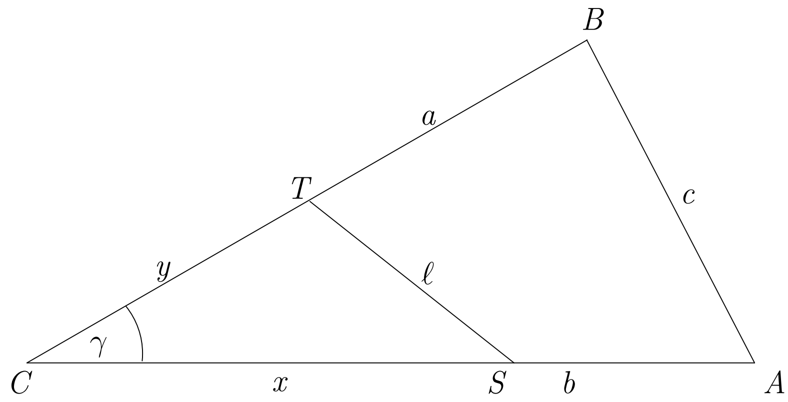
(1) (a) Bei der Lösung dieser Aufgabe halten wir uns an die folgende Skizze:



(**1 Punkt**)
Die Fläche des Dreiecks ABC ist

$$A = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma = \tfrac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} \cdot \tfrac{1}{2} = 18 \text{ cm}^2 .$$

Daher muss das Dreieck CST die Fläche $\frac{A}{2} = 9 \text{ cm}^2$ besitzen. Es gilt also mit der Flächenformel

$$9 \text{ cm}^2 = \tfrac{1}{2} xy \sin\gamma = \tfrac{1}{4} xy,$$

wir haben also die *Nebenbedingung*

$$xy = 36 \text{ cm}^2 .$$

(**1 Punkt**)
Nun müssen wir die Länge der Unterteilungsstrecke ℓ bestimmen. Dazu verwenden wir den Cosinussatz, und wir erhalten die *Hauptbedingung*

$$\ell^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma = x^2 + y^2 - 36\sqrt{3} \text{ cm}^2 .$$

(**1 Punkt**)
Die Strecke ℓ soll minimal sein, also muss auch ℓ^2 minimal sein, da die Funktion $x \mapsto x^2$ im positiven Bereich streng monoton wachsend ist. Wir setzen die Nebenbedingung

$$y = \frac{36 \text{ cm}^2}{x}$$

in die Hauptbedingung ein und erhalten

$$f(x) = \ell^2 = x^2 + \frac{(36)^2 \text{ cm}^4}{x^2} - 36\sqrt{3} \text{ cm}^2 .$$

Als zulässigen Bereich für x können wir aus der Skizze das Intervall $]\,0 \text{ cm}, 9 \text{ cm}]$ entnehmen.
(**1 Punkt**)
Bestimmen wir nun die Extremwerte:

$$f'(x) = 2x - 2\frac{6^4 \text{ cm}^4}{x^3} = 0$$

und nach Umformung

$$\begin{aligned} x^4 &= 6^4 \text{ cm}^4 \\ x &= 6 \text{ cm} \\ y &= 6 \text{ cm} . \end{aligned}$$

Die Länge zu diesem Wert beträgt dann $\ell = 6\sqrt{2} - \sqrt{3}$ cm ≈ 3.11 cm.
(**1 Punkt**)
Bestimmen wir die Werte für den Randpunkt (nur einer, denn $x = 0$ ist ja nicht zulässig): $f(9) = (81+16-36\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2 \approx 34.65\, cm^2$, also hat ℓ für $x = 9$ die Länge $\ell \approx 5.89$ cm. Der Wert der Funktion am Rand ist größer als am Extremum.
Die zweite Ableitung von f am Extremwert ist

$$f''(x) = 2 + \frac{6^5\ \mathrm{cm}^4}{x^4} > 0,$$

deshalb ist $x = 6$ cm ein lokales Minimum, also auch ein globales Minimum von f.
Die Abstände der Streckenendpunkte S und T zu C betragen daher jeweils 6 cm, und die Teilungsstrecke hat die Länge 3.11 cm.
(**1 Punkt**)

