Lösungen für die Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (3.5.2001)

1. Dieses Beispiel ist eine *Extremwertaufgabe*. Die geometrische Situation entnehmen wir

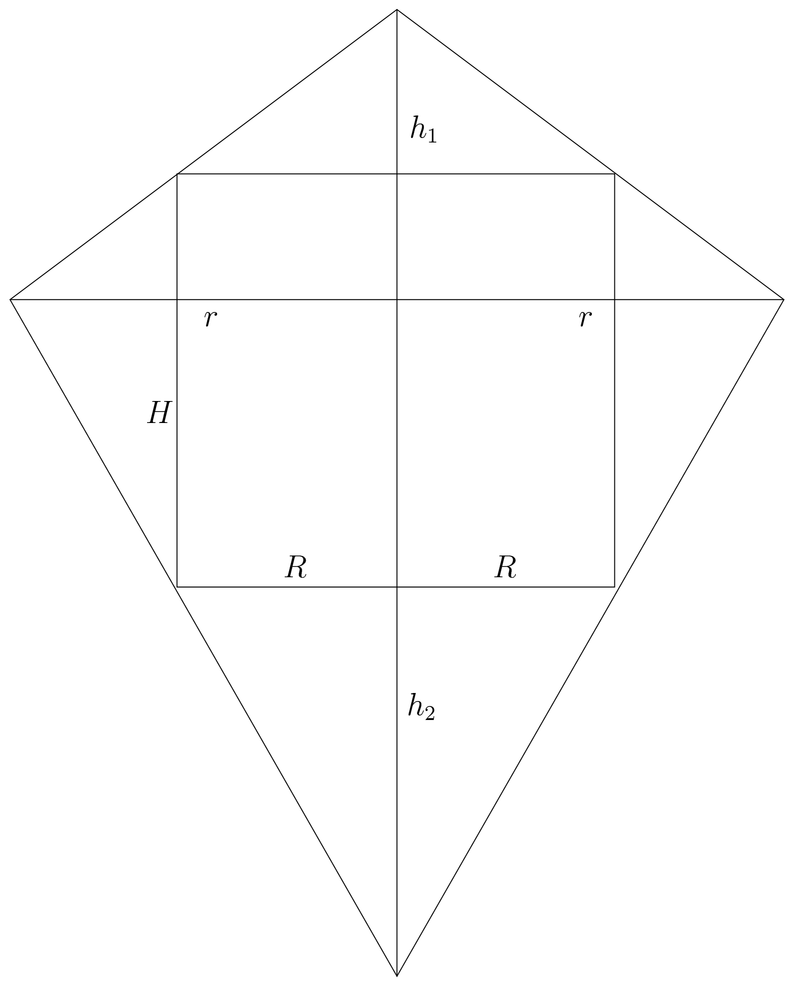

Abbildung 1: Skizze

   Abbildung 1.
   (**1 Punkt**).

   Die *Hauptbedingung* erhalten wir aus dem zu minimierenden Volumen des Drehzylinders. Es gilt

$$\text{HB:} \quad V_{\text{Zyl}} = R^2 H \pi \tag{1}$$

   (**1 Punkt**)

   Die Nebenbedingung erhalten wir mit Hilfe ähnlicher Dreiecke. Wir betrachten zwei Dreiecke, deren längste Seite parallel zur Doppelkegelachse liegt. Es gilt

$$(h_1 + h_2) : H = r : (r - R).$$

   Formen wir um, so ergibt sich

$$\text{NB:} \quad H = (h_1 + h_2)(1 - \tfrac{R}{r}). \tag{2}$$

(**1 Punkt**)

Setzen wir die Nebenbedingung (2) in die Hauptbedingung (1) ein, so finden wir

$$V_{\text{Zyl}}(R) = \pi(h_1 + h_2)R^2(1 - \tfrac{R}{r}),$$

und R liegt im Bereich $[0, r]$. Wir bestimmen das Maximum durch Null Setzen der ersten Ableitung von V_{Zyl}.

$$\begin{aligned} V_{\text{Zyl}}(R)' = C(2R - \tfrac{3R^2}{r}) &= 0 \\ 2Rr &= 3R^2 \\ R = 0 \quad \vee \quad R &= \tfrac{2}{3}r. \end{aligned}$$

