

# Übungsaufgaben zu Graphentheorie und diskrete Optimierung

Ilse Fischer

WS 2021/22

1. Zeigen Sie: Enthält ein Graph  $G = (V, E)$  einen Kantenzug, der die Knoten  $a, b$  miteinander verbindet, dann enthält  $G$  auch einen Weg, der  $a$  und  $b$  miteinander verbindet.
2. Wir definieren folgende Relation  $\sim$  auf der Menge der Knoten eines Graphs  $G = (V, E)$ :  $v \sim w$  wenn es einen Kantenzug gibt, der von  $v$  zu  $w$  führt. Zeigen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist.
3. Zeichnen Sie eine Landkarte mit genau 6 Ländern. Fertigen Sie für jedes der 5 beschränkten Länder eine isomorphe Landkarte an, in der das beschränkte Land zum unbeschränkten Land wird.
4. Der  $n$ -dimensionale Würfelgraph  $Q_n$  hat als Knoten alle  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_i = 0$  oder  $1$ , wobei zwei Knoten benachbart sind, wenn sie sich an genau einer Stelle des  $n$ -Tupels unterscheiden. Zeichnen Sie die Graphen  $Q_1$  bis  $Q_4$ . Wieviele Knoten und Kanten hat  $Q_n$ ? Was sind die Knotengrade in  $Q_n$ ? *Freiwillig*: Welche  $Q_n$  besitzen eine planare Zeichnung?
5. Zeigen Sie folgende Äquivalenz: Eine Kante  $e$  ist Brücke  $\Leftrightarrow e$  liegt in keinem Kreis. Ist der Graph planar, so gilt ferner:  $e$  ist Brücke  $\Leftrightarrow e$  begrenzt auf beiden Seiten dasselbe Land.
6. Beweisen Sie die folgende Äquivalenzen:  $G = (V, E)$  ist ein Baum  $\Leftrightarrow G$  ist zusammenhängend mit  $|E| = |V| - 1 \Leftrightarrow$  je zwei Knoten sind durch genau einen Weg verbunden.
7. *Freiwillig*: Angenommen  $\mathcal{L} = (V, E, R)$  ist eine schlingenlose und brückenlose Landkarte, in der jeder Knoten Grad  $d$  hat,  $d \geq 2$ , und jedes Land genau  $f$  Grenzen besitzt,  $f \geq 2$ . Stellen Sie mittels der Eulerschen Polyederformel fest, welche Paare  $(d, f)$  möglich sind, und konstruieren Sie für jedes mögliche Paar eine entsprechende Landkarte.

