

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

Note:

PRÜFUNG ZU EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN (13.12.2002)

- (1) Der Graph des Polynoms dritten Grades $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat einen Extremwert bei $E_1 = (3, y_1)$ und einen Wendepunkt in $W = (2, y_w)$. Die Gleichung der (Wende-)Tangente in W lautet

$$t_w : 3x + y = 4.$$

- (a) Ermitteln Sie die Koeffizienten des Polynoms.
(b) Diskutieren Sie die Funktion (bestimmen Sie so vorhanden Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Monotoniebereiche, Symmetrieeigenschaften, Konvexitätsbereiche und das Verhalten bei $\pm\infty$) und zeichnen Sie die Graphen im Intervall $[0, 4]$.
(c) Das Flächenstück, das vom Graphen und der x -Achse eingeschlossen wird, rotiert um die x -Achse. Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

(8 Punkte)

- (2) (a) Sei die Menge

$$K := \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

gegeben. Beweisen, dass K ein *Unterkörper* von \mathbb{R} ist.

(4 Punkte)

- (b) Lösen Sie in den komplexen Zahlen die Gleichung

$$z^2 + (6 - 12i)z - 62 - 48i = 0$$

und stellen Sie die Lösung in der Form $a + ib$ dar. Berechnen Sie anschließend das Produkt der beiden Lösungen.

(4 Punkte)

- (3) (a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Beziehung

$$4 + \sum_{k=0}^n 4k^3 - 6k^2 + 8k - 3 = (n^2 + 1)^2.$$

(6 Punkte)

- (b) In einem Raum stehen acht Kisten, durchnummeriert von 1 bis 8. In jeder dieser Kisten befinden sich 4 Kugeln, je eine gelbe, eine rote, eine grüne und eine blaue. Vor den 8 Kisten steht ein Brett mit 8 nummerierten Vertiefungen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus jeder der Kisten eine Kugel in die Vertiefung mit der entsprechenden Nummer zu legen und zwar so, dass niemals zwei Kugeln mit derselben Farbe neben einander zu liegen kommen? **(2 Punkte)**

- (4) (a) Gegeben sei die Ellipse

$$ell : 25x^2 + 169y^2 = 4225.$$

Bestimmen Sie jene vier Ellipsenpunkte P , für die die beiden Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen. (Hinweis: Sei P so ein Punkt, dann gilt $\overrightarrow{F_1P} \perp \overrightarrow{F_2P}$).

(4 Punkte)

- (b) Bei einer Wohltätigkeitslotterie werden 100 Lose verkauft, davon sind 30 Nieten. Es werden 25 Geldtreffer verlost, der Rest sind Warentreffer.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf von 3 Losen

(i) nichts gewinnt,

(ii) mindestens zwei Treffer erhält?

(4 Punkte)