MATHEMATIK UND MUSIK?[1]

Persönliche Ansichten zu einer schwierigen Beziehung

CHRISTIAN KRATTENTHALER[2]

Präambel

⟨ Robert Schumann (1810 – 1856): „*Aveu*“ aus Carnaval op. 9 ⟩ [3]

Mathematik und Musik — Betonung auf „UND“ — Fragezeichen, das ist unser heutiges Thema. Um hier einen Einstieg zu bieten: Wenn ich in ein Gespräch verwickelt bin, und mein Gesprächspartner herausfindet, daß ich einerseits Professor für Mathematik an der Universität Wien bin und andererseits einmal in einem früheren Leben Konzertpianist war, dann passiert es mir oft, daß mein Gegenüber spontan ausruft:

„Mathematik und Musik, das liegt ja ganz nahe beieinander!“

Ich pflege darauf zu antworten:

„Ist das wirklich so?“

Was will ich damit sagen? Um ehrlich zu sein: Ich hatte immer schon große Schwierigkeiten beim Thema „Mathematik UND Musik“, nämlich wenn man Mathematik und Musik zusammenbringt, in Verbindung setzt, oder auch nur nach Verbindungen sucht. Ja, es stimmt, Töne und Intervalle gehorchen auf Grund von physikalischen Gesetzen strengen mathematischen Regeln; aber ist das jetzt eine Verbindung zwischen Mathematik und Musik? Ja, es stimmt auch, daß Johann Sebastian Bach häufig Zahlen in

[1]Dies ist die (etwas erweiterte) Niederschrift eines Vortrages, den der Autor am 16. Mai 2013 im `math.space` im Museumsquartier in Wien gehalten hat. Da die eigenhändig am Klavier ausgeführten Stücke auf bedrucktem Papier nicht wiederzugeben sind, gibt der Autor für jedes dieser Stücke einen Hörhinweis.

[2]Ich bedanke mich zutiefst bei Theresia Eisenkölbl, die die Computerpräsentation für diesen Vortrag angefertigt hat, von der einige Teile in diesen Artikel Eingang gefunden haben. Großer Dank gilt außerdem Reinhard Winkler, für eine sorgfältige Lektüre einer ersten Version und für zahlreiche Korrekturen und einsichtsvolle Anregungen.

[3]Ich habe nichts, was mich wirklich überzeugt, auf YouTube gefunden. Tal-Haim Samnons Darstellung (`http://www.youtube.com/watch?v=EN2gUDaHqvo`) trifft den Charakter, ist aber stellenweise doch ein wenig zu gedehnt.

seine Kompositionen gewoben hat.[4] Aber ist das jetzt Mathematik? Es stimmt ebenfalls, daß Kompositionen oft sehr komplex gebaut sind, komplizierte Formen aufweisen. Aber ist das jetzt Mathematik in der Musik? Wenn umgekehrt Mathematik — ich meine hier Struktur — in der Musik das Übergewicht bekommt, wie etwa in der Seriellen Musik, wo ja alle Parameter — also Tonhöhe, Rhythmus, Lautstärke, u.s.w. — strengen Regeln unterworfen werden, ist das dann noch Musik?

Um es ohne Umschweife zu bekennen: Ich kann keine direkten, substantiellen Verbindungen zwischen Mathematik und Musik erkennen. Insbesondere habe ich noch nie verstanden, was Mathematik etwa mit jener berührenden Liebeserklärung[5] Robert Schumanns — vermutlich an seine geliebte Clara —, die ich eingangs gespielt habe, zu tun haben soll. Wenn Sie also gekommen sind, um meine Antwort auf die Titelfrage zu hören: Hier ist sie! Sie könnten dann getrost nach Hause gehen. Das wäre natürlich erstens zu billig, und zweitens hätten wir dann noch nicht eine zweite Frage beantwortet.

Lassen Sie mich ein wenig ausholen. Vor nicht allzu langer Zeit sprach ein prominenter Besucher zum Dekan der Fakultät für Mathematik der Universität Wien:

"I hear that you are chairing a department of pianists!"

Was wollte der Besucher damit sagen? Wenn man sich die Mitglieder der Fakultät für Mathematik — der ich auch angehöre — ansieht, dann ist es in der Tat bemerkenswert, wie viele davon begeisterte Pianisten sind. (Der Dekan ist im Übrigen einer davon.) Darüberhinaus gibt es andere, die andere Instrumente spielen, es gibt solche, die passionierte Chorsänger sind, und es gibt weitere, die zwar kein Instrument spielen oder singen, aber dafür begeisterte Opern- und Konzertbesucher sind. Kurzum, der Anteil der Mitglieder der Fakultät, die eine große Affinität zu Musik haben, ist überproportional hoch. Dasselbe gilt, wenn man andere Mathematikinstitute ansieht. Reinhard Winkler etwa, der Organisator dieser Vortragsreihe, arbeitet an der TU Wien, und er ist ebenfalls ein passionierter Klavierspieler.

Umgekehrt ist es auch überraschend zu sehen, wie viele Musiker auch eine Affinität zur Mathematik haben. Prominentestes Beispiel dafür ist sicher der blutjunge Pianist und Komponist Kit Armstrong, der bekanntlich Schüler von Alfred Brendel in London war, und der so nebenher auch ein Mathematikstudium an der Université "Pierre et Marie Curie" in Paris absolviert hat. Die Frage, die sich hier also stellt, ist:

> *„Wieso gibt es so viele Mathematiker, die auch eine starke Affinität zur Musik haben, und wieso gibt es so viele Musiker, die auch eine starke Affinität zur Mathematik haben?"*

[4]Es ist etwa gut belegt (siehe etwa: Ludwig Prautzsch, *Die verborgene Symbolsprache Johann Sebastian Bachs*, Band 1: Zeichen- und Zahlenalphabet der kirchenmusikalischen Werke. Merseburger, Kassel 2004), daß Bach in seinen Passionen Nummern von Psalmversen an den Stellen, wo diese vorgetragen werden, hineingearbeitet hat. Das bleibt aber einem Hörer verborgen, denn das läßt sich nicht „heraushören"; das läßt sich nur durch intensives Partiturstudium nachweisen. Dies ist also gewissermaßen eine „Fleißaufgabe", die Bach sich hier auferlegt hat.

Die Zahl, die in Bachs Werk die größte Rolle spielt, ist die Zahl 14. Sie ist gewissermaßen Bachs Signatur (so wie Maler ihre Bilder signieren). Die Zahl 14 ist nämlich die Summe der Stellen, die die Buchstaben B, A, C und H im Alphabet einnehmen, also $2 + 1 + 3 + 8 = 14$. So ist etwa die Anzahl der Nummern im „Musikalischen Opfer" gerade 14 (so man richtig zählt: einer der Kanons läßt sich auf zwei verschiedene Arten ausführen).

[5]„Liebeserklärung", das ist die Bedeutung des französischen Wortes "aveu".

Auf einer oberflächlichen Ebene können wir diese Frage auch so formulieren:

> *„Wie stellen wir uns den typischen Mathematiker — also den typischen scharfen Denker, Intellektuellen — vor?“*

Ich würde sagen, daß die Portraits in Abbildung 1 das vorzüglich treffen. Sie geben mir doch recht, oder? Wir können die Gegenprobe machen:

> *„Wie stellen wir uns den typischen Musiker — also den typischen sensiblen Künstler — vor?“*

So wie die Portraits in Abbildung 2, nicht wahr?

Für diejenigen, denen die Namen „Wiles“ und „Perelman“ nicht so geläufig sein sollten, sollte ich vielleicht erklären: Andrew Wiles, britischer Mathematiker, ist berühmt dafür, daß er ein 300 Jahre altes Problem, das unter dem Namen „Großer Fermatscher Satz“ bekannt ist, gelöst hat. Wir werden gleich noch mehr darüber hören. Auf der anderen Seite ist Grigori Perelman, russischer — sehr exzentrischer — Mathematiker, berühmt dafür, daß er eine 100 Jahre alte Vermutung von Henri Poincaré über vierdimensionale Geometrie bewiesen hat.

Bevor wir an die Beantwortung der obigen Frage schreiten, sollten wir vielleicht zuerst genau festmachen, worüber wir eigentlich reden. Ich bin ja Mathematiker, und in der Mathematik müssen alle Dinge zuerst genau definiert werden, bevor man darüber reden kann. Was also ist die Definition von Mathematik, was ist die Definition von Musik?

Musik ist ... entsteht ... kommt zustande, wenn Töne erklingen ... wenn Töne und Geräusche — Geräusche darf ich nicht vergessen! — wenn also Töne und Geräusche erklingen, und im Zusammenklang ...

Ich sehe schon, das wird nichts. Machen wir doch etwas Leichteres! Mathematik — das ist doch simpel: Mathematik ist ... Rechenkunst. Mathematik beschäftigt sich mit Zahlen, ... geometrischen Objekten, ... abstrakteren Objekten — wie etwa Verknüpfungsgebilden und dergleichen — und ...

Nein, so geht das nicht!

Eigentlich ist es völlig idiotisch, was ich hier tue. Heutzutage zerbricht man sich nicht mehr selbst den Kopf, heutzutage gibt es Wikipedia! Was sagt also Wikipedia zu Musik?[6]

> *Musik ist eine organisierte Form von Schallereignissen. Zu ihrer Erzeugung wird akustisches Material — Töne und Geräusche innerhalb des für den Menschen hörbaren Bereichs — [...] vom Menschen geordnet.*

Na ja. Ich würde sagen: Nicht ganz falsch ... Aber überzeugend ist das nicht.

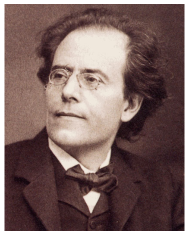
Was meint Wikipedia zu Mathematik?[7]

> *Mathematik ist das abstrakte Studium von Themen, die Größe, Struktur, Raum, Veränderung und andere Eigenschaften umfassen.*

Ist *das* wirklich Mathematik?

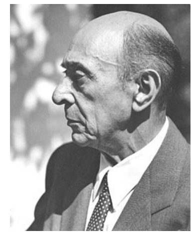
[6] `http://de.wikipedia.org`, Stand 16. Mai 2013.

[7] `http://en.wikipedia.org`, auf Deutsch übersetzt; Stand 16. Mai 2013.



Gustav
Mahler

Dmitri
Schostakowitsch



Arnold
Schönberg

Abbildung 1

Was will ich mit dieser einigermaßen tolpatschigen Übung beweisen? Es ist selbstverständlich unmöglich, genau zu sagen, genau zu definieren, was Musik ist, und ebenso unmöglich ist es, genau zu definieren, was Mathematik ist (auch wenn das für Mathematiklaien ein wenig komisch anmuten mag). Gut so!

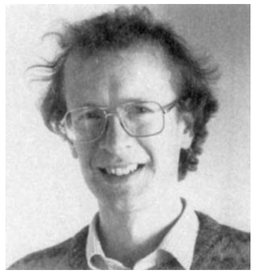
Trotzdem kann ich genau sagen, was ich meine, wenn ich hier von Musik, wenn ich hier von Mathematik spreche. Wenn ich hier von Musik spreche, dann meine ich die *Kunstform* Musik; Kunst will etwas ausdrücken, Musik will durch Töne und Geräusche etwas an den Zuhörer übermitteln, etwas an das Publikum weitergeben. Um das ganz klar festzumachen: Wenn ich ein paar Tasten am Klavier zufällig drücke und vielleicht dann den Klavierdeckel zuknalle, dann waren das ein paar Töne und ein Geräusch. Das war *keine* Musik; das hat nichts ausgesagt, und das wollte auch nichts aussagen.

Wenn ich hier von Mathematik spreche, dann meine ich die *Wissenschaft* Mathematik; es geht also darum, Neues zu entdecken, mathematische Probleme zu lösen, mathematische Phänomene zu untersuchen, und die Struktur und Zusammenhänge dahinter zu ergründen. Um auch das ganz klar festzumachen: Was wir in Abbildung 3 sehen, das sind Zahlen und ein paar Symbole, das ist *keine* Mathematik.

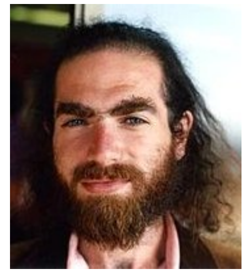
Ich kann jetzt genau erklären, was meine Schwierigkeiten beim Thema „Mathematik UND Musik" sind. Wenn Bach Zahlen in seine Kompositionen einarbeitet, dann sind das Zahlen, keine Mathematik. Außerdem tun diese Zahlen nichts für die Aussage des Werkes, wie sie an das Publikum transportiert wird. Wenn Kompositionen komplexe Formen aufweisen, dann ist das aus der Sicht der Wissenschaft Mathematik entweder banal oder überhaupt uninteressant. Wenn die Mathematik — Struktur — in der Musik Überhand gewinnt — wenn wir also im Extremfall einen Computer programmieren, damit er Töne produziert („komponiert"), und dann gespannt warten, was da herauskommen wird, dann werden *Töne* herauskommen, *keine Musik*. Das wird *nichts aussagen*. Was die Musik für die Mathematik tun soll, ist sowieso vollkommen unklar[8].

[8]wenn man davon absieht, daß die Rekonstruktion und Analyse von Tondokumenten sehr interessante und herausfordernde mathematische Probleme stellt, siehe etwa: A. Boggess und F. Narcowich, *A first course in wavelets with Fourier analysis*, zweite Auflage, John Wiley & Sons, Inc., 2009. Aber auch hier handelt es sich um keine echte substantielle Beziehung oder Verbindung zwischen Mathematik und Musik: Die Substanz liegt hier zur Gänze auf der Seite der Mathematik, die Musik *als Kunstform* wird hier nicht tangiert.

Man könnte in diesem Zusammenhang auch daran denken, daß es einige Kolleginnen und Kollegen gibt, die scheinbar bessere Einfälle haben, wenn sie nebenbei Musik laufen lassen. Ich gehöre nicht zu jenen: Schlechte Musik ärgert mich, und gute Musik — die zieht mich in ihren Bann, da muß ich zuhören, da kann ich nicht gleichzeitig über Mathematik nachdenken. In jedem Fall ist das doch ein



Andrew Wiles



Grigori Perelman

Abbildung 2

$$1 \quad \sqrt{2} \quad 12 \quad 8 \quad \oint$$

$$5 \sum k^2 \qquad 16\% \qquad 0.123456789\ldots \qquad \frac{3}{14}$$

$$8 \qquad \pi \qquad \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$27 \qquad 175560 \qquad \frac{2}{7} \qquad 52954$$

$$20.5 \qquad \mathrm{e} \quad 14 \qquad 99.999\ldots$$

Abbildung 3

Ich betrachte also nicht die Frage nach Verbindungen zwischen Mathematik und Musik als die interessante Frage, sondern jene zweite Frage:

> *„Wieso gibt es so viele Mathematiker, die auch eine starke Affinität zur Musik haben, und wieso gibt es so viele Musiker, die auch eine starke Affinität zur Mathematik haben?“*

Um es gleich vorweg zu nehmen, die These, die ich hier vertreten werde ist: Beides,

Mathematik UND Musik sind etwas für Herz UND Hirn.

Vielleicht ist es ja so, daß es in unserem Hirn eine Region gibt, die besonders resoniert — anspricht —, wenn Emotion und Verstand zusammenkommen, eine Symbiose eingehen. Vielleicht liefert das die Erklärung für das Phänomen, das durch die obige

---

wenig weit her geholt ...

Am nächsten zu einer echten Verbindung von Mathematik und Musik kommen die Forschungen Gerhard Widmers (auch wenn seine Arbeit mehr der Künstlichen Intelligenz zuzurechnen ist; siehe `http://www.cp.jku.at/people/widmer/`), der etwa unter Zuhilfenahme von mathematischen Modellen interpretatorische Eigenarten von Pianisten untersucht oder auch versucht, Computern beizubringen, Notentexte agogisch — das heißt: im Ablauf — „richtig“ — auf einem Klavier wiederzugegeben. Er ist sich aber selbst der Grenzen solcher Untersuchungen und Experimente bewußt, wenn auch heute nicht klar ist, wo genau diese liegen.

Frage angesprochen wird. Ich werde im Folgenden versuchen, diese These mit Substanz zu füllen.

Herz in der Musik

Sie werden sagen: „Das ist ja wie Eulen nach Athen tragen! Selbstverständlich spielt Emotion eine enorm wichtige Rolle in der Musik.“ Sie haben natürlich Recht. Ich möchte trotzdem einige Worte darüber verlieren, weil das erstens doch sehr viele verschiedene Facetten haben kann, und zweitens gibt mir das die Gelegenheit, ein wenig Klavier zu spielen ...

Sie erinnern sich: Musik will etwas ausdrücken, will etwas an das Publikum übermitteln. Das können sehr viele verschiedene Dinge sein. Musik kann etwa einfach gute Laune verströmen ...

⟨ Scott Joplin (1867/1868? – 1917): *Maple Leaf Rag* (Beginn) ⟩ [9]

oder auch schlechte Laune ...

⟨ Robert Schumann (1810 – 1856):
Pantalon et Colombine (Beginn) aus Carnaval op. 9 ⟩ [10]

Musik kann todtraurig sein ...

⟨ Franz Schubert (1797 – 1828):
Andantino (Beginn) aus der Sonate in A-Dur, D 959 ⟩ [11]

oder himmelhochjauchzend ...

⟨ Franz Schubert (1797 – 1828): *Impromptu As-Dur, D 899, Nr. 4* (Schluß) ⟩ [12]

Musik kann Eleganz ausstrahlen, und was kann das besser als ein Walzer von Chopin?

⟨ Frédéric Chopin (1810 – 1849):
Grande Valse Brillante Es-Dur, op. 18 (Beginn) ⟩ [13]

Wir kommen zu *Humor in der Musik*. Das ist für sich ein abendfüllendes Thema. Der Großmeister des Humors in der Musik war ohne Zweifel Joseph Haydn. Sie kennen alle seinen berühmtesten Scherz: jenen Orchesterschlag in der — wie wir auf Deutsch sagen — „Symphonie mit dem Paukenschlag“, oder — wie die Englischsprachigen ein wenig treffender sagen: der “Surprise Symphony”, der „Überraschungssymphonie“. Da ist es ja so, daß der zweite Satz mit dem banalsten Thema, das man sich überhaupt vorstellen kann, anhebt, und dieses Thema zu allem Überfluß auch noch wiederholt wird!

[9] Unbedingt hörenswert ist die Pianola Roll Aufnahme, die Scott Joplin selbst eingespielt hat: `http://www.youtube.com/watch?v=pMAtL7n_-rc`.

[10] Arturo Benedetti Michelangeli weiß ein zankendes Paar (das sich dann auch gleich wieder versöhnt, um gleich wieder zu zanken, usw.) ganz vortrefflich darzustellen: `http://www.youtube.com/watch?v=LgpDYQcmZB4`.

[11] Das „Maß aller Dinge“ bei Franz Schuberts Klavierwerken ist ohne Zweifel Alfred Brendel: `http://www.youtube.com/watch?v=Il6-lZYDpqY`.

[12] Alfred Brendel: `http://www.youtube.com/watch?v=V0z7mUV5rSc`.

[13] Unnachahmlich in seinem eleganten, natürlichen Spiel ist Arthur Rubinstein: `http://www.youtube.com/watch?v=laSh3D_77ZM`, auch wenn er wohl “brillante” nicht so ganz wörtlich nimmt ...

Es ist dann schon verständlich, daß man an dieser Stelle ein wenig einnickt, ehe das Orchester plötzlich für einen Akkord völlig unmotiviert losbrüllt (die Pauke wird dabei auch betätigt ...). Wir sind ja heutzutage einiges gewöhnt, damals war die Wirkung sicher ganz kolossal ... Ich möchte hier auf ein kleines Detail aufmerksam machen, das auf den ersten Blick nicht so offensichtlich ist. Joseph Haydn ist ja im tiefsten Niederösterreich aufgewachsen, war anschließend in Wien und im Burgenland. Bei diesem Scherz handelt es sich aber[14] um typisch *britischen* Humor: Er wird "with a straight face" — also ohne die Miene zu verziehen — vorgetragen. Nach jenem Orchesterschlag wartet man ja ständig nervös darauf, daß sich dieser im weiteren Verlauf des Satzes irgendwie niederschlägt (etwa in Form weiterer Schockeffekte ...). Aber nein: Nichts dergleichen passiert, die Musik läuft weiter, als wäre nichts geschehen ...

Normalerweise ist der Humor in der Musik allerdings von feinerer Natur. In der Regel werden die Erwartungen des Hörers in die Irre geleitet und so humoristische Effekte erzeugt. Ein hübsches Beispiel dafür ist die erste der Humoresken von Max Reger. Diese hat ein durchaus graziöses Hauptthema, das sich aber nicht so recht entwickeln kann. Dieses Hauptthema bestimmt zwei kurze Eckteile, die einen Mittelteil einrahmen, der sich ein bißchen zu wichtig nimmt und so auch wieder komisch wirkt.

⟨ Max Reger (1873 – 1916): *Humoreske D-Dur, op. 20/1* ⟩ [15]

Einen letzten Punkt hätte ich noch: *Tour de Force*! Sie verstehen schon: Tastendonner in der Liszt–Sonate etwa ...

⟨ Franz Liszt (1811 – 1886): *Sonate h-moll* (Ausschnitt) ⟩ [16]

Wenn Sie genau zugehört haben, werden Sie bemerkt haben, daß ich ein Wort klinisch vermieden habe: das Wort *„schön"*. Das bringt uns zu einer kleinen Abschweifung.

Vor nicht allzu langer Zeit besuchte ich eine Aufführung der Oper „Mathis der Maler" von Paul Hindemith. Die Oper ist aus, der Applaus ist verklungen, da höre ich, wie eine Person zu ihrem Nachbarn sagt: „Sehr schön war's!" Ich war wie vor den Kopf gestoßen. Was war denn das? Dazu muß man wissen, daß „Mathis der Maler" zur Zeit der deutschen Bauernkriege spielt. Das war eine ziemlich finstere Epoche. Die Bauern erhoben sich gegen ihre Ausbeutung durch die Landesfürsten. Diese bekämpften den Aufstand mit unbarmherziger Härte. Während der Oper wird etwa auf offener Bühne ein Bauernführer grausam von Soldaten hingemetzelt. Im Mittelpunkt der Oper steht der Gewissenskonflikt des Malers Mathis, wie er sich in diesen Zeiten verhalten soll. Soll er weiterhin an seinen Gemälden und Skulpturen arbeiten, oder soll er sich „politisch betätigen"? Schlußendlich schließt er sich dem Bauernaufstand an und richtet natürlich genau gar nichts aus. Am Ende der Oper verkündet ihm eine Stimme, daß der Künstler bei seiner Kunst bleiben soll, aber wirklich überzeugend ist das nicht. Klarerweise projiziert hier Paul Hindemith seinen eigenen Konflikt, wie er sich als Künstler angesichts

[14]passend: Jene Symphonie ist eine der Symphonien, die Haydn für London komponiert hat.

[15]Marc–André Hamelin trifft den Ton unter `http://www.youtube.com/watch?v=ba5js057WGM` ganz gut.

[16]Mir gefällt eine Aufnahme von den Salzburger Festpielen, die ich auf CD besitze, und in der Emil Gilels spielt, ganz außerordentlich. Auf YouTube gibt es eine nicht ganz so gute Aufnahme in drei Teilen: `http://www.youtube.com/watch?v=7yhGSrn3idI`, `http://www.youtube.com/watch?v=gyQ-MnjRvsE`, `http://www.youtube.com/watch?v=EKUAFRosm48`.

des Naziregimes verhalten soll, hinein. Die Musik der Oper spiegelt all das wider. Sie ist aufwühlend, sehr gescheit, aber man kann sie nicht als „schön“ bezeichnen. Profan gesprochen: Es erklingen sehr wenige reine Dur-Akkorde in dieser Oper ...

Ich möchte diesen Punkt noch ein wenig auf die Spitze treiben:

Musik **will nicht** *schön sein!*

Was ich meine, ist: Musik will etwas aussagen, will etwas an den Zuhörer übermitteln. Das *kann* mit Schönheit einhergehen, aber dann ist Schönheit nie *Selbstzweck*, sie ist immer *Mittel zum Zweck*. Und es *muß nicht* mit Schönheit einhergehen. „Sacre de Printemps“ von Igor Strawinsky ist eruptiv, explosiv, aber es ist nicht „schön“. Der Schlußsatz aus der „Großen Sonate für das Hammerklavier“ in B-Dur, op. 106, von Ludwig van Beethoven, der Fugensatz, ist alles Mögliche — gewaltig, kühn, unerhört —, aber er ist sicher nicht „schön“. Im Gegenteil: Man muß hundert Jahre warten, bis wieder ein Werk geschrieben wird, das ähnliche harmonische Härten aufweist. Auch bei Johann Sebastian Bach kann man vieles nicht als „schön“ bezeichnen, da er häufig sein Hauptaugenmerk auf konsequente Stimmführung und ausgewogene Form legt und dabei weniger Rücksicht auf die Harmonien nimmt. Ich denke da etwa an manche Kanons in den „Goldberg–Variationen“, die alle ihren unverwechselbaren Charakter haben, die aber nicht immer wirklich „schön“ sind.

Wenn ich also nach einer Aufführung von „Mathis der Maler“ höre: „Sehr schön war's!“, dann fühle ich mich unweigerlich an die berühmte Standardphrase des alten Kaisers Franz Joseph erinnert, die dieser immer dann anwandte, wenn er kulturellen Heimsuchungen ausgesetzt war:

„Es war sehr schön, es hat mich sehr gefreut!“

Für jemanden, der für Kultur offenbar nicht sehr viel übrig hatte, war es anscheinend noch das Beste, was er darüber sagen konnte ...

Kehren wir wieder zum eigentlichen Gegenstand der Erörterung zurück.

Herz in der Mathematik

Für Nicht-Mathematiker sieht das wohl nach einem ziemlich schwierigen Thema aus. Schlußendlich haben wir doch alle in der Mittelschule gelernt, daß Mathematik eine staubtrockene, abstrakte Materie ist, in der es darauf ankommt, Rezepte, die seit Jahrhunderten bekannt sind, auf mehr oder auch weniger intelligente Aufgaben anzuwenden, und zu hoffen, daß man das richtige Rezept erwischt hat ... (Zur Ehrenrettung meiner Mathematiklehrerin muß ich sagen, daß ich *das* in der Mittelschule nicht gelernt habe.) Wie dem auch sei: Ich denke, wir sollten zum Thema „Herz in der Mathematik“ den vorher schon erwähnten Andrew Wiles zu Wort kommen lassen.

Wie ich schon anführte, ist Wiles dafür berühmt, den „Großen Fermatschen Satz“ bewiesen zu haben. Die Aussage dieses Satzes kann jeder Mittelschüler ohne Probleme verstehen. Ich möchte daher diese Aussage hier präsentieren.

Theorem (Wiles, Taylor 1995). (*Großer Fermatscher Satz*)

Sei n eine natürliche Zahl größer als oder gleich 3. Dann gibt es keine natürlichen Zahlen[17] *x, y, z, sodaß*

$$x^n + y^n = z^n.$$

Diese Aussage hat Pierre de Fermat vor über 300 Jahren in den Rand eines Exemplars der "Arithmetica" des Diophantos gekritzelt.[18] Um die Sache spannend zu machen, hat er noch hinzugefügt, daß er einen „wahrhaft wunderbaren" Beweis dafür gefunden habe, aber daß der Rand des Buches zu schmal sei, diesen zu fassen. Seither haben sich viele kluge Leute darüber den Kopf zerbrochen. Tatsächlich hat sich ein großer Teil der Zahlentheorie an diesem Problem entzündet. Aber über 300 Jahre lang konnte kein Beweis gefunden werden. Man kann also getrost davon ausgehen, daß Fermat keinen Beweis hatte, jedenfalls nicht etwas, was wir heute als Beweis anerkennen würden. Es war eine große Sensation, als Andrew Wiles am Ende einer Vortragsreihe, die er 1993 am Isaac Newton Institute in Cambridge gehalten hat, verkündete, daß er nun einen Beweis gefunden hat. Nun genügt es in der Mathematik nicht, anzukündigen, daß man einen Beweis für ein Theorem gefunden hat (so wie das Fermat getan hat), sondern dieser Beweis muß jetzt aufgeschrieben werden, damit auch andere diesen nachvollziehen können — das tat Wiles; das Resultat war ein Artikel zu 200 Seiten, der seinerseits auf unzähligen Vorarbeiten anderer Autoren beruhte —, und das Aufgeschriebene muß dann an ein wissenschaftliches Journal zur Veröffentlichung eingereicht werden — auch das tat Wiles —, worauf dann Gutachter diesen Beweis sorgfältig prüfen. Dabei wurde nach einiger Zeit entdeckt, daß der Beweis eine Lücke aufwies, die Wiles nicht beheben konnte. Es dauerte weitere zwei Jahre, bis es Wiles zusammen mit seinem ehemaligen Studenten Richard Taylor gelang, die Lücke zu schließen. In einer BBC-Dokumentation[19] sagt Andrew Wiles über den Moment, als ihm klar wurde, daß er jetzt alle Schwierigkeiten überwunden hat, Folgendes:

> [Wiles ist sichtlich zutiefst bewegt, spricht nur stockend und stoßweise]
>
> *When I was sitting here, at this desk — it was a Monday morning, September 19 — and I was trying convincing myself that it did not work, seeing exactly what the problem was, when suddenly, totally unexpectedly, I had this incredible revelation. I realised [that] what was holding me up was exactly what would resolve the problem that I had in my Iwasawa theory attempt three years earlier.*

---

[17] Um Mißverständnissen vorzubeugen: Mit „natürlichen" Zahlen sind hier die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ gemeint, was der ursprünglichen Bedeutung des Wortes „natürlich" entspricht. Heutzutage lernt man in der Schule (leider), daß die „natürlichen Zahlen" aus den Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ bestehen. Das mag in manchen Zusammenhängen tatsächlich praktischer sein, ist aber eine Pervetierung des Wortes „natürlich", da die 0 zweifellos keine *natürliche* Zahl ist.

[18] Der Hintergrund/Kontext dieser Aussage ist der krasse Gegensatz zur Situation für $n = 2$: Es gibt sogar unendlich viele Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in natürlichen Zahlen x, y, z, die genau charakterisiert werden können und als „Pythagoräische Tripel" bekannt sind. Zwei davon kennen wir aus der Mittelschule: $3^2 + 4^2 = 5^2$ und $5^2 + 12^2 = 13^2$.

[19] Die gesamte Dokumentation kann unter `http://www.youtube.com/watch?v=7FnXgprKgSE` angesehen werden. Die zitierte Stelle kommt etwa 5 Minuten vor dem Ende. In diesem Zusammenhang ist auch der unmittelbare Anfang der Dokumentation sehr bemerkenswert ...

> *It was … it was the most … the most important moment of my working life …* [An dieser Stelle kann Wiles endgültig nicht mehr weitersprechen; die Szene wird ausgeblendet.]
>
> *It was so indescribably beautiful, it was so simple and so elegant … — and I just stared in disbelief for 20 minutes … — then during the day I walked to our department, I keep coming back to my desk, looking to see, it was still there, it was still there …*

Eindrucksvoll, nicht? Im Gegensatz zur landläufigen Meinung scheint Mathematik eine hoch emotionelle Tätigkeit zu sein. Ich habe hier alle möglichen Emotionen gesehen, die alles von „zu Tode betrübt“ — zu dem Zeitpunkt, wo das Beweisgebäude zusammenzubrechen drohte — bis zu „himmelhochjauchzend“ — zu dem Zeitpunkt, als sich Wiles bewußt wurde, daß er nun alle Schwierigkeiten überwunden hatte — miteinschließt. Man mag einwenden, daß Wiles deswegen so bewegt ist, weil er dieses berühmte Problem endlich als Erster gelöst hat. Das ist sicher eine Komponente dabei. Es greift aber zu kurz. Denn Wiles sagt auch: „Das war so unbeschreiblich schön, so elegant!“ Mathematik muß also noch andere Qualitäten haben, als nur „staubtrocken“ und „abstrakt“ zu sein. Wir sollten daher auf einige dieser anderen Qualitäten noch näher eingehen.

Wie ich schon erwähnte, wenn ein Mathematiker ein tolles Theorem bewiesen hat, dann muß dies aufgeschrieben werden und zur Veröffentlichung eingereicht werden, worauf der entsprechende Artikel dann begutachtet wird. Die Gutachter beurteilen dabei nicht nur die Korrektheit der Beweise, sondern auch die anderen Qualitäten des Artikels. Ein Standardsatz, der ausdrückt, daß dem Gutachter der Artikel gefällt, ist:

“This is a very nice paper!”

Im Lichte unserer vorigen Abschweifung über Schönheit in der Musik: Spaßig, nicht? Den Mathematikern fällt auch nichts Besseres ein, als „schön“ zu sagen … Wenn es sich allerdings um ein fundiertes Gutachten handelt, dann würde der Gutachter auch noch spezifischer schreiben, was ihm an diesem Artikel gefällt. Da kann man dann etwa lesen:

„Das ist ein sehr eleganter Beweis!“

Was ist das, ein eleganter Beweis? Also, was ist das, so ein „mathematischer Chopin-Walzer“? In der Regel handelt es sich um die Situation, daß sich — in einem Beweis — vor dem Mathematiker ein scheinbar unüberwindbares Hindernis auftürmt. Es gelingt ihm jedoch, mit Hilfe eines zwar einfachen, aber gar nicht naheliegenden Einfalls dieses Hindernis — eben elegant — zu umschiffen. Ich versuche ein Beispiel: den allseits bekannten Satz, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Theorem. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Wenn man die Aussage des Theorems wörtlich nimmt, dann müßte man jetzt eben unendlich viele Primzahlen irgendwie konstruieren. Am besten wäre es überhaupt, eine Formel zu finden, die uns die Primzahlen (oder zumindest unendlich viele davon) produziert. Das ist ein ziemlich aussichtsloses Unterfangen.[20]

[20]Mathematik hat jede Menge unglaublich Faszinierendes respektive Absurdes — je nachdem, welchen Standpunkt man einnimmt … — aufzuwarten: Der russische Mathematiker Yuri Matijasevic

Es gibt aber einen — eleganten — Ausweg. Nehmen wir doch an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Wenn wir — unter dieser Annahme — auf einen Widerspruch geführt werden, dann muß unsere Annahme falsch gewesen sein, und wir haben dann gezeigt, daß es tatsächlich unendlich viele Primzahlen gibt.

Nehmen wir also an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen; sagen wir 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., 1031.

Wir betrachten nun

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ \ldots \ \cdot 1031 + 1.$$

Diese (große) Zahl läßt sich in Primfaktoren zerlegen. Jeder dieser Primfaktoren muß einerseits diese Zahl teilen und muß andererseits unter den Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., 1031 vorkommen. (Wir haben ja angenommen, daß das *alle* Primzahlen wären!) Sei p ein solcher Primfaktor. p kann nicht gleich 2 sein, denn die obige Zahl ist offensichtlich ungerade. Aber p kann auch nicht gleich 3 sein, denn 3 teilt die obige Zahl auch nicht, da sie die Gestalt $3X + 1$ hat. Ebenso kann p nicht gleich 5 sein, ..., und auch nicht gleich 1031. Das können daher *nicht* alle Primzahlen gewesen sein. □

Sie werden nun einwenden: „Das stimmt zwar alles, aber ein rigoroser — allgemeingültiger — mathematischer Beweis war das jetzt nicht.“ Schlußendlich ist 1031 ja nur eine *spezielle* Primzahl. Sie haben recht, aber der rigorose Beweis sieht ganz genauso aus. Man muß nur statt 2, 3, 5, ..., 1031 Symbole schreiben: p_1, p_2, p_3, $\ldots p_n$.

Beweis. Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen; sagen wir, $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \ldots, p_n$.

Wir betrachten nun

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \cdot \ \ldots \ \cdot p_n + 1.$$

Diese (große) Zahl läßt sich in Primfaktoren zerlegen. Jeder dieser Primfaktoren muß einerseits diese Zahl teilen und muß andererseits unter den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vorkommen. (Wir haben ja angenommen, daß das *alle* Primzahlen wären!) Sei p ein solcher Primfaktor. p kann nicht gleich p_1 sein, denn p_1 teilt die obige Zahl nicht. Aber p kann auch nicht gleich p_2 sein, denn p_2 teilt die obige Zahl auch nicht. Ebenso kann p nicht gleich p_3 sein, ..., und auch nicht gleich p_n. Das können daher *nicht* alle Primzahlen gewesen sein. □

Wir kommen zu *Humor in der Mathematik*. Ja kann es denn so etwas geben? Das muß es schon geben, denn manchmal kann man in Gutachten lesen:

„Das ist aber ein witziger Beweis!“

Wie kommt Witz in Mathematik zustande? Humor in der Mathematik ist — wie auch der Humor in der Musik — normalerweise von feinerer Natur. Auch hier werden die

zeigte, daß es Polynome in mehreren Variablen gibt, deren *positive* Werte — wenn die Variablen zu konkreten natürlichen Zahlen spezialisert werden — alle Primzahlen durchlaufen; siehe *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **196** (1971), 770–773; *Soviet Math. Dokl.* **12** (1971), 249–254. Solche Polynome wurden seither auch explizit konstruiert. Sie haben nicht nur die „störende“ Eigenschaft, daß sie eben auch (irgendwelche) *negative* Werte annehmen, sondern auch jene, daß sie das *meistens* tun ... Sie sind daher bis heute nichts als eine Kuriosität, da sie, abgesehen von ihrer Existenz, sonst für nichts gut zu sein scheinen.

Srinivasa Ramanujan

Godfrey Harold Hardy

Abbildung 4

Erwartungen des Lesers eines Beweises in die Irre geleitet, ehe plötzlich ein kleines Detail sichtbar wird, das man bisher noch gar nicht wahrgenommen hat, und dieses kleine Detail ist dann das letzte (aber entscheidende!) Bausteinchen, das zur Vervollständigung des Arguments noch fehlt. Da muß der Mathematiker schmunzeln (auch über sich selbst: Wie konnte er das nur übersehen?), und das erfreut sein Herz.

Ich versuche wieder ein Beispiel, diesmal aus dem Werk des berühmten indischen Mathematikers Srinivasa Ramanujan (siehe Abbildung 4). Geboren 1887 in der Nähe von Madras (dem heutigen Chennai), stammte Ramanujan aus sehr bescheidenen Verhältnissen. Er hatte nur eine Grundschulausbildung, hatte sich aber immer schon mit Mathematik und mathematischen Problemen beschäftigt. Nach Abschluß der Schule arbeitete er als Beamter in der Hafengesellschaft von Madras, aber in seiner Freizeit unentwegt an mathematischen Problemen. Im Alter von 25 Jahren sandte er seine mathematischen Ergebnisse an berühmte Mathematiker der damaligen Zeit. Einer von ihnen, Godfrey Hardy, Professor an der University of Cambridge, sah sich den Brief von Ramanujan tatsächlich genauer an und erkannte das Genie des unbekannten Verfassers. Er lud ihn ein, nach Cambridge zu kommen, um bei ihm zu studieren und zu arbeiten. Förderer Ramanujans gelang es, die Reise zu finanzieren, und so verbrachte Ramanujan einige Jahre an der University of Cambridge. Aus dieser Zeit stammen einige sehr berühmte Artikel Ramanujans, oft in Zusammenarbeit mit Hardy. Ramanujan hat aber leider das englische Klima nicht gut vertragen (und auch die Kost nicht ...) und war meistens sehr kränklich. Er kehrte nach Indien zurück und verstarb ein Jahr danach im Alter von nur 32 Jahren.

Eines der Objekte, für die sich Ramanujan in seiner mathematischen Arbeit mit großer Hingabe interessierte, das waren sogenannte (Zahlen-)Partitionen. Eine *Partition* einer Zahl n ist eine Summendarstellung dieser Zahl, wo die Summanden aufsteigend angeordnet sind. Für $n = 1$ gibt es genau eine Summendarstellung, nämlich

$$1$$

selbst, für $n = 2$ gibt es zwei, nämlich

$$2, \quad 1 + 1,$$

für $n = 3$ gibt es drei Partitionen,

$$3, \quad 1 + 2, \quad 1 + 1 + 1,$$

für $n = 4$ schon fünf,

$$4, \quad 1 + 3, \quad 2 + 2, \quad 1 + 1 + 2, \quad 1 + 1 + 1 + 1,$$

und für $n = 5$ sieben:

$$5, \quad 1+4, \quad 2+3, \quad 1+1+3, \quad 1+2+2, \quad 1+1+1+2, \quad 1+1+1+1+1.$$

Es bezeichne $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n. Percy Alexander MacMahon, Major in der britischen Armee und ebenfalls bedeutender Mathematiker der damaligen Zeit, hatte die Anzahlen $p(n)$ bis $n = 200$ ausgerechnet.[21] Die ersten Anzahlen $p(n)$ sind hier wiedergegeben:

$$\begin{array}{ccccc}
p(1) = 1 & p(2) = 2, & p(3) = 3, & \boldsymbol{p(4) = 5,} & p(5) = 7 \\
p(6) = 11 & p(7) = 15, & p(8) = 22, & \boldsymbol{p(9) = 30,} & p(10) = 42 \\
p(11) = 56 & p(12) = 77, & p(13) = 101, & \boldsymbol{p(14) = 135,} & p(15) = 176 \\
p(16) = 231 & p(17) = 297, & p(18) = 385, & \boldsymbol{p(19) = 490,} & p(20) = 627
\end{array}$$

Ramanujan studierte MacMahons Tabellen eingehend und machte dabei bemerkenswerte Entdeckungen. Eine davon ist im unten angegebenen Theorem enthalten. Sie besagt, grob gesprochen, daß jede fünfte Partitionsanzahl durch 5 teilbar ist; siehe die fett gedruckten Einträge in der obigen Tabelle.[22]

Theorem ("RAMANUJAN'S MOST BEAUTIFUL THEOREM" 1919)**.**
$p(5n + 4)$ *ist immer durch 5 teilbar.*

Den angegebenen Beinamen "Ramanujan's most beautiful theorem" erhielt dieser Satz deswegen, da er so simpel und elegant zu formulieren und gleichzeitig so ganz unerwartet ist. Außerdem hat Ramanujan selbst einen Beweis dafür gefunden. Es ist dieser Beweis, den ich nun besprechen möchte. Mir ist bewußt, daß das Kommende nun (mathematisch) anspruchsvoller ist, als das Bisherige. Wenn Sie nicht alles verstehen sollten (oder kaum etwas verstehen sollten ...), dann macht das aber nichts. Es geht mir nur darum, anzudeuten, was „Witz“ in der Mathematik bedeuten kann.

Ramanujans Beweis stützt sich auf ein altes Resultat von Leonhard Euler. Es besagt, daß die Potenzreihe, in der die Anzahlen $p(n)$ als Koeffizienten auftreten, als unendliches Produkt geschrieben werden kann.

Theorem (EULER)**.** *Es gilt*

$$1 + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + \cdots = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots}.$$

Beweis. Möglicherweise beschleicht Sie beim Anblick von unendlichen Summen und Produkten ein ungutes Gefühl, und Sie stellen sich etwa die Frage: „Konvergiert denn

[21] Und das fehlerlos! Auch wenn er das nicht durch Auflisten aller Partitionen aller Zahlen bis 200 bewerkstelligte, sondern sich einer Rekursionsformel Eulers bediente, handelt es sich — zu einer Zeit, die keine Rechenmaschinen außer Papier und Bleistift kannte — trotzdem um eine beachtliche Leistung!

[22] Ramanujan machte ähnliche Beobachtungen für die Primzahlen 7 und 11. Zusammen mit dem im Text diskutierten Theorem begründen diese die Forschungsrichtung der „Partitionskongruenzen“, in der es gerade in den letzten Jahren bedeutende Durchbrüche gab; siehe Seite 1525 im Überblicksartikel *"Srinivasa Ramanujan: Going Strong at 125, Part I"*, der in den Notices of the American Mathematical Society, vol. 59, Nr. 11, 2012, von Krishnaswami Alladi herausgegeben wurde und unter `http://www.ams.org/notices/201211/rtx121101522p.pdf` erhältlich ist.

das?“[23] Es ist die falsche Frage! Die obigen Ausdrücke sollten als *formale* Ausdrücke betrachtet werden, die man ganz naiv addiert, multipliziert, usw.[24]

Nehmen wir also den naiven Standpunkt ein. Dann beweist sich Eulers Formel folgendermaßen. Das Produkt auf der rechten Seite besteht aus lauter Faktoren der Gestalt $\frac{1}{1-q^k}$. In der Mittelschule haben wir gelernt, daß sich die unendliche geometrische Reihe aufsummieren läßt:[25]

$$1 + Q + Q^2 + Q^3 + Q^4 + \cdots = \frac{1}{1-Q}.$$

Wir können diese Summenformel dann auf jeden der Faktoren (sozusagen: verkehrt herum) anwenden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots} &= \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^2}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdot\frac{1}{1-q^4}\cdots\\ &= (1+q^1+q^{1+1}+q^{1+1+1}+\cdots)\\ &\qquad\cdot(1+q^2+q^{2+2}+q^{2+2+2}+\cdots)\\ &\qquad\qquad\cdot(1+q^3+q^{3+3}+q^{3+3+3}+\cdots)\cdots\cdot\,.\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir uns noch vorstellen, was passiert, wenn wir dieses letzte Produkt ausmultiplizieren. Jeder Term im Ergebnis entsteht dadurch, daß wir aus jedem der Faktoren einen Term auswählen und diese Terme dann zusammenmultiplizieren. Wenn wir also etwa aus dem ersten Faktor den Term q^{1+1} wählen, aus dem zweiten Faktor den Term q^{2+2+2}, aus dem dritten Faktor den Term q^3, und aus allen anderen Faktoren den Term 1, dann erhalten wir beim Zusammenmultiplizieren

$$q^{1+1+2+2+2+3}.$$

Es kostet jetzt noch einige Momente, um sich davon zu überzeugen, daß man im Exponenten der Ausdrücke, die man so erhält, genau alle Partitionen durchläuft. Somit ist das obige Produkt in der Tat gleich der linken Seite im Eulerschen Theorem. □

Wir können nun an Ramanujans Beweis seines “most beautiful theorem” herangehen.

Ramanujans Beweis seines Theorems. Um eine kompakte Schreibweise zu haben,[26] kürzen wir das Produkt $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots$ durch $(q;q)_\infty$ ab. Allgemeiner schreiben wir

$$(\alpha;q)_\infty = (1-\alpha)(1-\alpha q)(1-\alpha q^2)(1-\alpha q^3)\cdots\,.$$

Ramanujans Beweis beruht auf mehreren Hilfssätzen. Diese Hilfssätze lassen sich durch elementare (aber trickreiche) Manipulationen von Potenzreihen und *Jacobis Tripelproduktformel*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(n-1)/2}x^n = (q;q)_\infty\,(x;q)_\infty\,(q/x;q)_\infty$$

[23]Das tut es für $|q|<1$.

[24]Das kann alles durch die Theorie der sogenannten *formalen Potenzreihen* rigoros gemacht werden.

[25]Die Formel ist auch in der Theorie der formalen Potenzreihen gültig.

[26]Ramanujan hat diese Schreibweise nicht gekannt und auch keine andere Kurzschreibweise verwendet. Dementsprechend gewöhnungsbedürftig ist dann auch die Lektüre von Aufzeichnungen Ramanujans.

ableiten. Es würde hier allerdings endgültig den Rahmen sprengen, das im Detail zu erklären.

Lemma. *Sei $\omega^5 = 1$, $\omega \neq 1$. Dann gilt*

$$(q;q)_\infty\,(\omega q;\omega q)_\infty\,(\omega^2 q;\omega^2 q)_\infty\,(\omega^3 q;\omega^3 q)_\infty\,(\omega^4 q;\omega^4 q)_\infty = \frac{(q^5;q^5)_\infty^6}{(q^{25};q^{25})_\infty}.$$

Dieser Hilfssatz zieht zwei weitere nach sich.

Lemma. *Es gilt*

$$\frac{(q;q)_\infty}{q(q^{25};q^{25})_\infty} = q^{-1}R - 1 - qR^{-1},$$

wobei R eine Potenzreihe in q^5 ist.[27]

Lemma. *Es gilt*

$$q^{-5}R^5 - 11 - q^5R^{-5} = \frac{(q^5;q^5)_\infty^6}{q^5(q^{25};q^{25})_\infty^6}.$$

Wir können diese Hilfssätze nun kombinieren,[28] um den folgenden Ausdruck für die sogenannte „erzeugende Reihe“ der Partitionsanzahlen zu finden:

$$\begin{aligned}
1 + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + \boldsymbol{p(4)q^4} &+ p(5)q^5\\
+p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + \boldsymbol{p(9)q^9} &+ p(10)q^{10}\\
+p(11)q^{11} + p(12)q^{12} + p(13)q^{13} + \boldsymbol{p(14)q^{14}} &+ \dots\\
= \boldsymbol{q^4\frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6}} \cdot (q^{-4}R^4 + q^{-3}R^3 &+ 2q^{-2}R^2 + 3q^{-1}R + \mathbf{5}\\
&-3qR^{-1} + 2q^2R^{-2} - q^3R^{-3} + q^4R^{-4})
\end{aligned}$$

Spätestens an dieser Stelle haben wir den Überblick endgültig verloren. Warum schreiben wir einen dermaßen komplizierten Ausdruck für die erzeugende Reihe der Partitionsanzahlen hin? Was wollten wir eigentlich beweisen? Hier kommt nun die *Pointe* zum Vorschein! Wir interessieren uns doch eigentlich nur für die Partitionszahlen $p(4)$, $p(9)$, $p(14)$, $p(19)$, usw., also für

$$p(4)q^4 + p(9)q^9 + p(14)q^{14} + p(19)q^{19} + \dots.$$

Sehen wir uns die rechte Seite im obigen komplizierten Ausdruck an: Da gibt es die Reihe R, die laut Lemma nur aus Potenzen von q^5 besteht. Auch die Produkte $(q^5;q^5)_\infty$ und $(q^{25};q^{25})_\infty$ bestehen nur aus Potenzen von q^5. Ganz vorne in diesem Ausdruck steht der Faktor q^4. Also, was uns dann in der großen Klammer interessiert, sind nur Potenzen von q^5, alles andere brauchen wir nicht zu beachten. Aber, wenn man da in die Klammer genau hineinsieht (wohlgemerkt: die Reihe R hat nur Potenzen von q^5!), dann ist der einzige Term, der da in Frage kommt, die einsam dastehende 5! In anderen Worten:

[27] Ramanujan gibt auch eine explizite Formel für die Reihe R an.

[28] Der Ausdruck aus dem letzten Lemma wird durch jenen im vorherigen dividiert, und dann wird Eulers Theorem eingesetzt.

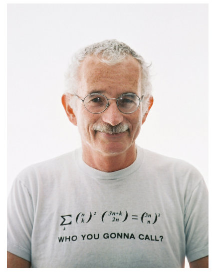


Abbildung 5. Doron Zeilberger

Aus der obigen horrenden Formel (man beachte die fett gedruckten Terme) läßt sich unmittelbar extrahieren:

$$p(4)q^4 + p(9)q^9 + p(14)q^{14} + \cdots = q^4 \frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6} \boldsymbol{\times 5}\,.$$

Der springende Punkt hier ist: Auf der rechten Seite wird alles mit 5 multipliziert! Daher müssen auf der linken Seite alle Koeffizienten — also $p(4)$, $p(9)$, $p(14)$, $p(19)$, usw. — durch 5 teilbar sein. Genau das ist die Aussage, die es zu beweisen galt. $\square$

Ich weiß nicht, wie es Ihnen gegangen ist. Wenn ich diesen Beweis in einer Vorlesung vortrage, dann gibt es immer ein paar Studierende, die, wenn die Pointe sichtbar wird, schmunzeln müssen.

Wir kommen zu *Tour de Force*! Selbstverständlich ist das, was Andrew Wiles geleistet hat, eine Tour de Force, ein unglaublicher Gewaltakt. Da dieser aber große Teile der modernen Zahlentheorie und Algebra benötigt, kann ich hier in wenigen Minuten genau gar nichts darüber sagen. Ich habe also zur Illustration ein anderes Beispiel gewählt — aus meinem eigenen Fachgebiet — nämlich Doron Zeilbergers (siehe Abbildung 5) *Theorem über Alternierende-Vorzeichen-Matrizen*. Dazu müssen wir zunächst wissen, was eine Alternierende-Vorzeichen-Matrix ist. Eine Alternierende-Vorzeichen-Matrix ist eine quadratische Anordnung von 0-en, 1-en und (-1)-en, die folgende Regel befolgt: Wenn man entlang von Zeilen oder entlang von Spalten liest und dabei die 0-en ignoriert, dann liest man alternierend $1, -1, 1, \dots, 1$. Wohlgemerkt: Man beginnt und endet mit 1. Hier ist ein Beispiel einer Alternierende-Vorzeichen-Matrix:

$$\begin{array}{rrrrrr}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Sie werden jetzt fragen, warum sich Mathematiker für Alternierende-Vorzeichen-Matrizen interessieren. Ich kann hier darüber nicht allzu viel sagen. Alternierende-Vorzeichen-Matrizen sind so um das Jahr 1980 in Arbeiten von David Robbins und Howard Rumsey über eine Verallgemeinerung von Determinanten ganz natürlich aufgetreten. Man hat später entdeckt, daß dieselben Objekte in anderer Verkleidung auch in der Theoretischen Physik auftreten, nämlich als Konfigurationen in einem — zugegebenermaßen etwas simplizistischen — Modell für Eisbildung. William Mills, David

Robbins und Howard Rumsey haben sich gefragt, wie viele Alternierende-Vorzeichen-Matrizen es gibt. Um genau zu sein:

Wie viele n-zeilige Alternierende-Vorzeichen-Matrizen gibt es?

Offensichtlich gibt es genau eine einzeilige Alternierende-Vorzeichen-Matrix, nämlich

$$1\ .$$

Es gibt zwei zweizeilige Alternierende-Vorzeichen-Matrizen:

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Und es gibt 7 dreizeilige Alternierende-Vorzeichen-Matrizen:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Wenn wir mit $A(n)$ die Anzahl aller n-zeiligen Alternierende-Vorzeichen-Matrizen bezeichnen, dann sehen wir in der folgenden Tabelle,

n	1	2	3	4	5	6
$A(n)$	1	2	7	42	429	7436

wie die ersten Folgenglieder lauten. Mills, Robbins und Rumsey haben diese Zahlen genau studiert und haben die folgende bemerkenswerte Entdeckung gemacht.

Vermutung (Mills, Robbins, Rumsey $\sim$ 1980)**.** *Es gilt*

$$A(n) = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \cdots \cdot (3n-2)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \cdots \cdot (2n-1)!},$$

wobei $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1.$

Das ist extrem überraschend. Wenn man als Mathematiker die obige Fragestellung hört, würde man nicht glauben, daß es irgendeine vernünftige Formel für die Anzahl aller n-zeiligen Alternierende-Vorzeichen-Matrizen geben würde. Aber nein, es scheint sogar eine elegante, kompakte Produktformel zu geben!

Aber wie das beweisen? Über 10 Jahre lang wußten Mathematiker nicht einmal, wie man diese Vermutung überhaupt angehen könnte. Alle waren daher sehr überrascht, als Doron Zeilberger 1993 verkündete, daß er einen Beweis gefunden hatte. Gleichzeitig legte er einen Artikel von 25 Seiten vor, in dem dieser Beweis aufgeschrieben war.

Sie wissen ja, daß es nicht genügt, zu verkünden, etwas bewiesen zu haben. Der Beweis muß zur Veröffentlichung eingereicht werden, um dann begutachtet zu werden. Zeilberger reichte also seinen Artikel zur Veröffentlichung ein und — Sie ahnen es — der Gutachter fand Lücken im Beweis. Der Artikel ging also zurück an Doron Zeilberger mit der Bitte, diese Lücken zu schließen. Zeilberger nahm Reparaturarbeiten vor und reichte die neue Version wieder ein, worauf der Gutachter neue Lücken fand. Der Artikel

PROOF OF THE ALTERNATING SIGN MATRIX CONJECTURE [1]

Doron ZEILBERGER[2]

Submitted: May 1, 1995; Accepted: July 25, 1995

Checked by[3]: David Bressoud and

Gert Almkvist, Noga Alon, George Andrews, Anonymous, Dror Bar-Natan, Francois Bergeron, Nantel Bergeron, Gaurav Bhatnagar, Anders Björner, Jonathan Borwein, Mireille Bousquest-Mélou, Francesco Brenti, E. Rodney Canfield, William Chen, Chu Wenchang, Shaun Cooper, Kequan Ding, Charles Dunkl, Richard Ehrenborg, Leon Ehrenpreis, Shalosh B. Ekhad, Kimmo Eriksson, Dominique Foata, Omar Foda, Aviezri Fraenkel, Jane Friedman, Frank Garvan, George Gasper, Ron Graham, Andrew Granville, Eric Grinberg, Laurent Habsieger, Jim Haglund, Han Guo-Niu, Roger Howe, Warren Johnson, Gil Kalai, Viggo Kann, Marvin Knopp, Don Knuth, Christian Krattenthaler, Gilbert Labelle, Jacques Labelle, Jane Legrange, Pierre Leroux, Ethan Lewis, Daniel Loeb, John Majewicz, Steve Milne, John Noonan, Kathy O'Hara, Soichi Okada, Craig Orr, Sheldon Parnes, Peter Paule, Bob Proctor, Arun Ram, Marge Readdy, Amitai Regev, Jeff Remmel, Christoph Reutenauer, Bruce Reznick, Dave Robbins, Gian-Carlo Rota, Cecil Rousseau, Bruce Sagan, Bruno Salvy, Isabella Sheftel, Rodica Simion, R. Jamie Simpson, Richard Stanley, Dennis Stanton, Volker Strehl, Walt Stromquist, Bob Sulanke, X.Y. Sun, Sheila Sundaram, Raphaële Supper, Nobuki Takayama, Xavier G. Viennot, Michelle Wachs, Michael Werman, Herb Wilf, Celia Zeilberger, Hadas Zeilberger, Tamar Zeilberger, Li Zhang, Paul Zimmermann .

Dedicated to my Friend, Mentor, and Guru, Dominique Foata.

Two stones build two houses. Three build six houses. Four build four and twenty houses. Five build hundred and twenty houses. Six build Seven hundreds and twenty houses. Seven build five thousands and forty houses. From now on, [exit and] ponder what the mouth cannot speak and the ear cannot hear.

(Sepher Yetsira IV,12)

Abstract: The number of $n \times n$ matrices whose entries are either -1, 0, or 1, whose row- and column- sums are all 1, and such that in every row and every column the non-zero entries alternate in sign, is proved to be $[1!4!\dots(3n-2)!]/[n!(n+1)!\dots(2n-1)!]$, as conjectured by Mills, Robbins, and Rumsey.

[1] original version written December 1992. The Maple package ROBBINS accompanying this paper, can be downloaded from the www address in footnote 2 below.
[2] Department of Mathematics, Temple University, Philadelphia, PA 19122, USA. E-mail:`zeilberg@math.temple.edu`. WWW:`http://www.math.temple.edu/~ zeilberg`. Supported in part by the NSF.
[3] See the Exodion for affiliations, attribution, and short bios.

1

Abbildung 6

ging wieder zurück an Zeilberger, dieser nahm wieder einige Veränderungen vor, und so ging es einige Male hin und her, bis dem Gutachter der Geduldsfaden riß. Er ließ Doron Zeilberger vermutlich ungefähr Folgendes ausrichten: „Lieber Doron! Bevor Du das nächste Mal den Artikel einreichst, dann bitte tue etwas! Arbeite den Artikel sorgfältig durch; wenn Du dazu nicht imstande sein solltest, dann gib den Artikel einem Studenten zum Durchlesen; aber bitte: tue etwas!“

Doron Zeilberger tat etwas. Erstens sah er sich den Artikel (endlich) genau durch. Er strukturierte den Beweis vollkommen hierarchisch, sodaß der Artikel „lokal“ lesbar wurde; in dem Sinne, daß jeder Teil unabhängig lesbar war, unter der Annahme, daß alles, was in der Hierarchie weiter unten angesiedelt war, korrekt ist. Anschließend bat er etwa 80 Kolleginnen und Kollegen, den Artikel zu prüfen. Jedem von ihnen teilte er

2 bis 3 Seiten zu, und die Aufgabe bestand darin, diese 2 bis 3 Seiten auf Korrektheit zu prüfen unter der Annahme, daß alles, was sich weiter unten in der Beweishierarchie befand, richtig war. So geschah es. Dabei flogen noch ein paar Kleinigkeiten auf, aber nichts Weltbewegendes mehr. Und so ist der Artikel 1995 erschienen. In Abbildung 6 ist die erste Seite des Artikels zu sehen. Nach dem Titel folgt die Liste jener etwa 80 Kolleginnen und Kollegen, der "Checker". Der Artikel hat jetzt nicht mehr 25 Seiten, sondern 85. Wie schon gesagt, der Beweis ist vollkommen hierarchisch aufgebaut. Der eigentliche Hauptsatz heißt im Artikel Lemma 1, siehe Abbildung 7. Dieses beruht auf Sublemma 1.1 und Sublemma 1.2. Diese beruhen wieder auf Subsublemma 1.1.1, Subsublemma 1.1.2, ..., Subsublemma 1.2.1, Subsublemma 1.2.2, ..., welche wiederum auf Subsubsublemma 1.1.1.1, ... beruhen, und das geht so weiter bis Sub^6, also bis zu Subsubsubsubsubsublemma, wovon wir eines in Abbildung 8 sehen.

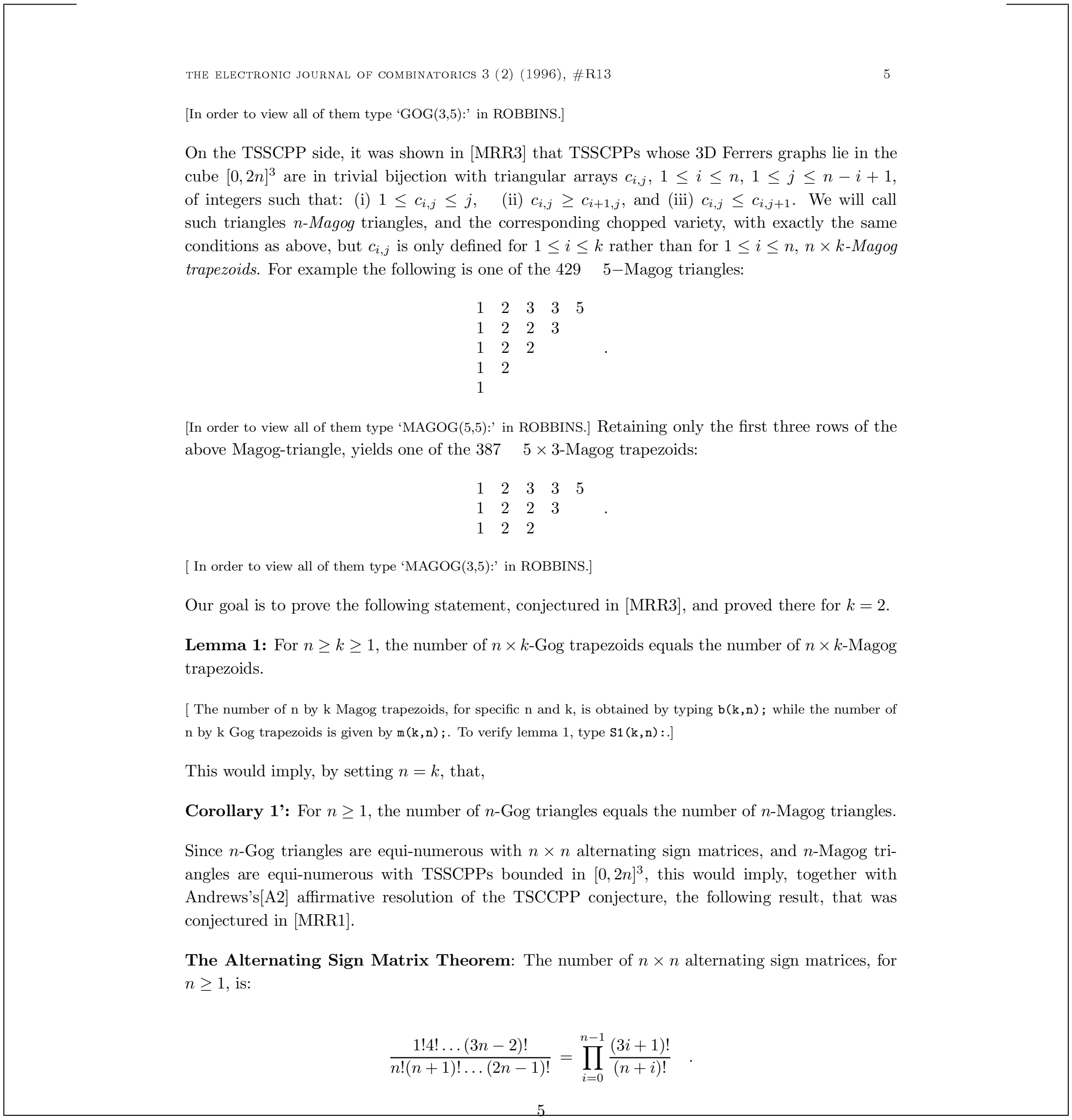
Sie bekommen einen Eindruck davon: Es handelt sich um eine wahre Tour de Force. Eines kann man darüber aber nicht sagen. Man kann nicht behaupten, daß das ein schöner Beweis, daß das ein eleganter Beweis wäre. Um das zu verteidigen, hat sich der selbe Doron Zeilberger in einem anderen Zusammenhang einmal zu folgender Aussage verstiegen:[29]

"Extreme UGLINESS is new BEAUTY!"

Ich denke, wir lassen das einmal so stehen. Die Sarkasten unter Ihnen werden sagen: „Ja, ich hatte immer schon den Eindruck, daß genau das die Idee vieler moderner Komponisten ist." Ich würde darauf entgegnen, daß es zu allen Zeiten bessere und schlechtere Komponisten gab. Wenn die Zeit dann fortschreitet, geraten die schlechteren in Vergessenheit, und nur die herausragenden bleiben übrig. Man kann Letzteres sehr gut überprüfen, wenn man sich fragt, wie viele Komponisten es gab, als Beethoven eine Berühmtheit war. Antwort: unzählige! Wenn man sich allerdings fragt, welche davon man heute noch kennt, welche davon heute noch aufgeführt werden, dann fallen einem Franz Schubert (der „ironischerweise" zur damaligen Zeit großteils unbekannt war), Carl Maria von Weber und die italienischen Opernkomponisten Gioachino Rossini und Gaetano Donizetti ein. Das ist es! Dasselbe wird in 100 oder 200 Jahren für unsere heutige Zeit gelten. Die meisten Komponisten werden vergessen sein, und nur die herausragenden werden Bestand haben. Wenn ich dazu eine persönliche Bemerkung aus lokalpatriotischer Sicht machen darf: Ich bin überzeugt, daß Friedrich Cerha einer von jenen Komponisten sein wird, die in 100 oder 200 Jahren immer noch zu hören sein werden. Seine kraftvolle, ausdrucksstarke musikalische Sprache ist beeindruckend und auch in jenen Stücken klar vernehmbar, die mir weniger gefallen.

In einem übertragenen Sinne — nicht im wörtlichen Sinn — ist obige Aussage im Wesentlichen das, was Arnold Schönberg und die Komponisten in seinem Umfeld getan haben. Die romantische Tonsprache war, nachdem sie auch ins Expressionistische gegangen ist, ausgereizt. Da konnte es keine weitere Entwicklung mehr geben. Das, was Arnold Schönberg nun tat, als er sich zur Zwölftontechnik wandte, war ein totaler Bruch mit allen herkömmlichen (Hör-)Gewohnheiten und Regeln. Er stellte seine Musik auf eine vollkommen neue Basis, mit vollkommen neuen Regeln. Er glaubte — hoffte — dadurch eine neue musikalische Ästhetik zu schaffen. Ich persönlich betrachte dieses Experiment als gescheitert. Wie ich an diesem Ort schon einmal gesagt habe: Ich verstehe,

[29]Auszug aus einem Vortrag auf der dritten Internationalen Konferenz über "Formal Power Series and Algebraic Combinatorics", Bordeaux, 4. Mai 1991.



[In order to view all of them type 'GOG(3,5):' in ROBBINS.]

On the TSSCPP side, it was shown in [MRR3] that TSSCPPs whose 3D Ferrers graphs lie in the cube $[0,2n]^3$ are in trivial bijection with triangular arrays $c_{i,j}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n-i+1$, of integers such that: (i) $1 \le c_{i,j} \le j$, (ii) $c_{i,j} \ge c_{i+1,j}$, and (iii) $c_{i,j} \le c_{i,j+1}$. We will call such triangles *n-Magog* triangles, and the corresponding chopped variety, with exactly the same conditions as above, but $c_{i,j}$ is only defined for $1 \le i \le k$ rather than for $1 \le i \le n$, *$n \times k$-Magog trapezoids*. For example the following is one of the 429 $5-$Magog triangles:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & \\ 1 & 2 & 2 & & \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & & & \end{matrix} \quad .$$

[In order to view all of them type 'MAGOG(5,5):' in ROBBINS.] Retaining only the first three rows of the above Magog-triangle, yields one of the 387 5×3-Magog trapezoids:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & \\ 1 & 2 & 2 & & \end{matrix} \quad .$$

[In order to view all of them type 'MAGOG(3,5):' in ROBBINS.]

Our goal is to prove the following statement, conjectured in [MRR3], and proved there for $k = 2$.

Lemma 1: For $n \ge k \ge 1$, the number of $n \times k$-Gog trapezoids equals the number of $n \times k$-Magog trapezoids.

[The number of n by k Magog trapezoids, for specific n and k, is obtained by typing `b(k,n);` while the number of n by k Gog trapezoids is given by `m(k,n);`. To verify lemma 1, type `S1(k,n):`.]

This would imply, by setting $n = k$, that,

Corollary 1': For $n \ge 1$, the number of n-Gog triangles equals the number of n-Magog triangles.

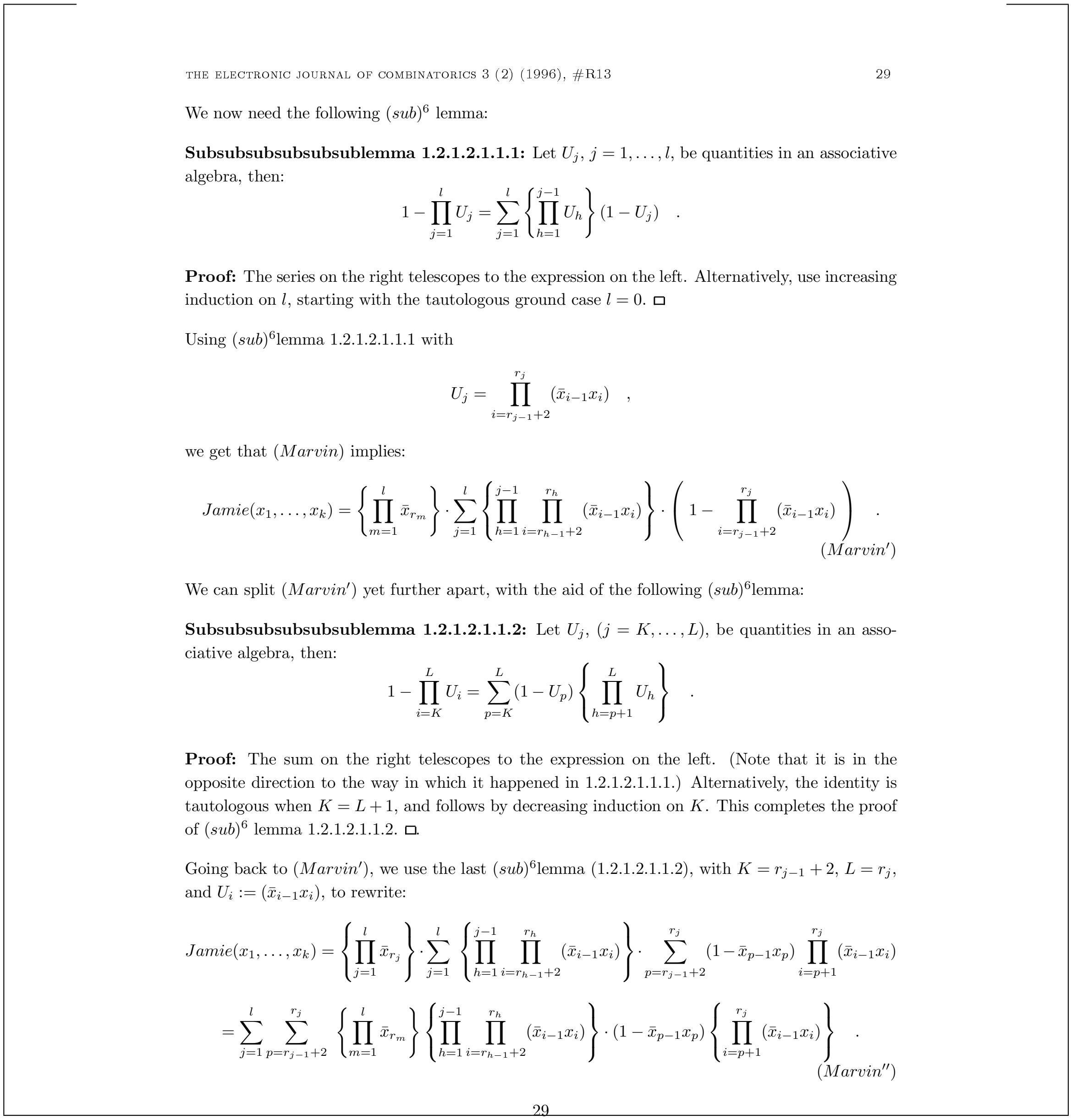
Since n-Gog triangles are equi-numerous with $n \times n$ alternating sign matrices, and n-Magog triangles are equi-numerous with TSSCPPs bounded in $[0,2n]^3$, this would imply, together with Andrews's[A2] affirmative resolution of the TSCCPP conjecture, the following result, that was conjectured in [MRR1].

The Alternating Sign Matrix Theorem: The number of $n \times n$ alternating sign matrices, for $n \ge 1$, is:

$$\frac{1!4!\ldots(3n-2)!}{n!(n+1)!\ldots(2n-1)!} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} \quad .$$

ABBILDUNG 7

daß ein Genie wie Arnold Schönberg diesen Weg versucht hat, aber ich verstehe nicht, warum er aus dieser — so wie ich es sehe — Sackgasse der Musikgeschichte nicht wieder herausgefunden hat. (Daß Schönberg ein musikalisches Genie war, ist allein durch sein Streichsextett „Verklärte Nacht" bewiesen. Dieses ist ein so unglaublich berührendes und bewegendes, und gleichzeitig komplexes Werk, wie es eben nur ein Genie schreiben kann. Es gehört für mich zu den allergrößten Kompositionen überhaupt.)



THE ELECTRONIC JOURNAL OF COMBINATORICS 3 (2) (1996), #R13 29

We now need the following $(sub)^6$ lemma:

Subsubsubsubsubsublemma 1.2.1.2.1.1.1: Let U_j, $j = 1, \ldots, l$, be quantities in an associative algebra, then:

$$1 - \prod_{j=1}^{l} U_j = \sum_{j=1}^{l} \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} U_h \right\} (1 - U_j) \quad .$$

Proof: The series on the right telescopes to the expression on the left. Alternatively, use increasing induction on l, starting with the tautologous ground case $l = 0$. $\square$

Using $(sub)^6$lemma 1.2.1.2.1.1.1 with

$$U_j = \prod_{i=r_{j-1}+2}^{r_j} (\bar{x}_{i-1} x_i) \quad ,$$

we get that $(Marvin)$ implies:

$$Jamie(x_1, \ldots, x_k) = \left\{ \prod_{m=1}^{l} \bar{x}_{r_m} \right\} \cdot \sum_{j=1}^{l} \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} \prod_{i=r_{h-1}+2}^{r_h} (\bar{x}_{i-1} x_i) \right\} \cdot \left(1 - \prod_{i=r_{j-1}+2}^{r_j} (\bar{x}_{i-1} x_i) \right) \quad . \tag{$Marvin'$}$$

We can split $(Marvin')$ yet further apart, with the aid of the following $(sub)^6$lemma:

Subsubsubsubsubsublemma 1.2.1.2.1.1.2: Let U_j, $(j = K, \ldots, L)$, be quantities in an associative algebra, then:

$$1 - \prod_{i=K}^{L} U_i = \sum_{p=K}^{L} (1 - U_p) \left\{ \prod_{h=p+1}^{L} U_h \right\} \quad .$$

Proof: The sum on the right telescopes to the expression on the left. (Note that it is in the opposite direction to the way in which it happened in 1.2.1.2.1.1.1.) Alternatively, the identity is tautologous when $K = L + 1$, and follows by decreasing induction on K. This completes the proof of $(sub)^6$ lemma 1.2.1.2.1.1.2. $\square$.

