Lösungen für die Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (8.3.2001)

1. Dieses Beispiel ist eine *umgekehrte Kurvendiskussion.*

   (a) Um die Koeffizienten von f zu bestimmen, beachten wir zunächst, dass diese Funktion symmetrisch um die x_2–Achse ist. Daher ist f eine *gerade* Funktion und wir können ansetzen
   $$f(x) = ax^4 + bx^2 + c.$$
   Um die Koeffizienten zu bestimmen, müssen wir ein Gleichungssystem für a, b und c aufstellen. Dazu verwenden wir $f(1) = 0$, $f'(1) = -8$ und $f''(1) = 0$. Wir erhalten
   $$\begin{array}{rrcrcrcr} I: & a & + & b & + & c & = & 0 \\ II: & 4a & + & 2b & & & = & -8 \\ III: & 12a & + & 2b & & & = & 0 \end{array}$$
   (**1 Punkt**)
   Subtrahieren wir $II - III$ und dividieren wir das Ergebnis durch 8, so finden wir $a = 1$. Zurück eingesetzt in III ergibt das sofort $b = -6$. Schließlich verwenden wir Gleichung I, um $c = 5$ zu bestimmen. Fassen wir zusammen, so erhalten wir für das erste Polynom die Lösung
   $$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5.$$
   (**1 Punkt**)
   Nachdem g beide Wendepunkte berührt und eine Funktion 2-ten Grades ist, muss auch g symmetrisch um die x_2–Achse sein. Also setzen wir an
   $$g(x) = dx^2 + e.$$
   Zur Bestimmung von d und e können wir die Berührbedingung verwenden: $g(1) = f(1) = 0$ und $g'(1) = f'(1) = -8$. Wir erhalten somit $g'(1) = 2d = -8$, also $d = -4$, und $g(1) = d + e = -4 + e = 0$, und daher $e = 4$. (**1 Punkt**)

   (b) Kurvendiskussion von f und g:

   f: Zwei **Nullstellen** sind schon bekannt: $W_2 = (-1, 0)$ und $W_1 = (1, 0)$. Für die anderen Nullstellen dividiert man das Polynom f durch $(x-1)(x+1) = x^2-1$, da $x = 1$ und $x = -1$ wie gesagt Nullstellen sind. Die Division ist einfach und läßst sich durch Herausheben berechnen:
   $$x^4 - 6x^2 + 5 = (x^2 - 1)(x^2 - 5).$$
   Die beiden übrigen Nullstellen bestimmt man daher aus der Gleichung
   $$x^2 - 5 = 0,$$
   die die Lösungen $x = \pm\sqrt{5}$ hat. Die anderen Nullstellen von f sind also $N_1 = (\sqrt{5}, 0)$ und $N_2 = (-\sqrt{5}, 0)$.
   ($\mathbf{\frac{1}{2}}$ **Punkt**)

Die **Extremwerte** erhält man durch Lösen von $f'(x) = 0$, also

$$4x^3 - 12x = 4x(x^3 - 3) = 0,$$

die offensichtlich die Lösungen $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{3}$ hat. Für die Berechnung der Extremwerte muss man dann nur noch in f einsetzen und erhält $E_1 = (0, 5)$, ein *Maximum*, und $E_2 = (\sqrt{3}, -4)$ bzw. $E_3 = (-\sqrt{3}, -4)$, beide *Minima*.
Die **Wendepunkte** von f sind bereits bekannt, $W_1 = (1, 0)$ und $W_2 = (-1, 0)$, ebenso die Steigung der Wendetangenten $k_{W_1} = -8$ und $k_{W_2} = 8$. Daher sind die Tangenten gegeben durch die Gleichungen

$$t_{W_1} : y = -8x + 8,$$
$$t_{W_2} : y = 8x + 8.$$

Das Verhalten im Unendlichen ergibt sich durch $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Daher ist f **streng monoton fallend** in $(-\infty, -\sqrt{3}]$ und $[0, \sqrt{3}]$, **streng monoton wachsend** in $[-\sqrt{3}, 0]$ und $[\sqrt{3}, \infty])$. Die Krümmugsbereiche ergeben sich durch die Kenntnis der Wendepunkte und das Vorzeichen von f''. Wir erhalten: Die Funktion f ist **konvex** auf $(-\infty, -1]$ und $[1, \infty]$, während sie im Intervall $[-1, 1]$ **konkav** ist.
(**1 Punkt**).

