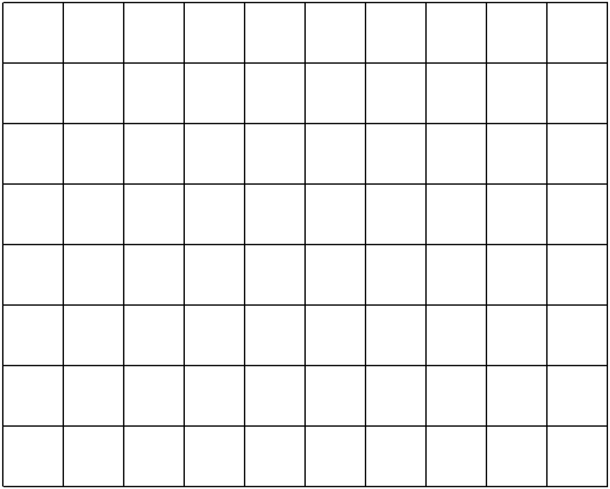
Abzählung von Pflasterungen

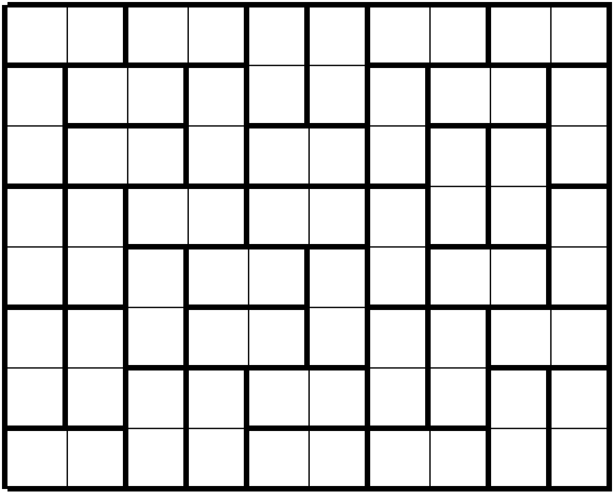
Christian Krattenthaler

Universität Wien

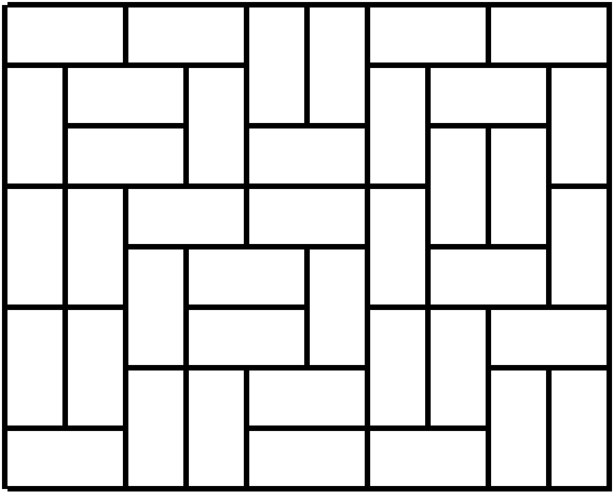
Dominopflasterungen



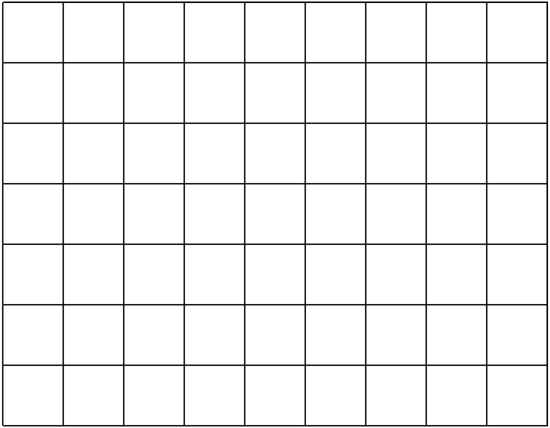
Dominopflasterungen



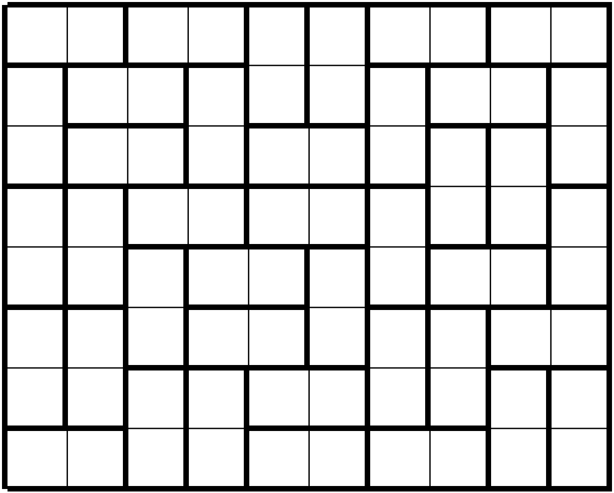
Dominopflasterungen



Dominopflasterungen



Dominopflasterungen



Satz (Kasteleyn 1961, Temperley und Fisher 1961)

