Musik UND Mathematik?

Persönliche Ansichten zu einer schwierigen Beziehung

Christian Krattenthaler

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

Computerpräsentation angefertigt von Theresia Eisenkölbl

Musik UND Mathematik?

Robert SCHUMANN (1810 – 1856)
„Aveu“ aus Carnaval op. 9

„Musik und Mathematik, das liegt ja ganz nahe beieinander!“

„Musik und Mathematik, das liegt ja ganz nahe beieinander!“

„Ist das wirklich so?“

Ein prominenter Besucher zum Dekan der Fakultät für Mathematik der Universität Wien:

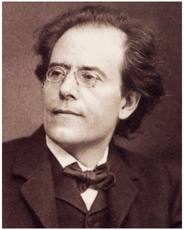
“I hear that you are chairing a department of pianists!“

(*„Ich höre, dass Sie ein Institut von Pianisten leiten!“*)

Wieso gibt es so viele Mathematiker, die auch eine starke Affinität zur Musik haben, und wieso gibt es so viele Musiker, die auch eine starke Affinität zur Mathematik haben?

Wie sieht der typische Mathematiker aus?

Wie sieht der typische Mathematiker aus?

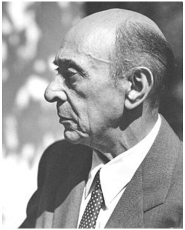


Gustav
Mahler

Wie sieht der typische Mathematiker aus?

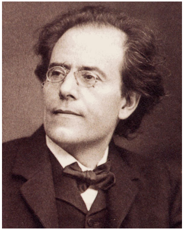
Dmitri
Schostakowitsch

Wie sieht der typische Mathematiker aus?



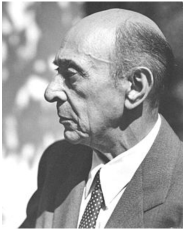
Arnold Schönberg

Wie sieht der typische Mathematiker aus?



Gustav
Mahler

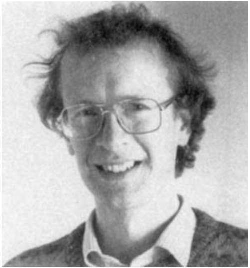
Dmitri
Schostakowitsch



Arnold
Schönberg

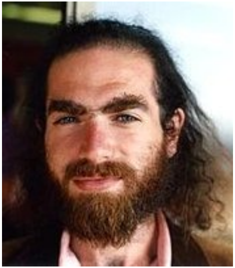
Wie sieht der typische Musiker aus?

Wie sieht der typische Musiker aus?



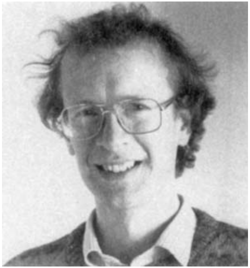
Andrew
Wiles

Wie sieht der typische Musiker aus?

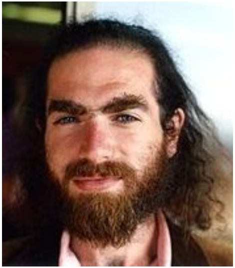


Grigori
Perelman

Wie sieht der typische Musiker aus?



Andrew
Wiles



Grigori
Perelman

Musik . . . $\longrightarrow$ Kunstform

Musik $\quad \ldots \quad \longrightarrow$ Kunstform

Mathematik $\quad \ldots \quad \longrightarrow$ Wissenschaft

1 $\sqrt{2}$ 12 8 $\oint$

$5 \sum k^2$ 16% $0.123456789\ldots$

$\dfrac{3}{14}$

8 π $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

27 175560 $\dfrac{2}{7}$ 52954

20.5 e 14 $99.999\ldots$

Wieso gibt es so viele Mathematiker, die auch eine starke Affinität zur Musik haben, und wieso gibt es so viele Musiker, die auch eine starke Affinität zur Mathematik haben?

Mathematik UND Musik sind etwas für Herz UND Hirn.

Herz in der Musik

Gute Laune!

Scott Joplin (1867/1868? – 1917)
Maple Leaf Rag (Beginn)

Herz in der Musik

Schlechte Laune!