g: Die Nullstellen von g sind bekannt: $W_1 = (1, 0)$ und $W_2 = (-1, 0)$.
Die **Extremwerte** von g sind die Nullstellen von $g'(x) = -8x$, also $E = (0, 4)$, ein Maximum. Als Funktion zweiten Grades besitzt g keine Wendepunkte.
Das Verhalten bei Unendlich ist $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$.
Die Funktion g ist **streng monoton wachsend** in $(-\infty, 0]$ und **streng monoton fallend** in $[0, \infty)$. Auf ganz $\mathbb{R}$ ist g **konkav**.
($\mathbf{\frac{1}{2}}$ **Punkt**)

(c) Der Graph von f und g im angegebenen Bereich ist dargestellt in Abbildung 1.
(**1 Punkt**)

(d) Um die Fläche zwischen f und g zu berechnen, sieht man aus den Graphen der Funktionen, dass man das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx$$

berechnen muss, wobei wir die Symmetrie von f und g ausnützen können, um das Integral umzuformen zu

$$2\int_{0}^{1} f(x) - g(x)\, dx.$$

Wir bestimmen also

$$2\int_0^1 x^4 - 6x^2 + 5 + 4x^2 - 4\, dx = 2\int_0^1 x^4 - 2x^2 + 1\, dx.$$

Das berechnet man nach den Standard-Integrationsregeln:

$$2\int_0^1 x^4 - 2x^2 + 1\, dx = 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_0^1 = 2(\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{3} + 1) - 0 = \tfrac{16}{15}.$$

