Übungsaufgaben zu Graphentheorie und diskrete Optimierung

Ilse Fischer

WS 2016/17

1. Zeigen Sie: Enthält ein Graph $G = (V, E)$ einen Kantenzug, der die Knoten a, b miteinander verbindet, dann enthält G auch einen Weg, der a und b miteinander verbindet.

2. Wir definieren folgende Relation $\sim$ auf der Menge der Knoten eines Graphs $G = (V, E)$: $v \sim w$ wenn es einen Kantenzug gibt, der von v zu w führt. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

3. Zeichnen Sie eine Landkarte mit genau 6 Ländern. Fertigen Sie für jedes der 5 beschränkten Länder eine isomorphe Landkarte an, in der das beschränkte Land zum unbeschränkten Land wird.

4. Der n-dimensionale Würfelgraph Q_n hat als Knoten alle n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i = 0$ oder 1, wobei zwei Knoten benachbart sind, wenn sie sich an genau einer Stelle des n-Tupels unterscheiden. Zeichnen Sie die Graphen Q_1 bis Q_4. Wieviele Knoten und Kanten hat Q_n? Was sind die Knotengrade in Q_n? *Freiwillig:* Welche Q_n besitzen eine planare Zeichnung?

5. Zeigen Sie folgende Äquivalenz: Eine Kante e ist Brücke $\Leftrightarrow$ e liegt in keinem Kreis. Ist der Graph planar, so gilt ferner: e ist Brücke $\Leftrightarrow$ e begrenzt auf beiden Seiten dasselbe Land.

6. Beweisen Sie die folgende Äquivalenzen: $G = (V, E)$ ist ein Baum $\Leftrightarrow$ G is zusammenhängend mit $|E| = |V| - 1$ $\Leftrightarrow$ je zwei Knoten sind durch genau einen Weg verbunden.

7. *Freiwillig:* Angenommen $\mathcal{L} = (V, E, R)$ ist eine schlingenlose und brückenlose Landkarte, in der jeder Knoten Grad d hat, $d \geq 2$, und jedes Land genau f Grenzen besitzt, $f \geq 2$. Stellen Sie mittels der Eulerschen Polyederformel fest, welche Paare (d, f) möglich sind, und konstruieren Sie für jedes mögliche Paar eine entsprechende Landkarte.

8. Beweisen Sie einen weiteren Satz von Tait: Eine normale Landkarte ist genau dann 2-färbbar, wenn der Grad jedes Knoten gerade ist.

9. *Freiwillig:* Gegeben seien p nummerierte Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Bäume G auf $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Zwei Bäume heißen dabei gleich, wenn sie genau dieselben Kanten besitzen. Für $p = 3$ gibt es demnach 3 verschiedene Bäume (die alle als Graphen isomorph sind). Zeigen Sie Cayley's Resultat: Auf p nummerierten Knoten gibt es genau p^{p-2} verschiedene Bäume. (Hinweis: Induktion.)

10. Wir nennen einen Graphen G bipartit, falls die Knotenmenge V in zwei disjunkte Teile V_1, V_2 zerlegt werden kann, sodass alle Kanten einen Endknoten in V_1 und den anderen in V_2 haben: Ist $|V_1| = m$ und $|V_2| = n$ und enthält G alle Kanten zwischen V_1 und V_2, so heißt G *vollständig bipartit*, mit der Bezeichnung $K_{m,n}$. Z.B. ist $K_{2,2}$ isomorph zum Kreis der Länge 4. Zeigen Sie:

    a) $K_{3,3}$ ist nicht planar, entweder direkt aus dem Jordanschen Kurvensatz oder mittels der Eulerschen Polyederformel.

    b) $K_{3,3}$ kann kreuzungsfrei in der Torus eingebettet werden.

    (Hinweis: Wenn es nicht anders geht, dann suchen Sie im Internet. Das gilt auch im Folgenden.)

11. Kann man den K_5 und den $K_{3,3}$ in das Möbius Band einbetten?

12. *Freiwillig:* Beweisen Sie einen weiteren Farbensatz von Heawood: Eine kubische normale ebene Landkarte ist 3-färbbar, dann und nur dann, wenn alle Länder eine gerade Anzahl von Grenzen haben. (Hinweis: Dualisieren!)

13. *Freiwillig:* Zeigen Sie $\gamma(K_{m,n}) \geq \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rceil$ für alle m, n. Wie lauten die entsprechende Ungleichung für $\overline{\gamma}(K_{m,n})$? Bestimmen Sie $\gamma(K_{4,4})$.

14. Es sei G ein zusammenhängender Graph in dem jeder Knotengrad gerade ist. Zeigen Sie, dass es einen geschlossenen Kantenzug gibt, in dem jede Kante genau einmal vorkommt.

15. Es sei G ein Graph ohne Schlinge, p die Anzahl der Knoten, t die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und $a_0\chi^p + a_1\chi^{p-1} + \ldots + a_p$ das chromatische Polynom. Zeigen Sie, dass $a_i = 0$ für alle $i > p - t$, dass $a_i \neq 0$ für $i \leq p - t$ und dass $a_i(-1)^i$ nicht negativ für alle i ist. Zeigen Sie weiters, dass $a_0 = 1$ und dass $-a_1$ die Anzahl der Kanten ist.

16. Der Kreis C_n ist der Graph mit Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$ und Kantenmenge $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$. Berechnen Sie das chromatische Polynom von C_n für alle n.

17. Das Rad W_n entsteht aus dem Kreis C_n, in dem man einen neuen Knoten hinzufügt und mit jedem bestehenden Knoten verbindet. Berechnen Sie das chromatische Polynom von W_n für alle n.

