Familienname:	**1**
Vorname:	**2**
Matrikelnummer:	**3**
Studienkennzahl:	**4**
	5
	G

Note:

PRÜFUNG ZU EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN (3.5.2002)

(1) Einem Doppeldrehkegel mit Radius r und den beiden Höhen h_1 und h_2 ist ein Drehzylinder mit größtmöglichem Volumen axialsymmetrisch einzuschreiben. Berechnen Sie dieses Volumen, und bestimmen Sie wieviel Prozent des Doppelkegelvolumens der Zylinder beansprucht.
(**6 Punkte**)

(2) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden

$$g: \; X = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \; X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

einander schneiden. Ihr Schnittpunkt S sei die Spitze eines Tetraeders, dessen Grundfläche das Dreieck ABC bildet. Hier sind

$$A = (-4, -9, 1), \quad B = (3, 3, -1), \quad C = (6, -1, -3).$$

Berechnen Sie
(a) das Volumen des Tetraeders,
(b) den Neigungswinkel der Kante AS gegen die Grundfläche ABC,
(c) die Koordinaten des Punktes S', den man durch Spiegelung des Punktes S an der Ebene ABC erhält.
(**6 Punkte**)

(3) (a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0.$$

(**2 Punkte**)

(b) Lösen Sie in den komplexen Zahlen die Gleichung

$$z^2 - (3 - i)z + (14 + 2i) = 0$$

und stellen Sie das Ergebnis in der Form $a + ib$ dar. Bestimmen Sie außerdem das Produkt der beiden Lösungen.
(**4 Punkte**)

(4) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Beziehung

$$2 + \sum_{k=0}^{n} (4k^3 - 6k^2 + 6k - 2) = n^2(n^2 + 1).$$

(**6 Punkte**)

(5) (a) Sei M die Menge der rationalen Zahlen. Auf M seien die Verknüpfungen (**Abgeschlossenheit überprüfen!**)

$$x \oplus y := x + y + 2,$$
$$x \otimes y := 3xy + 6x + 6y + 10$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob $(M, \oplus, \otimes)$ ein **Körper** ist.

(b) Ist die folgende Gleichung in M lösbar?

$$(x \otimes x) \oplus x = 7$$

(**8 Punkte**)