UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 25/26

Blatt 6

41 Leiten Sie folgende Relationen aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen ab:

(a) $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\varphi)}{2}}$ und $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\varphi)}{2}}$ $\quad (0 \le \varphi \le \pi)$,

(b) $\tan(\psi) - \tan(\varphi) = \frac{\sin(\psi-\varphi)}{\cos(\varphi)\cos(\psi)}$ $\quad (-\frac{\pi}{2} < \varphi < \psi < \frac{\pi}{2})$.

42 Die Überlagerung der beiden gleichfrequenten Schwingungen $f(t) = c\cos(\omega t)$ und $g(t) = d\sin(\omega t)$ (also mit Kreisfrequenz $\omega > 0$ und Amplituden $c, d > 0$) berechnet sich aus $h(t) = f(t) + g(t)$. Stellen Sie h als cos-Schwingung mit Amplitude A und Nullphase α dar, d.h. bestimmen Sie A und α so, dass $h(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

43 (a) Begründen Sie folgende vereinfachte Version des Wurzeltests für Reihen, falls $\left(|a_k|^{1/k}\right)$ konvergent ist mit $\alpha := \lim |a_k|^{1/k}$:

(i) Für $\alpha < 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, (ii) für $\alpha > 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

(b) Begründen Sie folgende vereinfachte Version des Quotiententests für Reihen, falls $\left(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\right)$ konvergent ist mit $\alpha := \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$:

(i) Für $\alpha < 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, (ii) für $\alpha > 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

44 (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ konvergent? Was ist in diesen Fällen die Summe?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$ konvergent?

Untersuchen Sie in den folgenden drei Aufgaben die angegebenen Reihen jeweils auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz (fallweise in Abhängigkeit auch von $x \in \mathbb{R}$).

45 (a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$, (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

46 (a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$, (b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$, (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(10-9k)^k}{10^k k^k}$.

47 (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$, (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1-\frac{1}{k})^k}{k}$, (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\cos(k+\pi x)\right)^k}{k+k^2}$.

(Teilaufgabe (b) könnte etwas knifflig werden, darum sei verraten, dass diese Reihe konvergent ist, allerdings nicht absolut konvergent.)

48 Sind die folgenden Reihen konvergent? Sind sie absolut konvergent?

(a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(\log k)^k}$, (b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\log k}{k}$.