Lösungen für die Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (16.5.2003)

1. (a) Zunächst bestimmen wir den Parameter a, indem wir den Punkt einsetzen:

$$\frac{1}{15} = f(-1) = \frac{(-1)^3}{(-1)^2 + a} = -\frac{1}{1+a},$$
$$-15 = 1 + a,$$

so $a = -16$, and

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16}.$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

(b) Für die Kurvendiskussion berechnen wir zunächst die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 16) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{x^4 - 48x^2}{(x^2 - 16)^2},\\
f''(x) &= \frac{(4x^3 - 96x) \cdot (x^2 - 16)^2 - (x^4 - 48x^2) \cdot 2(x^2 - 16)2x}{(x^2 - 16)^4} = 32\frac{x^3 + 48x}{(x^2 - 16)^3},\\
f'''(x) &= 32\frac{(3x^2 + 48) \cdot (x^2 - 16)^3 - (x^3 + 48x) \cdot 3(x^2 - 16)^2 2x}{(x^2 - 16)^6} =\\
&= -96\frac{x^4 + 96x^2 + 256}{(x^2 - 16)^4}.
\end{aligned}$$

($\mathbf{1\frac{1}{2}}$ **Punkte**)

Definitionsbereich: Die Funktion f ist definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Graph: Siehe Abbildung 1, (**1 Punkt**)

Nullstellen: Die Nullstellen von f sind die Nullstellen des Zählers, also lösen wir $x^3 = 0$, was als einzige Lösung die dreifache Nullstelle $N = (0, 0)$ besitzt.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Extremwerte: Die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt man durch Nullsetzen des Zählers:

$$\begin{aligned}
x^4 - 48x^2 &= 0\\
x^2 &= 48, \qquad \text{oder } x_{1,2} = 0\\
x_{3,4} &= \pm 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Die Funktion besitzt zwei Extremstellen bei $H = (-4\sqrt{3}, -6\sqrt{3}) \sim (-6.93, -10.39)$, ein Maximum, und $T = (4\sqrt{3}, 6\sqrt{3}) \sim (6.93, 10.39)$, ein Minumum. Ferner hat die Funktion bei $N = (0, 0)$ einen Sattelpunkt.
(**1 Punkt**)

Wendepunkte: Wie zuvor bestimmen wir die Nullstellen von f'' über den Zähler:

$$\begin{aligned}
x^3 + 48x &= 0\\
x^2 + 48 &= 0, \qquad \text{oder } x_1 = 0.
\end{aligned}$$