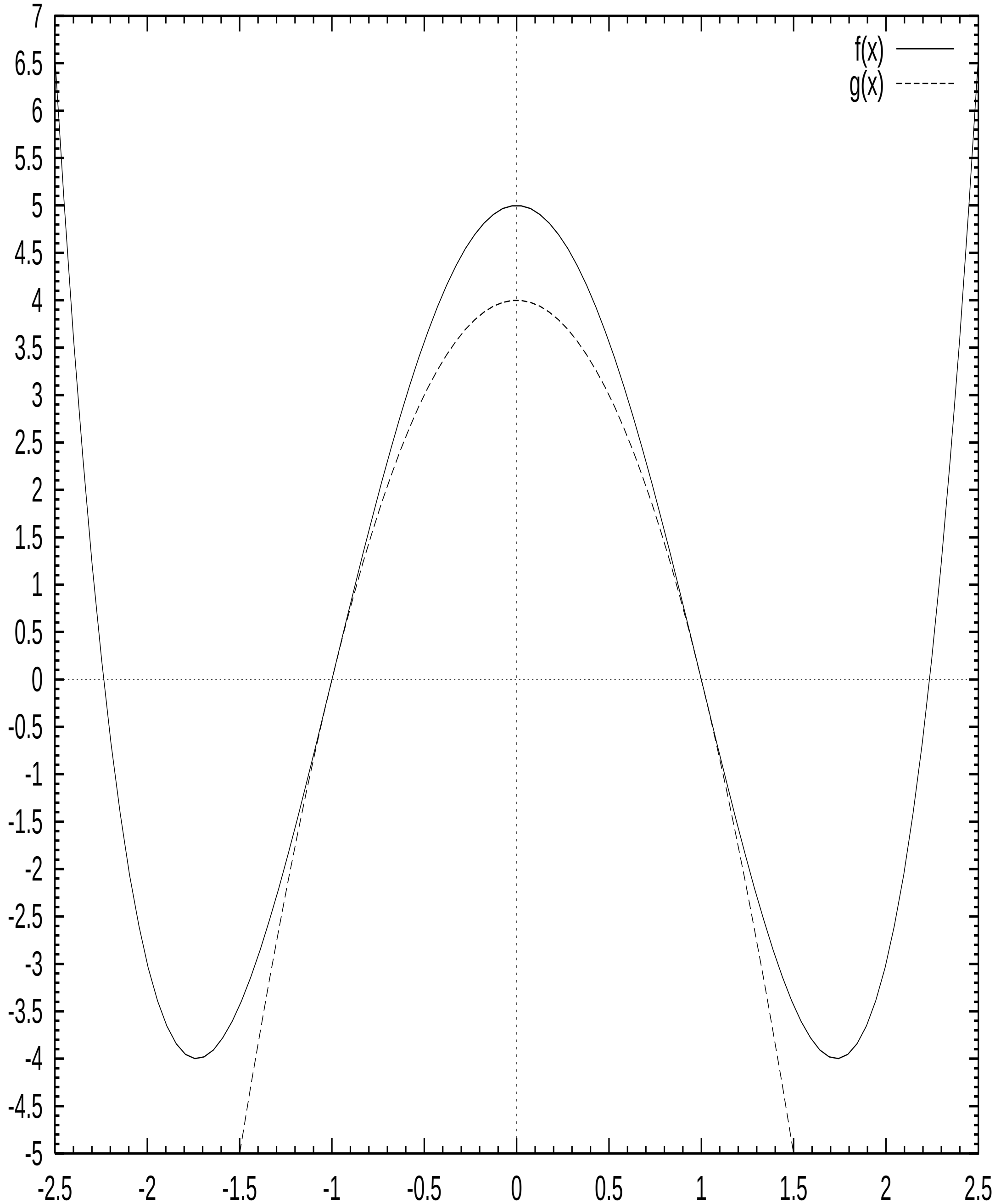

Abbildung 1: Graphen von f und g

Die Fläche ist demnach $A = 1 + \frac{1}{15}$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**).

(e) Das Rotationsvolumen ergibt sich aus einem weiteren Integral:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2 - g(x)^2 \, dx = 2\pi \int_{0}^{1} f(x)^2 - g(x)^2 \, dx.$$

Setzen wir wieder ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V = \pi \int_0^1 f(x)^2 - g(x)^2 \, dx &= 2\pi \int_0^1 (x^4 - 6x^2 + 5)^2 - (-4x^2 + 4)^2 \, dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 x^8 - 12x^6 + 46x^4 - 60x^2 + 25 - (16x^4 - 32x^2 + 16) \, dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 x^8 - 12x^6 + 30x^4 - 28x^2 + 9 \, dx = \\ &= 2\pi \left[\frac{x^9}{9} - \frac{12x^7}{7} + 6x^5 - \frac{28x^3}{3} + 9x \right]_0^1 = 2\pi(\tfrac{1}{9} - \tfrac{12}{7} + 6 - \tfrac{28}{3} + 9) = \tfrac{512\pi}{63} \end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

2. (a) Um zu beweisen, dass M ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, müssen wir zunächst die Abgeschlossenheit der Operationen $+$ und $*$ nachweisen:

Abgeschlossenheit von +: Es gilt

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3},$$

und weil die Summe zweier rationaler Zahlen wieder rational ist, liegt die Summe zweier Elemente von M wieder in M.
(**1 Punkt**)

Abgeschlossenheit von ∗: Wir haben

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1\sqrt{3}) * (a_2 + b_2\sqrt{3}) &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{3} + a_2b_1\sqrt{3} + 3b_1b_2 = \\ &= (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Summe und Produkt rationaler Zahlen sind rational, also hat das Produkt zweier Elemente aus M dieselbe Form wie alle Elemente von M und liegt daher auch in der Menge. Daher ist $*$ auf M abgeschlossen.
(**1 Punkt**)

Inverse bzgl. +: Sei $m = a + b\sqrt{3} \in M$. Dann ist das Inverse bzgl. $+$ in $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$-m = -a + (-b)\sqrt{3}.$$

Offenbar ist dieses Element wieder in M. Daher sind additiv Inverse enthalten.
(**1 Punkt**)

Inverse bzgl. ∗: Gehen wir wieder aus von $m = a + b\sqrt{3} \in M$ und sei $m \neq 0$. Wir finden das Inverse von m in $\mathbb{R}$ durch

$$m^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a - b\sqrt{3}}{(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3})} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}.$$

