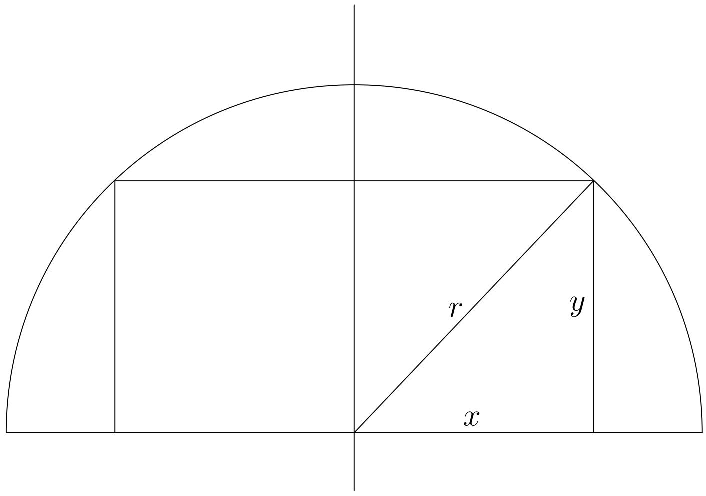
Lösungen für die Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (29.11.2002)

1. (a) Betrachten wir die folgende Skizze (**1 Punkt**).



Die Grundfläche des Hauses ist
$$A = 2xy,$$
die Hauptbedingung.
Die Nebenbedingung erhalten wir aus dem Satz von Pythagoras
$$x^2 + y^2 = r^2.$$
Die Randbedingungen sind $x \geq 0$ und $y \geq 0$.
(**1 Punkt**)
Weil $x \mapsto x^2$ im Positiven eine monotone Funktion ist, können wir auch $F := \frac{1}{4}A^2$ maximieren, was das Einsetzen der Nebenbedingung vereinfacht. Wir erhalten durch Elimination von y
$$F(x) = x^2(r^2 - x^2)$$
und $x \in [0, r]$.
Es gilt
$$0 = F'(x) = 2r^2x - 4x^3$$
mit den Lösungen $x = 0$ und $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}r$. Das lokale Maximum, das im Inneren des zulässigen Bereiches liegt, ist $x = \frac{\sqrt{2}}{2}r = y$.
Die Grundfläche des größtmöglichen Hauses beträgt also $A = 2xy = r^2$.
(**2 Punkte**)
Die Gartenfläche G ist die übrige Fläche im Halbkreis, also
$$G = \tfrac{1}{2}r^2\pi - r^2 = r^2(\tfrac{\pi}{2} - 1).$$
(**1 Punkt**)
Schließlich bleibt noch, das Verhältnis der beiden Flächen zu berechnen. Es gilt
$$\frac{G}{A} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{1} \cong 0.5708.$$
(**1 Punkt**)

(b) Die CDs müssen in 4 Gruppen aufgestellt werden, die in beliebiger Reihenfolge auf dem Regal aufgereiht werden können. Das gibt 4! Möglichkeiten, die Packungstypen aufzustellen.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)
Innerhalb der Packungstypen kann ebenfalls beliebig umgereiht werden, was auf 4!, 7!, 5! bzw. 3! verschiedene Arten geschehen kann.
(**1 Punkt**)
Im Gesamten haben wir also

$$4!\,4!\,7!\,5!\,3! = 2090188800$$

Möglichkeiten, die CDs wie verlangt anzuordnen.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

2. Um zu beweisen, dass die angegebene Struktur ein Körper ist, überprüfen wir die neun Körperaxiome und die Abgeschlossenheit.

Abgeschlossenheit: Die $\oplus$–Summe und das $\otimes$–Produkt zweier reeller Zahlen sind wieder reelle Zahlen, also sind $\oplus$ und $\otimes$ Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$. Um die Sache etwas zu vereinfachen, schreiben wir das Produkt ein wenig um:

$$a \otimes b = ab - 8a - 8b + 72 = (a-8)(b-8) + 8$$

(**1 Punkt**)

AG ($\oplus$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 8) \oplus c = a + b - 8 + c - 8 = a + b + c - 16 = \\ &= a + b + c - 8 - 8 = a \oplus (b + c - 8) = a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\oplus$): Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \oplus b = a + b - 8 = b + a - 8 = b \oplus a.$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Nullelement ($\oplus$): Für das Nullelement $n \in \mathbb{R}$ muss