(b) Die Beziehung

$$\sin^2 x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x + 1 = 0.$$

ist eine quadratische Gleichung in $\sin x$. Sie kann gelöst werden durch die Substitution $u = \sin x$. Wir erhalten somit

$$u^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} u + 1 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \pm \sqrt{\frac{18}{16} - 1}$$

$$u_{1,2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(**1 Punkt**)
Nachdem $\sin x$ zwischen -1 und 1 liegt, existiert keine Lösung für die Gleichung $\sin x = u_1 = \sqrt{2}$. Untersuchen wir die andere Lösung

$$\sin x = u_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Die Menge aller x, die diese Gleichung erfüllt, ist

$$L = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \ \right\}.$$

(**1 Punkt**)

(2) Wir überprüfen die neun Körperaxiome und die Abgeschlossenheit.
Abgeschlossenheit: Für zwei ungerade Zahlen x und y ist die Summe $x + y$ eine gerade Zahl und $x + y + 7$ daher eine ungerade Zahl. Die Operation $\oplus$ ist daher abgeschlossen in M.
Für zwei ungerade Zahlen x und y sind die Zahlen $x + 3$ und $y + 3$ beide gerade. Deren Produkt ist daher auch gerade, und somit ist $(x + 3)(y + 3) - 3$ ungerade. Also ist auch die Operation $\otimes$ abgeschlossen in M.
(**1 Punkt**)
AG ($\oplus$): Für alle $a, b, c \in M$ gilt

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + b + 7) \oplus c = a + b + 7 + c + 7 = a + b + c + 14 = \\ = a + b + c + 7 + 7 = a \oplus (b + c + 7) = a \oplus (b \oplus c).$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)
KG ($\oplus$): Für alle $a, b \in M$ gilt

$$a \oplus b = a + b + 7 = b + a + 7 = b \oplus a.$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Nullelement ($\oplus$): Für das Nullelement $n \in M$ muss

$$\forall a \in M : a \oplus n = a$$

gelten. Wenn wir einsetzen, erhalten wir $a + n + 7 = a$, also $n = -7 \in M$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Inverses ($\oplus$): Sei $a \in M$. Dann muss für das Inverse $\ominus a$ von a die Beziehung

$$a \oplus (\ominus a) = n = -7$$

erfüllt sein. Wenn wir wieder einsetzen, sehen wir

$$a + (\ominus a) + 7 = -7,$$

also $\ominus a = -14 - a \in M$. Jedes Element besitzt also in M ein Inverses bezüglich $\oplus$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

AG ($\otimes$): Für alle $a, b, c \in M$ gilt

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c &= \big((a+3)(b+3) - 3\big) \otimes c = \big((a+3)(b+3) - 3 + 3\big)(c+3) - 3 = \\ &= (a+3)(b+3)(c+3) - 3 == (a+3)\big((b+3)(c+3) - 3 + 3\big) - 3 = \\ &= a \otimes \big((b+3)(c+3) - 3\big) = a \otimes (b \otimes c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\otimes$): Für alle $a, b \in M$ gilt

$$a \otimes b = (a+3)(b+3) - 3 = (b+3)(a+3) - 3 = b \otimes a.$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Einselement ($\otimes$): Wenn $e \in M$ das Einselement ist, dann muss für alle $n \neq a \in M$ die Gleichung

$$a \otimes e = a$$

gelten. Setzen wir ein, so finden wir

$$\begin{aligned}(a+3)(e+3) - 3 &= a \\ e &= \tfrac{a+3}{a+3} - 3 = 1 - 3 = -2.\end{aligned}$$

Da e als gerade Zahl nicht im M liegt, besitzt M kein Einselement bezüglich $\otimes$. Dieses Axiom ist also **nicht erfüllt**.
(**1 Punkt**)

Inverses ($\otimes$): Für jedes $n \neq a \in M$ muss das Inverse a^{-1} existieren, das

$$a \otimes a^{-1} = e = -2$$

erfüllt. Setzen wir die Definition von $\otimes$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(a+3)(a^{-1}+3) - 3 &= -2 \\ a^{-1} + 3 &= \frac{1}{a+3} \\ a^{-1} &= \frac{1}{a+3} - 3.\end{aligned}$$

Dieses Element ist keine ganze ungerade Zahl für alle $a \in M$. Es besitzt also kein Element ein Inverses in M. Dieses Axiom ist also **nicht erfüllt**.
(**1 Punkt**)

DG ($\oplus$, $\otimes$): Schließlich bleibt noch für alle $a, b, c \in M$ das Distributivgesetz zu untersuchen:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \otimes c &= (a + b + 7) \otimes c = (a + b + 10)(c+3) - 3 = \\ &= ac + bc + 3a + 3b + 10c + 27.\end{aligned}$$

