Was ist Diskrete Mathematik — und wozu?

Christian Krattenthaler

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Was ist *Diskrete* Mathematik?

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . .

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)

Diskrete Mathematik ist die Mathematik, die sich im Hintergrund hält.

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)

~~**Diskrete Mathematik** ist die Mathematik, die sich im Hintergrund hält.~~

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)
2) taktvoll, rücksichtsvoll (Brockhaus)

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)
2) taktvoll, rücksichtsvoll (Brockhaus)

Diskrete Mathematik ist die Mathematik, die von außerordentlich diskreten Personen betrieben wird.

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)
2) taktvoll, rücksichtsvoll (Brockhaus)

~~**Diskrete Mathematik** ist die Mathematik, die von außerordentlich diskreten Personen betrieben wird.~~

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)
2) taktvoll, rücksichtsvoll (Brockhaus)

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)
2) taktvoll, rücksichtsvoll (Brockhaus)
3) $\triangle$ nicht zusammenhängend

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)
2) taktvoll, rücksichtsvoll (Brockhaus)
3) $\triangle^1$ nicht zusammenhängend

[1] $\triangle$ = Mathematik

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret . . . 1) unauffällig, unaufdringlich (Brockhaus)
2) taktvoll, rücksichtsvoll (Brockhaus)
3) $\triangle$[1] nicht zusammenhängend
Ggt.: kontinuierlich (Brockhaus)

[1] $\triangle$ = Mathematik

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret kommt von lateinisch *discretus*, das Partizip Perfekt von *discernere*.

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret kommt von lateinisch *discretus*, das Partizip Perfekt von *discernere*.
Letzteres bedeutet *absondern, unterscheiden, trennen*.

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret kommt von lateinisch *discretus*, das Partizip Perfekt von *discernere*.
Letzteres bedeutet *absondern, unterscheiden, trennen*.
Es ist also das Gegenteil von *kontinuierlich*, oder synonym: *stetig*.

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret kommt von lateinisch *discretus*, das Partizip Perfekt von *discernere*.
Letzteres bedeutet *absondern*, *unterscheiden*, *trennen*.
Es ist also das Gegenteil von *kontinuierlich*, oder synonym: *stetig*.

Definition

Die Funktion f ist stetig im Punkt x genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle x_0 mit $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt.

Was ist *Diskrete* Mathematik?

diskret kommt von lateinisch *discretus*, das Partizip Perfekt von *discernere*.
Letzteres bedeutet *absondern, unterscheiden, trennen*.
Es ist also das Gegenteil von *kontinuierlich*, oder synonym: *stetig*.

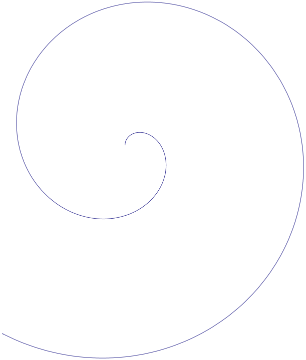
Was ist *Diskrete* Mathematik?

stetig:

diskret:

Was ist *Diskrete* Mathematik?

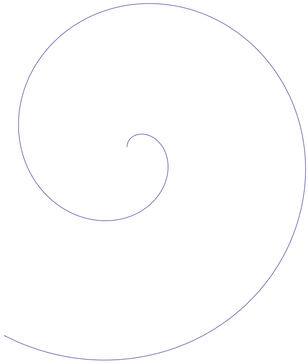
stetig:



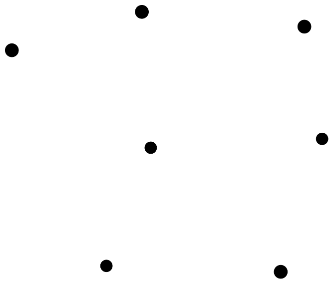
diskret:

Was ist *Diskrete* Mathematik?

stetig:



diskret:



Was ist *Diskrete* Mathematik?

Diskrete Mathematik beschäftigt sich nicht mit Differentialrechnung, Integralrechnung, Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Kurven, Flächen, kontinuierlichen Bewegungen und Prozessen, . . .

Erwartungen, die ich enttäuschen werde

Erwartungen, die ich enttäuschen werde

- Industrie- und Wirtschaftsprobleme, und wie Diskrete Mathematik diese löst

Mathematik lässt sich nicht auf eine Hilfswissenschaft der Wirtschaft, Industrie, Physik, ... reduzieren,
ja sie muss sich hüten, auf eine solche reduziert zu werden, in ihrem eigenen Interesse, aber insbesondere auch im Interesse ihrer Anwendungen!

Nicht weil es nützlich, weil es interessant ist, will man verstehen!
(Rudolf Taschner)

. . .

ja sie muss sich hüten, auf eine solche reduziert zu werden, in ihrem eigenen Interesse, aber insbesondere auch im Interesse ihrer Anwendungen!

Der (geistige) Vater der heute verwendeten Internetverschlüsselung ist Leonhard Euler!

Der (geistige) Vater der heute verwendeten Internetverschlüsselung ist Leonhard Euler!
Ron **R**ivest, Adi **S**hamir, Len **A**dleman erfanden die **RSA**-Verschlüsselung.

Der (geistige) Vater der heute verwendeten Internetverschlüsselung ist Leonhard Euler!

Ron **R**ivest, Adi **S**hamir, Len **A**dleman erfanden die **RSA**-Verschlüsselung.

Aber die verwendete Mathematik stammt ausschließlich von Euler, aus einer Zeit, wo nicht nur die *Worte* „Kryptographie“ und „Internet“ völlig unbekannt waren ...

Erwartungen, die ich enttäuschen werde

- Industrie- und Wirtschaftsprobleme, und wie Diskrete Mathematik diese löst

Erwartungen, die ich enttäuschen werde

- Industrie- und Wirtschaftsprobleme, und wie Diskrete Mathematik diese löst
- Einblicke in neue eigene Resultate

Satz

Die Anzahl der Multiketten $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{l-1}$ im Poset der m-teilbaren nichtkreuzenden Partitionen assoziiert zur Spiegelungsgruppe vom Typ D_n mit $Rang(x_i) = s_1 + s_2 + \cdots + s_i$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$, ist durch

$$
\begin{aligned}
&2\binom{n-1}{s_1}\binom{m(n-1)}{s_2}\cdots\binom{m(n-1)}{s_l}\\
&+m\sum_{j=2}^{l}\binom{n-1}{s_1}\binom{m(n-1)}{s_2}\cdots\binom{m(n-1)-1}{s_j-2}\cdots\binom{m(n-1)}{s_l}\\
&\qquad\qquad+\binom{n-2}{s_1-2}\binom{m(n-1)}{s_2}\cdots\binom{m(n-1)}{s_l}
\end{aligned}
$$

gegeben, wo $s_1 + s_2 + \cdots + s_l = n$.

Erwartungen, die ich enttäuschen werde

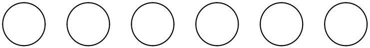
- Industrie- und Wirtschaftsprobleme, und wie Diskrete Mathematik diese löst
- Einblicke in neue eigene Resultate

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

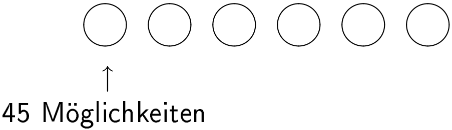
Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?



Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?



Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13

44 Möglichkeiten

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34

$\uparrow$

43 Möglichkeiten

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 ◯ ◯ ◯

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 ◯ ◯ ◯

$\uparrow$

42 Möglichkeiten

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 41

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 41 ◯ ◯

$\uparrow$

41 Möglichkeiten

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 41 36

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 41 36 ◯

$\uparrow$

40 Möglichkeiten

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 41 36 23

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 41 36 23

Also insgesamt:

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

13 34 10 41 36 23

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{}$$

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

10 13 23 34 36 41

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Wieviele?

Wieviele Lottotipps gibt es 6 aus 45?

10 13 23 34 36 41

Also insgesamt:

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060.$$

Wieviele?

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060.$$

Wieviele?

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060.$$

Die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Tipp zu landen, ist also

$$\frac{1}{8145060} = 0.000000122774\dots$$

Wieviele?

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060.$$

Die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Tipp zu landen, ist also

$$\frac{1}{8145060} = 0.000000122774\dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, das nicht zu tun, ist

$$1 - \frac{1}{8145060} = 0.999999877226\dots$$

Wieviele Teilnehmer an einer Ziehung braucht es, dass wenigstens einer (mit 50% Wahrscheinlichkeit) den richtigen Tipp errät?

Wieviele?

Wieviele Teilnehmer an einer Ziehung braucht es, dass wenigstens einer (mit 50% Wahrscheinlichkeit) den richtigen Tipp errät?

$$0.999999877226^{5500000} = 0.509026\dots$$

Wieviele?

Wieviele Teilnehmer an einer Ziehung braucht es, dass wenigstens einer (mit 50% Wahrscheinlichkeit) den richtigen Tipp errät?

$$0.999999877226^{5500000} = 0.509026\ldots$$

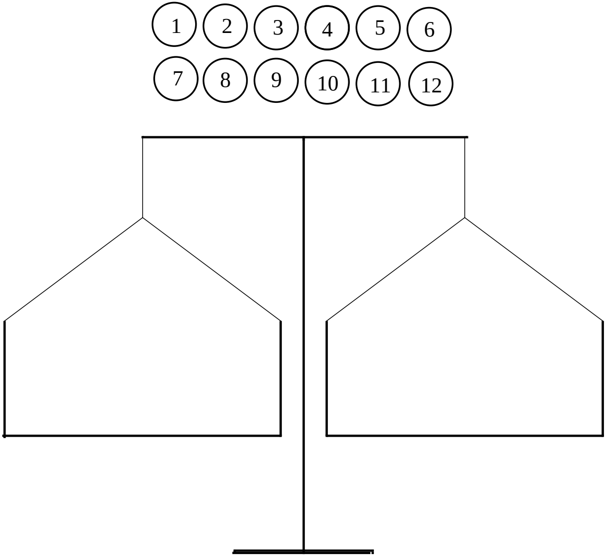
Mehr als 5.5 Millionen!

Wieviele?

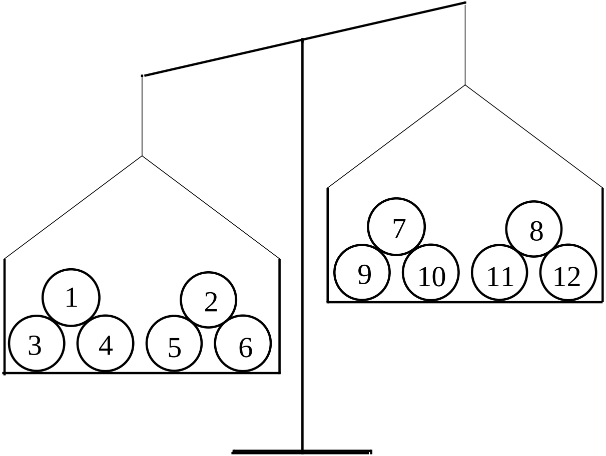
Die Frage der Abzählung („Wieviele?“) taucht nicht nur in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern in fast allen Gebieten der Mathematik auf, sie ist die Grundlage für Laufzeitanalysen von Computeralgorithmen, für die Analyse von Modellen der Statistischen Physik, um nur einige zu nennen.