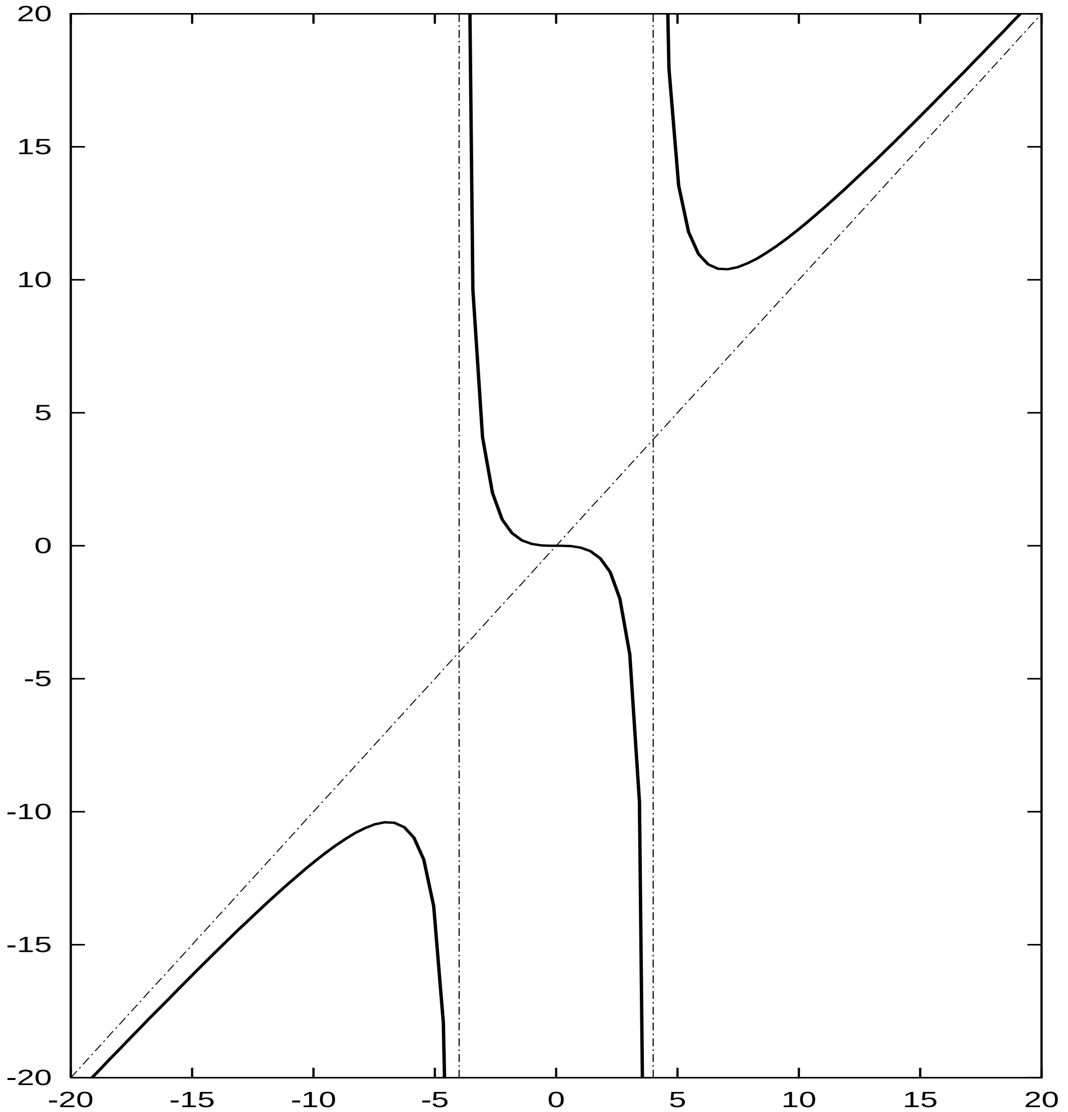

Abbildung 1: Graph

Die Gleichung $x^2 + 48 = 0$ hat keine reellen Nullstellen. Daher besitzt f nur einen Wendepunkt, nämlich die Nullstelle N. Die Wendetangente ist die x–Achse.
($\mathbf{\frac{1}{2}}$ **Punkt**)

Symmetrieeigenschaften: Die Funktion ist ein Quotient aus der ungeraden Funktion x^3 und der geraden Funktion $x^2 - 16$, ist also selbst **ungerade**, d.h. **symmetrisch um den Ursprung** mit $f(-x) = -f(x)$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Asymptoten: Die Funktion f hat **Pole**, d.h. senkrechte Asymptoten bei den Nullstellen des Nenners $x = \pm 4$.
Zur Berechnung der schrägen Asymptote, dividieren wir die Polynome aus:

$$\frac{x^3}{x^2 - 16} = x + \frac{16x}{x^2 - 16}.$$

Der letzte Term strebt gegen 0 für x gegen $\pm\infty$, und daher ist $a(x) = x$ eine

schräge Asymptote von f.
(1 Punkt)

Monotoniebereiche: Die Funktion ist monoton wachsend in den beiden Bereichen $]-\infty, -4\sqrt{3}]$ und $[4\sqrt{3}, +\infty[$. In allen anderen Bereichen ist die Funktion monoton fallend.

Krümmungsbereiche: Die Funktion ist konkav in $]-\infty, -4]$ und $[0, 4]$; sie ist konvex in $[-4, 0]$ und $[4, \infty[$.