Die andere Seite ergibt:

$$\begin{aligned}(a\otimes c)\oplus(b\otimes c) &= \big((a+3)(c+3)-3\big)\oplus\big((b+3)(c+3)-3\big) = \\ &= \big((a+3)(c+3)-3\big)+\big((b+3)(c+3)-3\big)+7 = \\ &= ac+bc+3a+3b+6c+19.\end{aligned}$$

Die beiden Seiten stimmen nicht überein, und daher ist auch dieses Axiom **nicht erfüllt**.
(**1 Punkt**)

Die Menge M mit den Operationen $\oplus$ und $\otimes$ ist weder Ring noch Körper.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

(3) (a) Die Gleichung

$$z^2 - z + (1+i) = 0$$

ist eine quadratische Gleichung, also beginnen wir mit der bekannten Lösungsformel.

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1 - i} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)
Um die Gleichung zu lösen, müssen wir also die Wurzel aus der komplexen Zahl $-3-4i$ ziehen. Das machen wir mit einem unbestimmten Ansatz: Sei $a+bi$ die Wurzel aus $-3-4i$. Dann gilt

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -3 - 4i,$$

und wir erhalten die beiden Gleichungen für Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= -3 \\ 2ab &= -4 \end{aligned}$$

Drücken wir b aus der zweiten Gleichung aus und setzen in die erste Gleichung ein, so erhalten wir eine biquadratische Gleichung, die wir leicht lösen können:

$$\begin{aligned} b &= \tfrac{-2}{a} \\ a^4 + 3a^2 - 4 = 0 & \\ a_{1,2}^2 &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = 1\,(,\ -4) \\ a_{1,2} &= \pm 1 \\ b_{1,2} &= \mp 2. \end{aligned}$$

Setzen wir die beiden Wurzeln $1-2i$ und $-1+2i$ in die Lösungsformel ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+1-2i}{2} = 1 - i \\ z_2 &= \frac{1-1+2i}{2} = i. \end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Berechnen wir nun die gesuchten Zahlen:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{1-i}{i} = \tfrac{-i}{i} + \tfrac{1}{i} = -1-i \\
w_2 &= \tfrac{z_2}{z_1} = \tfrac{i}{1-i} = \tfrac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \tfrac{-1+i}{2} \\
|w_1| &= |-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\
|w_2| &= \left|\tfrac{-1+i}{2}\right| = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
|z_1| &= \sqrt{2} \\
|z_2| &= 1.
\end{aligned}$$

(**2 Punkte**)

(b) Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n=0$):

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+1)(k+2) = 0(0+1)(0+2) = 0 = \tfrac{1}{4}\,0(0+1)(0+2)(0+3).$$

Dieser ist also richtig.
(**1 Punkt**)
Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$\sum_{k=0}^{j} k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{4} j(j+1)(j+2)(j+3).$$

(**1 Punkt**)
Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

(**1 Punkt**)
Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\
&\quad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \tfrac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\
&= \tfrac{1}{4}\big(n(n+1)(n+2)(n+3) + 4(n+1)(n+2)(n+3)\big) = \\
&= \tfrac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**1 Punkt**)

(4) Beginnen wir mit der Ermittlung der Kenngrößen für die gegebene Ellipse

$$\text{ell:}\quad 3x_1^2 + 5x_2^2 = 120.$$

Dazu wandeln wir diese in Standardform um und erhalten

$$\text{ell:}\quad \frac{x_1^2}{40} + \frac{x_2^2}{24} = 1,$$

woraus sich $a = 2\sqrt{10}$ und $b = 2\sqrt{6}$ ergeben. Aus der Beziehung

$$e^2 = a^2 - b^2$$

ergibt sich sogleich $e = 4$, und damit $F_1 = (-4, 0)$ sowie $F_2 = (4, 0)$.
(**1 Punkt**)

(a) Zur Berechung der Hyperbelgleichung bestimmen wir zunächst den Punkt P. Es gilt $5p_2^2 = 120 - 75 = 45$, also $p_2 = 3$. Wir finden also $P = (5, 3)$. Die Kenngrößen der Hyperbel lassen sich einfach aus ihrer definierenden Eigenschaft bestimmen. Wir wissen, dass eine Hyperbel die Menge aller Punkte Q ist, sodass die Differenz der Längen der Brennstrahlen $\overline{F_1Q}$ und $\overline{F_2Q}$ gleich $2a$ ist. Setzen wir den Punkt P in diese Eigenschaft ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}(\overline{F_1Q} - \overline{F_2Q}) = \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(5+4)^2 + 3^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(5-4)^2 + 3^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{10} - \tfrac{1}{2}\sqrt{10} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Gleichung

$$e^2 = a^2 + b^2$$

ergibt sich $b = \sqrt{6}$. Die Hyperbelgleichung lautet also

$$\begin{aligned} \text{hyp:}\quad & \frac{x_1^2}{10} - \frac{x_2^2}{6} = 1, \quad \text{oder} \\ & 3x_1^2 - 5x_2^2 = 30. \end{aligned}$$

