

**Familienname:**  
**Vorname:**  
**Matrikelnummer:**  
**Studienkennzahl:**

1
2
3
4
G

**Note:**

PRÜFUNG ZU „EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN“ (16.11.2012)

- (1) (a) *Algebra* Definieren Sie den Begriff *abelsche Gruppe*, indem Sie die Gruppenaxiome angeben. **(4 Punkte)**  
(b) *Algebra* Überprüfen Sie, welche der Eigenschaften einer Gruppe von der Verknüpfung  $\otimes$  auf  $\mathbb{Q}$  erfüllt werden.

$$a \otimes b := ab - 3a - 3b + 9.$$

**(4 Punkte)**

- (c) *Mengenlehre* Gib die Potenzmenge der Menge  $M = \{A, X, T\}$  an. Wieviele Elemente hat die Potenzmenge einer  $n$ -elementigen Menge? **(2 Punkte)**  
(2) (*Kurvendiskussion*) Eine Polynomfunktion  $p$  zweiten Grades wird von der Geraden  $g: 4y = 8x - 21$  im Punkt  $P = (3|y_P)$  berührt. Der Flächeninhalt unter der Funktion zwischen  $x = 3$  und  $x = 5$  beträgt  $7\frac{1}{2}$  Flächeneinheiten.

(a) Bestimme die Funktionsgleichung von  $p$ . **(8 Punkte)**

(b) Ermittle alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von  $p$  und die Gleichung der Tangente an  $p$  im Punkt  $Q(0|y_Q)$ . **(2 Punkte)**

- (3) (a) (*Analytische Geometrie*) Gegeben sei die Ebene  $\varepsilon: 2x + 8y + 6z = 6$  im  $\mathbb{R}^3$ . Für den Punkt  $P = (4|1|7)$  bestimme:

(i) Die Gleichung der durch  $P$  gehenden Normalen  $n$  auf  $\varepsilon$ .

(ii) Den Schnittpunkt von  $n$  und  $\varepsilon$ .

(iii) Den Abstand von  $P$  und  $\varepsilon$ .

**(5 Punkte)**

(b) (*Abbildungen*) Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Was versteht man unter dem Bild von  $f$ ? Sei weiters  $B \subseteq Y$ . Was versteht man unter dem Urbild von  $B$  unter  $f$ ? Was bedeutet  $f^{-1}(x)$  für  $x \in Y$ ? **(3 Punkte)**

- (4) (a) (*Induktion*) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  gilt und schreiben Sie die linke Seite in Summennotation an:

$$4 + 9 + 14 + \cdots + (5n - 1) = \frac{1}{2}(3n + 5n^2).$$

**(4 Punkte)**

(b) (*Zahlen*) Beweisen Sie, dass jede natürliche Zahl  $n > 1$  eine Zerlegung in Primfaktoren besitzt. **(4 Punkte)**

(c) (*Komplexe Zahlen*) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms

$$z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i$$

und geben Sie sie in der Form  $a + ib$  an. **(4 Punkte)**