(c) Nun zur Berechnung des Flächeninhalts. Wir müssen auf die Nullstelle achten, daher gilt

$$A = |f(x)\,dx| + \left|\int_0^2 f(x)\,dx\right|.$$

Bestimmen wir zunächst die Stammfunktion von f. Es gilt

$$\int \frac{2x}{x^2-16}\,dx = \left| \begin{array}{rcl} y & = & x^2-16 \\ dy & = & 2x\,dx \\ dx & = & \frac{dy}{2x} \end{array} \right| = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| = \ln\left|x^2-16\right|,$$

und daher

$$\int f(x)\,dx = \int x + 8\frac{2x}{x^2-16}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 8\ln\left|x^2-16\right| =: F(x).$$

Die Fläche ist daher

$$A = F(x)|_{x=-3}^{0} + F(x)|_{x=0}^{2} \sim |22.180 - 20.067| + |21.879 - 22.180| \sim 2.414.$$

(1 Punkt)

2. Um zu überprüfen, ob die angegebene Struktur ein Körper ist, untersuchen wir die neun Körperaxiome und die Abgeschlossenheit.

Abgeschlossenheit: Die $\oplus$–Summe und das $\otimes$–Produkt zweier rationaler Zahlen sind wieder rationale Zahlen, also sind $\oplus$ und $\otimes$ Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}$. Um die Sache etwas zu vereinfachen, schreiben wir das Produkt ein wenig um:

$$a \otimes b = ab - 5a - 5b + 30 = (a-5)(b-5) + 5$$

(1 Punkt)

AG ($\oplus$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c = (a+b-10) \oplus c = a+b-10+c-10 = a+b+c-20 = \\ = a+b+c-10-10 = a \oplus (b+c-10) = a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

(1 Punkt)

KG ($\oplus$): Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a \oplus b = a + b - 10 = b + a - 10 = b \oplus a.$$

($\frac{1}{2}$ Punkt)

Nullelement ($\oplus$): Für das Nullelement $n \in \mathbb{Q}$ muss

$$\forall a \in \mathbb{Q} : a \oplus n = a$$

gelten. Wenn wir einsetzen, erhalten wir $a + n - 10 = a$, also $n = 10$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Inverses ($\oplus$): Sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann muss für das Inverse $\ominus a$ von a die Beziehung

$$a \oplus (\ominus a) = n = 10$$

erfüllt sein. Wenn wir wieder einsetzen, sehen wir

$$a + (\ominus a) - 10 = 10,$$

also $\ominus a = 20 - a$. Jedes Element besitzt also ein Inverses bezüglich $\oplus$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

AG ($\otimes$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c &= \big((a-5)(b-5)+5\big) \otimes c = \big((a-5)(b-5)+5-5\big)(c-5)+5 = \\ &= (a-5)(b-5)(c-5)+5 == (a-5)\big((b-5)(c-5)+5-5\big)+5 = \\ &= a \otimes \big((b-5)(c-5)+5\big) = a \otimes (b \otimes c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\otimes$): Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a \otimes b = (a-5)(b-5)+5 = (b-5)(a-5)+5 = b \otimes a.$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Einselement ($\otimes$): Wenn $e \in \mathbb{Q}$ das Einselement ist, dann muss für alle $n \neq a \in \mathbb{Q}$ die Gleichung

$$a \otimes e = a$$

gelten. Setzen wir ein, so finden wir

$$\begin{aligned}(a-5)(e-5)+5 &= a \\ e &= \tfrac{a-5}{a-5}+5 = 1+5 = 6.\end{aligned}$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Inverses ($\otimes$): Für jedes $n \neq a \in \mathbb{Q}$ muss das Inverse a^{-1} existieren, das

$$a \otimes a^{-1} = e = 6$$

erfüllt. Setzen wir die Definition von $\otimes$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(a-5)(a^{-1}-5)+5 &= 6 \\ a^{-1}-5 &= \frac{1}{a-5} \\ a^{-1} &= \frac{1}{a-5}+5.\end{aligned}$$