Das Wägeproblem

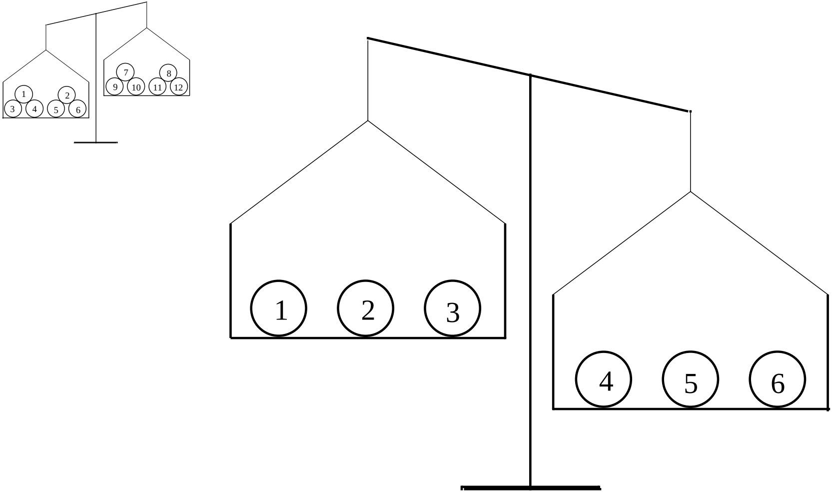
Das Wägeproblem



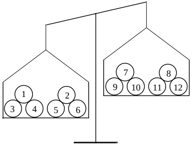
Das Wägeproblem

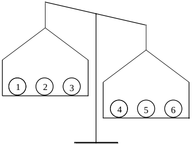


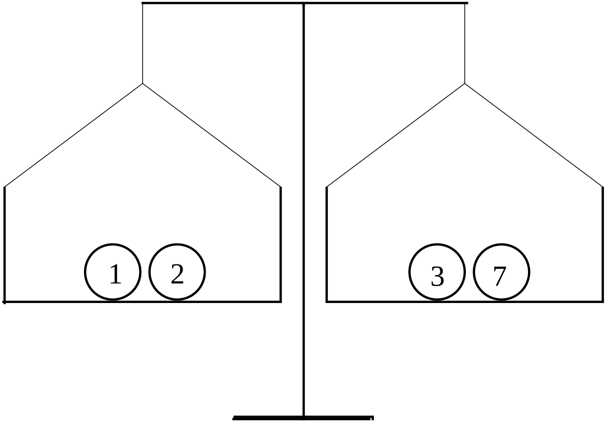
Das Wägeproblem



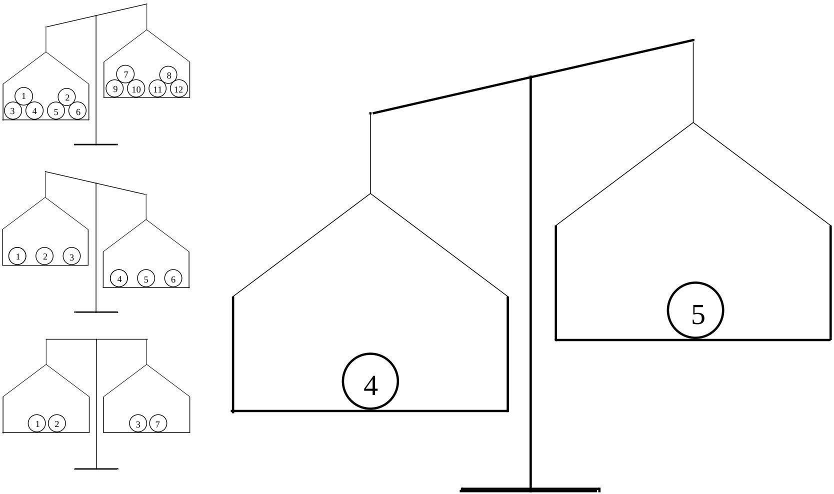
Das Wägeproblem







Das Wägeproblem



Das Wägeproblem

Abstrakt:

Abstrakt:

Zu Beginn gibt es genau 24 Möglichkeiten:
Münze 1 ist zu schwer/zu leicht, ..., Münze 12 ist zu schwer/zu leicht.

Das Wägeproblem

Abstrakt:

Zu Beginn gibt es genau 24 Möglichkeiten:
Münze 1 ist zu schwer/zu leicht, ..., Münze 12 ist zu schwer/zu leicht.

Bei jeder Wägung gibt es 3 mögliche Ausgänge.

Das Wägeproblem

Abstrakt:

Zu Beginn gibt es genau 24 Möglichkeiten:
Münze 1 ist zu schwer/zu leicht, . . . , Münze 12 ist zu schwer/zu leicht.

Bei jeder Wägung gibt es 3 mögliche Ausgänge.

Strategie: Konstruiere die Wägungen so, dass bei jeder Wägung die Anzahl der Möglichkeiten (in etwa) gedrittelt wird.

Das Wägeproblem

Also:

Also:

$$24$$

Das Wägeproblem

Also:

$$
\begin{array}{ccc}
 & 24 & \\
8 & 8 & 8
\end{array}
$$

Also:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 24 & & & & \\
 & 8 & & & 8 & & & 8 & \\
3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2
\end{array}
$$

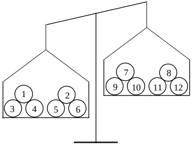
Das Wägeproblem

Also:

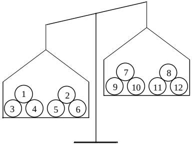
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 24 & & & & \\ & 8 & & & 8 & & & 8 & \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1\,1\,1 & 1\,1\,1 & 1\,1 & 1\,1\,1 & 1\,1\,1 & 1\,1 & 1\,1\,1 & 1\,1\,1 & 1\,1 \end{array}$$

Wie haben wir das gemacht?

Das Wägeproblem



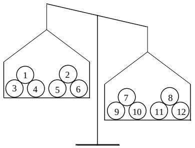
Wie haben wir das gemacht?



Wie haben wir das gemacht?

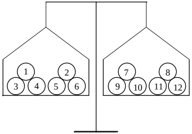
- Falls links schwerer: 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 7L, 8L, 9L, 10L, 11L, 12L (12 Möglichkeiten)

Das Wägeproblem



Wie haben wir das gemacht?

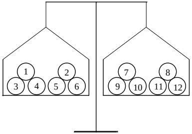
- Falls links schwerer: 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 7L, 8L, 9L, 10L, 11L, 12L (12 Möglichkeiten)
- Falls links leichter: 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7S, 8S, 9S, 10S, 11S, 12S (12 Möglichkeiten)



Wie haben wir das gemacht?

- Falls links schwerer: 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 7L, 8L, 9L, 10L, 11L, 12L (12 Möglichkeiten)
- Falls links leichter: 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7S, 8S, 9S, 10S, 11S, 12S (12 Möglichkeiten)
- Falls Gleichgewicht: Unmöglich! (0 Möglichkeiten)

Das Wägeproblem

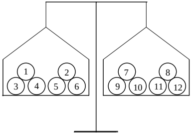


Wie haben wir das gemacht?

- Falls links schwerer: 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 7L, 8L, 9L, 10L, 11L, 12L (12 Möglichkeiten)
- Falls links leichter: 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7S, 8S, 9S, 10S, 11S, 12S (12 Möglichkeiten)
- Falls Gleichgewicht: Unmöglich! (0 Möglichkeiten)

Also:

Das Wägeproblem

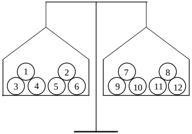


Wie haben wir das gemacht?

- Falls links schwerer: 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 7L, 8L, 9L, 10L, 11L, 12L (12 Möglichkeiten)
- Falls links leichter: 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7S, 8S, 9S, 10S, 11S, 12S (12 Möglichkeiten)
- Falls Gleichgewicht: Unmöglich! (0 Möglichkeiten)

Also: 12:12:0 statt 8:8:8.

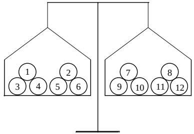
Das Wägeproblem



Wie haben wir das gemacht?

- Falls links schwerer: 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 7L, 8L, 9L, 10L, 11L, 12L (12 Möglichkeiten)
- Falls links leichter: 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7S, 8S, 9S, 10S, 11S, 12S (12 Möglichkeiten)
- Falls Gleichgewicht: Unmöglich! (0 Möglichkeiten)

Also: 12:12:0 statt 8:8:8. Extrem ungeschickt!

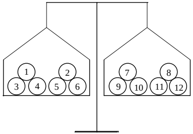


Wie haben wir das gemacht?

- Falls links schwerer: 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 7L, 8L, 9L, 10L, 11L, 12L (12 Möglichkeiten)
- Falls links leichter: 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7S, 8S, 9S, 10S, 11S, 12S (12 Möglichkeiten)
- Falls Gleichgewicht: Unmöglich! (0 Möglichkeiten)

Also: 12:12:0 statt 8:8:8. Extrem ungeschickt!
Wir hätten etwa Münzen 1,2,3,4 gegen die Münzen 5,6,7,8 abwägen sollen.

Das Wägeproblem

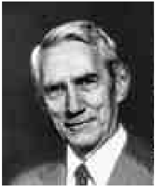


Wie haben wir das gemacht?

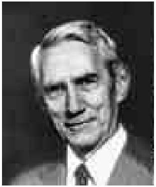
- Falls links schwerer: 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 7L, 8L, 9L, 10L, 11L, 12L (12 Möglichkeiten)
- Falls links leichter: 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7S, 8S, 9S, 10S, 11S, 12S (12 Möglichkeiten)
- Falls Gleichgewicht: Unmöglich! (0 Möglichkeiten)

Also: 12:12:0 statt 8:8:8. Extrem ungeschickt!
Wir hätten etwa Münzen 1,2,3,4 gegen die Münzen 5,6,7,8 abwägen sollen.
Wenn man es richtig macht, kann man die falsche Münze tatsächlich immer in 3 Wägungen bestimmen.

Der erste Hauptsatz der Informationstheorie von Claude Shannon

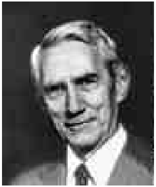


Der erste Hauptsatz der Informationstheorie von Claude Shannon



Versucht man unter N Möglichkeiten die richtige mit Hilfe von Tests zu finden, die k mögliche Ausgänge haben,

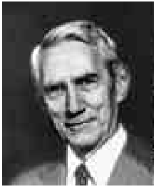
Der erste Hauptsatz der Informationstheorie von Claude Shannon



Versucht man unter N Möglichkeiten die richtige mit Hilfe von Tests zu finden, die k mögliche Ausgänge haben,

Beim Wägeproblem: $N = 24$, $k = 3$;

Der erste Hauptsatz der Informationstheorie von Claude Shannon



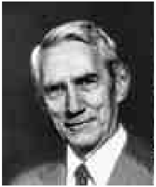
Versucht man unter N Möglichkeiten die richtige mit Hilfe von Tests zu finden, die k mögliche Ausgänge haben, dann geht das (im schlechtesten Fall) nicht schneller als in

$$\log_k(N)$$

Tests.

Beim Wägeproblem: $N = 24$, $k = 3$;

Der erste Hauptsatz der Informationstheorie von Claude Shannon



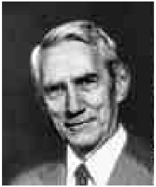
Versucht man unter N Möglichkeiten die richtige mit Hilfe von Tests zu finden, die k mögliche Ausgänge haben, dann geht das (im schlechtesten Fall) nicht schneller als in

$$\log_k(N)$$

Tests.
Beim Wägeproblem: $N = 24$, $k = 3$;

($x = \log_k(N)$ ist jene Zahl, sodass $k^x = N$ gilt.)

Der erste Hauptsatz der Informationstheorie von Claude Shannon



Versucht man unter N Möglichkeiten die richtige mit Hilfe von Tests zu finden, die k mögliche Ausgänge haben, dann geht das (im schlechtesten Fall) nicht schneller als in

$$\log_k(N)$$

Tests.

Beim Wägeproblem: $N = 24$, $k = 3$; $\log_3(24) = 2.89279\ldots$

($x = \log_k(N)$ ist jene Zahl, sodass $k^x = N$ gilt.)

Das Wägeproblem

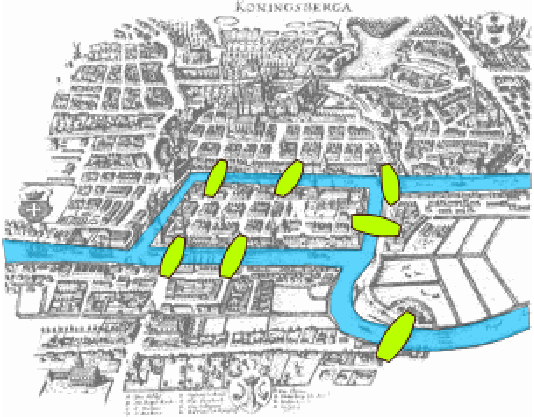
Wir befinden uns mit dem Wägeproblem mitten in der Informationstheorie, die die theoretischen Grundlagen für Suchprobleme bereitstellt.

Wir befinden uns mit dem Wägeproblem mitten in der Informationstheorie, die die theoretischen Grundlagen für Suchprobleme bereitstellt.
Die Probleme von Datenkompression, von Datensortierung gehören hier ebenso her, wie der intelligente Aufbau von Datenbanken beziehungsweise die Entwicklung von effizienten Algorithmen zur Auffindung von Daten in Datenbanken.

Die Brücken von Königsberg

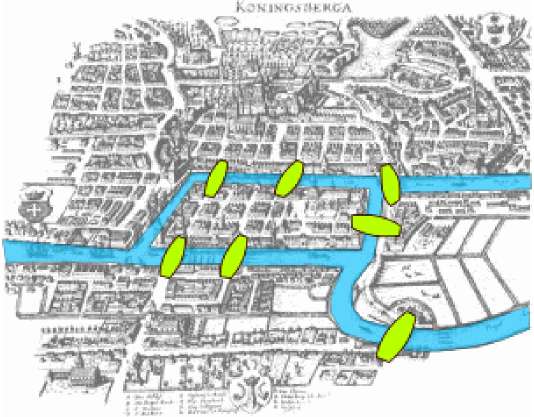
Die Brücken von Königsberg

Hier ist Königsberg am Fluss Pregel:



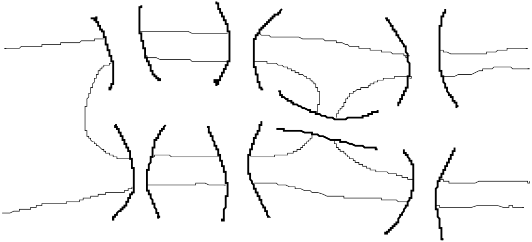
Die Brücken von Königsberg

Hier ist Königsberg am Fluss Pregel:



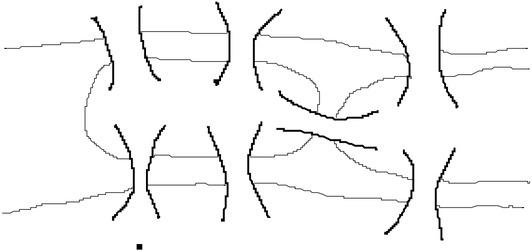
Ist es möglich einen Spaziergang zu unternehmen, der jede Brücke genau einmal passiert und schlussendlich zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

Schematisch:



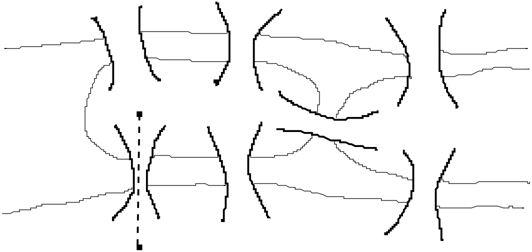
Die Brücken von Königsberg

Ein Versuch eines „Brückenrundganges“:



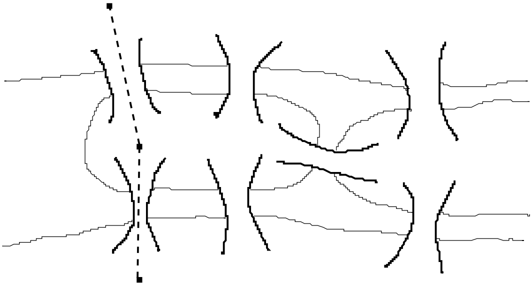
Die Brücken von Königsberg

Ein Versuch eines „Brückenrundganges“:

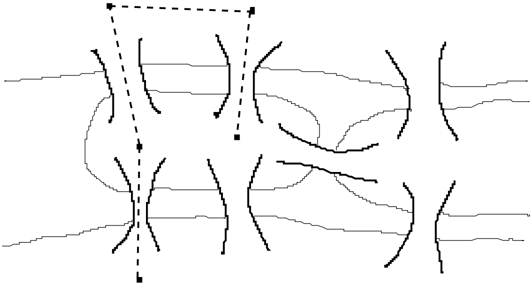


Die Brücken von Königsberg

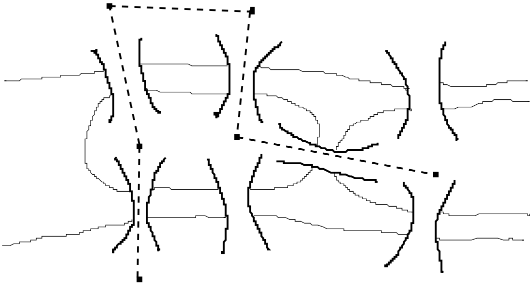
Ein Versuch eines „Brückenrundganges“:



Ein Versuch eines „Brückenrundganges“:

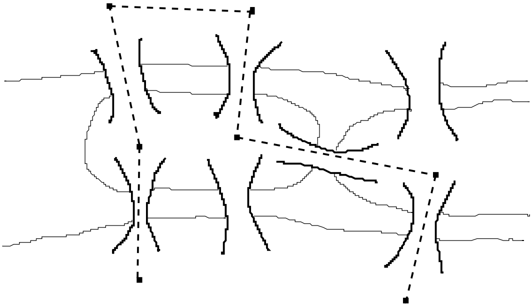


Ein Versuch eines „Brückenrundganges“:

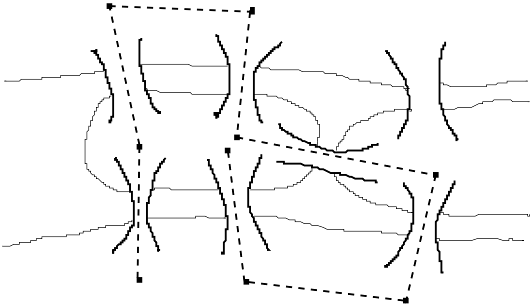


Die Brücken von Königsberg

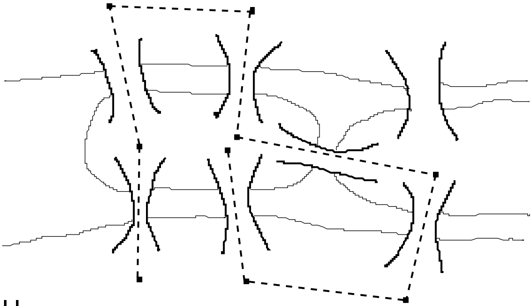
Ein Versuch eines „Brückenrundganges“:



Ein Versuch eines „Brückenrundganges“:

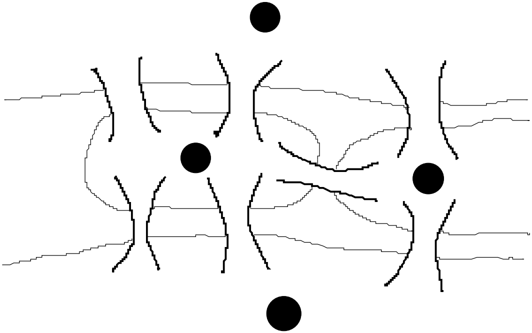


Ein Versuch eines „Brückenrundganges“:

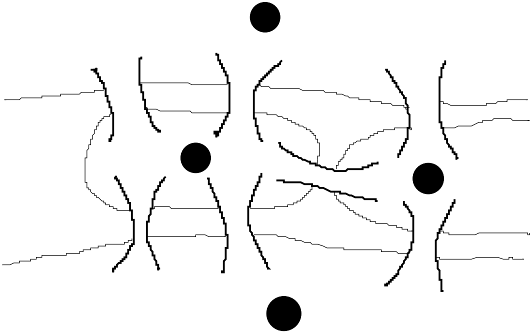


Hmm ...

Abstrahieren wir:

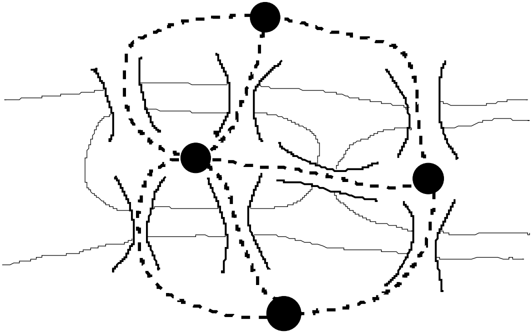


Abstrahieren wir:



Setzen wir in jedes der vier Landstücke einen dicken Punkt,

Abstrahieren wir:

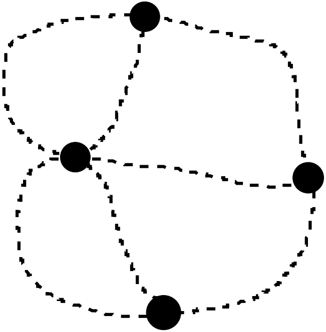


Setzen wir in jedes der vier Landstücke einen dicken Punkt,

und verbinden wir Punkte, falls die entsprechenden Landstücke durch Brücken verbunden sind.

Die Brücken von Königsberg

Abstrahieren wir:



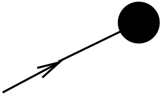
Die neue Aufgabe: Man finde einen geschlossenen Weg entlang der strichlierten Linien, die jede strichlierte Linie genau einmal passiert.

Leonhard Eulers Beobachtung:

Leonhard Eulers Beobachtung:

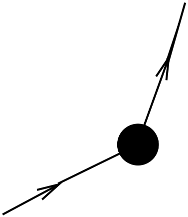
Wenn wir uns auf einen der dicken Punkte konzentrieren, müssen wir auf einem geschlossenen Weg genauso oft im Punkt ankommen, wie wir ihn verlassen.

Leonhard Eulers Beobachtung:



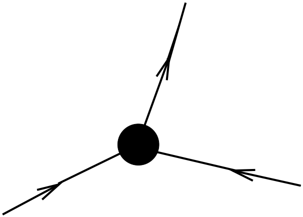
Wenn wir uns auf einen der dicken Punkte konzentrieren, müssen wir auf einem geschlossenen Weg genauso oft im Punkt ankommen, wie wir ihn verlassen.

Leonhard Eulers Beobachtung:



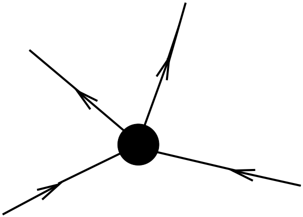
Wenn wir uns auf einen der dicken Punkte konzentrieren, müssen wir auf einem geschlossenen Weg genauso oft im Punkt ankommen, wie wir ihn verlassen.

Leonhard Eulers Beobachtung:



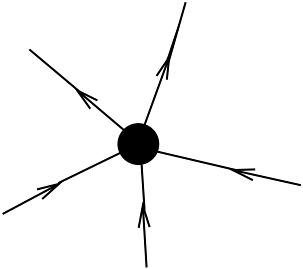
Wenn wir uns auf einen der dicken Punkte konzentrieren, müssen wir auf einem geschlossenen Weg genauso oft im Punkt ankommen, wie wir ihn verlassen.

