II. Trigonometrie

56. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit der Seite $\overline{AB}$. Mit Hilfe des Sinussatzes zeige man $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. Hinweis: Es gilt $\sin\varphi = \sin(180^0 - \varphi)$.

57. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und M und N Punkte auf der Seite $\overline{AB}$, sodass die Winkel $\angle ACM$ und $\angle BCN$ gleich sind. Mit Hilfe des Sinussatzes zeige man $\frac{AM \cdot AN}{BM \cdot BN} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2}$.

58. Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$. Hinweis: Cosinussatz, Schur-Ungleichung.

59. Für ein beliebiges Dreieck zeige man $F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

60. Man bestimme den Winkel zwischen der Diagonale und einer Kante eines Würfels.

61. Man bestimme den Winkel zwischen zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders.

62. In einem Dreieck gelte $\alpha = 2\beta$. Man zeige, dass dann auch $a^2 = b^2 + bc$ gilt. Hinweis: Alle drei Winkel lassen sich durch β ausdrücken. Der Sinussatz liefert zwei Gleichungen, aus denen man β eliminiert. ($\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$, $\sin 3\beta = 3\sin\beta\cos^2\beta - \sin^3\beta$)

63. Für ein beliebiges Dreieck gilt $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$. Weitere Formeln erhält man durch zyklisches Vertauschen. Hinweis: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ und $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, dann Cosinussatz.

64. In jedem Dreieck gilt $s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ und $s - a = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Hinweis: $r = \frac{abc}{4F}$, voriges Beispiel, Heronsche Flächenformel.

65. Für ein beliebiges Dreieck zeige man $\varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

66. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Seitenlängen a, b und c. Sei s_c die Länge der Schwerlinie durch den Eckpunkt C. Man zeige mit Hilfe von Stewarts Formel, dass $s_c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ gilt.

67. Seien a und b die Längen der Seiten und e und f die Längen der Diagonalen eines Parallelogramms. Man zeige $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$. Hinweis: Man berechne e und f mit Hilfe des Cosinussatzes. Es gilt $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.

68. Sei $ABCD$ ein Viereck. Man zeige, dass die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$ gilt. Hinweis: Durch viermaliges Anwenden des Cosinussatzes zeige man $|AB|^2 + |CD|^2 - |BC|^2 - |DA|^2 = \pm 2|AC| \cdot |BD| \cos\varphi$, wobei φ ein Winkel ist, den die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ einschließen ($\cos(180^0 - \varphi) = -\cos\varphi$).

Komplexe Zahlen, Eulerformel, Geometrie mit komplexen Zahlen

69. Man berechne $\sqrt{2 + i2\sqrt{3}}$.

70. Man schreibe als Summe: $\cos^2\alpha\sin\alpha$, $\sin^3\alpha\cos 2\alpha$.

71. Man schreibe $\sin^4\alpha$ als Summe.

72. Für die Winkel eines Dreiecks gilt $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

73. Über den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eines Dreiecks $\triangle ABC$ errichten wir nach außen die Quadrate ACC_1A_1 und BB_2C_2C. (Die über C liegenden Punkte sind C_1 und C_2.) Die Mittelpunkte dieser Quadrate seien M_1 und M_2. Sei D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und E der der Strecke $\overline{C_1C_2}$. Man zeige, dass das Viereck DM_2EM_1 ein Quadrat ist. (Finsler-Hadwiger)

74. Über jeder Seite eines konvexen Vierecks wird ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel 45^0 errichtet. Je zwei gegenüberliegende Spitzen dieser Dreiecke verbinden wir durch eine Strecke. Diese beiden Strecken sind gleich lang und stehen senkrecht aufeinander. (Satz von Aubel)