UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 25/26

Blatt 1

1 Rechnen Sie für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden bekannten[1] Formeln nach:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2,\\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b),\\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2).\end{aligned}$$

2 Versuchen Sie, aus den Rechenregeln (i)-(ix) in 1.2 der VO diese beiden Eigenschaften für $c, d, e \in \mathbb{R}$ zu begründen: (a) $e \cdot 0 = 0 = 0 \cdot e$. (b) Aus $c \cdot d = 0$ folgt $c = 0$ oder $d = 0$. Ihre Argumentation muss hier bei Weitem nicht perfekt sein, sondern soll zumindest auf ein paar Eigenschaften hinweisen, die dafür eine Rolle spielen.

3 Wir betrachten $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, $M_2 := \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, $M_3 := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ gerade und } x^2 - x - 2 = 0\}$ sowie $M_4 := \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$. Welche Relationen bestehen zwischen diesen vier Mengen?

4 Was ist hier faul? Angenommen $x \in \mathbb{R}$ erfüllt $2x - 1 = x$, dann folgt

$$2 - 1 = \frac{(2-1)(x-1)}{x-1} = \frac{2x - x - 2 + 1}{x-1} = \frac{2x - 1 - x}{x-1} = \frac{x-x}{x-1} = 0, \text{ also } 2 = 1.$$

5 Begründen Sie: (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $n(n+1)(n+2)$ stets durch 2 und auch durch 3 teilbar. (Bemerkung: Da 2 und 3 teilerfremd[2] sind, ist die angegebene Zahl auch[3] durch $6 = 2 \cdot 3$ teilbar.)

(b) Sind $l, m, n \in \mathbb{Z}$, $l \neq 0$ und erfüllen $l \mid m$ und $l \mid n$, dann gilt auch $l \mid (m+n)$.

6 Division von $n \in \mathbb{N}$ durch $d \in \mathbb{N}$, $d \leq n$ mit Rest: Betrachten Sie $n-d, n-2d, n-3d, \ldots$ und begründen (quasi algorithmisch), warum wir Zahlen $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < d$ finden können, sodass

$$n = q \cdot d + r$$

gilt. Argumentieren Sie anschließend auch, warum der *Quotient* q und der *Rest* r durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt sind.

7 Begründen Sie: (a) Ist $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, dann folgt $a^2 > 0$. Speziell ist $1 > 0$.

(b) Sind x und y reelle Zahlen mit der Eigenschaft $-x \leq y$ und $x \leq y$, dann folgt $|x| \leq y$.

8 Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$: (a) $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

(b) Wenn $a^2 \leq b^2$ gilt, dann ist $|a| \leq b$ oder $b \leq -|a|$.

[1] Das ist euphemistisch für: „Prägen Sie sich spätestens ab nun diese Relationen gut ein.“

[2] Das heißt, dass es keine Zahl ungleich ± 1 gibt, die beide teilt.

[3] In der VO haben wir gar nicht ausreichende Methoden besprochen, um auch diesen Schluss bequem zu beweisen. Ohne Teilerfremdheit ist dieser letzte Schluss i.A. nicht möglich, wie das Beispiel der Zahl 12 lehrt, die durch 4 und durch 6 teilbar ist, aber nicht durch $4 \cdot 6 = 24$.