Dieses Element ist offensichtlich definiert für alle $a \neq 5$. Das bedeutet aber, dass dieses Axiom für die angegebene Struktur **nicht erfüllt** ist, da $n = 10$ gilt.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

DG ($\oplus$, $\otimes$): Schließlich bleibt noch für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ das Distributivgesetz zu überprüfen:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \otimes c &= (a + b - 10) \otimes c = (a + b - 10 - 5)(c - 5) + 5 = \\ &= \big((a-5) + (b-5)\big)(c-5) + 5 - 5(c-5) \neq (a-5)(c-5) + (b-5)(c-5) = \\ &= \big((a-5)(c-5) + 5\big) + \big((b-5)(c-5) + 5\big) - 10 = \\ &= \big((a-5)(c-5) + 5\big) \oplus \big((b-5)(c-5) + 5\big) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)\end{aligned}$$

Also ist das Distributivgesetz ebenfalls **nicht erfüllt**. Die Struktur $(K, \oplus, \otimes)$ ist also **kein Körper**.
(**1 Punkt**)

Um die gegebene Gleichung zu lösen, setzen wir in die Definition ein und erhalten

$$\begin{aligned}&(x \otimes x) \oplus x = \big((x-5)^2 + 5\big) \oplus x = (x-5)^2 + 5 + x - 10 = 11 \\ &x^2 - 9x + 9 = 0 \\ &x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 9} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5}\end{aligned}$$

Die Gleichung hat also in K keine Lösungen, da $x_{1,2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegen. (**1 Punkt**)

3. (a) Betrachten wir das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(1-3i)x + (2-3i)y &= 10 - 3i \\ (1+5i)x + (3+2i)y &= 7 + 22i.\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit $-i$. Das ergibt

$$\begin{aligned}-(3+i)x - (3+2i)y &= -3 - 10i \\ (1+5i)x + (3+2i)y &= 7 + 22i.\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)
Dann addieren wir die beiden Gleichungen und erhalten

$$(-2+4i)x = 4 + 12i,$$

somit gilt

$$x = \frac{4+12i}{-2+4i} = \frac{(4+12i)(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)} = \frac{40-40i}{(-2)^2 + 4^2} = 2 - 2i.$$

(**1 Punkt**)
Um y zu bestimmen setzen wir ein:

$$y = \frac{10 - 3i - (1-3i)(2-2i)}{2-3i} = \frac{14+5i}{2-3i} = \frac{13+52i}{13} = 1 + 4i.$$

(**1 Punkt**)
Die beiden Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{y}{x}\right| &= \tfrac{|y|}{|x|} = \tfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\tfrac{17}{8}} \\ \overline{x}y &= (2+2i)(1+4i) = -6 + 10i\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

(b) Wenn wir mit drei Würfeln spielen, gibt es die folgenden Möglichkeiten, 11 zu erzielen: $(6,4,1)$, $(6,3,2)$, $(5,5,1)$, $(5,4,2)$, $(5,3,3)$ und $(4,4,3)$.

i. Beachten wir das eben festgestellte, dann können wir die Anzahl der Elemente der Ereignismenge sofort bestimmen, indem wir für jedes der oben aufgezählten Ergebnismuster die Anzahl derjenigen Würfe berechnen, die auf das jeweilige Muster passen:

$$\begin{aligned}(6,4,1): &\quad 3! = 6,\\ (6,3,2): &\quad 3! = 6,\\ (5,5,1): &\quad 3!/2! = 3,\\ (5,4,2): &\quad 3! = 6,\\ (5,3,3): &\quad 3!/2! = 3,\\ (4,4,3): &\quad 3!/2! = 3.\end{aligned}$$