Das Volumen V_{Zyl} ist bei $R = 0$ und $R = r$ Null und bei $R = \frac{2}{3}r$ positiv, also ist $R = \frac{2}{3}r$ ein lokales und sogar das globale Maximum von $V_{\text{Zyl}}(R)$ auf dem Intervall $[0, r]$.
(**2 Punkte**)

Setzen wir für R ein, so erhalten wir

$$H = \tfrac{1}{3}(h_1 + h_2)$$

und

$$V_{\text{Zyl}} = \tfrac{4}{27}\pi r^2(h_1 + h_2).$$

Das Volumen des Doppelkegels ist

$$V_{\text{Keg}} = \tfrac{1}{3}\pi r^2(h_1 + h_2),$$

und deshalb ist

$$V_{\text{Zyl}} = \tfrac{4}{9}V_{\text{Keg}}.$$

Der Drehzylinder beansprucht also etwa 44% des Zylindervolumens.
(**1 Punkt**)

2. Untersuchen wir zunächst die beiden Geraden. Um fest zu stellen, ob sie einander schneiden, setzen wir sie gleich. Es gilt

$$\begin{aligned} -2 + 2t &= 5 - s \\ 4 + t &= -3 + 3s \\ 2 + 4t &= 4 + 2s. \end{aligned}$$

Ein wenig umgeformt und wir erhalten

$$\begin{aligned} 2t + s &= 7 \\ t - 3s &= -7 \\ 4t - 2s &= 2. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen können wir $s = 3$ und $t = 2$ leicht bestimmen. Um zu beweisen, dass die beiden Geraden einen Schnittpunkt besitzen, müssen wir noch überprüfen, ob die dritte Gleichung ebenfalls erfüllt ist. Natürlich ist

$$4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -2,$$

und daher besitzen g und h tatsächlich einen Schnittpunkt.

Es gilt

$$S = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(**1 Punkt**)

- Zur Bestimmung des Tetraedervolumens verwenden wir das Spatprodukt

$$V = \tfrac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AS} \right|.$$

Zunächst berechnen wir die Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} /\!\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für das Kreuzprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ erhalten wir dann

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -32 \\ 8 \\ -64 \end{pmatrix} /\!\!/ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(**1 Punkt**)
Das Spatprodukt ergibt

$$\begin{pmatrix} -32 \\ 8 \\ -64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = -648.$$

Daher ist das Volumen des Tetraeders $V = 108$.
(**1 Punkt**)

- Zur Bestimmung des Neigungswinkels berechnen wir den Winkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{AS}$ und dem Normalvektor der Grundfläche. Es gilt

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{27}{\sqrt{81}\sqrt{38}} = \frac{3\sqrt{38}}{38},$$

und daher ist $\varphi \approx 1.063 \approx 60.88°$.
Der Neigungswinkel der Kante ist dann $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi \approx 0.508 \approx 29.12°$.
(**1 Punkt**)

- Zur Spiegelung des Punktes stellen wir die Normalgerade auf die Grundfläche durch den Punkt S auf. Wir erhalten

$$h: \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Dann schneiden wir h mit der Grundfläche, deren Gleichung wir ebenfalls leicht bestimmen können:

$$\varepsilon: \quad 4x - y + 8z = 4 \cdot (-4) - (-9) + 8 \cdot 1 = 1.$$

(**1 Punkt**)
Setzen wir h in ε ein, so finden wir

$$1 = 4(2 + 4\lambda) - (6 - \lambda) + 8(10 + 8\lambda) = 82 + 81\lambda,$$

also $\lambda = -1$. Um S an der Grundfläche zu spiegeln, müssen wir auf h zweimal die Strecke bis zur Ebene zurück legen. Wir setzen daher $\lambda = -2$ in die Geradengleichung ein und bekommen

$$S' = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(**1 Punkt**)