Dieses Element ist definiert und liegt in M, falls $a^2 - 3b^2 \neq 0$ gilt. Das ist aber der Fall, da anderweits $a = \pm b\sqrt{3}$ gälte. Wäre dann $b \neq 0$, so hätten wir $\sqrt{3} = \pm\frac{a}{b}$, und $\sqrt{3}$ wäre eine rationale Zahl. Für $b = 0$ folgte $a = 0$ und $m = 0$, was wir aber ausgeschlossen hatten. Darum sind die multiplikativ Inversen aller nichtverschwindenden Elemente von M wieder in M und M ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$.
(**1 Punkt**)

(b) Betrachten wir die gegebene Gleichung, so erkennen wir, dass sie quadratisch in z ist. Wir können also rechnen:

$$z_{1,2} = \frac{-1+2i \pm \sqrt{(1-2i)^2 - 24 - 32i}}{2} = \frac{-1+2i \pm \sqrt{-27-36i}}{2}.$$

(**1 Punkt**)
Um die Lösungen in der Form $a + ib$ darstellen zu können, müssen wir die Wurzel berechnen. Dazu setzen wir an

$$\sqrt{-27-36i} = a + ib.$$

Nach dem Quadrieren ergibt das das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= -27 \\ ab &= -18. \end{aligned}$$

Wir formen um $b = -18/a$, also $b^2 = 324/a^2$. Eingesetzt in die erste Gleichung und mit a^2 multipliziert erhalten wir

$$\begin{aligned} a^4 + 27a^2 - 324 = 0 \\ a^2_{1,2} &= -\tfrac{27}{2} \pm \sqrt{\tfrac{3^6+16\cdot 3^4}{4}} = -\tfrac{27\pm\sqrt{25\cdot 3^4}}{2} = 9, (-36) \\ a &= \pm 3 \end{aligned}$$

und daher $b = \mp 4$. Es ist also

$$\sqrt{-27-36i} = 3 - 4i.$$

(**1 Punkt**)
Die Lösungen der Gleichung lauten also

$$z_{1,2} = \frac{-1+2i \pm (3-4i)}{2} = 1-2i, -2+4i.$$

(**1 Punkt**)
Das Produkt der Lösungen

$$z_1 z_2 = (1-2i)(-2+4i) = 6+8i$$

ergibt das konstante Glied in der Gleichung, eine einfache Testmöglichkeit.
(**1 Punkt**)

3. (a) Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n = 0$):

$$1 + \sum_{k=0}^{0}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = 1 + (-1) = 0 = 0^4.$$

Dieser ist also richtig.
(**1 Punkt**)
Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$1 + \sum_{k=0}^{j}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = j^4.$$

(**1 Punkt**)
Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$1 + \sum_{k=0}^{n+1}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = (n+1)^4.$$

(**1 Punkt**)
Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) + (4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 4(n+1) - 1) = \\
&\quad\quad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&\quad = n^4 + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 = \\
&\quad = ((n+1) - 1)^4 + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 = \\
&\quad = ((n+1)^4 - 4(n+1)^3 + 6(n+1)^2 - 4(n+1) + 1) + \\
&\quad\quad + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 \\
&\quad = (n+1)^4
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**3 Punkte**)

(b) Um die Gleichung zu lösen, setzen wir $u = e^x$, also $x = \log u$. Das ergibt

$$u^2 - 3eu + 2e^2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung behandeln wir mit der üblichen Formel und erhalten

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{3e}{2} \pm \sqrt{\frac{9e^2}{4} - 2e^2} = \\
&= \frac{3e}{2} \pm \sqrt{\frac{9e^2 - 8e^2}{4}} = \frac{3e \pm e}{2} = 2e, e.
\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Für beide Lösungen müssen wir dann noch $x = \log u$ berechnen. Das ergibt

$$x_1 = \log(2e) = \log 2 + 1$$
$$x_2 = \log e = 1.$$

(**1 Punkt**)

4. Zu Beginn bestimmen wir die Gleichung der Geraden g. Dazu verwenden wir die *Zweipunktform*

$$g:\ y - y_P = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_P).$$

Eingesetzt ergibt das

$$g:\ y - \tfrac{7}{2} = \tfrac{-1}{-5}(x-1).$$

Die Gerade hat also die Gleichung

$$g:\ 2x - 10y + 33 = 0.$$

Ein Normalvektor von g ist $\mathfrak{n}_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(**1 Punkt**)

Die Tangenten durch P an die Ellipse ell bestimmt man z.B. mit Hilfe der *Polaren* durch P. Diese hat dieselbe Formel wie die Ellipsentangenten:

$$p_P:\ 25 = xx_P + 4yy_P = x + 14y.$$

Die Berührpunkte T_1 und T_2 sind dann die Schnittpunkten von p_P und ell. Wir rechnen wie folgt

$$\begin{aligned} x + 14y &= 25 \\ x &= 25 - 14y \\ x^2 &= 625 - 700y + 196y^2 \end{aligned}$$

und setzen in die Ellipsengleichung ein

$$\begin{aligned} 25 = x^2 + 4y^2 &= 625 - 700y + 196y^2 + 4y^2 \\ 0 &= 200y^2 - 700y + 600 \\ 0 &= 2y^2 - 7y + 6 \\ y_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = 2, \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Polaren ergeben sich auch die x–Werte der Punkte, und wir finden $T_1 = (-3, 2)$ und $T_2 = (4, \frac{3}{2})$.

(**2 Punkte**)

Die Tangenten an die Ellipse in den Punkten T_1 und T_2 erhält man aus der *Spaltform*

$$\begin{aligned} t &: xx_T + 4yy_T = 25 \\ t_{T_1} &:\ -3x + 8y = 25 \\ t_{T_2} &: 4x + 6y = 25. \end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Zur Drehwinkelberechnung bestimmen wir die Normalvektoren zu den Tangenten — diese lassen sich ja leicht ablesen:

$$\mathfrak{n}_{t_{T_1}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\mathfrak{n}_{t_{T_2}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Drehwinkel ergeben sich dann aus der Winkelformel

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{n}_2}{\|\mathfrak{n}_1\| \, \|\mathfrak{n}_2\|}.$$

Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_1 &= \frac{(-1)(-3) + 5 \cdot 8}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2}\sqrt{(-3)^2 + 8^2}} = \frac{43}{\sqrt{26}\sqrt{73}} = 0.987 \\
\varphi_1 &= 9.24^o = 0.55 \\
\cos\varphi_2 &= \frac{-13}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\varphi_2 &= 135^o = \tfrac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Man muss also g um φ_1 oder um φ_2 drehen.
(**1 Punkt**)

Bestimmen wir nun die Gleichung des Kreises. Nachdem $\overline{T_1T_2}$ ein Durchmesser des Kreises ist, muss der Kreismittelpunkt der Streckenmittelpunkt von $\overline{T_1T_2}$ sein:

$$M = \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4})$$

Die Kreisgleichung lautet also

$$k: \ (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{7}{4})^2 = \tfrac{197}{4},$$

wobei sich die rechte Seite ergibt, indem man den Punkt T_1 in die linke Seite der Gleichung einsetzt.
(**1 Punkt**)

Für den Schnittwinkel zwischen Kreis und Ellipse beachten wir, dass der Vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ orthogonal auf die Kreistangenten in T_1 und T_2 steht, da $\overline{T_1T_2}$ ein Durchmesser von k ist.

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(**1 Punkt**)

Es bleibt noch, die Schittwinkel zu bestimmen. Dazu rechnen wir die Winkel zwischen den Normalvektoren auf die Ellipsentangenten und $\overrightarrow{T_1T_2}$ aus:

$$\begin{aligned}
\cos\psi_1 &= \frac{134}{\sqrt{73}\sqrt{197}} = 0.417 \\
\psi_1 &= 65.36^o = 1.14 \\
\cos\psi_2 &= \frac{25}{\sqrt{13}\sqrt{197}} = 0.494 \\
\psi_2 &= 60.40^o = 1.05.
\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)