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \oplus n = a$$

gelten. Wenn wir einsetzen, erhalten wir $a + n - 8 = a$, also $n = 8$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Inverses ($\oplus$): Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann muss für das Inverse $\ominus a$ von a die Beziehung

$$a \oplus (\ominus a) = n = 8$$

erfüllt sein. Wenn wir wieder einsetzen, sehen wir

$$a + (\ominus a) - 8 = 8,$$

also $\ominus a = 16 - a$. Jedes Element besitzt also ein Inverses bezüglich $\oplus$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

AG (⊗): Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c &= \big((a-8)(b-8)+8\big) \otimes c = \big((a-8)(b-8)+8-8\big)(c-8)+8 = \\ &= (a-8)(b-8)(c-8)+8 == (a-8)\big((b-8)(c-8)+8-8\big)+8 = \\ &= a \otimes \big((b-8)(c-8)+8\big) = a \otimes (b \otimes c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG (⊗): Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \otimes b = (a-8)(b-8)+8 = (b-8)(a-8)+8 = b \otimes a.$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Einselement (⊗): Wenn $e \in \mathbb{R}$ das Einselement ist, dann muss für alle $n \neq a \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$a \otimes e = a$$

gelten. Setzen wir ein, so finden wir

$$\begin{aligned}(a-8)(e-8)+8 &= a \\ e &= \tfrac{a-8}{a-8}+8 = 1+8 = 9.\end{aligned}$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Inverses (⊗): Für jedes $n \neq a \in \mathbb{R}$ muss das Inverse a^{-1} existieren, das

$$a \otimes a^{-1} = e = 9$$

erfüllt. Setzen wir die Definition von $\otimes$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(a-8)(a^{-1}-8)+8 &= 9 \\ a^{-1}-8 &= \frac{1}{a-8} \\ a^{-1} &= \frac{1}{a-8}+8.\end{aligned}$$

Dieses Element ist offensichtlich definiert für alle $a \neq 8 = n$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

DG (⊕, ⊗): Schließlich bleibt noch für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ das Distributivgesetz zu zeigen:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \otimes c &= (a+b-8) \otimes c = (a+b-8-8)(c-8)+8 = \\ &= \big((a-8)+(b-8)\big)(c-8)+8 = (a-8)(c-8)+(b-8)(c-8)+8 = \\ &= \big((a-8)(c-8)+8\big)+\big((b-8)(c-8)+8\big)-8 = \\ &= \big((a-8)(c-8)+8\big) \oplus \big((b-8)(c-8)+8\big) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Um die gegebene Gleichung zu lösen, setzen wir in die Definition ein und erhalten

$$\begin{aligned}(x \otimes x) \oplus x = \big((x-8)^2+8\big) \oplus x = (x-8)^2+8+x-8 = 14 \\ x^2-15x+50 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}-50} = \frac{15}{2} \pm \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Die Gleichung hat also die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = 10$. (**1 Punkt**)

3. (a) Die angegebene Gleichung ist eine biquadratische Gleichung, und daher können wir rechnen

$$z^4 + 14z^2 + 625 = 0$$
$$z_{1,2}^2 = -7 \pm \sqrt{49 - 625} = -7 \pm \sqrt{-576} = -7 \pm 24i.$$

(**1 Punkt**)

Um die Lösungen zu finden, müssen wir die Wurzel aus diesen komplexen Zahlen ziehen. Am einfachsten geht das mit Hilfe eines abstrakten Ansatzes $z = a + bi$, denn

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi,$$

und daher finden wir die Gleichungen

$$I: \; a^2 - b^2 = -7$$
$$II: \; 2abi = \pm 24.$$

(**1 Punkt**)

Verwenden wir außerdem noch, dass

$$III: \; a^2 + b^2 = |z|^2 = |z^2| = |-7 \pm 24i| = 25,$$

dann können wir die Gleichungen I und III addieren bzw. subtrahieren und erhalten

$$2a^2 = 18, \quad 2b^2 = 32,$$

und damit $a = \pm 3$ und $b = \pm 4$.

Die vier Lösungen sind also

$$z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 3 - 4i = \overline{z_1}, \quad z_3 = -3 - 4i = -z_1, \quad z_4 = -3 + 4i = -\overline{z_1}.$$

(**1 Punkt**)

Das Produkt der Lösungen ist also

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = z_1 \overline{z_1}(-z_1)(-\overline{z_1}) = |z_1|^2| - z_1|^2 = |z_1|^4 = \sqrt{9 + 16}^4 = 25^2 = 625,$$

oder das konstante Glied in der Gleichung (das ist immer so).