Leonhard Eulers Beobachtung:



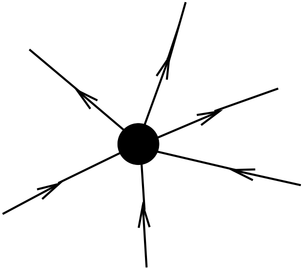
Wenn wir uns auf einen der dicken Punkte konzentrieren, müssen wir auf einem geschlossenen Weg genauso oft im Punkt ankommen, wie wir ihn verlassen.

Leonhard Eulers Beobachtung:



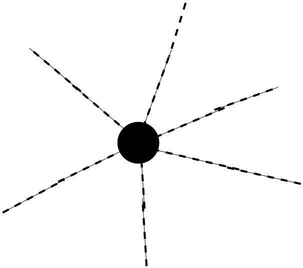
Wenn wir uns auf einen der dicken Punkte konzentrieren, müssen wir auf einem geschlossenen Weg genauso oft im Punkt ankommen, wie wir ihn verlassen.

Leonhard Eulers Beobachtung:



Wenn wir uns auf einen der dicken Punkte konzentrieren, müssen wir auf einem geschlossenen Weg genauso oft im Punkt ankommen, wie wir ihn verlassen.

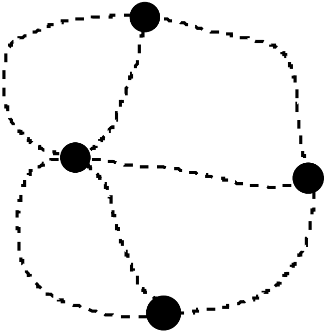
Leonhard Eulers Beobachtung:



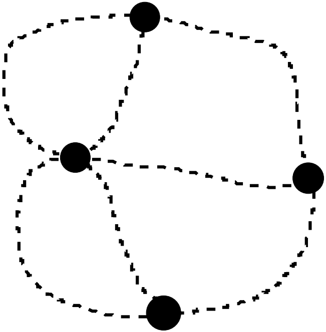
Wenn wir uns auf einen der dicken Punkte konzentrieren, müssen wir auf einem geschlossenen Weg genauso oft im Punkt ankommen, wie wir ihn verlassen.

Jeder Punkt muss mit einer geraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden sein!

Unsere Figur:

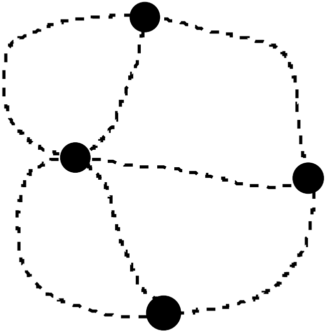


Unsere Figur:



Sogar jeder (!) Knoten ist mit einer ungeraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden.

Unsere Figur:



Sogar jeder (!) Knoten ist mit einer ungeraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden.
Es kann also so einen Spaziergang nicht geben!

Der Satz von Euler

Der Satz von Euler

In einer zusammenhängenden Figur, die aus dicken Punkten und strichlierten Linien besteht, welche dicke Punkte verbinden, gibt es genau dann einen geschlossenen Weg, der jede Linie genau einmal passiert, wenn jeder dicke Punkt mit einer geraden Anzahl von strichlierten Linien verbunden ist.

Die Lösung des Königsberger Brückenproblems wird oft als die Geburtsstunde der sogenannten Graphentheorie[2] bezeichnet.

[2] Unter Graphen versteht man in diesem Zusammenhang solche Figuren, die aus dicken Punkten bestehen, die zum Teil durch Linien verbunden sind.

Die Lösung des Königsberger Brückenproblems wird oft als die Geburtsstunde der sogenannten Graphentheorie[2] bezeichnet.

Und damit ist man in der Netzwerktheorie und insbesondere der kombinatorischen Optimierung.

[2]Unter Graphen versteht man in diesem Zusammenhang solche Figuren, die aus dicken Punkten bestehen, die zum Teil durch Linien verbunden sind.

Ein listiger Streich

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Ein listiger Streich

"jeu de taquin"

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Ein listiger Streich

"jeu de taquin" (= Neckspiel)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Ein listiger Streich

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	14	15	12

Ein listiger Streich

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

1	2	3	4
5	6	7	8
9		10	11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

1	2	3	4
5		7	8
9	6	10	11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

1	2	3	4
5	7		8
9	6	10	11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

1	2		4
5	7	3	8
9	6	10	11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

1		2	4
5	7	3	8
9	6	10	11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

	1	2	4
5	7	3	8
9	6	10	11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

5	1	2	4
	7	3	8
9	6	10	11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

5	1	2	4
9	7	3	8
	6	10	11
13	14	15	12

Ein listiger Streich

5	1	2	4
9	7	3	8
13	6	10	11
	14	15	12

Ein listiger Streich

5	1	2	4
9	7	3	8
13	6	10	11
14		15	12

Ein listiger Streich

5	1	2	4
9	7	3	8
13	6	10	11
14	15		12

Ein listiger Streich

5	1	2	4
9	7	3	8
13	6	10	11
14	15	12	

Ein listiger Streich

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

Ein listiger Streich

15	14	13	12

11	10	9	8

7	6	5	4

3	2	1	16

Ein listiger Streich

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	16

Ein listiger Streich

15	14	13	12

11	10	9	8

7	6	5	4

3	2	1	16

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	16

Ein listiger Streich

15	14	13	12

11	10	9	8

7	6	5	4

3	2	1	16

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	16

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

Ein listiger Streich

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	16

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	16

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

$\longrightarrow$ Jede Spielsituation entspricht einer bestimmten Anordnung („Permutation“) der Zahlen von 1 bis 16.

Ein listiger Streich

Aufgabe:

Ein listiger Streich

Aufgabe:
Bringe die Zahlen

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

durch sukzessives Vertauschen von zwei Zahlen in die richtige Ordnung

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ein listiger Streich

Aufgabe:
Bringe die Zahlen

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 16$$

durch sukzessives Vertauschen von zwei Zahlen in die richtige Ordnung

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

Satz

Für eine gegebene Permutation ist die Anzahl der Vertauschungen, die man benötigt immer eine gerade Anzahl oder immer eine ungerade Anzahl.

