Proseminar zu Optimierung und Variationsrechnung (WS 2004/05)

(1) Sei S eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass S genau dann konvex ist, wenn für alle $\mathbb{N} \ni k \geq 2$ gilt: Für $x_1, \ldots, x_k \in S$ folgt, dass $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in S$, wenn $\lambda_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ gelten.

(2) Seien S_1 und S_2 konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Beweise, dass die Mengen

$$\begin{aligned} -S_1 &:= \{-x \mid x \in S_1\} \\ S_1 + S_2 &:= \{x + y \mid x \in S_1, \quad y \in S_2\} \\ S_1 - S_2 &:= \{x - y \mid x \in S_1, \quad y \in S_2\} \end{aligned}$$

ebenfalls konvex sind.

(3) Beweise, dass für eine beliebige Norm $\| \quad \|$ auf $\mathbb{R}^n$ die Einheitskugel

$$B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

konvex ist.

(4) Gib alle Extremalpunkte der konvexen Menge $B_1(0)$ für die 1-Norm, die 2-Norm und die ∞-Norm an.

(5) Sei $\mathrm{ch}(S)$ die Menge aller konvexen Linearkombinationen von Elementen in S (die konvexe Hülle). Seien S_1 und S_2 nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Beweise, dass

$$\mathrm{ch}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{ch}(S_1) \cap \mathrm{ch}(S_2)$$

gilt. Ist allgemein Gleichheit erfüllt? Wenn nein, gib ein Gegenbeispiel an.

(6) Seien $C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, \quad x_1^2 - x_2 \leq 0\}$ und $z = (1, 0, 2)^T$. Berechne die Minimaldistanz von z zu C und bestimme $\hat{x}$ und die trennende Hyperebene wie im Separationssatz.

(7) Beweise, dass genau eines der folgenden Systeme eine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} &Ax \geq 0, \quad x \geq 0, \quad c^T x > 0, \\ &A^T y \geq c, \quad y \leq 0. \end{aligned}$$

(8) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeige, dass die beiden Systeme

System 1:	$Ax \geq 0$
System 2:	$A^T y = 0, \quad y \geq 0$

Lösungen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ mit der Eigenschaft

$$A\bar{x} + \bar{y} > 0$$

haben.

(9) Man sagt, dass die Hyperebene $H = \{x \mid p^T x = \alpha$ die (nichtleeren) Mengen S_1 und S_2 stark separiert, falls $p^T x \geq \alpha + \varepsilon$ für alle $x \in S_1$ und $p^T x \leq \alpha$ für alle $x \in S_2$ gilt.

Zeige, dass genau dann eine Hyperebene existiert, die zwei nichtleere konvexe Mengen S_1 und S_2 stark separiert, wenn

$$\inf\{\|x_1 - x_2\|_2 \mid x_1 \in S_1, \quad x_2 \in S_2\} > 0$$

gilt.