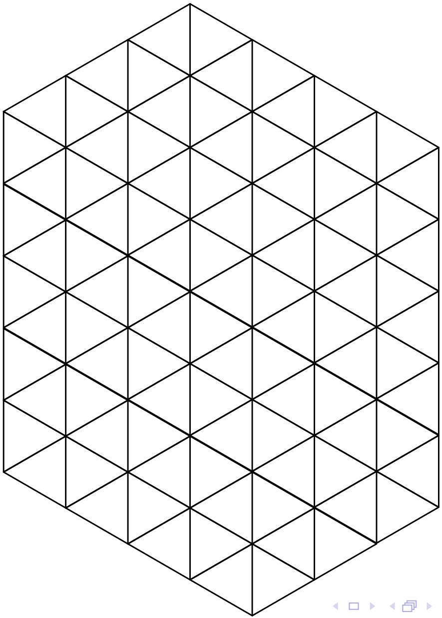
Seien m und n positive ganze Zahlen, wobei m gerade sei. Die Anzahl der Dominopflasterungen eines $m \times n$-Rechteckes ist durch

$$2^{mn/2} \prod_{i=1}^{m/2} \prod_{j=1}^{n} \left(\cos^2 \frac{\pi i}{m+1} + \cos^2 \frac{\pi j}{n+1} \right)^{1/2}$$

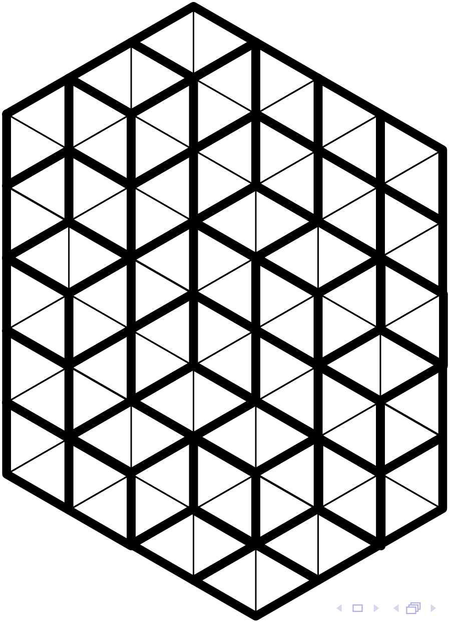
gegeben.

