(22) Vergleichen Sie die Definitionen für Q- und R-lineare Konvergenz. Gibt es R-linear konvergente Folgen, die nicht Q-linear konvergieren? Gibt es Q-linear konvergente Folgen, die nicht R-linear konvergieren?

(23) Verwenden Sie Differenzenquotienten und deren Eigenschaft

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h} = f'(x),$$

um die Ableitung $f'(4533414141/111231321)$ für die Funktion

$$f(x) := x \sin x$$

möglichst genau zu approximieren. Untersuchen Sie die dabei auftretenden Effekte und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat, das Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktion erhalten. (Berechnen Sie den Differenzenquotienten für geeignete $h > 0$.)

(24) Vergleichen Sie die Stabilität der beiden angegebenen Methoden, den Ausdruck $(1-x)^3$ zu berechnen:

$$(1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3.$$

Wie ist die Kondition des Problems?

(25) Bestimmen Sie möglichst genau die Ableitung $f'(3)$ für die Funktion

$$f(x) = \frac{-\frac{441}{3125}x + x \sin x}{\sqrt{e^{6x} - 7295544.5708\, x^2 - 17x - 17}}.$$

(26) Seien $n_0 = 1$, $m_0 = 1$. Man definiere rekursiv die Folgen

$$m_{k+1} = m_k + 2n_k, \quad n_{k+1} = m_k + n_k.$$

Man zeige, daß die Folge der Brüche $\left\{\frac{m_k}{n_k}\right\}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Wie schnell konvergiert das Verfahren?

(27) Seien x_0, y_0 zwei Zahlen mit $0 < y_0 < x_0$ und $x_0 y_0 = 2$. Man definiere rekursiv die beiden Folgen

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2}{x_{n+1}}.$$

Man zeige, daß die Folge $\{y_n\}$ monoton wächst und die Folge $\{x_n\}$ monoton fällt, und daß weiters für alle n gilt, daß $\sqrt{2} \in [y_n, x_n]$. Die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ definieren also eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$. Bestimmen Sie die Konvergenzordnung des Iterationsverfahrens, wenn z.B. die Folge $\{x_n\}$ oder die Folge $\{y_n\}$ als Approximation für $\sqrt{2}$ herangezogen wird.

(28) Betrachten Sie das folgende Iterationsverfahren für gegebene positive reelle Zahlen x, w_0 und für $n \geq 2 \in \mathbb{N}$:

$$v_i = x/w_i^{n-1},$$
$$w_{i+1} = \frac{(n-1)w_i + v_i}{n}.$$

(a) Führen Sie mehrere Tests mit verschiedenen Werten von x, w_0 und n durch, um zu erkennen, gegen welchen Wert die Folgen $\{v_k\}$ und $\{w_k\}$ konvergieren. (Hinweis: für $n = 2$ ist das Verfahren analog zu Beispiel 27.)

(b) Beweisen Sie, daß für den Grenzwert s gilt $s \in [v_k, w_k]$ für alle k, und daß die Folgen eine Intervallschachtelung für den Grenzwert bilden.

(c) Führen Sie das Iterationsverfahren für die Werte $x = 4$, $w_0 = 2$, $n = 3, 10, 25, 50, 100$ aus und vergleichen Sie die Ergebnisse. Schließen Sie, für welche Werte von n das Verfahren tatsächlich verwendbar ist.

(29) Vergleichen Sie die Approximationsverfahren für $\sqrt{2}$ aus den Beispielen 26 und 27. Testen Sie, wie viele Folgenglieder benötigt werden, um $\sqrt{2}$ auf 3, 6, 9, 12 Stellen genau zu bestimmen. Wie viele Folgenglieder benötigt man jeweils, um die Genauigkeit auf 100 bzw. 1000 Stellen zu heben?

(30) Die Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

sind bekannterweise

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bestimmen Sie die Kondition des Problems abhängig von den Parametern a, b, c. Wo ist die Kondition schlecht, wo ist sie gut?

(31) Wann sind die Berechnungsformeln aus Beispiel 30 stabil, und wann sind sie instabil? Führen Sie im Fall von Instabilitäten algebraische Umformungen durch, um stabilere Lösungsformeln zu erhalten. (Hinweis: untersuchen Sie die Lösungen der Gleichung $x = (1 - \alpha x)^2$)