(**1 Punkt**)

(b) Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n = 0$):

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+3) = 0(0+3) = 0 = \tfrac{1}{3} \cdot 0(0+1)(0+5).$$

Dieser ist also richtig.

(**1 Punkt**)

Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$\sum_{k=0}^{j} k(k+3) = \tfrac{1}{3} j(j+1)(j+5).$$

(**1 Punkt**)
Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+3) = \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+6).$$

(**1 Punkt**)
Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k(k+3) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+3) + (n+1)(n+4) = \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}\\
&= \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+5) + (n+1)(n+4) =\\
&= \tfrac{1}{3}\big(n(n+1)(n+5) + 3(n+1)(n+4)\big) =\\
&= \tfrac{1}{3}(n+1)\big(n^2+8n+12\big) =\\
&= \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+6),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**1 Punkt**)

4. (a) Beginnen wir mit dem Schnittpunkt der Geraden g und h. Setzen wir gleich, so erhalten wir komponentenweise

$$\begin{aligned}
0 + 2t &= 7 - s\\
2 + 2t &= -6 + 4s\\
1 + t &= 9 - 2s
\end{aligned}$$

mit der Lösung $t = 2$, $s = 3$. Daher schneiden einander g und h, und der Schnittpunkt ist $S = (4, 6, 3)$.
(**1 Punkt1**)
Zur Berechnung des Volumens bestimmen wir die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$. Es gilt

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4\\ 4\\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1\\ 5\\ -9 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2\\ 9\\ -2 \end{pmatrix}.$$

(**1 Punkt**)
Das Volumen des Tetraeders können wir etwa mit Hilfe der Formel

$$V = \tfrac{1}{6}\big|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AS}\big|$$

bestimmen. Zu diesem Zweck wollen wir noch das Kreuzprodukt berechnen:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4(-9) - 5(-5)\\ -((-4)(-9) - (-5))\\ (-4)5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11\\ -41\\ -24 \end{pmatrix}.$$

(**1 Punkt**)

Das Volumen des Tetraeders ist daher

$$V = \tfrac{1}{6}\big|11 \cdot (-2) + 41 \cdot 9 + 24 \cdot (-2)\big| = \tfrac{299}{6}.$$

(**1 Punkt**)
Den Neigungswinkel der Kante zur Grundfläche bestimmt man am einfachsten, indem man den Winkel der Kante AS zum Normalvektor auf die Grundfläche berechnet. Diesen Normalvektor $\mathfrak{n} := -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ kennen wir bereits. Daher ist

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{n} \cdot \overrightarrow{AS}}{\|\mathfrak{n}\| \, \|\overrightarrow{AS}\|} = \frac{299}{\sqrt{2378}\,\sqrt{89}} = 0.64993\ldots$$

Daher ist $\alpha = 49.4633°$, und der Winkel zwischen Kante und Grundfläche beträgt $40.5367°$.
(**1 Punkt**)

(b) Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass der Reiseleiter die Wette verliert. Dies ist dann der Fall, wenn alle mitreisenden 42 Fahrgäste verschiedene Geburtstage haben. Das lässt sich leicht mit günstigen und möglichen Fällen berechnen. Gehen wir die Passagiere der Reihe nach durch, und lassen wir, wie besprochen, Schaltjahre außer Acht. Der erste kann an jedem beliebigen Tag Geburtstag haben, also an 365 von 365 Tagen. Der zweite Fahrgast darf nicht denselben Geburtstag haben wie der erste, also muss er an 364 von 365 möglichen Tagen geboren sein. Beim dritten sind es nur mehr 363 erlaubte Tage, und so weiter bis zum 42., der noch 324 mögliche Geburtstage zur Auswahl hat.

Die Wahrscheinlichkeit bestimmen wir nun, indem wir die erlaubten durch die möglichen Fälle dividieren und alles miteinander multiplizieren. Das ergibt

$$p := \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{324}{365} = \frac{365!}{323!\,365^{42}} = \binom{365}{42} \frac{42!}{365^{42}} = 0.08596\ldots,$$

also nur etwas mehr als 8.5%.
(**2 Punkte**)
Der Erwartungswert für den Gewinn des Reiseleiters beträgt also

$$1(1-p) - 2p = 0.74209\ldots$$

für jeden eingesetzten Euro. Die Wette war also *sehr* klug.
(**1 Punkt**)