Rhombuspflasterungen

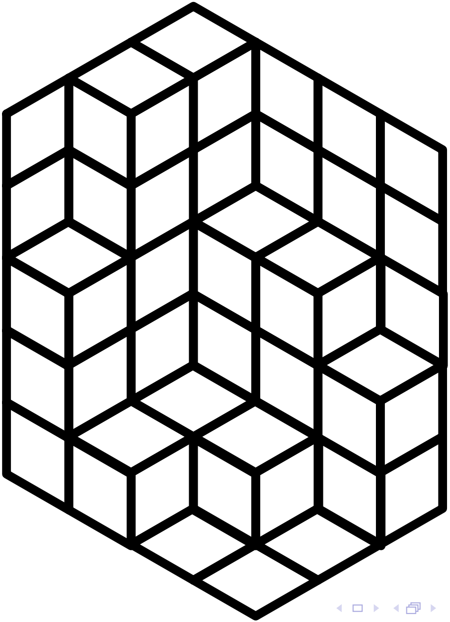
Rhombuspflasterungen



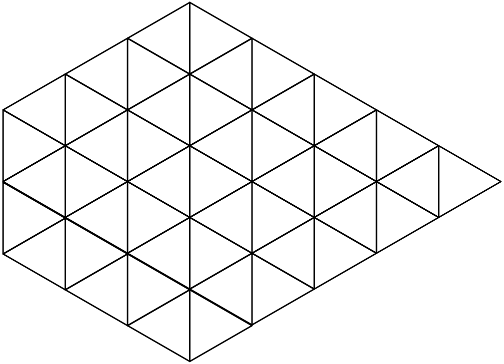
Rhombuspflasterungen



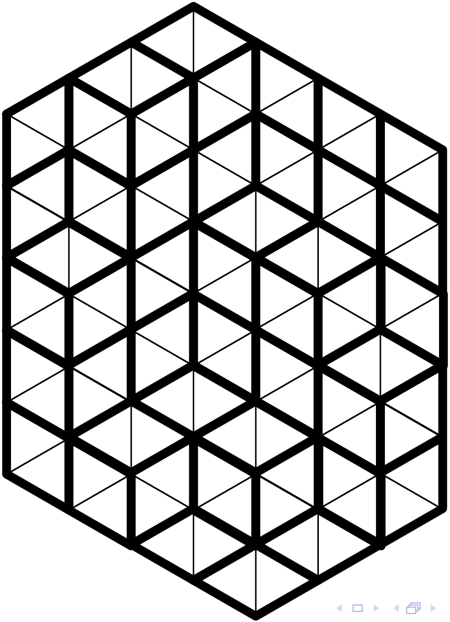
Rhombuspflasterungen



Rhombuspflasterungen



Rhombuspflasterungen



Rhombuspflasterungen

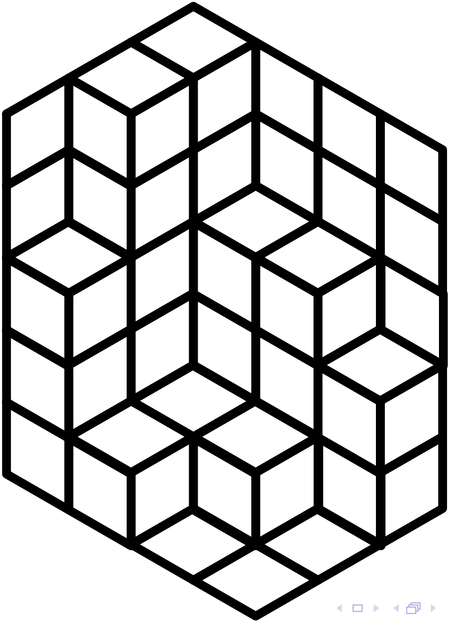
Satz (MacMahon 1915)

Seien a, b, c positive ganze Zahlen. Die Anzahl der Rhombuspflasterungen eines Sechsecks mit Seitenlängen a, b, c, a, b, c ist durch

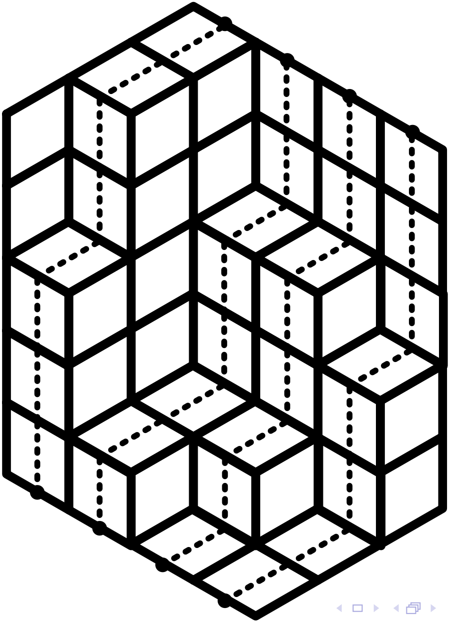
$$\prod_{i=1}^{c} \frac{(a+b+i-1)!\,(i-1)!}{(a+i-1)!\,(b+i-1)!}$$

gegeben.

