reihe, 72
hinreichend, 15

Imaginärteil, 27
Implikation, 15
indirekter Beweis, 16
Infimum, 24
injektiv, 12
innerer Punkt eines Intervalls, 84
Integral, 137
Integral einer Treppenfunktion, 136
Integralgleichung, 189
integrierbare Funktion, 137
Intervalle, 7
Intervallschachtelungsprinzip, 40
inverse Abbildung, 12

Körperaxiome, 4
Koeffizienten einer Polynomfunktion, 49
Koeffizientenfolge einer Potenzreihe, 128
kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, 46
kompaktes Intervall, 7
Komplement einer Menge, 9
komplexe Zahl, 27
konjugiert komplexe Zahl, 28
Kontraposition, 15
konvergente Folge, 33
konvergente komplexe Folge, 77
konvergente Majorante, 73
konvergente Reihe, 71
Konvergenz einer Folge, 33
Konvergenzradius, 129
Kosinusfunktion, 61
Kotangens, 66
kritische Stelle, 120

Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, 183
Lebesgue-integrierbar, 137
leere Menge, 3
Leibniz-Kriterium, 74
Limes, 33
Limes inferior, 46
Limes superior, 46
lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, 184
linksseitige Ableitung, 100
linksseitiger Grenzwert von Funktionen, 84
Lipschitz-Bedingung, 190
Logarithmus
  natürlicher Logarithmus, 58
  Zehnerlogarithmus, 60
lokales Extremum, 104
lokales Maximum, 104
lokales Minimum, 104

Majorantenkriterium von Weierstraß, 168
Maximum einer Menge, 23
Minimum, 24
Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 105
monoton fallend, 13
monoton wachsend, 13
monoton wachsende Folge, 43

nach oben beschränkt, 23
nach unten beschrankt, 23
natürliche Zahlen, 3
negative Zahl, 6
ngerade Funktion, 176
nicht strikte Ungleichung, 6
notwendig, 15
Nullfolge, 34
Nullfunktion, 11
Nullmenge, 136
Nullpolynom, 49
Nullstelle, 11
  k-fache Nullstelle, 51

obere Schranke, 23
offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, 45
Ordnung einer Nullstelle, 51

Parseval-Gleichung, 181
Partialbruchzerlegung, 156
Partialsummen, 71
Pascal-Dreieck, 20
Polardarstellung, 28
Polynomfunktion, 49
positive Zahl, 6
Potenzreihe, 128
Prinzip des Eudoxos, 25
punktweise Konvergenz, 166

quadratisch integrierbare Funktionen, 180
quadratisches Mittel, 180
Quotientenmethode für den Konvergenzradius, 130
Quotiententest, 76

R-integrierbar, 139
rationale Funktion, 51
rationale Zahlen, 3
Realteil, 27
rechtsseitige Ableitung, 100
rechtsseitiger Grenzwert von Funktionen, 83
reelle Zahlen, 3
Regeln von de l'Hospital, 109
Regeln von de Morgan, 9
Reihe, 71
Restglied der Taylorentwicklung, 114
Riemann-Integral, 139
Riemann-integrierbar, 139
Riemann-Summe, 139

Sandwichlemma, 38
Satz von Rolle, 105
Satz von Taylor, 114
sinus hyperbolicus, 148
Sinusfunktion, 62
stückweise stetig differenzierbare Funktion, 178
stückweise stetige Funktion, 141
Stammfunktion, 144
Steigung, 100
stetig auf einem Intervall, 88
stetig differenzierbar, n-mal, 111
stetig differenzierbare Funktion, 111
stetig in einem Punkt, 88
streng monoton fallend, 13
streng monoton wachsend, 13
striktes lokales Maximum, 104
striktes lokales Minimum, 104
Summe einer Reihe, 71
Superposition, 186
Superpositionsprinzip, 113
Supremum, 24
Supremumsnorm, 166
surjektiv, 12
System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, 183

Tangens, 64
Tangente an einen Funktionsgraphen, 100
Taylorpolynom, 114
Taylorreihe, 125
Teilbarkeit, 5
Teilfolge, 33
Teilmenge, 3
Treppenfunktion, 135
trigonometrische Polynom, 175

Umgebung, 45
  ε-Umgebung, 45
  ε-Umgebung in $\mathbb{C}$, 77
Umkehrabbildung, 12
unbestimmtes Integral, 155
uneigentliches Integral, 163
ungerade Zahl, 6
Ungleichung, 6
untere Schranke, 23
Urbild, 10
Urbildmenge, 10

Vereinigung von Mengen, 8
Vielfachheit einer Nulltelle, 51
vollständige Induktion, 17
Vollständigkeit von $\mathbb{C}$, 78

Wurzeltest, 75

Zielmenge, 9
zweite Ableitung, 111
Zwischenvektor fur eine Riemann-Summe, 139
Zwischenwertsatz, 94