8. Beweisen Sie einen weiteren Satz von Tait: Eine normale Landkarte ist genau dann 2-färbbar, wenn der Grad jedes Knoten gerade ist.
9. *Freiwillig:* Gegeben seien  $p$  nummerierte Knoten  $v_1, v_2, \dots, v_p$ . Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Bäume  $G$  auf  $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ . Zwei Bäume heißen dabei gleich, wenn sie genau dieselben Kanten besitzen. Für  $p = 3$  gibt es demnach 3 verschiedene Bäume (die alle als Graphen isomorph sind). Zeigen Sie Cayley's Resultat: Auf  $p$  nummerierten Knoten gibt es genau  $p^{p-2}$  verschiedene Bäume. (Hinweis: Induktion.)
10. Wir nennen einen Graphen  $G$  bipartit, falls die Knotenmenge  $V$  in zwei disjunkte Teile  $V_1, V_2$  zerlegt werden kann, sodass alle Kanten einen Endknoten in  $V_1$  und den anderen in  $V_2$  haben: Ist  $|V_1| = m$  und  $|V_2| = n$  und enthält  $G$  alle Kanten zwischen  $V_1$  und  $V_2$ , so heißt  $G$  *vollständig bipartit*, mit der Bezeichnung  $K_{m,n}$ . Z.B. ist  $K_{2,2}$  isomorph zum Kreis der Länge 4. Zeigen Sie:
- $K_{3,3}$  ist nicht planar, entweder direkt aus dem Jordanschen Kurvensatz oder mittels der Eulerschen Polyederformel.
  - $K_{3,3}$  kann kreuzungsfrei in der Torus eingebettet werden.
- (Hinweis: Wenn es nicht anders geht, dann suchen Sie im Internet. Das gilt auch im Folgenden.)
11. Kann man den  $K_5$  und den  $K_{3,3}$  in das Möbius Band einbetten?
12. *Freiwillig:* Beweisen Sie einen weiteren Farbensatz von Heawood: Eine kubische normale ebene Landkarte ist 3-färbbar, dann und nur dann, wenn alle Länder eine gerade Anzahl von Grenzen haben. (Hinweis: Dualisieren!)
13. *Freiwillig:* Zeigen Sie  $\gamma(K_{m,n}) \geq \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rceil$  für alle  $m, n$ . Wie lauten die entsprechende Ungleichung für  $\bar{\gamma}(K_{m,n})$ ? Bestimmen Sie  $\gamma(K_{4,4})$ .
14. Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph in dem jeder Knotengrad gerade ist. Zeigen Sie, dass es einen geschlossenen Kantenzug gibt, in dem jede Kante genau einmal vorkommt.
15. Es sei  $G$  ein Graph ohne Schlinge,  $p$  die Anzahl der Knoten,  $t$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und  $a_0\chi^p + a_1\chi^{p-1} + \dots + a_p$  das chromatische Polynom. Zeigen Sie, dass  $a_i = 0$  für alle  $i > p - t$ , dass  $a_i \neq 0$  für  $i \leq p - t$  und dass  $a_i(-1)^i$  nicht negativ für alle  $i$  ist. Zeigen Sie weiters, dass  $a_0 = 1$  und dass  $-a_1$  die Anzahl der Kanten ist.
16. Der Kreis  $C_n$  ist der Graph mit Knotenmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$  und Kantenmenge  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ . Berechnen Sie das chromatische Polynom von  $C_n$  für alle  $n$ .

17. Das Rad  $W_n$  entsteht aus dem Kreis  $C_n$ , in dem man einen neuen Knoten hinzufügt und mit jedem bestehenden Knoten verbindet. Berechnen Sie das chromatische Polynom von  $W_n$  für alle  $n$ .
18. *Freiwillig:* Berechnen Sie das chromatische Polynom des Petersen Graphen.
19. Zeigen Sie, dass der  $K_{2n}$  stets 1-faktorierbar ist.
20. *Freiwillig:* Zeigen Sie, dass der Petersen Graph keinen Hamiltonkreis besitzt.
21. *Freiwillig:* Ein Graph ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn je zwei Knoten auf einem gemeinsamen Kreis liegen.
22. Die *Kanten-Zusammenhangszahl*  $\lambda(G)$  ist die Minimalanzahl von Kanten, deren Entfernung den Graphen  $G$  trennt, mit der Zusatzdefinition  $\lambda(K_1) = 0$ . Zeigen Sie  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ , wobei  $\delta(G)$  der minimale Grad eines Knotens in  $G$  ist, und konstruieren Sie Beispiele bei denen Gleichheit gilt.
23. Formulieren Sie und beweisen Sie das Kanten-Analogon des Satzes von Menger. (Hinweis: Internet)
24. *Freiwillig:* Zeigen Sie, dass jeder 3-fach zusammenhängende Graph mit mindestens 6 Knoten, der eine Unterteilung von  $K_5$  enthält, auch eine von  $K_{3,3}$  enthält.
25. Es sei  $\Delta(G)$  der maximale Grad eines Knotens in  $G$ . Zeigen Sie, dass dann  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  gelten muss. Finden Sie zudem ein Beispiel  $G$  mit  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  und eines mit  $\chi(G) < \Delta(G) + 1$ .
26. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann 2-färbbar (d.h. bipartit) ist, wenn  $G$  keinen Kreis ungerader Länge enthält.
27. Es sei  $G$  ein Graphen und  $\{w_1, \dots, w_l\}$  eine trennende Knotenmenge, die einen vollständigen Graphen aufspannt.  $G$  zerfällt dann in Teilgraphen  $G_1, \dots, G_t$  mit

$$\bigcap_{i=1}^t V(G_i) = \{w_1, \dots, w_l\}.$$

Zeigen Sie, dass dann  $\chi(G) = \max \chi(G_i)$ . Zeigen Sie weiters anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage nicht stimmen muß, wenn  $\{w_1, \dots, w_l\}$  keinen vollständigen Graphen aufspannen.

