Proseminar zu Numerische Mathematik 2 (WS 2005/06)

(1) Verwenden Sie die Eigenschaft des Differenzenquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h} = f'(x)$$

um die Ableitung $f'(11.0855384064975)$ für die Funktion

$$f(x) := x \sin x$$

möglichst genau zu approximieren. Untersuchen Sie die dabei auftretenden Effekte und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat, das Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktion erhalten.

(2) Bestimmen Sie möglichst genau die Ableitung $f'(3)$ für die Funktion

$$f(x) = \frac{-\frac{441}{3125}x + x \sin x}{\sqrt{e^{6x} - 7295544.5708\, x^2 - 17x - 17}}.$$

(3) Die Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

sind bekannterweise

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bestimmen Sie die Kondition des Problems abhängig von den Parametern a, b, c. Wo ist die Kondition schlecht, wo ist sie gut?

(4) Wann sind die Berechnungsformeln aus Beispiel 3 stabil, und wann sind sie instabil? Führen Sie im Fall von Instabilitäten algebraische Umformungen durch, um stabilere Lösungsformeln zu erhalten. (Hinweis: untersuchen Sie die Lösungen der Gleichung $x = (1 - \alpha x)^2$)

(5) Beweisen Sie, daß für den Wachstumsfaktor ρ der LR–Zerlegung die Abschätzung $\rho(A) \leq 2^{n-1}$ gilt, wenn $A \in \mathbb{K}^{n\times x}$.

(6) Bestimmen Sie die Konditionszahl κ_1 von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

(7) Bestimmen Sie die Konditionszahl κ_2 von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(8) Bestimmen Sie die Konditionszahl κ_∞ von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(9) Lösen Sie die linearen Gleichungssystem zu den Matrizen aus den Beispielen 6, 7 und 8 und dem Vektor

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(10) Führen Sie eine Fehlerabschätzung durch für die LR–Zerlegungen, die Sie in Beispiel 9 benötigt haben. Verwenden Sie dazu den Satz aus der Vorlesung.

(11) Führen Sie eine Fehlerabschätzung für den Fehler in x durch für die Lösungen aus Beispiel 9. Verwenden Sie dazu ebenfalls den Satz aus der Vorlesung und die geeignete Konditionszahl aus den Beispielen 6, 7 und 8.

(12) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor $\rho(A)$ für je 500 Zufallsmatrizen der Größen 10×10, 20×20, 50×50 und 100×100 und stellen Sie das Ergebnis in einem Diagramm dar.

(13) Wiederholen Sie Beispiel 12 für die Konditionszahl $\kappa_\infty(A)$.

(14) Sei x^* die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{7}x_2 &= \frac{10}{21}, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{29}{280}x_2 &= \frac{99}{280}. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahl der Koeffizientenmatrix für die Zeilensummennorm.

b) Bei Darstellung der Koeffizienten A_{ik} mit drei Stellen hinter dem Dezimalpunkt möge (1) die folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} 0.333x_1 + 0.143x_2 &= 0.477, \\ 0.250x_1 + 0.104x_2 &= 0.353. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Lösung von (2) sei $\tilde{x}$. Berechnen Sie den relativen Fehler $\|x^* - \tilde{x}\|/\|x^*\|$ aus den *exakten* Lösungen x^* und $\tilde{x}$ von (1) bzw. (2).

(15) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0.051 & -0.153 & 0 \\ -0.153 & -0.737 & -0.598 \\ 0 & -0.598 & -0.299 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zu $\tilde{x} := \begin{pmatrix} 4280 \\ 1420 \\ -2850 \end{pmatrix}$ eine Matrix $\tilde{A}$ und einen Vektor $\tilde{b}$ an, sodaß $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ und $|A - \tilde{A}| \leq \varepsilon |A|$, $|b - \tilde{b}| \leq \varepsilon |b|$ mit möglichst kleinem relativen Fehler ε gilt.

(16) Wenn man anstellen der Cholesky–Zerlegung einer hermiteschen positiv definiten Matrix A der Form $A = LL^*$ eine Zerlegung in obere Dreiecksmatrizen macht, erhält man als Ergebnis $A = R^*R$. Gibt es einen Zusammenhang zwischen L und R?

(17) Schreiben Sie ein Matlab Programm, das die Cholesky-Zerlegung einer Matrix A berechnet.