Going back to $(Marvin')$, we use the last $(sub)^6$lemma (1.2.1.2.1.1.2), with $K = r_{j-1} + 2$, $L = r_j$, and $U_i := (\bar{x}_{i-1} x_i)$, to rewrite:

$$Jamie(x_1, \ldots, x_k) = \left\{ \prod_{j=1}^{l} \bar{x}_{r_j} \right\} \cdot \sum_{j=1}^{l} \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} \prod_{i=r_{h-1}+2}^{r_h} (\bar{x}_{i-1} x_i) \right\} \cdot \sum_{p=r_{j-1}+2}^{r_j} (1 - \bar{x}_{p-1} x_p) \prod_{i=p+1}^{r_j} (\bar{x}_{i-1} x_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{p=r_{j-1}+2}^{r_j} \left\{ \prod_{m=1}^{l} \bar{x}_{r_m} \right\} \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} \prod_{i=r_{h-1}+2}^{r_h} (\bar{x}_{i-1} x_i) \right\} \cdot (1 - \bar{x}_{p-1} x_p) \left\{ \prod_{i=p+1}^{r_j} (\bar{x}_{i-1} x_i) \right\} \quad . \tag{$Marvin''$}$$

29

Abbildung 8

Hirn in der Mathematik

Da werden Sie einwenden, daß man darüber nicht viel sagen kann. Klarerweise sind Vernunft und Überlegung das Um und Auf in der Mathematik. Sie haben natürlich Recht. Wir können daher diesen Punkt als abgehakt betrachten …

Hirn in der Musik

Das ist für sich wieder ein abendfüllendes Thema. Es gibt die landläufige naive Vorstellung, was etwa Pianisten betrifft, daß ein Pianist fleißig üben muß, und am Abend des Konzerts stürmt er dann auf das Podium, setzt sich ans Klavier und legt los. Ja, das ist eine Möglichkeit. Aber so funktioniert das nicht. Der Zuhörer wird nämlich am

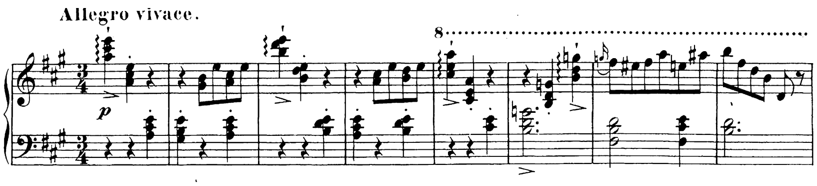
Resultat bemerken,[30] daß nicht sehr viel Überlegung in diese Interpretation eingeflossen ist. Diese wird nicht wirklich Hand und Fuß haben, sie wird unschlüssig bleiben. Tatsächlich, wenn man sich die großen Pianistinnen und Pianisten ansieht, dann wird man bemerken, daß immer Emotion und Verstand einhergehen — eine Symbiose eingehen — sicherlich jeweils mit anderer Gewichtung. Das prototypische Beispiel ist Alfred Brendel, wo durch seine Bücher ausreichend belegt ist, wie viel Überlegung und Reflexion in seine Interpretationen eingeflossen sind, und wo es andererseits genügte, ihm beim Spielen bloß zuzusehen, um zu begreifen, was für ein sensibler und emotionaler Künstler er war.

Bei Komponisten gibt es eine ähnliche landläufige Vorstellung, daß es das Wichtigste ist, gute Einfälle zu haben. Alles weitere ergibt sich von selbst. Dazu kann ich nur sagen: Zu allen Zeiten gab und gibt es viel mehr Komponisten, die gute Einfälle haben, als es gute Komponisten (nicht zu reden von herausragenden Komponisten) gab und gibt. Die große Kunst ist es, wie man die Einfälle, die Themen zur Geltung bringt, wie man Stücke aufbaut, formt, und entwickelt. Auch hier gilt: Wenn man sich die großen Komponisten ansieht, gehen immer Emotion und Verstand Hand in Hand. Bei Komponisten wie Bach, Beethoven oder Brahms ist das sowieso evident. Aber es trifft auch auf Komponisten zu, die nicht gerade im Verdacht stehen, besonders intellektuell an das Komponieren herangegangen zu sein. Zu dieser letzteren Kategorie würden mir spontan Franz Schubert, Anton Bruckner, oder auch Modest Mussorgsky einfallen. Man wird überrascht sein, wie viel Überlegung selbst bei diesen Komponisten in ihre Kompositionen eingeflossen ist. Bei Mussorgsky genügt es dafür, sich die „Bilder einer Ausstellung“ anzusehen; wie etwa die Promenaden das Werk raffiniert zusammenhalten, wie das Thema des letzten Bildes, des „Großen Tors von Kiew“, aus dem Promenadenthema gewonnen ist, welches seinerseits selbstbezüglich geformt ist. Bruckners Partituren sind sowieso hoch komplex. Und auch bei Schubert ist die Rolle des Verstandes viel größer, als man gemeinhin glauben würde. Ich möchte hier den Hauch einer Idee davon geben. Das Beispiel, das ich ausgewählt habe, ist die große Sonate in A-Dur, D 959, aus Schuberts letztem Lebensjahr. Diese Sonate hat vier Sätze. Einen ausladenden ersten Satz, dessen stolzes Kopfthema so lautet:

Das todtraurige Thema des zweiten Satzes kennen wir schon:

[30]Singuläre Ausnahme hier ist vermutlich Martha Argerich, die offenbar nicht sehr viel Überlegung in ihre Interpretationen einfließen läßt, sondern in ihren Konzerten spontan drauf los musiziert. Ich habe größte Hochachtung vor Martha Argerich. Ihr Musikantentum ist in der Regel hinreißend. Ich habe allerdings auch schon Stücke von ihr gehört, die auf Grund ihres spontanen Zugangs unter ihren Fingern zerbröselt sind . . .

Es folgt ein neckisches Scherzo, das auch Ländler-Elemente enthält:



Das abschließende melodienselige Rondo beginnt folgendermaßen:

Sie werden es nicht bemerkt haben, aber Sie werden es vielleicht gefühlt haben: Diese vier charakterlich sehr verschiedenen Themen werden durch eine verborgene Klammer verbunden: Diese möchte ich nun sichtbar machen.

Sieht man sich das Kopfthema des ersten Satzes näher an, dann erkennt man, daß (in der Oberstimme) zunächst mehrmals die Note *a* wiederholt wird, ehe sie ganz am Schluß zu *gis* aufgelöst wird, das auch noch mit einem *fis* umspielt wird. Wenn man also das Thema auf seinen Kern reduziert, dann wird klar, daß es sich um einen groß aufgeblasenen Vorhalt *a–gis* handelt:

Wie beginnt nun der zweite Satz? Die Antwort lautet: *a–gis*. Wie sieht das im Scherzo aus? Da ist es ein wenig versteckter. Hier muß man die Unterstimme ansehen, um auch wieder *a–gis* zu entdecken! Im Thema des letzten Satzes kommt der Vorhalt *a–gis* sogar zweimal vor (nämlich im zweiten und im vierten Takt, beide Male in der Oberstimme).

Sicherlich, diese Feinheiten nimmt man als Zuhörer nicht *bewußt* wahr. Sie tun aber *unbewußt* ihre Wirkung. Im konkreten Fall tragen sie zur großen Einheit dieser Sonate bei. Es sind unter anderem diese Details, die den Unterschied zwischen einem Meisterwerk und Durchschnittsware ausmachen.

Unterschiede zwischen Mathematik und Musik

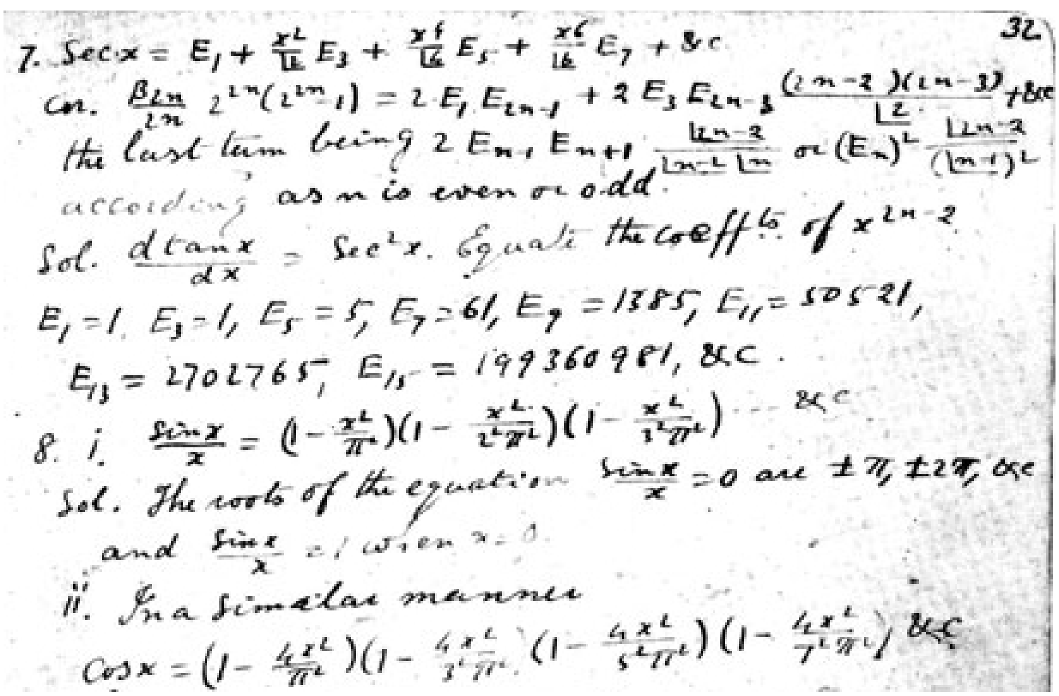
Ich habe bisher sehr viel über Parallelen zwischen Mathematik und Musik gesprochen. Ich sollte dann wohl auch auf die Unterschiede zu sprechen kommen. Da gibt es viele. Ich möchte hier nur den allerwichtigsten herausarbeiten.

Dieser beginnt mit einer weiteren Parallele. Wenn ein Komponist die tolle Eingebung hatte und eine Komposition in seinem Kopf entstanden ist, dann muß er diese jetzt aufschreiben, damit sie auch aufgeführt werden kann. Das kann dann so wie in Abbildung 9 aussehen.

Wenn ein Mathematiker den brillanten Einfall hatte und jetzt ein tolles neues Theorem bewiesen hat, dann muß er das jetzt aufschreiben, damit das andere auch nachvollziehen können. Das kann dann so wie in Abbildung 10 aussehen.

Ludwig van BEETHOVEN (1770 – 1827): *Sonate f-moll, op. 57* („*Appassionata*“)

ABBILDUNG 9



32

7. $\operatorname{Sec} x = E_1 + \frac{x^2}{\lfloor 2} E_3 + \frac{x^4}{\lfloor 4} E_5 + \frac{x^6}{\lfloor 6} E_7 + \&c$

Cor. $\frac{B_{2n}}{2n} 2^{2n}(2^{2n}-1) = 2 E_1 E_{2n-1} + 2 E_3 E_{2n-3} \frac{(2n-2)(2n-3)}{\lfloor 2} + \&c$

the last term being $2 E_{n-1} E_{n+1} \frac{\lfloor 2n-2}{\lfloor n-2 \lfloor n}$ or $(E_n)^2 \frac{\lfloor 2n-2}{(\lfloor n-1)^2}$ according as n is even or odd.

Sol. $\frac{d \tan x}{dx} = \operatorname{Sec}^2 x$. Equate the coeff^ts of x^{2n-2}

$E_1 = 1$, $E_3 = 1$, $E_5 = 5$, $E_7 = 61$, $E_9 = 1385$, $E_{11} = 50521$, $E_{13} = 2702765$, $E_{15} = 199360981$, &c.

8. i. $\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots \&c$

Sol. The roots of the equation $\frac{\sin x}{x} = 0$ are $\pm\pi, \pm 2\pi$, &c and $\frac{\sin x}{x} = 1$ when $x = 0$

ii. In a similar manner

$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{7^2\pi^2}\right) \&c$

Srinivasa RAMANUJAN (1887 – 1920); *Notebook I*

ABBILDUNG 10

Wenn jemand nicht Noten lesen kann und auch von Mathematik nichts versteht: Ich würde sagen, kein großer Unterschied; eines so unverständlich wie das andere ...

Nehmen wir die Partitur her. Diese muß nun zum Leben erweckt werden. Im Fall der „Appassionata“ brauchen wir dafür einen Pianisten. Dieser muß das Werk einstudieren und dann zur Aufführung bringen. Und diese Aufführung — das ist es! Das ist die *ganze* Komposition! Da ist nichts hinzugefügt, da ist nichts weggelassen (wenn wir davon absehen, daß sich der Pianist vielleicht hin und wieder vertippt ...). Und jeder kann sich dazusetzen und sich das anhören. Man braucht dafür keine Vorbildung. Wenn man einen Draht zur musikalischen Sprache Beethovens hat, dann wird man von der düsteren, spannungsgeladenen Atmosphäre der Appassionata mitgerissen werden.

Betrachten wir nun die aufgeschriebene Mathematik. Auch diese muß zum Leben erweckt werden. Aber: Die *Aufführung* von Mathematik, die gibt es nicht! Man kann Mathematik nicht aufführen. Sie werden vielleicht einwenden: Aber auf der Universität, in den Vorlesungen, da wird doch Mathematik „aufgeführt“. Gewissermaßen, ja. Aber das ist doch anders. Sie können sich nicht einfach dazusetzen und die Qualitäten der dort aufgeführten Mathematik genießen. Abhängig davon, wie fortgeschritten die Vorlesung ist, benötigt der Hörer mehr oder weniger Vorkenntnisse, um überhaupt zu wissen, wovon die Rede ist. (Selbst die Vorlesungen des ersten Semesters benötigen gewisse Vorkenntnisse, ohne die es nicht ratsam ist, sich in die Vorlesung zu setzen. Leider gibt es jedes Jahr mehr erstsemestrige Studierende, als uns lieb ist, denen das scheinbar nicht so ganz klar ist ...) In den Vorlesungen ist es üblich, auf dieses Vorwissen aufzubauen und schon Bekanntes nicht noch einmal zu wiederholen. Außerdem werden dem Hörer oft Schlüsse zur genauen Ausführung überlassen, wenn diese so quasi „selbstverständlich“ sind. In diesem Sinne findet auch in Vorlesungen keine (vollständige) Aufführung von Mathematik statt.