Robert Schumann (1810 – 1856)
Pantalon et Colombine (Beginn) aus Carnaval op. 9

Herz in der Musik

Todtraurig

Franz Schubert (1797 – 1828)
Andantino (Beginn) aus der Sonate in A-Dur, D 959

Herz in der Musik

Himmelhochjauchzend

Franz Schubert (1797 – 1828)
Impromptu As-Dur, D 899, Nr. 4 (Schluß)

Herz in der Musik

Eleganz

Frédéric Chopin (1810 – 1849)
Grande Valse Brillante Es-Dur, op. 18 (Beginn)

Herz in der Musik

Humor in der Musik

Humor in der Musik

Max Reger (1873 – 1916)
Humoreske D-Dur, op. 20/1

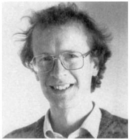
Herz in der Musik

Tour de force!

Franz Liszt (1811 – 1886)
Sonate h-moll (Ausschnitt)

Herz in der Mathematik

Herz in der Mathematik



Andrew Wiles

Theorem (Wiles, Taylor 1995)

(*Großer Fermatscher Satz*)

Sei n eine natürliche Zahl größer als oder gleich 3. Dann gibt es keine natürlichen Zahlen x, y, z, sodaß

$$x^n + y^n = z^n.$$

Andrew Wiles

Herz in der Mathematik

Herz in der Mathematik

Auszug aus Gutachten über mathematische Artikel:

"This is a very nice paper."

(„Das ist ein sehr schöner Artikel.")

Herz in der Mathematik

Auszug aus Gutachten über mathematische Artikel:

"This is a very nice paper."

(„Das ist ein sehr schöner Artikel.")

„Das ist ein sehr eleganter Beweis!"

Eleganz

Theorem

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Theorem

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, sagen wir, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., 1031.
Wir betrachten nun

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 1031 + 1.$$

Diese (große) Zahl läßt sich auch in Primfaktoren zerlegen. Aber 2 teilt diese Zahl nicht, 3 auch nicht, 5 auch nicht, ..., 1031 auch nicht. Das können daher nicht alle Primzahlen gewesen sein.

Theorem

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, sagen wir, $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \ldots, p_n$.
Wir betrachten nun

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \cdot \cdots \cdot p_n + 1.$$

Diese (große) Zahl läßt sich auch in Primfaktoren zerlegen. Aber p_1 teilt diese Zahl nicht, p_2 auch nicht, p_3 auch nicht, ..., p_n auch nicht. Das können daher nicht alle Primzahlen gewesen sein.

Herz in der Mathematik

Humor in der Mathematik

Humor in der Mathematik

Auszug aus Gutachten über mathematische Artikel:
„Das ist aber ein witziger Beweis!“

Humor in der Mathematik

Humor in der Mathematik

Srinivasa
Ramanujan

Humor in der Mathematik

Eine *Partition* einer Zahl n ist eine Summendarstellung dieser Zahl, wo die Summanden aufsteigend angeordnet sind.

Srinivasa Ramanujan

Humor in der Mathematik

Eine *Partition* einer Zahl n ist eine Summendarstellung dieser Zahl, wo die Summanden aufsteigend angeordnet sind.

Srinivasa Ramanujan

$n = 1$: 1
$n = 2$: 2, $1 + 1$
$n = 3$: 3, $1 + 2$, $1 + 1 + 1$
$n = 4$: 4, $1 + 3$, $2 + 2$, $1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 1 + 1$
$n = 5$: 5, $1 + 4$, $2 + 3$, $1 + 1 + 3$, $1 + 2 + 2$, $1 + 1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Humor in der Mathematik

Eine *Partition* einer Zahl n ist eine Summendarstellung dieser Zahl, wo die Summanden aufsteigend angeordnet sind.

Srinivasa Ramanujan

$n = 1$: 1

$n = 2$: $2,\ 1+1$

$n = 3$: $3,\ 1+2,\ 1+1+1$

$n = 4$: $4,\ 1+3,\ 2+2,\ 1+1+2,\ 1+1+1+1$

$n = 5$: $5,\ 1+4,\ 2+3,\ 1+1+3,\ 1+2+2,\ 1+1+1+2,\ 1+1+1+1+1$

Humor in der Mathematik

Es bezeichne $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n.

Humor in der Mathematik

Es bezeichne $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n.

$n = 1$: 1
$n = 2$: 2, $1 + 1$
$n = 3$: 3, $1 + 2$, $1 + 1 + 1$
$n = 4$: 4, $1 + 3$, $2 + 2$, $1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 1 + 1$
$n = 5$: 5, $1 + 4$, $2 + 3$, $1 + 1 + 3$, $1 + 2 + 2$, $1 + 1 + 1 + 2$,
$1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$$\begin{array}{ccccc}
p(1) = 1 & p(2) = 2, & p(3) = 3, & p(4) = 5, & p(5) = 7 \\
p(6) = 11 & p(7) = 15, & p(8) = 22, & p(9) = 30, & p(10) = 42 \\
p(11) = 56 & p(12) = 77, & p(13) = 101, & p(14) = 135, & p(15) = 176 \\
p(16) = 231 & p(17) = 297, & p(18) = 385, & p(19) = 490, & p(20) = 627
\end{array}$$

Humor in der Mathematik

Es bezeichne $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n.

$n=1$: 1
$n=2$: 2, $1+1$
$n=3$: 3, $1+2$, $1+1+1$
$n=4$: 4, $1+3$, $2+2$, $1+1+2$, $1+1+1+1$
$n=5$: 5, $1+4$, $2+3$, $1+1+3$, $1+2+2$, $1+1+1+2$, $1+1+1+1+1$

$$\begin{array}{ccccc}
p(1)=1 & p(2)=2, & p(3)=3, & p(4)=5, & p(5)=7 \\
p(6)=11 & p(7)=15, & p(8)=22, & p(9)=30, & p(10)=42 \\
p(11)=56 & p(12)=77, & p(13)=101, & p(14)=135, & p(15)=176 \\
p(16)=231 & p(17)=297, & p(18)=385, & p(19)=490, & p(20)=627
\end{array}$$

Humor in der Mathematik

Humor in der Mathematik

Theorem ("Ramanujan's most beautiful theorem" 1919)

$p(5n+4)$ *ist immer durch 5 teilbar.*

Srinivasa Ramanujan

Theorem (Euler)

$$1 + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + \cdots \\ = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots}$$

Ramanujans Beweis:

Das Produkt $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots$ wird mit $(q;q)_\infty$ abgekürzt.

Ramanujans Beweis:

Das Produkt $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots$ wird mit $(q;q)_\infty$ abgekürzt.

Lemma

Sei $\omega^5 = 1$, $\omega \neq 1$. *Dann gilt*

$$(q;q)_\infty(\omega q;\omega q)_\infty(\omega^2 q;\omega^2 q)_\infty(\omega^3 q;\omega^3 q)_\infty(\omega^4 q;\omega^4 q)_\infty = \frac{(q^5;q^5)_\infty^6}{(q^{25};q^{25})_\infty}.$$

Ramanujans Beweis:

Das Produkt $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots$ wird mit $(q;q)_\infty$ abgekürzt.

Lemma

Sei $\omega^5 = 1$, $\omega \neq 1$. *Dann gilt*

$$(q;q)_\infty(\omega q;\omega q)_\infty(\omega^2 q;\omega^2 q)_\infty(\omega^3 q;\omega^3 q)_\infty(\omega^4 q;\omega^4 q)_\infty = \frac{(q^5;q^5)_\infty^6}{(q^{25};q^{25})_\infty}.$$

Lemma

$$\frac{(q;q)_\infty}{q(q^{25};q^{25})_\infty} = q^{-1}R - 1 - qR^{-1},$$

wobei R *eine Potenzreihe in* q^5 *ist.*

Ramanujans Beweis:

Lemma

$$q^{-5}R^5 - 11 - q^5R^{-5} = \frac{(q^5;q^5)_\infty^6}{q^5(q^{25};q^{25})_\infty^6}.$$

Ramanujans Beweis:

$$\begin{aligned}1 &+ p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + p(5)q^5\\ &+ p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + p(9)q^9 + p(10)q^{10}\\ &+ p(11)q^{11} + p(12)q^{12} + p(13)q^{13} + p(14)q^{14} + \dots\\ &= q^4 \frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6} \cdot (q^{-4}R^4 + q^{-3}R^3 + 2q^{-2}R^2 + 3q^{-1}R + 5\\ &\qquad - 3qR^{-1} + 2q^2R^{-2} - q^3R^{-3} + q^4R^{-4})\end{aligned}$$