(**2 Punkte**)

(b) Zwei konfokale Kegelschnitte schneiden einander rechtwinkelig. Wir bestimmen den Winkel nochmals im nächsten Punkt nach der Berechnung der Tangenten.

(c) Die beiden Tangenten berechnet man aus den Spaltformen:

$$\begin{aligned} t_{\text{ell}}:\quad & 3p_1x_1 + 5p_2x_2 = 120 \\ & 15x_1 + 15x_2 = 120 \\ & x_1 + x_2 = 8 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} t_{\text{hyp}}:\quad & 3p_1x_1 - 5p_2x_2 = 30 \\ & 15x_1 - 15x_2 = 30 \\ & x_1 - x_2 = 2. \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte $Q = (0, 8)$ und $R = (0, -2)$ lassen sich sogleich ablesen.
(**1 Punkt**)
Der Schnittwinkel lässt sich nun ebenfalls sofort bestimmen. Die Normalvektoren auf die Tangenten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir sehen, dass sie orthogonal sind, und daher schneiden die Kegelschnitte einander rechtwinkelig.
(**1 Punkt**)

(d) Bestimmen wir nun den Kreis. Nachdem dieser durch die Punkte F_1 und F_2 gehen soll, die symmetrisch um die x_2–Achse liegen, muss zwangsläufig der Kreismittelpunkt $M = (m_1, m_2)$ auf der x_2–Achse liegen. Es gilt also $m_1 = 0$. Damit auch Q auf dem Kreis liegt, muss die Strecke $\overline{MQ}$ gleich der Strecke $\overline{MF_2}$ sein. Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned} 8 - m_1 &= \sqrt{16 + m_1^2} \\ 64 - 16m_1 + m_1^2 &= 16 + m_1^2 \\ 48 &= 16m_1 \\ 3 &= m_1. \end{aligned}$$

Der Kreismittelpunkt ist also $M = (0, 3)$ und der Radius ist 5. Wir sehen sofort, dass R auf dem Kreis liegt, denn $\overline{MR} = 5$. Die Kreisgleichung lautet

$$k:\quad x_1^2 + (x_2 - 3)^2 = 25.$$

Setzen wir P in diese Gleichung ein, so ergibt sich

$$5^2 + (3-3)^2 = 25,$$

also liegt auch P auf dem Kreis.
(**1 Punkt**)

(e) Zur Berechnung der Volumens benötigen wir die Beobachtung, dass wir die Schnittpunkte der Ellipse mit dem rechten Hyperbelast bereits kennen, nammlich $P = (5,3)$ und $P' = (5,-3)$. Das Volumen setzt sich also aus zwei Teilen zusammen:

$$V = \pi \left(\int_{a_{\text{hyp}}}^{5} {x_2}_{\text{hyp}}^2 \, dx_1 + \int_{5}^{a_{\text{ell}}} {x_2}_{\text{ell}}^2 \, dx_1 \right)$$

Berechnen wir den Teil, der von der Hyperbel kommt:

$$\int_{\sqrt{10}}^{5} \frac{3x_1^2}{5} - 6 \, dx_1 = \frac{x_1^3}{5} - 6x_1 \Big|_{\sqrt{10}}^{5} =$$
$$= 25 - 30 - 2\sqrt{10} + 6\sqrt{10} = 4\sqrt{10} - 5.$$

Nun der Teil, der von der Ellipse stammt:

$$\int_{5}^{2\sqrt{10}} 24 - \frac{3x_1^2}{5} \, dx_1 = 24x_1 - \frac{x_1^3}{5} \Big|_{5}^{2\sqrt{10}} =$$
$$= 48\sqrt{10} - 16\sqrt{10} - 120 + 25 = 32\sqrt{10} - 95.$$

Das ergibt das Gesamtvolumen

$$V = \pi(36\sqrt{10} - 100) \approx 43.49.$$

(**2 Punkte**)