UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 25/26

Blatt 10

73 Geben Sie eine alternative Herleitung der Reihenentwicklung von arctan, indem Sie zunächst die Funktion $g\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/(1+x^2)$, betrachten und die Summenformel einer geeigneten geometrischen Reihe anwenden.

74 Können Sie mit einem ähnlichen Trick wie in der vorigen Aufgabe eine Reihenentwicklung für arcsin im Bereich $|x| < 1$ herleiten? (Hinweis: Diesmal mit einer passenden Binomialreihe an Stelle der geometrischen Reihe.)

75 Bestimmen Sie folgenden Limes zunächst mittels Regel von de l'Hospital und dann noch einmal durch Einsatz von Potenzreihenentwicklungen: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$

76 Begründen Sie, warum $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$ für $|x| < 1$ gilt.

77 Ist die Funktion $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$ stetig, differenzierbar, monoton? Gibt es Extremstellen? Existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

78 Für $n \geq 2$ sei die Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ zumindest n-mal stetig differenzierbar und es gelte an der Stelle $x_0 \in]a,b[$, dass

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ aber } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Wenden Sie den Satz von Taylor an (mit dem Taylorpolynom der Ordnung $n-1$), um folgende Aussagen zu begründen:
(a) Wenn n ungerade ist, kann x_0 keine Extremalstelle sein.
(b) Wenn n gerade ist, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ gilt, bzw. ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ gilt.

79 Bestimmen Sie die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ so, dass für alle x mit $|x| < 1$ und im Konvergenzbereich der Reihe für f die Gleichung

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = \frac{1}{1-x}$$

erfüllt ist. Welchen Konvergenzradius hat die resultierende Potenzreihe für f?

80 (a) Zeigen Sie: Die Schwingungsgleichung mit Dämpfung $\ddot{u} + \alpha\dot{u} + \beta u = 0$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstant sind, wird durch den Ansatz $y(t) := e^{\alpha t/2} u(t)$ auf eine Schwingungsgleichung ohne Dämpfung $\ddot{y} - \gamma y = 0$ mit einer passenden Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}$ zurückgeführt.

(b) Angenommen, die Lösung $t \mapsto y(t)$ des Anfangswertproblems $\ddot{y} - \gamma y = 0$, $y(0) = c$, $\dot{y}(0) = d$ besitzt eine Potenzreihenentwicklung um $t_0 = 0$. Bestimmen Sie die Koeffizienten dieser Potenzreihe explizit in Abhängigkeit von γ, c und d. Leiten Sie daraus für den Spezialfall $\gamma = -\omega^2$ mit $\omega > 0$ die Lösungsformel $y(t) = c\cos(\omega t) + \frac{d}{\omega}\sin(\omega t)$ ab.