

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

Note:

PRÜFUNG ÜBER “EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN” UND DEN
SCHULSTOFF (16.11.2007)

- (1) (*Algebra*)
- (a) Definiere den Begriff *Körper*. (**4 Punkte**)
- (b) Überprüfe, ob die unten definierte algebraische Struktur (K, \oplus, \otimes) ein Unterkörper von \mathbb{R} ist:

$$K := \{a + \sqrt{7}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

mit

$$(a_1 + \sqrt{7}b_1) \oplus (a_2 + \sqrt{7}b_2) := a_1 + a_2 + \sqrt{7}(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + \sqrt{7}b_1) \otimes (a_2 + \sqrt{7}b_2) := a_1a_2 + 7b_1b_2 + \sqrt{7}(a_1b_2 + a_2b_1).$$

- (**5 Punkte**)
- (c) Berechne die folgenden Restklassen: $7 + 12 \pmod{14}$, $11 \cdot 13 \pmod{19}$. (**1 Punkt**)
- (2) (*Kurvendiskussion*) Eine Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$ hat einen Wendepunkt $W = (1, y_W)$ mit der Wendetangente $t_W : 4y - x = 3$. Ermittle die Funktionsgleichung von p .
- (a) Bestimme die Funktionsgleichung von p . (**8 Punkte**)
- (b) Ermittle alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von p und den Flächeninhalt, den p mit der x -Achse einschließt. (**2 Punkte**)
- (3) (a) (*Analytische Geometrie*) Spiegle die Strecke \overline{PQ} mit den Endpunkten $P = (2, 1, 3)$ und $Q = (-1, 1, -3)$ an der Ebene $\varepsilon : 4x - 8y + z = 12$ und berechne die Fläche des entstehenden Vierecks. (**6 Punkte**)
- (b) (*Analytische Geometrie*) Definiere den Begriff *Gerade* im \mathbb{R}^3 . (**1 Punkt**)
- (c) (*Abbildungen*) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ injektive Abbildungen. Beweise, dass dann auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ injektiv ist. (**3 Punkte**)
- (4) (a) (*Induktion*) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt

$$-6 + -1 + 4 + \dots + (5n - 6) = \frac{1}{2}(n + 1)(5n - 12)$$

und schreibe die Behauptung in Summennotation auf (mit dem Σ -Zeichen). (**4 Punkte**)

- (b) (*Logik*) Bestimme die disjunktive Normalform des logischen Ausdrucks $f(a, b, c) = (\neg a \vee b) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (c \vee a)$. (**3 Punkte**)
- (c) (*Mengenlehre*) Formuliere und beweise die Gesetze von De Morgan für Mengen. (**3 Punkte**)