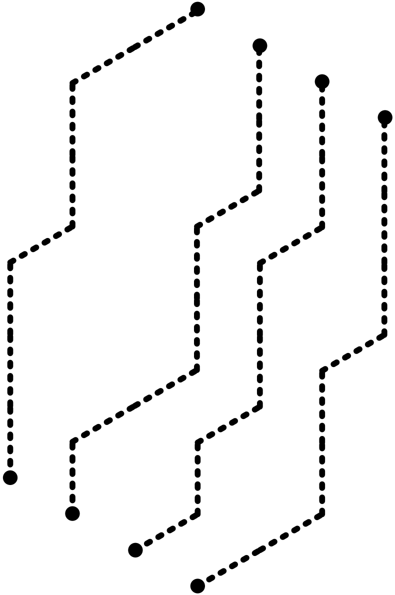
Rhombuspflasterungen



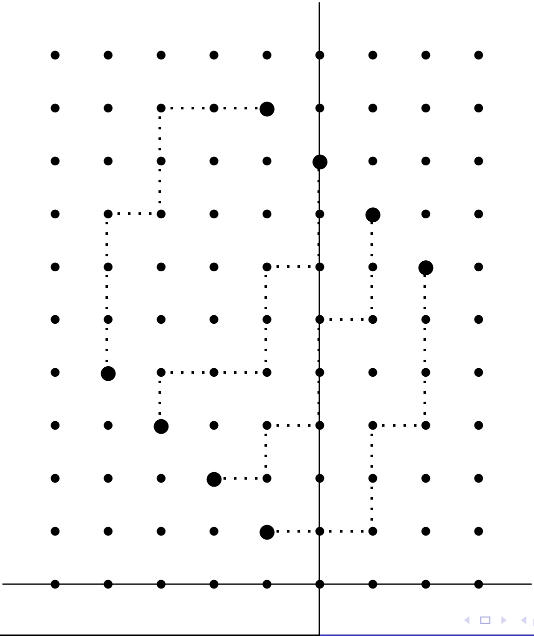
Rhombuspflasterungen



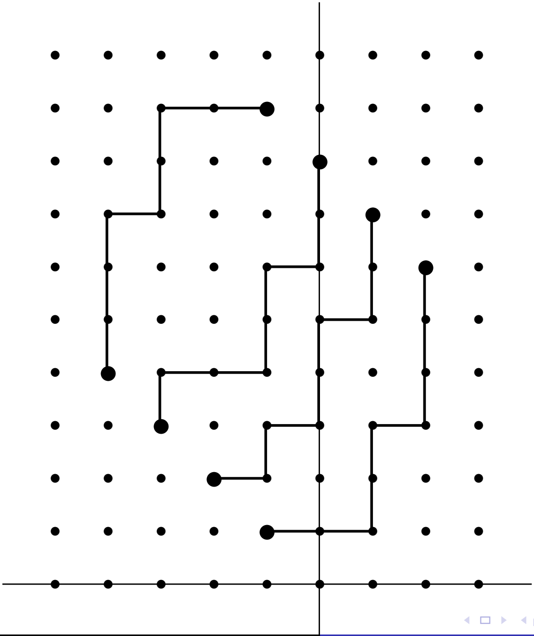
Rhombuspflasterungen



Rhombuspflasterungen



Rhombuspflasterungen



Satz (Karlin–McGregor, Lindström, Gessel–Viennot, Fisher, John–Sachs, Gronau–Just–Schade–Scheffler–Wojciechowski)

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und $E_1, E_2, \ldots, E_n$ Gitterpunkte, sodaß für $i < j$ und $k < l$ jeder Gitterpunktpfad zwischen A_i und E_l einen gemeinsamen Punkt mit jedwedem Gitterpunktpfad zwischen A_j und E_k hat. Dann ist die Anzahl der Familien $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ von nichtüberschneidenden Gitterpunktpfaden, wobei P_i von A_i nach E_i läuft, $i = 1, 2, \ldots, n$, gleich

$$\det_{1\le i,j\le n} \left(P(A_j \to E_i)\right),$$

wobei $P(A \to E)$ die Anzahl der Gitterpunktpfade von A nach E bezeichnet.

Beweis.

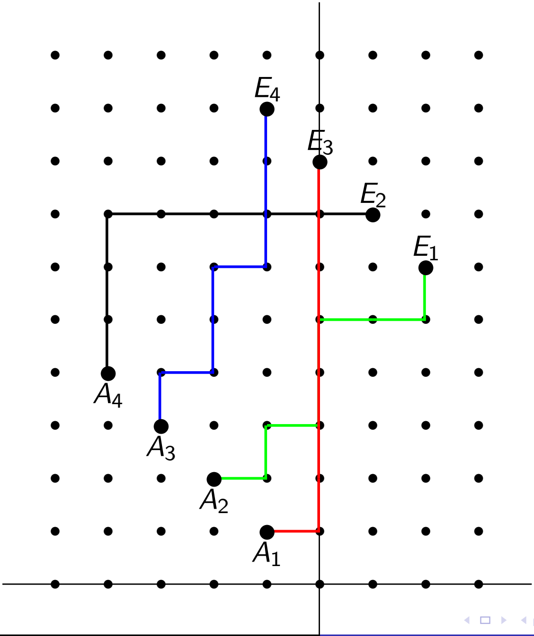
Rhombuspflasterungen

Beweis.

$$\det_{1\le i,j\le n}\big(P(A_j \to E_i)\big) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{n} P(A_{\sigma(i)} \to E_i)$$

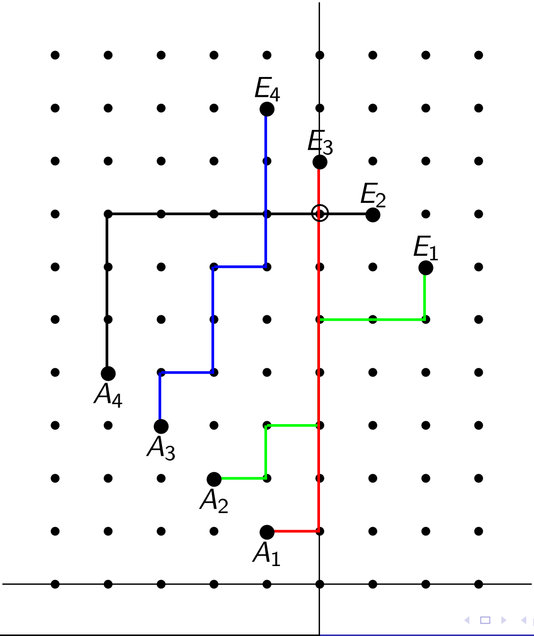
$$= \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ (P_1,\dots,P_n) \\ P_i : A_{\sigma(i)}\to E_i}} \operatorname{sgn}\sigma$$

Rhombuspflasterungen



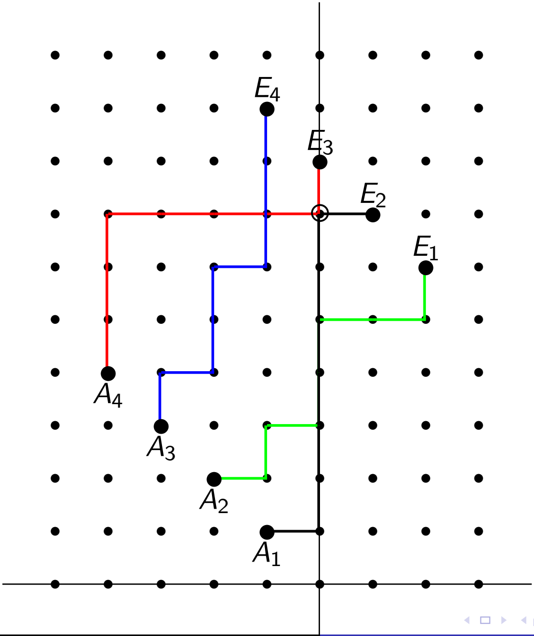
$\sigma = 2413$

Rhombuspflasterungen



$\sigma = 2413$

Rhombuspflasterungen



$\sigma = 2143$

Beweis.

$$\det_{1\le i,j\le n}\big(P(A_j\to E_i)\big)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{i=1}^n P(A_{\sigma(i)}\to E_i)$$
$$=\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\(P_1,\dots,P_n)\\P_i:A_{\sigma(i)}\to E_i}}\operatorname{sgn}\sigma$$

Beweis.

$$\det_{1\le i,j\le n}\left(P(A_j\to E_i)\right)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{n}P(A_{\sigma(i)}\to E_i)$$
$$=\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\(P_1,\dots,P_n)\\P_i:A_{\sigma(i)}\to E_i}}\operatorname{sgn}\sigma$$

In dieser Summe bleiben nur die Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktpfaden übrig.

Rhombuspflasterungen

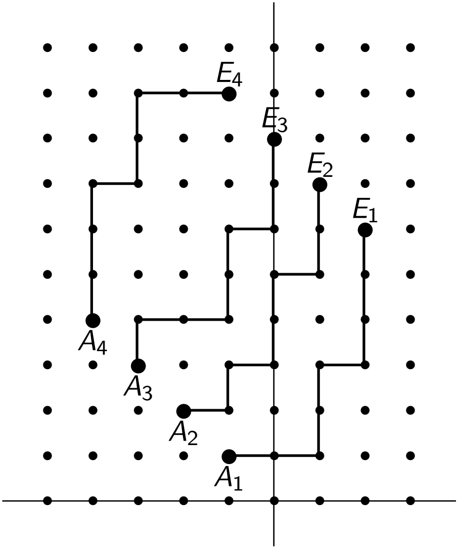
Beweis.

$$\det_{1\le i,j\le n}\left(P(A_j\to E_i)\right)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{n}P(A_{\sigma(i)}\to E_i)$$
$$=\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\(P_1,\dots,P_n)\\P_i:A_{\sigma(i)}\to E_i}}\operatorname{sgn}\sigma$$

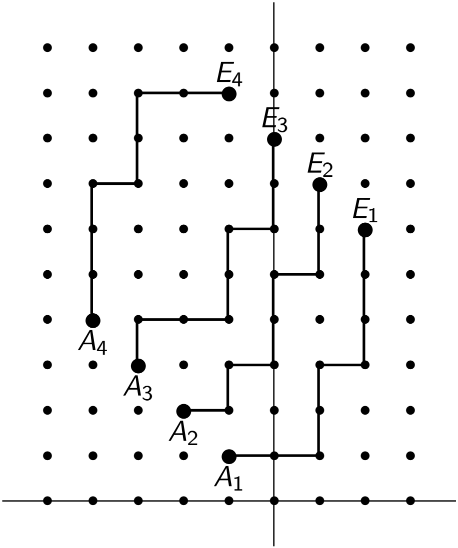
In dieser Summe bleiben nur die Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktpfaden übrig.

Nichtüberschneidende Gitterpunktwege kann es aber nur geben, wenn $\sigma=\mathrm{id}$. □