Ramanujans Beweis:

$$\begin{aligned}
1 &+ p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + {\color{red}p(4)q^4} + p(5)q^5 \\
&+ p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + p(9)q^9 + p(10)q^{10} \\
&+ p(11)q^{11} + p(12)q^{12} + p(13)q^{13} + p(14)q^{14} + \dots \\
&= q^4 \frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6} \cdot (q^{-4}R^4 + q^{-3}R^3 + 2q^{-2}R^2 + 3q^{-1}R + 5 \\
&\qquad - 3qR^{-1} + 2q^2R^{-2} - q^3R^{-3} + q^4R^{-4})
\end{aligned}$$

Ramanujans Beweis:

$$\begin{aligned}1 &+ p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + p(5)q^5\\ &+ p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + p(9)q^9 + p(10)q^{10}\\ &+ p(11)q^{11} + p(12)q^{12} + p(13)q^{13} + p(14)q^{14} + \dots\\ &= q^4 \frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6} \cdot (q^{-4}R^4 + q^{-3}R^3 + 2q^{-2}R^2 + 3q^{-1}R + 5\\ &\qquad - 3qR^{-1} + 2q^2R^{-2} - q^3R^{-3} + q^4R^{-4})\end{aligned}$$

Ramanujans Beweis:

$$
\begin{aligned}
1 &+ p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + p(5)q^5 \\
&+ p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + p(9)q^9 + p(10)q^{10} \\
&+ p(11)q^{11} + p(12)q^{12} + p(13)q^{13} + p(14)q^{14} + \dots \\
&= q^4 \frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6} \cdot \big(q^{-4}R^4 + q^{-3}R^3 + 2q^{-2}R^2 + 3q^{-1}R + 5 \\
&\qquad - 3qR^{-1} + 2q^2R^{-2} - q^3R^{-3} + q^4R^{-4}\big)
\end{aligned}
$$

Ramanujans Beweis:

$$\begin{aligned}
&1+p(1)q+p(2)q^2+p(3)q^3+p(4)q^4+p(5)q^5\\
&\quad+p(6)q^6+p(7)q^7+p(8)q^8+p(9)q^9+p(10)q^{10}\\
&\quad+p(11)q^{11}+p(12)q^{12}+p(13)q^{13}+p(14)q^{14}+\dots\\
&=q^4\frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6}\cdot\big(q^{-4}R^4+q^{-3}R^3+2q^{-2}R^2+3q^{-1}R+5\\
&\qquad-3qR^{-1}+2q^2R^{-2}-q^3R^{-3}+q^4R^{-4}\big)
\end{aligned}$$

Ramanujans Beweis:

$$
\begin{aligned}
1 &+ p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + p(5)q^5\\
&+ p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + p(9)q^9 + p(10)q^{10}\\
&+ p(11)q^{11} + p(12)q^{12} + p(13)q^{13} + p(14)q^{14} + \dots\\
&= q^4 \frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6} \cdot \big(q^{-4}R^4 + q^{-3}R^3 + 2q^{-2}R^2 + 3q^{-1}R + 5\\
&\qquad - 3qR^{-1} + 2q^2R^{-2} - q^3R^{-3} + q^4R^{-4}\big)
\end{aligned}
$$

Ramanujans Beweis:

$$
\begin{aligned}
&1+p(1)q+p(2)q^2+p(3)q^3+p(4)q^4+p(5)q^5\\
&\quad+p(6)q^6+p(7)q^7+p(8)q^8+p(9)q^9+p(10)q^{10}\\
&\quad+p(11)q^{11}+p(12)q^{12}+p(13)q^{13}+p(14)q^{14}+\dots\\
&=q^4\frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6}\cdot\big(q^{-4}R^4+q^{-3}R^3+2q^{-2}R^2+3q^{-1}R+5\\
&\qquad-3qR^{-1}+2q^2R^{-2}-q^3R^{-3}+q^4R^{-4}\big)
\end{aligned}
$$

Ramanujans Beweis:

$$p(4)q^4$$

$$+ p(9)q^9$$

$$+ p(14)q^{14} + \dots$$

$$= q^4 \frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6} .$$

5

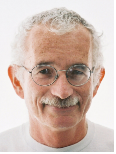
Ramanujans Beweis:

$$p(4)q^4 + p(9)q^9 + p(14)q^{14} + \cdots = q^4 \frac{(q^{25};q^{25})_\infty^5}{(q^5;q^5)_\infty^6} \times 5$$

Herz in der Mathematik

Tour de force!