3. (a) Die angegebene Gleichung ist quadratisch in $\tan x$. Wir substituieren also $u = \tan x$, was zur quadratischen Gleichung

$$u^2 - 4u + 3 = 0$$

führt, welche die Lösungen

$$u_1 = 1 \quad \text{und} \quad u_2 = 3$$

besitzt.
(**1 Punkt**)
Jetzt müssen wir nur noch alle Lösungen der beiden Gleichungen

$$\tan x = u_i, \quad i = 1, 2$$

bestimmen. Es gilt $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, und $\arctan(3) = 1.249$. Die Periode der Tangensfunktion ist π, und daher ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, 1.249 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(**1 Punkt**)

(b) Betrachten wir die gegebene Gleichung, so erkennen wir, dass sie quadratisch in z ist. Wir können also rechnen:

$$z_{1,2} = \frac{3 - i \pm \sqrt{(3-i)^2 - 4 \cdot (14 + 2i)}}{2} = \frac{3 - i \pm \sqrt{-48 - 14i}}{2}.$$

(**1 Punkt**)
Um die Lösungen in der Form $a + ib$ darstellen zu können, müssen wir die Wurzel berechnen. Dazu setzen wir an

$$\sqrt{-48 - 14i} = a + ib.$$

Nach dem Quadrieren ergibt das das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= -48 \\ ab &= -7. \end{aligned}$$

Wir formen um $b = -7/a$, also $b^2 = 49/a^2$. Eingesetzt in die erste Gleichung und mit a^2 multipliziert erhalten wir

$$\begin{aligned} a^4 + 48a^2 - 49 = 0 \\ a_{1,2}^2 &= -24 \pm \sqrt{576 + 49} = 1, (-49) \\ a &= \pm 1 \end{aligned}$$

und daher $b = \mp 7$. Es ist also

$$\sqrt{-48 - 14i} = 1 - 7i.$$

(**1 Punkt**)
Die Lösungen der Gleichung lauten also

$$z_{1,2} = \frac{3 - i \pm (1 - 7i)}{2} = 2 - 4i,\ 1 + 3i$$

(**1 Punkt**)
Das Produkt der Lösungen

$$z_1 z_2 = (2 - 4i)(1 + 3i) = 14 + 2i$$

ergibt das konstante Glied in der Gleichung, eine einfache Testmöglichkeit.
(**1 Punkt**)

4. Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n = 0$):

$$2 + \sum_{k=0}^{0} (4k^3 - 6k^2 + 6k - 2) = 2 + (-2) = 0 = 0^2(0^2 + 1).$$

Dieser ist also richtig.
(**1 Punkt**)

Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$2 + \sum_{k=0}^{j} (4k^3 - 6k^2 + 6k - 2) = j^2(j^2 + 1).$$

(**1 Punkt**)

Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$2 + \sum_{k=0}^{n+1} (4k^3 - 6k^2 + 6k - 2) = (n + 1)^2((n + 1)^2 + 1).$$

(**1 Punkt**)

Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(4k^3 - 6k^2 + 6k - 2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 6k - 2) + (4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) - 2) = \\
&\quad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= n^2(n^2+1) + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) - 2 = \\
&= ((n+1)-1)^2(n^2+1) + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) - 2 = \\
&= (n+1)^2(n^2+1) - 2(n+1)(n^2+1) + n^2 + 1 + \\
&\quad + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) - 2 \\
&= (n+1)^2(((n+1)-1)^2+1) - 2(n+1)^3 + 4(n+1)^2 - 4(n+1) + \\
&\quad + (n+1)^2 - 2(n+1) + 2 + 4(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) - 2 \\
&= (n+1)^2((n+1)^2+1) - 2(n+1)^2(n+1) + (n+1)^2 + 2(n+1)^3 - (n+1)^2 \\
&= (n+1)^2((n+1)^2+1)
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**3 Punkte**)

5. Um zu beweisen, dass die angegebene Struktur ein Körper ist, überprüfen wir die neun Körperaxiome und die Abgeschlossenheit. Dazu formen wir die Definition der Operationen ein wenig um:

$$\begin{aligned}
x \oplus y &= (x+2) + (y+2) - 2 \\
x \otimes y &= 3((x+2)(y+2)) - 2
\end{aligned}$$