Rhombuspflasterungen

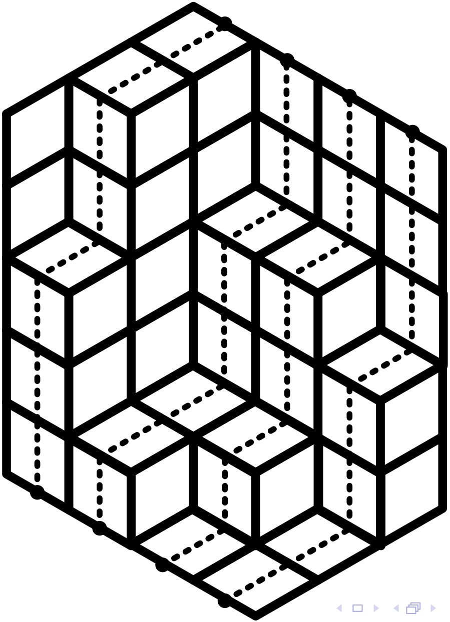


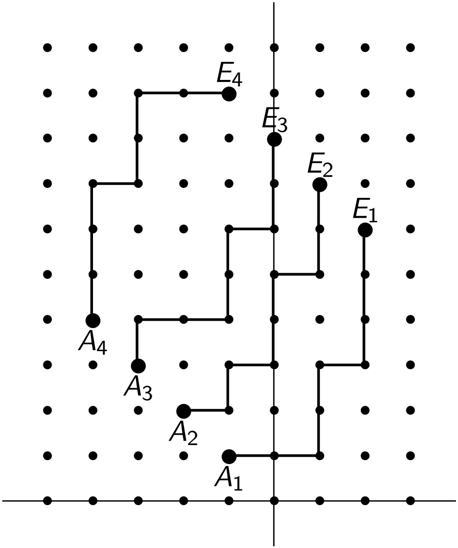
Rhombuspflasterungen



In unserem Fall gilt $A_i = (-i, i)$ und $E_i = (a - i, c + i)$, $i = 1, 2, \ldots, b$.

Rhombuspflasterungen





In unserem Fall gilt $A_i = (-i, i)$ und $E_i = (a - i, c + i)$, $i = 1, 2, \ldots, b$.

Die Determinante:

$$\det_{1\le i,j\le n}\big(P(A_j\to E_i)\big).$$

Rhombuspflasterungen

Die Determinante:

$$\det_{1\le i,j\le n}\big(P(A_j\to E_i)\big).$$

Unsere Anfangs- und Endpunkte:

$$A_i=(-i,i) \text{ und } E_i=(a-i,c+i),\quad i=1,2,\dots,b.$$

Die Determinante:

$$\det_{1\le i,j\le n}\big(P(A_j\to E_i)\big).$$

Unsere Anfangs- und Endpunkte:

$$A_i=(-i,i) \text{ und } E_i=(a-i,c+i),\quad i=1,2,\dots,b.$$

Wir erhalten so die Determinante

$$\det_{1\le i,j\le b}\left(\binom{a+c}{a-i+j}\right).$$

Eine Determinantenberechnung

Eine Determinantenberechnung

Wir möchten beweisen, daß

$$\det_{1\le i,j\le b}\left(\binom{a+c}{a-i+j}\right)=\prod_{i=1}^{c}\frac{(a+b+i-1)!\,(i-1)!}{(a+i-1)!\,(b+i-1)!}.$$

Unsere Determinante:

$$\det_{1\le i,j\le b}\left(\binom{a+c}{a-i+j}\right)$$

Eine Determinantenberechnung

Unsere Determinante:

$$\det_{1\le i,j\le b}\left(\binom{a+c}{a-i+j}\right)=\det_{1\le i,j\le b}\left(\frac{(a+c)!}{(a-i+j)!\,(c+i-j)!}\right)$$

Eine Determinantenberechnung

Unsere Determinante:

$$\det_{1\le i,j\le b}\left(\binom{a+c}{a-i+j}\right)=\det_{1\le i,j\le b}\left(\frac{(a+c)!}{(a-i+j)!\,(c+i-j)!}\right)$$
$$=\prod_{i=1}^{b}\frac{(a+c)!}{(a-i+b)!\,(c+i-1)!}$$
$$\times\det_{1\le i,j\le b}\big((a-i+j+1)(a-i+j+2)\cdots(a-i+b)$$
$$\cdot(c+i-j+1)(c+i-j+2)\cdots(c+i-1)\big)$$

Eine Determinantenberechnung

$$\det_{1\le i,j\le b}\Big((a-i+j+1)(a-i+j+2)\cdots(a-i+b)\\ \cdot(c+i-j+1)(c+i-j+2)\cdots(c+i-1)\Big).$$

Eine Determinantenberechnung

$$\det_{1\le i,j\le b}\left((a-i+j+1)(a-i+j+2)\cdots(a-i+b)\right.$$
$$\left.\cdot(c+i-j+1)(c+i-j+2)\cdots(c+i-1)\right).$$

Lemma

Seien $X_1,\dots,X_n$, $A_2,\dots,A_n$, und $B_2,\dots,B_n$ Unbestimmte. Dann gilt

$$\det_{1\le i,j\le n}\Big((X_i+A_n)(X_i+A_{n-1})\cdots(X_i+A_{j+1})$$
$$\cdot(X_i+B_j)(X_i+B_{j-1})\cdots(X_i+B_2)\Big)$$
$$=\prod_{1\le i<j\le n}(X_i-X_j)\prod_{2\le i\le j\le n}(B_i-A_j).$$

Eine Determinantenberechnung

$$\det_{1\le i,j\le b}\big((a-i+j+1)(a-i+j+2)\cdots(a-i+b)\\ \cdot(c+i-j+1)(c+i-j+2)\cdots(c+i-1)\big).$$

Lemma

Seien $X_1,\dots,X_n$, $A_2,\dots,A_n$, und $B_2,\dots,B_n$ Unbestimmte. Dann gilt

$$\det_{1\le i,j\le n}\Big((X_i+A_n)(X_i+A_{n-1})\cdots(X_i+A_{j+1})\\ \cdot(X_i+B_j)(X_i+B_{j-1})\cdots(X_i+B_2)\Big)\\ =\prod_{1\le i<j\le n}(X_i-X_j)\prod_{2\le i\le j\le n}(B_i-A_j).$$

Wir wählen $n=b$, $X_i=-i$, $A_j=a+j$ und $B_j=-c+j-1$.