Doron Zeilbergers Theorem über alternierende Vorzeichenmatrizen

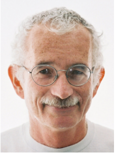


Doron
Zeilberger

Doron Zeilbergers Theorem über alternierende Vorzeichenmatrizen

Eine alternierende Vorzeichenmatrix ist eine quadratische Anordnung von 0en, 1en und (-1)en, sodaß

- sich in jeder Zeile und Spalte 1en und (-1)en abwechseln (wenn man auf die 0en vergißt) und
- in jeder Zeile und Spalte der erste und der letzte Eintrag ungleich 0 ein 1er ist.

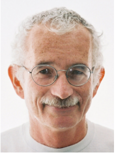


Doron Zeilberger

Doron Zeilbergers Theorem über alternierende Vorzeichenmatrizen

Eine alternierende Vorzeichenmatrix ist eine quadratische Anordnung von 0en, 1en und (-1)en, sodaß

- sich in jeder Zeile und Spalte 1en und (-1)en abwechseln (wenn man auf die 0en vergißt) und
- in jeder Zeile und Spalte der erste und der letzte Eintrag ungleich 0 ein 1er ist.



Doron Zeilberger

Beispiel:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Doron Zeilbergers Theorem über alternierende Vorzeichenmatrizen

Eine alternierende Vorzeichenmatrix ist eine quadratische Anordnung von 0en, 1en und (-1)en, sodaß

- sich in jeder Zeile und Spalte 1en und (-1)en abwechseln (wenn man auf die 0en vergißt) und
- in jeder Zeile und Spalte der erste und der letze Eintrag ungleich 0 ein 1er ist.

Einzeilige alternierende Vorzeichenmatrizen: 1

Zweizeilige alternierende Vorzeichenmatrizen: $\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}$

Dreizeilige alternierende Vorzeichenmatrizen:

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{matrix}$$

Doron Zeilbergers Theorem über alternierende Vorzeichenmatrizen

Einzeilige alternierende Vorzeichenmatrizen: 1

Zweizeilige alternierende Vorzeichenmatrizen: $\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}$

Dreizeilige alternierende Vorzeichenmatrizen:

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} \quad \begin{matrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{matrix} \quad \begin{matrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix} \quad \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{matrix} \quad \begin{matrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix} \quad \begin{matrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{matrix} \quad \begin{matrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{matrix}$$

Sei $A(n)$ die Anzahl aller n-zeiligen alternierenden Vorzeichenmatrizen.

n	1	2	3	4	5	6
$A(n)$	1	2	7	42	429	7436

Vermutung (Mills, Robbins, Rumsey $\sim$ 1980)

$$A(n) = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \dots \cdot (3n-2)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (2n-1)!},$$

wobei $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$

PROOF OF THE ALTERNATING SIGN MATRIX CONJECTURE [1]

Doron ZEILBERGER[2]

Submitted: May 1, 1995; Accepted: July 25, 1995

Checked by[3]: David Bressoud and

Gert Almkvist, Noga Alon, George Andrews, Anonymous, Dror Bar-Natan, Francois Bergeron, Nantel Bergeron, Gaurav Bhatnagar, Anders Björner, Jonathan Borwein, Mireille Bousquest-Mélou, Francesco Brenti, E. Rodney Canfield, William Chen, Chu Wenchang, Shaun Cooper, Kequan Ding, Charles Dunkl, Richard Ehrenborg, Leon Ehrenpreis, Shalosh B. Ekhad, Kimmo Eriksson, Dominique Foata, Omar Foda, Aviezri Fraenkel, Jane Friedman, Frank Garvan, George Gasper, Ron Graham, Andrew Granville, Eric Grinberg, Laurent Habsieger, Jim Haglund, Han Guo-Niu, Roger Howe, Warren Johnson, Gil Kalai, Viggo Kann, Marvin Knopp, Don Knuth, Christian Krattenthaler, Gilbert Labelle, Jacques Labelle, Jane Legrange, Pierre Leroux, Ethan Lewis, Daniel Loeb, John Majewicz, Steve Milne, John Noonan, Kathy O'Hara, Soichi Okada, Craig Orr, Sheldon Parnes, Peter Paule, Bob Proctor, Arun Ram, Marge Readdy, Amitai Regev, Jeff Remmel, Christoph Reutenauer, Bruce Reznick, Dave Robbins, Gian-Carlo Rota, Cecil Rousseau, Bruce Sagan, Bruno Salvy, Isabella Sheftel, Rodica Simion, R. Jamie Simpson, Richard Stanley, Dennis Stanton, Volker Strehl, Walt Stromquist, Bob Sulanke, X.Y. Sun, Sheila Sundaram, Raphaële Supper, Nobuki Takayama, Xavier G. Viennot, Michelle Wachs, Michael Werman, Herb Wilf, Celia Zeilberger, Hadas Zeilberger, Tamar Zeilberger, Li Zhang, Paul Zimmermann .