Die Gesamtsumme ergibt die Anzahl der Elemente der Ereignismenge: **27**
(**1 Punkt**)

ii. Die Anzahl der Möglichkeiten bei einem Wurf beträgt $6^3 = 216$, also ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf das Ergebnis 11 zu erzielen: $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$, und daher kann man einfach die Wahrscheinlichkeit bestimmen, *nicht* 11 zu werfen: $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
(**1 Punkt**)

iii. Die gewünschten Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit Hilfe der Binomialverteilung bestimmen:

$$\mathbb{P}(0) = \binom{3}{0}(\tfrac{7}{8})^3(\tfrac{1}{8})^0 \sim 0.67.$$

Die Wahrscheinlichkeit, *nie* 11 zu werfen, beträgt also 67%. Mindestens einmal 11 zu erzielen ist gleichbedeutend mit *nicht nie* 11 erhalten, und daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür 33%.
(**1 Punkt**)

(c) Gehen wir davon aus, dass es Sockenpaare sind und sich die Paare nur durch die Farbe unterscheiden. Dann muss man im ersten Fall mindestens **13** Socken entnehmen. Gibt es 12 rote und 12 blaue Socken, so genügt es **3** Socken aus der Kiste zu nehmen. Ändert sich das Verhältnis von roten und blauen Socken zu $4:20$, so ändert das nichts am Ergebnis von **3** Socken.
(**1 Punkt**)

4. (a) Das Dreieck hat die Eckpunkte $A = (a, \frac{1}{a})$, $B = (b, \frac{1}{b})$ und $C = (c, \frac{1}{c})$. Wir berechnen den Höhenschnittpunkt, indem wir zwei Höhen miteinander schneiden. Höhen stehen normal auf eine Seite und gehen durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. Eine Skizze finden Sie in Abbildung 2.

Wir bestimmen den Verbindungsvektor von A und B:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{(b-a)}{ab}\begin{pmatrix} ab \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ebenso erhalten wir

