UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 25/26

Blatt 9

65 (a) Bis zu welcher Ordnung der Taylorpolynome von exp müssen wir gehen, wenn wir damit die Euler-Zahl e zumindest auf $\frac{1}{1000}$ genau berechnen wollen?
(b) Was ergeben die Taylorpolynome einer Polynomfunktion $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$?

66 Bestimmen Sie lokale und globale Extrema sowie Monotoniebereiche der Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$. Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

67 (Hyperbelfunktionen) Wir definieren die Funktionen cosh (*cosinus hyperbolicus*) und sinh (*sinus hyperbolicus*) auf $\mathbb{R}$ durch $\cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Zeigen Sie: (a) $\cosh(-x) = \cosh(x)$, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (daher der Name Hyperbelfunktionen) und für die Ableitungen gilt $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.
(b) cosh ist stets positiv, besitzt ein globales Minimum in $x = 0$, hat kein Maximum und ist streng monoton wachsend in $[0, \infty[$.

68 Zeigen Sie: sinh ist streng monoton wachsend und surjektiv $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daher existiert die Umkehrfunktion $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, genannt *Area sinus hyperbolicus*, und es gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(Der Name rührt daher, dass dies tatsächlich entsprechende Flächeninhalte im Zusammenhang mit Hyperbelstücken liefert. Genauer: Die Punkte $(\cosh(t), \sinh(t))$ beschreiben für $t \in \mathbb{R}$ in der Ebene den rechten Ast einer Hyperbel. Für $t > 0$ hat die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die durch das Hyperbelstück zwischen $(\cosh(-t), \sinh(-t))$ und $(\cosh(t), \sinh(t))$ sowie die beiden Strahlen von $(0,0)$ zu eben diesen Punkten begrenzt wird, gerade den Flächeninhalt t.)

69 Für jeden Parameterwert $t > 0$ ist die Funktion $f_t\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_t(s) = \dfrac{(s-13)(t-s)}{s}$. Zeigen Sie, dass f_t sein Maximum an einer eindeutigen Stelle $s(t)$ annimmt. Untersuchen Sie nun die Funktion $h(t) := f_t(s(t))$, $h\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ auf Maxima und Minima. (In dem Buch *Analysis in historischer Entwicklung* von E. Hairer und G. Wanner (Springer-Verlag 2011) wird die Funktion h als sogenannte Einhüllende der durch $a > 0$ parametrisierten Schar von Geraden $y = (a-13)(x-a)/a = f_x(a)$ beschrieben, mit Bezug zu einer Skizze von Albrecht Dürer.)

Bestimmen Sie in den folgenden beiden Aufgaben die Konvergenzradien der Potenzreihen.

70 (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cosh(n)\, x^n$.

71 (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

72 Beschreiben Sie im Detail, was der Satz von Taylor mit $n = 2$ bei Anwendung auf die Funktion $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ ergibt. Benützen Sie das Resultat, um die Ungleichung in Aufgabe 20 (b) nun unabhängig nochmal abzuleiten. (Für den zweiten Teil ist es praktisch, die Fälle $-1 < x \le 0$ und $0 < x < 1$ separat zu untersuchen.)