Dedicated to my Friend, Mentor, and Guru, Dominique Foata.

Lemma 1: For $n \geq k \geq 1$, the number of $n \times k$-Gog trapezoids equals the number of $n \times k$-Magog trapezoids.

[The number of n by k Magog trapezoids, for specific n and k, is obtained by typing `b(k,n);` while the number of n by k Gog trapezoids is given by `m(k,n);`. To verify lemma 1, type `S1(k,n):`.]

This would imply, by setting $n = k$, that,

Corollary 1': For $n \geq 1$, the number of n-Gog triangles equals the number of n-Magog triangles.

Since n-Gog triangles are equi-numerous with $n \times n$ alternating sign matrices, and n-Magog triangles are equi-numerous with TSSCPPs bounded in $[0, 2n]^3$, this would imply, together with Andrews's[A2] affirmative resolution of the TSCCPP conjecture, the following result, that was conjectured in [MRR1].

The Alternating Sign Matrix Theorem: The number of $n \times n$ alternating sign matrices, for $n \geq 1$, is:

$$\frac{1!4!\ldots(3n-2)!}{n!(n+1)!\ldots(2n-1)!} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} \quad .$$

We now need the following $(sub)^6$ lemma:

Subsubsubsubsubsublemma 1.2.1.2.1.1.1: Let U_j, $j = 1, \dots, l$, be quantities in an associative algebra, then:

$$1 - \prod_{j=1}^{l} U_j = \sum_{j=1}^{l} \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} U_h \right\} (1 - U_j) \quad .$$

Doron Zeilberger in einem Vortrag 1991

"Extreme UGLINESS is new BEAUTY!"

(*„Extreme Häßlichkeit ist neue Schönheit!"*)

Hirn in der Mathematik

Hirn in der Mathematik ✓

Hirn in der Mathematik ✓

Hirn in der Musik?

Franz SCHUBERT (1797 – 1828) Sonate in A-Dur, D 959

1. *Allegro.*
2. *Andantino.*
3. *Scherzo. Allegro vivace.*
4. *Rondo. Allegretto.*

Franz Schubert (1797 – 1828) Sonate in A-Dur, D 959

1. *Allegro.*
2. *Andantino.*
3. *Scherzo. Allegro vivace.*
4. *Rondo. Allegretto.*

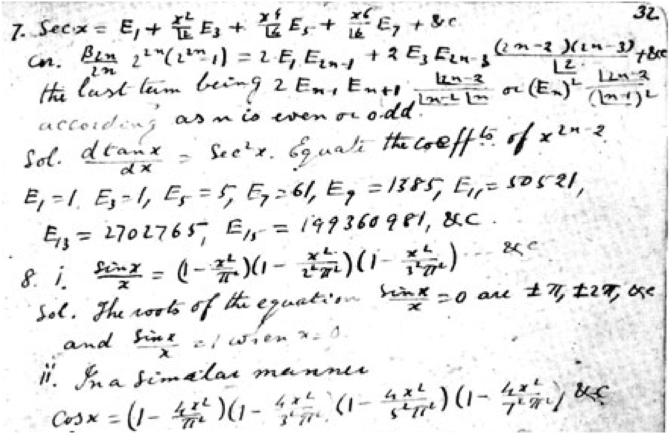
Unterschiede zwischen Musik und Mathematik

Unterschiede zwischen Musik und Mathematik

Ludwig van BEETHOVEN (1770 – 1827)
Sonate f-moll, op. 57, „Appassionata"

Unterschiede zwischen Musik und Mathematik

Unterschiede zwischen Musik und Mathematik



7. $\operatorname{Sec} x = E_1 + \frac{x^2}{\underline{|2}} E_3 + \frac{x^4}{\underline{|4}} E_5 + \frac{x^6}{\underline{|6}} E_7 + \&c$ 32

Cor. $\frac{B_{2n}}{2n} 2^{2n}(2^{2n}-1) = 2 E_1 E_{2n-1} + 2 E_3 E_{2n-3} \frac{(2n-2)(2n-3)}{\underline{|2}} + \&c$

the last term being $2 E_{n-1} E_{n+1} \frac{\underline{|2n-2}}{\underline{|n-2}\,\underline{|n}}$ or $(E_n)^2 \frac{\underline{|2n-2}}{(\underline{|n-1})^2}$

according as n is even or odd.

Sol. $\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$. Equate the coeff^ts of x^{2n-2}

$E_1 = 1,\ E_3 = 1,\ E_5 = 5,\ E_7 = 61,\ E_9 = 1385,\ E_{11} = 50521,$

$E_{13} = 2702765,\ E_{15} = 199360981,$ &c.

8. i. $\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots \&c$

Sol. The roots of the equation $\frac{\sin x}{x} = 0$ are $\pm\pi, \pm 2\pi$, &c

and $\frac{\sin x}{x} = 1$ when $x = 0$.

ii. In a similar manner

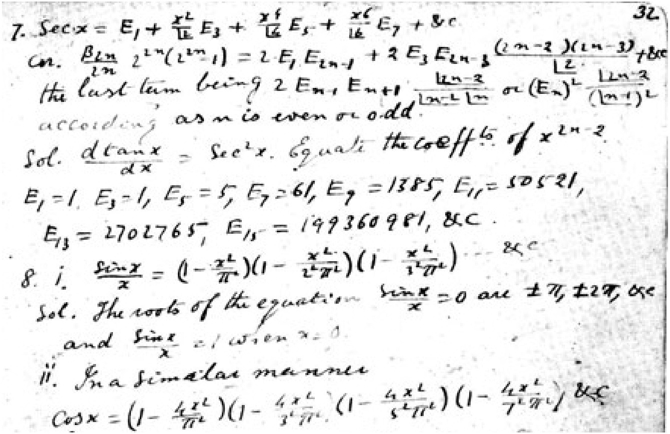
$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{7^2\pi^2}\right) \&c$

Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920)
Notebook I

Unterschiede zwischen Musik und Mathematik

Ludwig van BEETHOVEN (1770 – 1827)
Sonate f-moll, op. 57, „Appassionata“

Unterschiede zwischen Musik und Mathematik


7. $\operatorname{Sec} x = E_1 + \frac{x^2}{|\underline{2}} E_3 + \frac{x^4}{|\underline{4}} E_5 + \frac{x^6}{|\underline{6}} E_7 + \&c$ 32

Cor. $\frac{B_{2n}}{2n} 2^{2n}(2^{2n}-1) = 2 E_1 E_{2n-1} + 2 E_3 E_{2n-3} \frac{(2n-2)(2n-3)}{|\underline{2}} + \&c$

the last term being $2 E_{n-1} E_{n+1} \frac{|\underline{2n-2}}{|\underline{n-2}\,|\underline{n}}$ or $(E_n)^2 \frac{|\underline{2n-2}}{(|\underline{n-1})^2}$

according as n is even or odd.

Sol. $\frac{d \tan x}{dx} = \operatorname{Sec}^2 x$. Equate the coeff^ts of x^{2n-2}

$E_1 = 1, E_3 = 1, E_5 = 5, E_7 = 61, E_9 = 1385, E_{11} = 50521,$

$E_{13} = 2702765, E_{15} = 199360981$, &c.

8. i. $\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots \&c$

Sol. The roots of the equation $\frac{\sin x}{x} = 0$ are $\pm\pi, \pm 2\pi$, &c

and $\frac{\sin x}{x} = 1$ when $x = 0$.

ii. In a similar manner

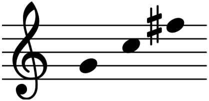
$\operatorname{Cos} x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{7^2\pi^2}\right) \&c$

Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920)
Notebook I

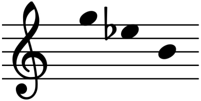
$\mathcal{E}$

Alban Berg (1885 – 1935)
Sonate op. 1

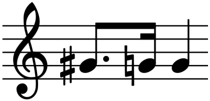

p
accel.
rit.



Aufstiegsfigur



Terzenfigur



Seufzermotiv

Alban BERG (1885 – 1935)
Sonate op. 1

Alban Berg (1885 – 1935)
Sonate op. 1

Johannes Brahms (1833 – 1897)
Intermezzo in h-moll, op. 119/1