Wir haben bewiesen:

Satz (MacMahon 1915)

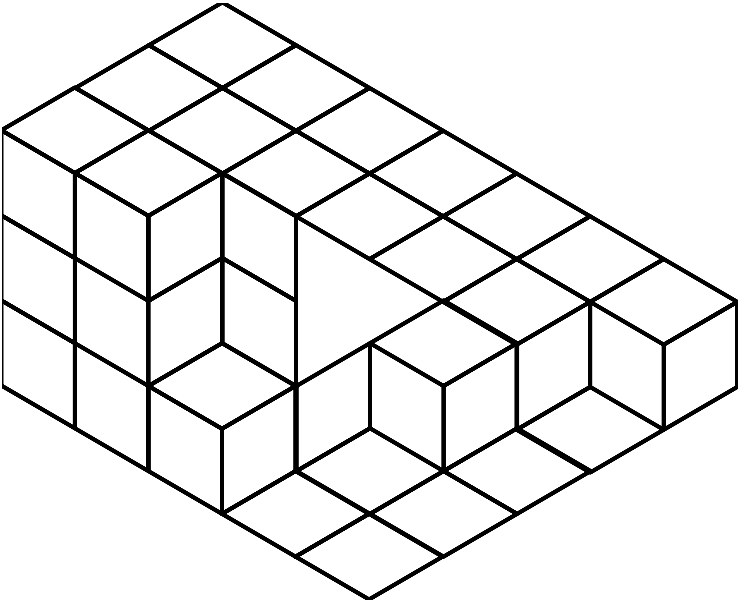
Seien a, b, c positive ganze Zahlen. Die Anzahl der Rhombuspflasterungen eines Sechsecks mit Seitenlängen a, b, c, a, b, c ist durch

$$\prod_{i=1}^{c} \frac{(a+b+i-1)!\,(i-1)!}{(a+i-1)!\,(b+i-1)!}$$

gegeben.

Eine Verallgemeinerung

Eine Verallgemeinerung



Satz

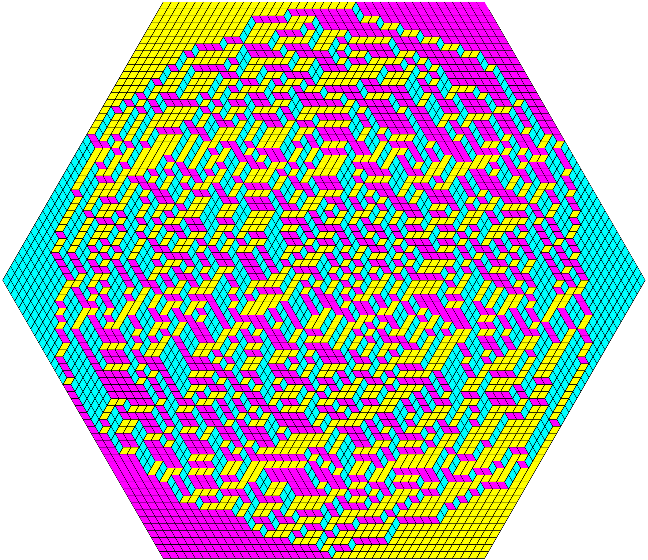
Die Anzahl der Rhombuspflasterungen des Sechsecks minus Dreieck ist gleich

$$\frac{\mathrm{H}(a+m)\,\mathrm{H}(b+m)\,\mathrm{H}(c+m)\,\mathrm{H}(a+b+c+m)}{\mathrm{H}(a+b+m)\,\mathrm{H}(a+c+m)\,\mathrm{H}(b+c+m)}$$
$$\times\frac{\mathrm{H}(m+\lceil\frac{a+b+c}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(m+\lfloor\frac{a+b+c}{2}\rfloor)}{\mathrm{H}(\frac{a+b}{2}+m)\,\mathrm{H}(\frac{a+c}{2}+m)\,\mathrm{H}(\frac{b+c}{2}+m)}$$
$$\times\frac{\mathrm{H}(\lceil\frac{a}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\lceil\frac{b}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\lceil\frac{c}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\lfloor\frac{a}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\lfloor\frac{b}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\lfloor\frac{c}{2}\rfloor)}{\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lceil\frac{a}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lceil\frac{b}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lceil\frac{c}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lfloor\frac{a}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lfloor\frac{b}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lfloor\frac{c}{2}\rfloor)}$$
$$\times\frac{\mathrm{H}(\frac{m}{2})^2\,\mathrm{H}(\frac{a+b+m}{2})^2\,\mathrm{H}(\frac{a+c+m}{2})^2\,\mathrm{H}(\frac{b+c+m}{2})^2}{\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lceil\frac{a+b+c}{2}\rceil)\,\mathrm{H}(\frac{m}{2}+\lfloor\frac{a+b+c}{2}\rfloor)\,\mathrm{H}(\frac{a+b}{2})\,\mathrm{H}(\frac{a+c}{2})\,\mathrm{H}(\frac{b+c}{2})},$$

