UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 25/26

Blatt 12

In den folgenden beiden Aufgaben ist jeweils die Konvergenz der Integrale zu untersuchen.

89 (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, (b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \log x \, dx$.

90 (a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\log x}{x} \, dx$, (b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\log x}{x^2} \, dx$.

91 Untersuchen Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx)^2}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Ändern sich die Antworten bei Einschränkung der Funktionen auf die Teilmenge $[1,\infty[\subseteq \mathbb{R}$?

92 Untersuchen Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

93 Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/n)}{n}$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent und für $0 \le x \le 1$ ergibt $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/n)}{n}$ eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie in den folgenden drei Aufgaben jeweils die reelle Version der Fourierreihe für die auf $[-\pi,\pi]$ konkret angegebene 2π-periodische Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skizzieren Sie auch den Graphen von u zumindest auf dem Bereich $-2\pi \le x \le 2\pi$. Was können Sie über das Konvergenzverhalten der Fourierentwicklung sagen?

94 $u(x) = -1$ für $-\pi < x < 0$, $u(x) = 1$ für $0 < x < \pi$ und $u(x) = 0$ für $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$.

95 $u(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$ und $u(x) = 0$ für $x \in \{-\pi, \pi\}$. (Sägezahnfunktion.)

96 $u(x) = |\sin(x)|$ für $x \in \mathbb{R}$.