

Übungen zur Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

(Einführung in das mathematische Arbeiten)

Wintersemester 2017

1. Beweisen Sie die folgende Aussage: Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.
2. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen:

$$400, \quad 2049, \quad 279936, \quad 362880.$$

3. Beweisen Sie die folgende Aussage: Es gibt keine ganzen Zahlen m und n , sodass $12m + 15n = 200$.
4. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n (k^3 + k) = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}.$$

5. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$

(b) $n^3 - n$ ist für alle natürlichen Zahlen n durch 6 teilbar.

6. Finden Sie für die beiden Aussagen aus der vorigen Aufgabe jeweils eine alternative Beweismethode und zeigen Sie damit die Aussagen.

7. Zeigen Sie durch vollständige Induktion $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ für $n \geq 2$.

8. Zeigen Sie durch vollständige Induktion $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ für $n \geq 0$.

9. Finden Sie eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage $A(n)$ (zum Beispiel eine Gleichung), die folgendes erfüllt: Man kann zeigen, dass aus der Gültigkeit von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt, aber dennoch ist $A(n)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ richtig.

10. Es seien p, s wahre Aussagen, q, r hingegen falsche Aussagen. Bestimmen Sie den Wahrheitswert von

(a) $(p \vee r) \wedge ((r \wedge s) \vee p)$,

(b) $\neg(p \vee q) \vee (\neg s \wedge \neg r)$.

11. Beweisen Sie die Distributivgesetze für \wedge and \vee mit einer Wahrheitstafel.

12. Bilden Sie die Verneinungen der folgenden Aussagen.

- (a) Alle Rosen sind geruchlos oder haben Stacheln.
- (b) Alle Rosen sind entweder geruchlos oder haben Stacheln.
- (c) $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$.
- (d) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x + y = 1$.

Welche Aussagen sind richtig?

13. Es seien G_1, G_2 Geraden. Was bedeutet die Aussage

$$(\exists x : x \in G_1 \wedge x \in G_2) \Rightarrow \neg(G_1 \text{ parallel zu } G_2)$$

in Worten? Wie lautet der äquivalente Umkehrschluss als logische Formel und in Worten.

14. Es seien A, B zwei beliebige Mengen. Zeigen Sie:

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B = B \wedge A \cap B = A)$$

15. Man bestimme die symmetrische Mengendifferenz

$$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \Delta \{2^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

16. Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und \approx eine Äquivalenzrelation auf Y . Zeigen Sie, dass

$$x \sim x' :\Leftrightarrow f(x) \approx f(x')$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

17. Es seien (A, \leq) and (B, \preceq) zwei geordnete Mengen. Zeigen Sie, dass auf $A \times B$ durch

$$(a, b) \preceq (a', b') :\Leftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \preceq b')$$

eine Ordnungsrelation definiert ist.

18. Wir betrachten die Menge aller Punkte auf dem Einheitskreis in der Ebene. Für zwei Punkte P, Q setzen wir $P \preceq Q$ falls der Kreisbogen von P nach Q gegen den Uhrzeigersinn kürzer als der im Uhrzeigersinn ist. Definiert das eine Ordnungsrelation?

19. Zeigen Sie, dass alle Teilmengen der Gestalt $m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$ versehen mit der Addition Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind.

20. Bestimmen Sie die Gruppentafel von $(\mathbb{Z}_6, +)$ und alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_6, +)$.

21. Es sei \mathcal{S}_n die Menge aller bijektiven Abbildungen (= Permutationen) der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ in sich und für $\phi, \psi \in \mathcal{S}_n$ bezeichne $\phi \circ \psi$ die Hintereinanderausführung dieser beiden Permutationen. Zeigen Sie, dass (\mathcal{S}_n, \circ) eine Gruppe bildet. Geben Sie die Gruppentafel von \mathcal{S}_3 an.
22. Bilden Sie die Gruppentafel von $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$. Welche additive Gruppe hat dieselbe Gruppentafel? Geben Sie einen Gruppenisomorphismus zwischen den beiden Gruppen an.
23. Berechnen Sie 7^{100} modulo 20 und lösen Sie die Gleichung $x^2 = -3$ in \mathbb{Z}_5 bzw. in \mathbb{Z}_7 .
24. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ mit der geerbten Addition und Multiplikation einen Teilring von \mathbb{C} bildet, die sogenannten Gauss'schen ganzen Zahlen. Versuchen Sie die invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}[i]$ zu bestimmen.
25. Auf \mathbb{R} ist eine Verknüpfung \otimes definiert durch

$$a \otimes b := ab - 4.$$

Ist (\mathbb{R}, \otimes) eine Halbgruppe?

26. Es seien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Dann nennt man das rechteckige Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

eine reelle 2×2 -Matrix und die Menge aller reellen 2×2 -Matrizen wird mit $M_2(\mathbb{R})$ bezeichnet. Man zeige, dass die durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

definierte Matrixmultiplikation assoziativ ist.

27. Man finde ein neutrales Element für $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ und eine 2×2 -Matrix deren Einträge nicht alle Null sind und für die es kein inverses Element gibt.
28. Ist $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ nullteilerfrei?
29. Man zeige, dass die Menge aller Kongruenzabbildungen, die ein Rechteck in der Ebene (das kein Quadrat ist) auf sich selbst abbilden, eine Gruppe ist. (Kongruenzabbildungen sind Drehungen, Spiegelungen und Translationen sowie deren Zusammensetzung.) Man bestimme auch alle Untergruppen dieser Gruppe.
30. Auf \mathbb{R} definieren wir die Verknüpfungen

$$a \oplus b = a + b - 3,$$

$$a \otimes b = ab - 3a - 3b + 12.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist. Geben Sie einen Körperisomorphismus von $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ nach $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ an.

31. Zeigen Sie, dass in geordneten Körpern stets

$$0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1} \text{ und } x^2 > 0$$

gilt. Folgern Sie aus zweiterem, dass \mathbb{C} kein geordneter Körper ist. Gibt es auf \mathbb{C} dennoch eine Totalordnung?

32. Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$i x^2 - (2 + i)x - 1 + 3i = 0$$

und die Nullstellen des quadratischen Polynoms

$$p(z) = z^2 + (5 - 5i)z - 13i.$$