Sie werden dann sagen: Ja, aber auf mathematischen Konferenzen, da stellen doch die Mathematiker ihre neuesten Ergebnisse ihren Kolleginnen und Kollegen vor, *da* wird doch Mathematik „aufgeführt“! Ersteres stimmt zwar, aber auch hier kommt es zu keiner „Aufführung“ von Mathematik im selben Sinne, wie Musik aufgeführt wird. Auf Konferenzen hat man vielleicht 30 Minuten, vielleicht eine Stunde Zeit, sein neuestes Resultat zu präsentieren. Was präsentiert wird, darüber haben die Vortragenden wochenlang, monatelang, vielleicht jahrelang nachgedacht. Das läßt sich nicht in 30 Minuten oder einer Stunde zur Gänze in jedem Detail präsentieren. Was man also tut, ist, die Aussage seines neuesten Theorems zu erklären und dann anzudeuten, welche Ideen in den Beweis eingeflossen sind. Wenn ein Hörer einen Beweis vollständig nachvollziehen möchte, beziehungsweise zur Gänze überprüfen möchte, dann muß dieser den Artikel, in dem der Beweis aufgeschrieben ist, studieren. Auch hier kommt es also nicht zur „Aufführung“ von Mathematik.

Das hat eine für Mathematiker sehr leidvolle Folgerung: Ich würde sagen, daß — Daumen mal π — 90 Prozent der Bevölkerung Musik zugänglich sind. Wenn man dann die populäre Musik wegläßt, dann bleiben immer noch — vorsichtig geschätzt — mindestens 10 Prozent, die durch — ich sage jetzt — *aussagekräftige*[31] Musik ansprechbar sind.

[31]Mit den Bezeichnungen „E“ und „U“ weiß ich mir nämlich wenig anzufangen.

Wie sieht das mit der Mathematik aus? Ich würde das so formulieren. Sie werden sich möglicherweise aus der Mittelschulzeit erinnern, daß Mathematiker ein spezielles Symbol für verschwindend kleine Größen haben: das ε! Ich würde also sagen, daß — grob geschätzt — ε Prozent der Bevölkerung durch die vielfältigen Qualitäten der Wissenschaft Mathematik ansprechbar sind.

Das ist sehr schmerzlich für Mathematiker. Mathematikern wird oft vorgeworfen, sie sollten doch aus ihrem Elfenbeinturm heraustreten und einem breiten Publikum erklären, was sie so tun. Und Mathematiker würden genau das liebend gerne machen: Sie würden mit großer Begeisterung ihr neuestes Theorem — sozusagen: ihre neueste Komposition — einem breiten Publikum vortragen. Allein, auf Grund der oben beschriebenen Schwierigkeiten: Es ist ein Ding der Unmöglichkeit. Wohl gemerkt: Ich sage nicht, daß man *über* Mathematik nicht reden soll. Ganz im Gegenteil. Was ich hier mache, ist ja in einem gewissen Sinne auch „*über* Mathematik reden“. Und es ist das, was hier im `math.space` — mit großem Erfolg — geschieht. Aber, wenn es zur aktuellen Forschung kommt, dann wird man nur in Bildern sprechen können, dann wird man nur andeuten können, was hier wirklich vor sich geht. Wie gesagt: Die Aufführung von Mathematik gibt es nicht, und so wird ein Mathematiker einem breiten Publikum nie wirklich nahebringen können, was er erlebt, wenn er sich mit mathematischen Problemen und deren Lösung beschäftigt. In diesem Punkt tragen Mathematiker gegenüber Musikern, aber auch gegenüber Forschern in anderen Wissenschaftsdisziplinen, immer ein Handicap. Musik spricht den Hörer unmittelbar an, da sind keine „Übersetzung“ oder zusätzliche Erklärung notwendig, ganz im Gegensatz zur Mathematik.[32]

Persönliches

Was bedeuten mir persönlich Mathematik und Musik? Viel, natürlich. Da ist einmal die unerklärbare, magische Komponente. Wenn ich gefragt werde, warum ich zur Musik oder Mathematik gekommen bin: Ich weiß es nicht. Ich erinnere mich gut, daß ich als 6–7-Jähriger schon leidenschaftlich gerne vor mich hingesungen habe. Warum? Ich weiß es nicht. Ich erinnere mich auch gut, daß ich mich als 13–14-Jähriger brennend dafür interessiert habe, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß man mit einer gegebenen Anzahl von Würfeln eine gegebene Gesamtaugenzahl würfelt, daß man also etwa mit 10 Würfeln die Augenzahl 36 würfelt. Ich habe mit Hingabe lange Tabellen aufgestellt und diese untersucht. Nach mehrjähriger Arbeit gelang es mir tatsächlich, eine Formel zu finden. Natürlich hatte ich damals nicht die geringste Ahnung, wie man diese auch beweisen könnte.[33] Warum mich das so fasziniert hat? Ich weiß es nicht.

[32]Folgerichtig versucht Cédric Villani in seinem bemerkenswerten, aufsehenerregenden Buch *“Théorème vivant”* (in der deutschen Übersetzung: *„Das lebendige Theorem“*) — in dem er beschreibt, wie der Beweis jenes Theorems entstanden ist, das wesentlich zur Verleihung der Fieldsmedaille an ihn im Jahr 2010 beitrug — gar nicht erst, die Mathematik dahinter zu erklären, sondern bleibt im Gegenteil dazu sogar für ein Fachpublikum, das nicht Experte auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen ist, mit voller Absicht unverständlich, um sich dafür ganz auf die emotionelle Seite der Auseinandersetzung mit Mathematik zu konzentrieren. Dies gelingt Villani ganz hervorragend, aber — nüchtern betrachtet — wird hier *nicht einmal über* Mathematik gesprochen.

[33]Heute weiß ich, daß man diese Formel problemlos mit Hilfe von erzeugenden Funktionen oder auch mit Hilfe des Prinzips der Inklusion und Exklusion beweisen kann.

Was fasziniert mich heute an Mathematik und Musik? Bei der Mathematik ist da einmal die Herausforderung, offene Probleme, wie sie laufend aus der Physik, der Informatik, oder auch der Mathematik selbst kommen, zu „knacken". Interessanterweise kommt es in meiner Forschungsarbeit sehr häufig vor, daß ich, um ein Problem zu lösen, lange Tabellen studiere (die aber heutzutage mit dem Computer erstellt sind), und ich versuche, eine mathematische Formel für die Zahlen in diesen Tabellen zu erraten (auch das unter Mithilfe des Computers), und dann — im erfolgreichen Fall — die so gefundene Vermutung zu beweisen. Weiters fasziniert es mich natürlich, verborgene Strukturen und Zusammenhänge, die sich hinter den Problemen und deren Lösungen verbergen, aufzudecken. Die ästhetische Komponente der Mathematik spielt für mich klarerweise eine große Rolle.

Auch bei der Musik fasziniert es mich, Neues zu ergründen. Es ist einfach ungemein interessant, sich ein neues[34] Stück vorzunehmen, und zu beginnen, daran zu arbeiten. Wie wir schon besprochen haben: Eine Partitur muß zum Leben erweckt werden. Am Anfang weiß man oft gar nicht, was die wichtigen Dinge in einem Stück sind, wie der Aufbau des Stückes zu verstehen ist, und wie das Stück ablaufen soll. Ich erinnere mich gut an die Situation, wie ich mit meinen Triopartnern begonnen habe, den dritten Satz aus Mozarts Klaviertrio in C-Dur, KV 548, für eine Zugabe eines Konzertabends einzustudieren. Auch wenn wir — jeder für sich — die eigenen Parts vorher geübt hatten, die „erste Lesung" des Satzes verkam zu einer veritablen Katastrophe: Nichts ergab auch nur irgendeinen Sinn. Der Geiger plädierte sofort dafür, etwas anderes als Zugabe zu wählen ... Ich bestand jedoch darauf, dem Stück eine Chance zu geben. Wir begannen also, daran zu arbeiten. Und siehe da: Allmählich formte sich das „häßliche Entlein" zu einem lebhaften, witzigen Stück Musik, das uns allen große Freude bereitete.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist natürlich, daß man, nachdem man eine Interpretation eines Stückes erarbeitet hat, diese — eigene — Sicht der Komposition nun einem Publikum darbieten will. Das ist jedes Mal ein ungeheuer interessantes und aufregendes Erlebnis. Man weiß nie im Vorhinein, wie das ablaufen wird, aber umso spannender ist das, und umso bereichernder kann das sein.

In jedem Fall aber waren und sind Mathematik und Musik für mich zwei sehr verschiedene Dinge, die komplementär zueinander sind. Und genau diese Komplementarität habe ich immer als so interessant und reizvoll empfunden. Es ist ja wahrscheinlich sowieso nicht gesund, sich in nur eine Sache zu verbohren. Wenn ich etwa über ein mathematisches Problem nachdenke und an einem toten Punkt anlange, wo ich nicht mehr weiter weiß, dann kann ich mich zum Klavier setzen und mich auf etwas ganz anderes konzentrieren, und so das Hirn wieder frei bekommen. Vielleicht, wenn ich mich dann später wieder dem mathematischen Problem zuwende, habe ich dann eine neue, frische Sicht der Dinge, um mit dem Problem wieder voran zu kommen.

Schlusz

Ich wäre am Ende meiner Ausführungen über „Mathematik UND Musik?" angelangt. Es ist ja so: In einem mathematischen Vortrag ist es durchaus erlaubt, großteils unverständlich zu bleiben. Allerdings nur unter einer Bedingung: Wie es der einflußreiche italienische Mathematiker Gian-Carlo Rota einmal als Forderung des Publikums an

[34] Gemeint ist: „vorher noch nicht studiertes"

den Vortragenden formuliert hat:[35]

"Give us something to take home!"

In diesem Sinne hoffe ich, daß ich nicht allzu unverständlich war, und daß etwas für Sie dabei war, um es mit nach Hause zu nehmen. Weil wir beim Mit-nach-Hause-Nehmen sind: Ich hätte da noch etwas anzubieten, ein Musikstück am Schluß. Es muß natürlich zu unserem Motto „Herz UND Hirn" passen. Da gäbe es viele natürliche Kandidaten bei Johann Sebastian Bach etwa, oder auch bei Ludwig van Beethoven. Das wäre aber zu einfach, zu konventionell. Ich habe stattdessen die Sonate Opus 1 von Alban Berg ausgewählt. Dieser hat sie als 23-Jähriger geschrieben. Sie ist gewissermaßen die Abschlußarbeit der Kompositionsstudien Bergs, die dieser vor allem bei Arnold Schönberg vorgenommen hat. Wenn man so will, ist es die musikalische „Dissertation" Alban Bergs, um eine weitere Parallele zur Mathematik zu bemühen. Sie paßt hervorragend zu unserem Motto „Herz UND Hirn". Ich würde sagen, die musikalische Sprache dieser Sonate ist dem Expressionismus zuzuordnen. Sie ist also hoch emotionell. Auf der anderen Seite handelt es sich um eine unglaublich dichte musikalische Konstruktion, in der das *ganze* etwa 10-minütige Stück aus *einer* Keimzelle — nämlich dem Anfangsthema — gewonnen ist. Aber genug der Erklärungen. Ich spiele also jetzt die Sonate Opus 1 von Alban Berg, und ich werde unmittelbar daran ein Gebet von Johannes Brahms anhängen. „Intermezzo" heißt das bei Brahms, aus den letzten Klavierstücken, die er geschrieben hat. Ich habe das immer schon gerne gemacht, da erstens die beiden Stücke so gut zusammen passen, und zweitens, wenn man zuhört, begreift man, woher die musikalische Sprache Alban Bergs kommt.

⟨ Alban BERG (1885 – 1935): *Sonate op. 1* ⟩ [36]

⟨ Johannes BRAHMS (1833 – 1897): *Intermezzo in h-moll, op. 119/1* ⟩ [37]

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT WIEN, OSKAR-MORGENSTERN-PLATZ 1, 1090 WIEN.
WWW: `http://www.mat.univie.ac.at/~kratt`.

[35] Das Zitat stammt aus dem Vortrag *"Ten Lessons I wish I had been Taught"*, den Rota am 20. April 1996 bei einer Geburtstagskonferenz ihm zu Ehren am Massachusetts Institute of Technology in Boston gehalten hat. Er ist in den Notices der American Mathematical Society, vol. 44, Nr. 1, 1997, S. 22–25 (siehe `http://www.ams.org/notices/199701/comm-rota.pdf`) nachzulesen.

[36] Auch auf die Gefahr hin, eine gewisse Einseitigkeit an den Tag zu legen: Die wunderbar austarierte Sicht Alfred Brendels ist auf YouTube in zwei Teilen anzuhören:
`http://www.youtube.com/watch?v=PlV-ksfS7F8`,
`http://www.youtube.com/watch?v=QxBGG74ztVo`.

[37] Eine alte Konzertaufnahme dieses Stücks mit dem Autor am Klavier findet sich unter `http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/klavier/brahms119-1.html`.