Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1	
2	
3	
4	
G	

☐ **A. Čap**
☐ **H. Schichl**

Note:

PRÜFUNG ÜBER „EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN“ UND DEN SCHULSTOFF (8.3.2013)

(1) (a) *(Induktion)* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$

$$\sum_{j=n}^{2n-1} \frac{1}{j} + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k} = 0$$

gilt. (**4 Punkte**)

(b) *(Beweise)* Beweisen Sie, dass für reelle Zahlen x, y

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

gilt. (**2 Punkte**)

(c) *(Komplexe Zahlen)* Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms

$$3z^3 - (9 + 3i)z^2 + (12 + 9i)z$$

und geben Sie die Lösungen in der Form $a + ib$ an. (**4 Punkte**)

(2) (a) *(Analytische Geometrie)* Zeigen Sie, dass die beiden Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{35}{12} \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

einander schneiden. Ihr Schnittpunkt D sei die Spitze eines Tetraeders (einer dreiseitigen Pyramide), dessen Grundfläche das Dreieck ABC bildet, mit $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, 3, 2)$, $C = (-1, 2, 4)$. Berechnen Sie

(i) den Neigungswinkel der Kante BD gegen die Grundfläche ABC (geben Sie den Winkel in der Form $\operatorname{Arcsin} y$ oder $\operatorname{Arccos} y$ oder $\operatorname{Arctan} y$ an, mit geeigneter Winkelfunktion und reeller Zahl y). (**3 Punkte**)

(ii) die Koordinaten des Punktes D', den man durch Spiegelung des Punktes D an der Ebene ABC erhält. (**3 Punkte**)

(iii) das Volumen des Tetraeders. (**1 Punkt**)

(b) *(Abbildungen)* Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, seien $A_1, A_2 \subseteq X$ und $B \subseteq Y$.

(i) Definieren Sie den Begriff *Urbild* von B unter f.

(ii) Beweisen Sie, dass $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

(iii) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt.

(**3 Punkte**)

WEITER AUF DER RÜCKSEITE!

(3) (a) *(Algebra)* Definieren Sie den Begriff *Körper*, indem Sie die Körperaxiome angeben. (**5 Punkte**)

(b) *(Abbildungen)* Definieren Sie die Begriffe *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv*. Beweisen Sie folgende Aussage: Sind f und g Funktionen, sodass die Komposition $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist f injektiv und g surjektiv. (**3 Punkte**)

(c) *(Logik)* Verneinen Sie die Aussage

$$\exists x \in X : \forall a \in A : (a > x \wedge a \leq 4x + 9).$$

(**1 Punkt**)

(d) *(Mengenlehre)* Definieren Sie die Begriffe *Obermenge* und *Vereinigungsmenge*. (**1 Punkt**)

(4) *(Kurvendiskussion)* Gegeben seien die beiden Funktionen f und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad g(x) = \tfrac{15}{64}x^3 + \tfrac{5}{32}x^2 - \tfrac{25}{64}x.$$

Die Graphen beider Funktionen schneiden einander zweimal auf der x–Achse, aber nicht im Ursprung. Im positiven Schnittpunkt schneiden sich die Funktionen rechtwinkelig (d.h. es stehen die Tangenten beider Kurven normal aufeinander).

(a) Bestimmen Sie Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von g. (**3 Punkte**)

(b) Bestimmen Sie Wendepunkte und Wendetangenten von g. (**2 Punkte**)

(c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. (**3 Punkte**)

(d) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\, dx.$$

(**2 Punkte**)