28. *Freiwillig:* Es sei  $G$  ein Graph, der mindestens  $2n$  Knoten hat. Zeigen Sie:  $G$  ist  $n$ -fach zusammenhängend genau dann, wenn für zwei disjunkte Knotenmengen  $V_1$  und  $V_2$  mit  $|V_1| = |V_2| = n$  gilt, dass sie durch  $n$  knotendisjunkte Wege (wobei auch Anfangs- und Endpunkte disjunkt sein müssen) verbunden sind. (Hinweis: Satz von Menger)
29. Es sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $p$  Knoten und  $\overline{G}$  das Komplement. Zeigen Sie:

a)  $2\sqrt{p} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq p + 1,$

b)  $p \leq \chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^2.$

Geben Sie Beispiele an für die Gleichheit gilt.

30. Es sei  $G$  ein einfacher Graph mit  $p$  Knoten und  $q$  Kanten. Zeigen Sie:

a)  $q \geq \binom{\chi(G)}{2},$

b) *Freiwillig:*  $\frac{p^2}{p^2-2q} \leq \chi(G) \leq 1 + \sqrt{\frac{2q(p-1)}{p}}.$

Geben Sie Beispiele an für die Gleichheit gilt.

31. Für welche Graphen ist der Kantengraph isomorph zum Graphen selbst?

32. Bestimmen Sie die chromatische Zahl des Hyperwürfels.

33. *Freiwillig:* Ein Graph heißt eindeutig  $n$ -färbbar, falls  $\chi(G) = n$  und jede  $n$ -Färbung dieselbe Partition der Knotenmenge ergibt. Bestimmen Sie die kleinsten eindeutig 3-färbbaren Graphen verschieden von  $K_3$ .

34. *Freiwillig:* Beweisen Sie, dass kein ebener Graph eindeutig 5-färbbar ist.

35. Zeigen Sie, dass  $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n).$

36. Es sei  $G$  ein Graph und  $v_1, \dots, v_n$  eine Knotenaufzählung. Mit  $\mathcal{A}$  bezeichnen wir folgenden Algorithmus, um die Knoten zu färben: *Färbe die Knoten  $v_1, \dots, v_n$  der Reihe nach mit der kleinsten möglichen natürlichen Zahl.* Geben Sie eine Ordnung der Knoten an, sodass man mit diesem Algorithmus genau  $\chi(G)$  Farben benötigt.

37. Zeigen Sie, dass für einen bipartiten Graphen  $G$  stets  $\omega(\overline{G}) = \chi(\overline{G})$  gilt.

38. Es sei  $G$  ein kritischer Graph und  $A \subseteq V$  eine unabhängige Menge von Knoten. Zeigen Sie, dass  $\chi(G \setminus A) = \chi(G) - 1.$

39. *Freiwillig:* Die totale chromatische Zahl  $\chi_t(G)$  ist die Minimalzahl von Farben, die nötig sind, um Knoten *und* Kanten zu färben, so dass benachbarte Knoten, inzidente Kanten und inzidente Knoten-Kanten verschiedene Farben erhalten. Schätzen Sie  $\chi_t(K_p)$  und  $\chi_t(K_{m,n})$  ab.

40. Wir haben einen Graphen  $G$  in Vorlesung angegeben, der  $(U_8)$  widerlegt. Zeigen Sie, dass dieser Graph tatsächlich keine Unterteilung von  $K_8$  enthält.

41. *Freiwillig:* Zeigen Sie, dass der Graph  $G$  aus dem vorigen Beispiel einen Teilgraphen enthält, der zu  $K_9$  kontrahiert werden kann.