Abgeschlossenheit: Die $\oplus$–Summe und das $\otimes$–Produkt zweier reeller Zahlen sind wieder rationale Zahlen, also sind $\oplus$ und $\otimes$ Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}$.
(**1 Punkt**)

AG ($\oplus$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus c = (a+b+2) \oplus c = a+b+2+c+2 = a+b+c+4 = \\
= a+b+c+2+2 = a \oplus (b+c+2) = a \oplus (b \oplus c).
\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\oplus$): Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a \oplus b = a+b+2 = b+a+2 = b \oplus a.$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Nullelement ($\oplus$): Für das Nullelement $n \in \mathbb{Q}$ muss

$$\forall a \in \mathbb{Q} : a \oplus n = a$$

gelten. Wenn wir einsetzen, erhalten wir $a + n + 2 = a$, also $n = -2$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Inverses ($\oplus$): Sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann muss für das Inverse $\ominus a$ von a die Beziehung

$$a \oplus (\ominus a) = n = -2$$

erfüllt sein. Wenn wir wieder einsetzen, sehen wir

$$a + (\ominus a) + 2 = -2,$$

also $\ominus a = -4 - a$. Jedes Element besitzt also ein Inverses bezüglich $\oplus$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

AG ($\otimes$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c = \big(3(a+2)(b+2) - 2\big) \otimes c &= 3\big(3(a+2)(b+2) - 2 + 2\big)(c+2) - 2 = \\ &= 9(a+2)(b+2)(c+2) - 2 == 3(a+2)\big(3(b+2)(c+2) - 2 + 2\big) - 2 = \\ &= a \otimes \big(3(b+2)(c+2) - 2\big) = a \otimes (b \otimes c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\otimes$): Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a \otimes b = 3(a+2)(b+2) - 2 = 3(b+2)(a+2) - 2 = b \otimes a.$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Einselement ($\otimes$): Wenn $e \in \mathbb{Q}$ das Einselement ist, dann muss für alle $n \neq a \in \mathbb{Q}$ die Gleichung

$$a \otimes e = a$$

gelten. Setzen wir ein, so finden wir

$$\begin{aligned}3(a+2)(e+2) - 2 &= a \\ e &= \tfrac{a+2}{3(a+2)} - 2 = \tfrac{1}{3} - 2 = -\tfrac{5}{3}.\end{aligned}$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Inverses ($\otimes$): Für jedes $n \neq a \in \mathbb{Q}$ muss das Inverse a^{-1} existieren, das

$$a \otimes a^{-1} = e = -\tfrac{5}{3}$$

erfüllt. Setzen wir die Definition von $\otimes$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}3(a+2)(a^{-1}+2) - 2 &= -\tfrac{5}{3} \\ a^{-1} + 2 &= \frac{1}{9(a+2)} \\ a^{-1} &= \frac{1}{9(a+2)} - 2.\end{aligned}$$

Dieses Element ist offensichtlich definiert für alle $a \neq -2 = n$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

DG ($\oplus$, $\otimes$): Schließlich bleibt noch für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ das Distributivgesetz zu zeigen:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \otimes c = ((a+2)+(b+2)-2) \otimes c &= 3((a+2)+(b+2))(c+2)-2 = \\ &= 3(a+2)(c+2)+3(b+2)(c+2)-2 \\ &= 3(a+2)(c+2)-2+3(b+2)(c+2)-2+2 \\ &= \big(3(a+2)(c+2)-2\big) \oplus \big(3(b+2)(c+2)-2\big) = \\ &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Um die gegebene Gleichung zu lösen, setzen wir in die Definition ein und erhalten

$$\begin{aligned}(x \otimes x) \oplus x &= \big(3(x+2)^2-2\big) \oplus x = 3(x+2)^2-2+x+2 = 7, \\ 3x^2+13x+5 &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{-13}{6} \pm \frac{\sqrt{169-60}}{6} = \frac{-13}{6} \pm \frac{\sqrt{109}}{6}\end{aligned}$$

Die Gleichung hätte in $\mathbb{R}$ die beiden oben berechneten Lösungen. Beide sind nicht in $\mathbb{Q}$, und somit ist die Gleichung in M unlösbar. (**1 Punkt**)