UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 25/26

Blatt 5

33 Was wissen wir über die Koeffizienten a, b, c der Polynomfunktion $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, falls wir drei Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von p kennen? (Diese müssen nicht alle verschieden sein, aber z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$ soll bedeuten, dass λ_1 zumindest eine doppelte [2-fache] Nullstelle ist usw.)

34 Die van-der-Waals-Zustandsgleichung für den Druck p, das Volumen V und die Temperatur T eines realen Gases lautet

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

wobei a, b und R geeignete physikalische Konstanten sind. Stellen Sie p bei konstanter Temperatur T_0 als rationale Funktion $V \mapsto p(V)$ des Volumens V dar und geben Sie den maximalen Definitionsbereich für diese Funktion an. Wie ist das Konvergenzverhalten der Folge $(p(n))_{n\in\mathbb{N}}$, also für „$V \to \infty$“?

In den folgenden beiden Aufgaben sind Eigenschaften der Logarithmusfunktion nachzuweisen, die in der VO behauptet wurden.

35 (a) Für $a, b > 0$ gilt $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ und $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ ist $\log(x^n) = n \cdot \log x$.

36 (a) Für $x > -1$ mit $x \neq 0$ gilt $\log(1 + x) < x$.

(b) Für $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ mit $c > 1/n$ und $x > 4n^2$ gilt $\log x < \dfrac{x}{n} < cx$. Illustrieren Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage in einer Skizze.

37 Begründen Sie folgende Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion, die in der VO behauptet wurden: Für $x, y > 0$ und $r, s \in \mathbb{R}$ gilt stets

$$(xy)^r = x^r y^r, \quad (x^r)^s = x^{rs}, \quad x^{r+s} = x^r x^s, \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}.$$

38 Beweisen Sie folgende Aussage, die in der VO als Grundlage zur Einführung des Zehnerlogarithmus diente: Die Abbildung $x \mapsto 10^x$ ist streng monoton wachsend und bijektiv $\mathbb{R} \to]0, \infty[$. Für ihre Umkehrfunktion $\log_{10} \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gilt die Formel $\log_{10}(x) = \dfrac{\log x}{\log 10}$.

39 Für $0 \leq p \leq 1$ und $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ sei $b(p, n, k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (dies entspricht der Wahrscheinlichkeit für k Erfolge bei n-maliger Wiederholung eines sogenannten Bernoulliexperiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p). Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b(p, n, k) = 1$, (b) bei festem k und mit $p_n := \lambda/n$, $\lambda \geq 0$, gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b(p_n, n, k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

(Dies illustriert die sogenannte Poisson-Approximation der Binomialverteilung.)

40 Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergent?