UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 25/26

Blatt 8

57 Analysieren Sie die Funktion $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$ bezüglich Monotonie (ohne Differentialrechnung zu verwenden!) und Stetigkeit. Bestimmen Sie die Bildmenge $f([1,2])$ und erörtern Sie die Möglichkeit einer Umkehrfunktion $g\colon f([1,2]) \to [1,2]$?

58 Untersuchen und vergleichen Sie folgende Funktionen bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit: $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) := |x|$, $f_2\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) := |x|$, $f_3\colon]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) := |x|$ und $f_4\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) := \sqrt{x}$.

59 Bestimmen Sie jeweils die Geradengleichung der Tangente an den Funktionsgraphen im angegebenen Punkt:

(a) $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ in $(2, f(2))$,

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ in $(\pi, f(\pi))$.

60 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $\dfrac{e^{\sin(x)}}{2+\cos(x)}$, (b) $\sqrt{1-x^2}$ $(|x|<1)$, (c) $\arcsin(x)$ $(|x|<1)$.

61 Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (1+x)^n$. Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz und Differentiation, um die folgenden beiden Relationen herzuleiten:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k\binom{n}{k} = 0.$$

62 Beschreiben Sie die Details der Taylorentwicklung des Sinus an der Stelle $x_0 = 0$.

63 Wenden Sie die Regel von de l'Hospital für die Berechnung folgender Limiten an:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x\log x$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{1-\cos x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

64 Es sei $c > 0$, $h\colon [0,\infty[\to [c,\infty[$ eine stetige Funktion und $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = h$ und $f(0) = 0$. Ist die Funktion f stetig, monoton, injektiv, surjektiv, bijektiv? Was können wir gegebenenfalls über die Umkehrfunktion f^{-1} bzw. deren Ableitung sagen?