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ {\color{red}16}$$

durch Vertauschungen:

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ {\color{red}16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

durch Vertauschungen:

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ {\color{red}16}$$

durch Vertauschungen:

$${\color{red}1}\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ {\color{red}15}\ {\color{red}16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 15\ \color{red}{16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ {\color{red}16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 15\ {\color{red}16}$$

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ {\color{red}16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ {\color{red}2}\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ {\color{red}14}\ 15\ {\color{red}16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

durch Vertauschungen:

1 2 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 14 15 16

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

durch Vertauschungen:

1 2 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 14 15 16

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ {\color{red}16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ {\color{red}3}\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ {\color{red}13}\ 14\ 15\ {\color{red}16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 13\ 14\ 15\ \color{red}{16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 13\ 14\ 15\ \color{red}{16}$$

Ordnen wir also

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

durch Vertauschungen:

1 2 3 4 11 10 9 8 7 6 5 12 13 14 15 16

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 12\ 13\ 14\ 15\ \color{red}{16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 16

durch Vertauschungen:

1 2 3 4 11 10 9 8 7 6 5 12 13 14 15 16

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ \color{red}{5}\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ \color{red}{11}\ 12\ 13\ 14\ 15\ \color{red}{16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ \color{red}{16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 16$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 16$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 9\ 8\ 7\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 9\ 8\ 7\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ \color{red}{16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ {\color{red}16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 9\ 8\ 7\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ {\color{red}16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \color{red}{7}\ 8\ \color{red}{9}\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ \color{red}{16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ \color{red}{16}$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ \color{red}{16}$$

Ein listiger Streich

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 16$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

Das waren 7 Vertauschungen, eine ungerade Anzahl von Vertauschungen.

Ordnen wir also

$$15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 16$$

durch Vertauschungen:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16$$

Das waren 7 Vertauschungen, eine ungerade Anzahl von Vertauschungen.
Daher: Egal wie man es macht, man braucht eine ungerade Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	$\bullet$	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	•	4
3	2	5	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
11	10	•	8
7	6	9	4
3	2	5	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
11	•	10	8
7	6	9	4
3	2	5	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
•	11	10	8
7	6	9	4
3	2	5	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
7	11	10	8
●	6	9	4
3	2	5	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
7	11	10	8
3	6	9	4
•	2	5	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
7	11	10	8
3	6	9	4
2	•	5	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
7	11	10	8
3	6	9	4
2	5	•	1

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Ein listiger Streich

15	14	13	12
7	11	10	8
3	6	9	4
2	5	1	•

Aber, wenn am Anfang und am Ende das leere Feld rechts unten sein soll, dann geht das nur in einer geraden Anzahl von Zügen!

Die natürliche Umgebung des jeu de taquin-Spieles gehört zum Gebiet der Algebra: Gruppentheorie.

Ein listiger Streich

Die natürliche Umgebung des jeu de taquin-Spieles gehört zum Gebiet der Algebra: Gruppentheorie.
Im konkreten Fall haben wir es mit einer sogenannten *Spiegelungsgruppe* oder *Coxetergruppe* zu tun.

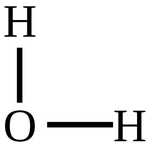
Statistische Physik

Statistische Physik

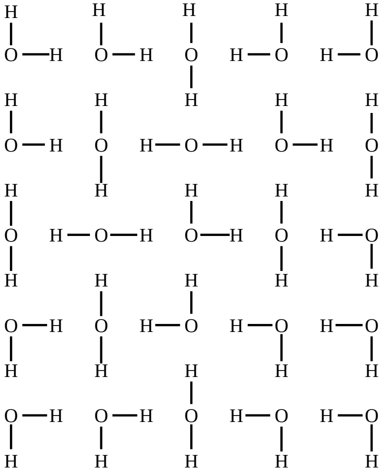
Statistische Physik versucht globale Phänomene zu analysieren, die sich aus lokalen Beschränkungen ergeben.

(idealisiertes) Eis:

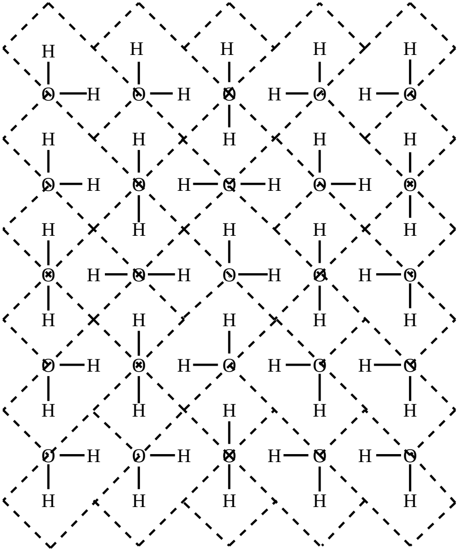
(idealisiertes) Eis:



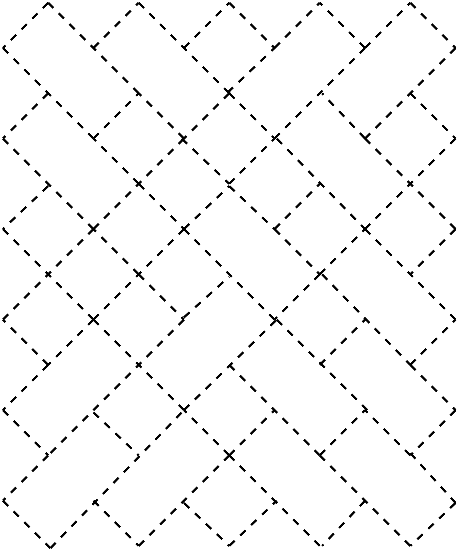
(idealisiertes) Eis:



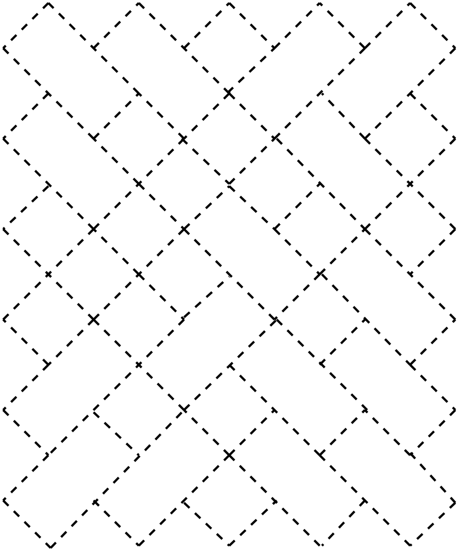
(idealisiertes) Eis:



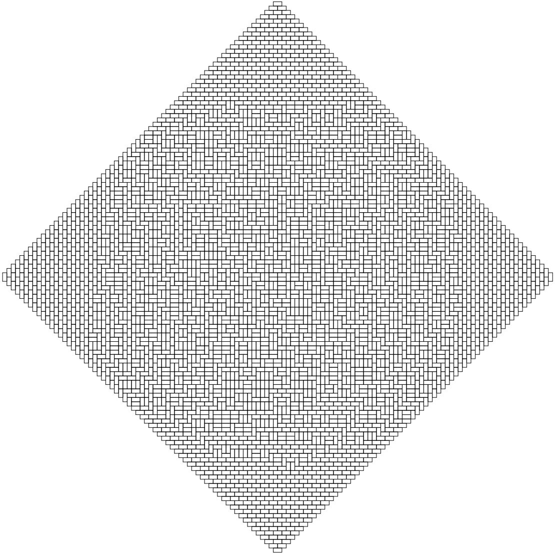
(idealisiertes) Eis:



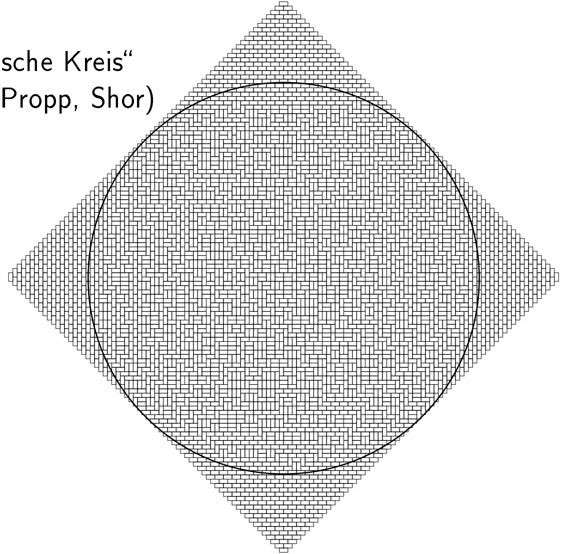
(idealisiertes) Eis:

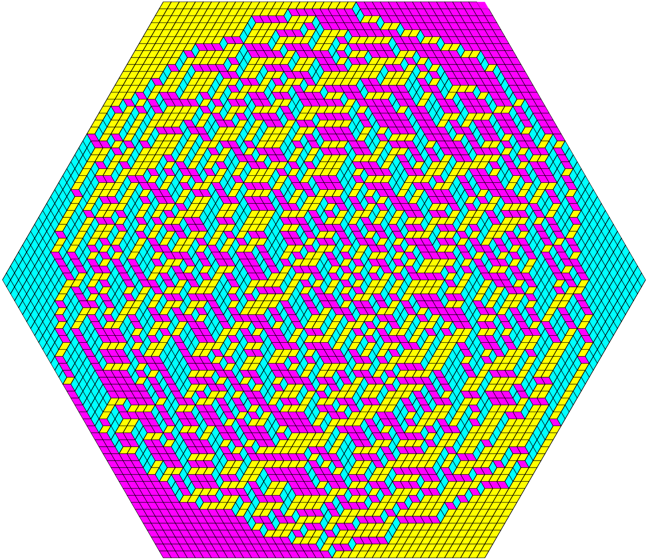


Pflasterungen!



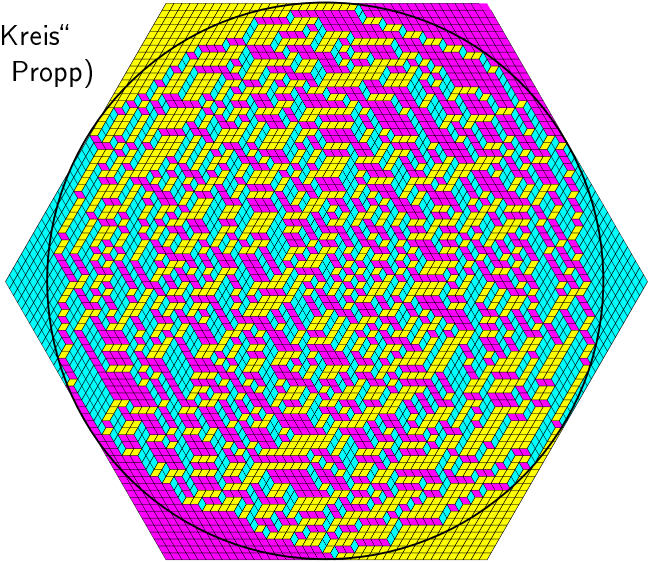
Der „Arktische Kreis"
(Jockush, Propp, Shor)



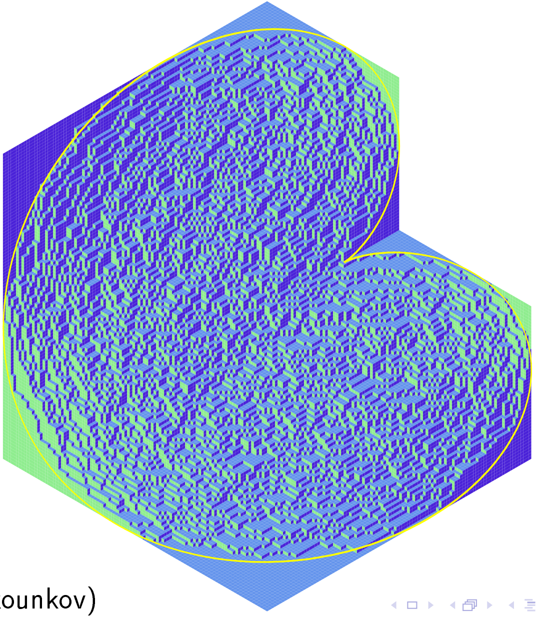


Statistische Physik

Der „Arktische Kreis“
(Cohen, Larsen, Propp)



Statistische Physik



(Kenyon, Okounkov)

9 4 0 3 4 8 4 9 6 5 3 1 7
7 9 6 7 8 4 5 8 2 8 9 6 4 4
3 0 5 1 0 5 4 0 4 3 5
6 9 7 2 6 3 3 5 9 7
2 3 6 4 2 8
9 1 5 6 3 7 9 8 0 0 5 4 6
2 9 1 9 5 8 9 4 5 4
6 9 4 2 6 2 9 4 8 8 4 2 4
2 8 5 6 0 4 5 1 9 2 9
7 1 1 7 7 7 4 6 7 7 2 7 4 9
6 5 6 8 1 6 3 2 3 5 6
3 1 8 3 4 8 7 6 4 0
9 2 8 3 2 9 2 0 7 8 9 9 1 2 3 7 8
9 1 5 5 4 4 1 1 4 8 1 0
1 9 1 8 4 4 1 0 3 6
2 6 0 0 1 5 5 0 9 4
7 9 0 4 1 1 3 3 9 6 6 2 3 3
7 6 5 6 7 7 8 2 4 3 4 1 5 8 6
4 6 9 2 5 5 9 6 1 4
6 8 1 8
8 8 9 1 2 9 5 0 5 5

```
    8   8       7     6 6     5     5   4 4 4     3 3 3 3   2 2 2 2 2   1 1 1 1
    8   8 8     7   6     6   5   5     4     4   3             2       1
    8     8 8   7   6         5 5       4     4   3             2       1
    8       8   7     6 6     5         4 4       3 3 3 3       2       1 1 1 1
    8     8 8   7         6   5 5       4 4       3             2       1
    8   8 8     7   6     6   5   5     4   4     3             2       1
    8   8       7     6 6     5     5   4     4   3 3 3 3       2       1 1 1 1
```

```
0       0     1     2 2 2 2 2 3     3 4 4 4 4 5       5     6     7 7 7 7 7 8 9     9
0 0   0 0   1   1       2     3     3 4       5 5   5 5   6   6       7     8 9   9
0   0   0 1       1     2     3     3 4       5   5   5 6       6     7     8 9 9
0       0 1       1     2     3 3 3 3 4 4 4 4 5       5 6       6     7     8 9
0       0 1 1 1 1 1     2     3     3 4       5       5 6 6 6 6 6     7     8 9 9
0       0 1       1     2     3     3 4       5       5 6       6     7     8 9   9
0       0 1       1     2     3     3 4 4 4 4 5       5 6       6     7     8 9     9
```