18. *Freiwillig:* Berechnen Sie das chromatische Polynom des Petersen Graphen.

19. Zeigen Sie, dass der K_{2n} stets 1-faktorisierbar ist.

20. *Freiwillig:* Zeigen Sie, dass der Petersen Graph keinen Hamiltonkreis besitzt.

21. *Freiwillig:* Ein Graph ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn je zwei Knoten auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

22. Die *Kanten-Zusammenhangszahl* $\lambda(G)$ ist die Minimalanzahl von Kanten, deren Entfernung den Graphen G trennt, mit der Zusatzdefinition $\lambda(K_1) = 0$. Zeigen Sie $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, wobei $\delta(G)$ der minimale Grad eines Knotens in G ist, und konstruieren Sie Beispiele bei denen Gleichheit gilt.

23. Formulieren Sie und beweisen Sie das Kanten-Analogon des Satzes von Menger. (Hinweis: Internet)

24. *Freiwillig:* Zeigen Sie, dass jeder 3-fach zusammenhängende Graph mit mindestens 6 Knoten, der eine Unterteilung von K_5 enthält, auch eine von $K_{3,3}$ enthält.

25. Es sei $\Delta(G)$ der maximale Grad eines Knotens in G. Zeigen Sie, dass dann $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ gelten muss. Finden Sie zudem ein Beispiel G mit $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ und eines mit $\chi(G) < \Delta(G) + 1$.

26. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann 2-färbbar (d.h. bipartit) ist, wenn G keinen Kreis ungerader Länge enthält.

27. Es sei G ein Graphen und $\{w_1, \ldots, w_l\}$ eine trennende Knotenmenge, die einen vollständigen Graphen aufspannt. G zerfällt dann in Teilgraphen $G_1, \ldots, G_t$ mit
$$\bigcap_{i=1}^{t} V(G_i) = \{w_1, \ldots, w_l\}.$$
Zeigen Sie, dass dann $\chi(G) = \max \chi(G_i)$. Zeigen Sie weiters anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage nicht stimmen muß, wenn $\{w_1, \ldots, w_l\}$ keinen vollständigen Graphen aufspannen.

28. *Freiwillig:* Es sei G ein Graph, der mindestens $2n$ Knoten hat. Zeigen Sie: G is n-fach zusammenhängend genau dann, wenn für zwei disjunkte Knotenmengen V_1 und V_2 mit $|V_1| = |V_2| = n$ gilt, dass sie durch n knotendisjunkte Wege (wobei auch Anfangs- und Endpunkte disjunkt sein müssen) verbunden sind. (Hinweis: Satz von Menger)

29. Es sei G ein einfacher Graph mit p Knoten und $\overline{G}$ das Komplement. Zeigen Sie:

a) $2\sqrt{p} \le \chi(G) + \chi(\overline{G}) \le p + 1$,

b) $p \le \chi(G)\chi(\overline{G}) \le \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$.

Geben Sie Beispiele an für die Gleichheit gilt.

30. Es sei G ein einfacher Graph mit p Knoten und q Kanten. Zeigen Sie:

    a) $q \ge \binom{\chi(G)}{2}$,

    b) *Freiwillig:* $\frac{p^2}{p^2-2q} \le \chi(G) \le 1 + \sqrt{\frac{2q(p-1)}{p}}$.

    Geben Sie Beispiele an für die Gleichheit gilt.

31. Für welche Graphen ist der Kantengraph isomorph zum Graphen selbst?

32. Bestimmen Sie die chromatische Zahl des Hyperwürfels.

33. *Freiwillig:* Ein Graph heißt eindeutig n-färbbar, falls $\chi(G) = n$ und jede n-Färbung dieselbe Partition der Knotenmenge ergibt. Bestimmen Sie die kleinsten eindeutig 3-färbbaren Graphen verschieden von K_3.

34. *Freiwillig:* Beweisen Sie, dass kein ebener Graph eindeutig 5-färbbar ist.

35. Zeigen Sie, dass $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n)$.

36. Es sei G ein Graph und $v_1, \ldots, v_n$ eine Knotenaufzählung. Mit $\mathcal{A}$ bezeichnen wir folgenden Algorithmus, um die Knoten zu färben: *Färbe die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ der Reihe nach mit der kleinsten möglichen natürlichen Zahl.* Geben Sie eine Ordnung der Knoten an, sodass man mit diesem Algorithmus genau $\chi(G)$ Farben benötigt.

37. Zeigen Sie, dass für einen bipartiten Graphen G stets $\omega(\overline{G}) = \chi(\overline{G})$ gilt.

38. Es sei G ein kritischer Graph und $A \subseteq V$ eine unabhängige Menge von Knoten. Zeigen Sie, dass $\chi(G \setminus A) = \chi(G) - 1$.

39. *Freiwillig:* Die totale chromatische Zahl $\chi_t(G)$ ist die Minimalzahl von Farben, die nötig sind, um Knoten *und* Kanten zu färben, so dass benachbarte Knoten, inzidente Kanten und inzidente Knoten-Kanten verschiedene Farben erhalten. Schätzen Sie $\chi_t(K_p)$ und $\chi_t(K_{m,n})$ ab.

40. Wir haben einen Graphen G in Vorlesung angegeben, der (U_8) widerlegt. Zeigen Sie, dass dieser Graph tatsächlich keine Unterteilung von K_8 enthält.

41. *Freiwillig:* Zeigen Sie, dass der Graph G aus dem vorigen Beispiel einen Teilgraphen enthält, der zu K_9 kontrahiert werden kann.