$$\overrightarrow{AC} = \frac{c-a}{ac}\begin{pmatrix} ac \\ -1 \end{pmatrix}.$$

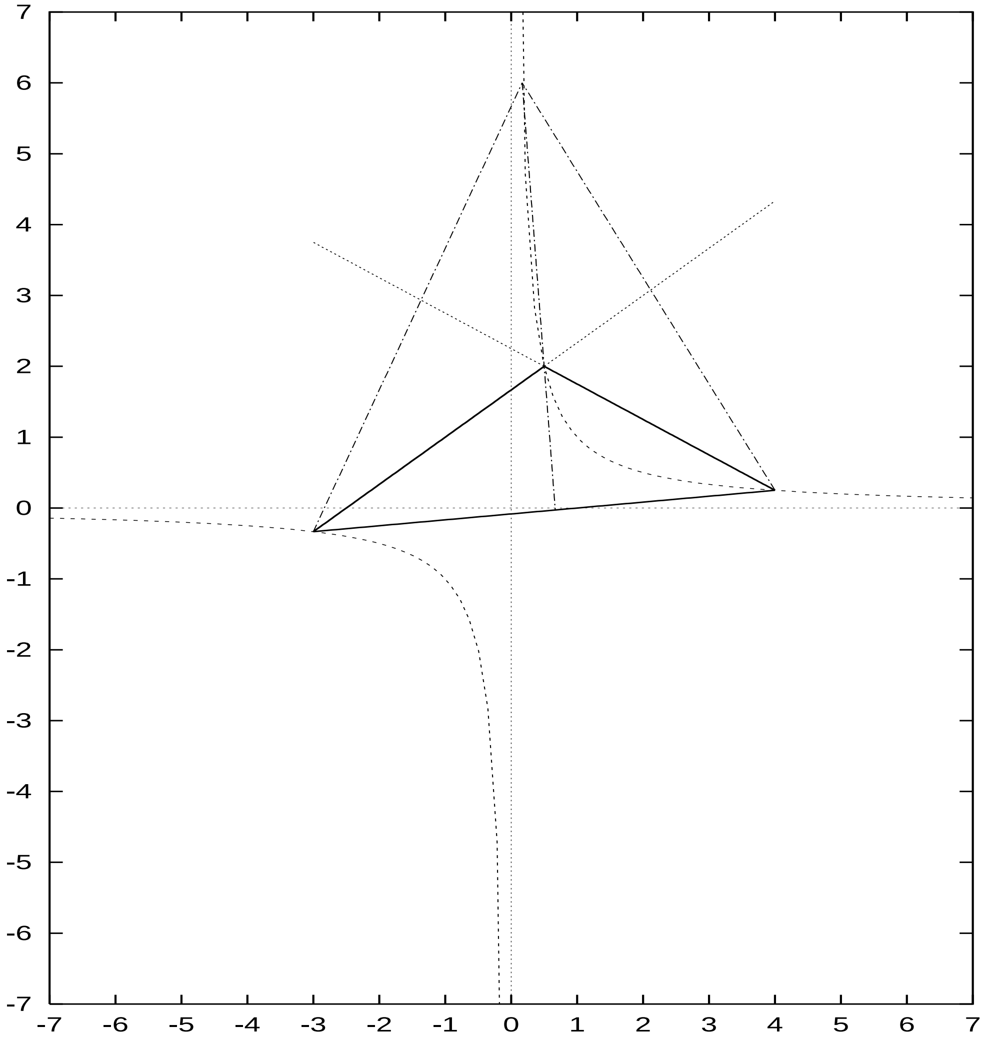

Abbildung 2: Skizze

(**1 Punkt**)
Die Höhe auf die Seite **b** geht durch den Eckpunkt B und steht normal auf $\overline{AC}$, und daher können wir ihre Trägergerade in Normalvektorform einfach bestimmen:

$$t_b: \quad acx - y = ac \cdot b - \tfrac{1}{b},$$

bzw. umgeformt

$$t_b: \quad y + abc = acx + \tfrac{1}{b},$$

und analog erhalten wir

$$t_c: \quad y + abc = abx + \tfrac{1}{c}.$$

(**1 Punkt**)
Nun müssen wir nur noch den Schnittpunkt bestimmen, indem wir gleich setzen:

$$\begin{aligned} acx + \tfrac{1}{b} &= abx + \tfrac{1}{c} \\ a(c-b)x &= \tfrac{1}{c} - \tfrac{1}{b} = \tfrac{b-c}{cb} \\ x &= -\tfrac{1}{abc}. \end{aligned}$$

(**1 Punkt**)
Lösen wir nach y auf, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} y + abc &= ab\left(-\tfrac{1}{abc}\right) + \tfrac{1}{c} = 0 \\ y &= -abc = \tfrac{1}{x}, \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist.
(**1 Punkt**)

(b) Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{1} (k+1)^2 = (1+1)^2 = 4 = \tfrac{1}{6} \cdot 1(2 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 13).$$

Dieser ist also richtig.
(**1 Punkt**)
Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$\sum_{k=1}^{j} (k+1)^2 = \tfrac{1}{6} k(2k^2 + 9k + 13).$$

(**1 Punkt**)
Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 = \tfrac{1}{6}(n+1)\big(2(n+1)^2 + 9(n+1) + 13\big).$$

(**1 Punkt**)
Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 + ((n+1)+1)^2 = \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \tfrac{1}{6} n(2n^2 + 9n + 13) + (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = \\ &= \tfrac{1}{6}\big((n+1)(2n^2 + 9n + 13) - 2n^2 - 9n - 13 + 6(n+1)^2 + 12(n+1) + 6\big) = \\ &= \tfrac{1}{6}\big((n+1)(2n^2 + 9n + 13) + 4(n+1)n + 2(n+1) + 9(n+1)\big) \\ &= \tfrac{1}{6}(n+1)\big(2n^2 + 4n + 2 + 9n + 9 + 13\big) = \\ &= \tfrac{1}{6}(n+1)\big(2(n+1)^2 + 9(n+1) + 13\big), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**1 Punkt**)