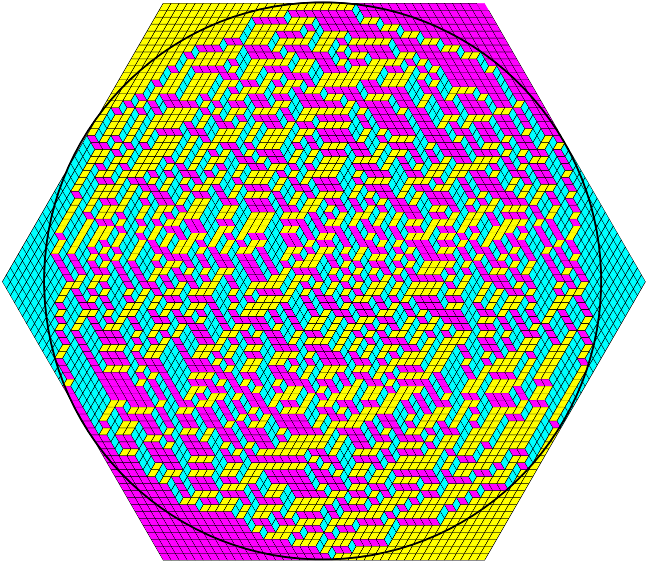
$$\textit{wo}\ \mathrm{H}(n) := \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(k+1) & \textit{für } n \textit{ ganz,}\\ \prod_{k=0}^{n-\frac{1}{2}}\Gamma(k+\frac{1}{2}) & \textit{für } n \textit{ halbzahlig.}\end{cases}$$

Zufällige Rhombuspflasterungen eines Sechsecks

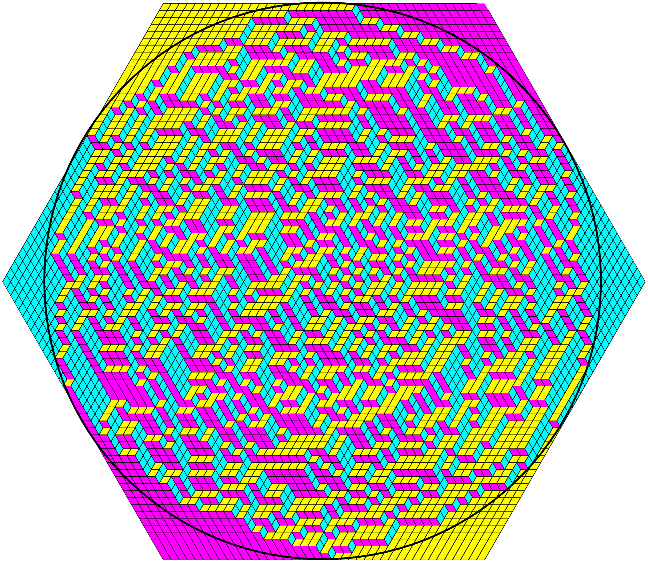
Zufällige Rhombuspflasterungen eines Sechsecks



Zufällige Rhombuspflasterungen eines Sechsecks

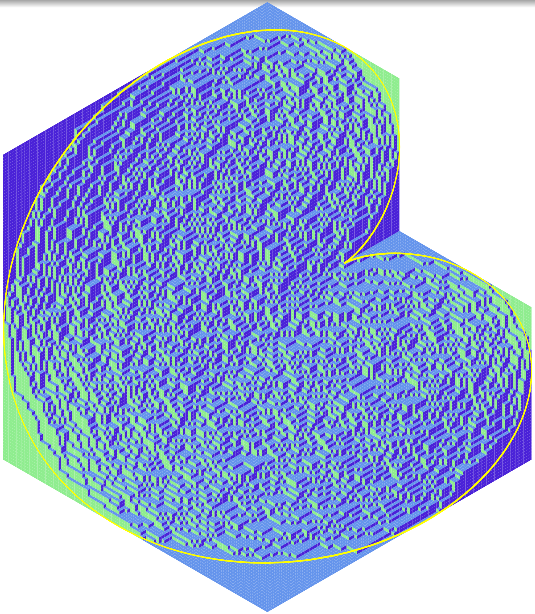


Zufällige Rhombuspflasterungen eines Sechsecks

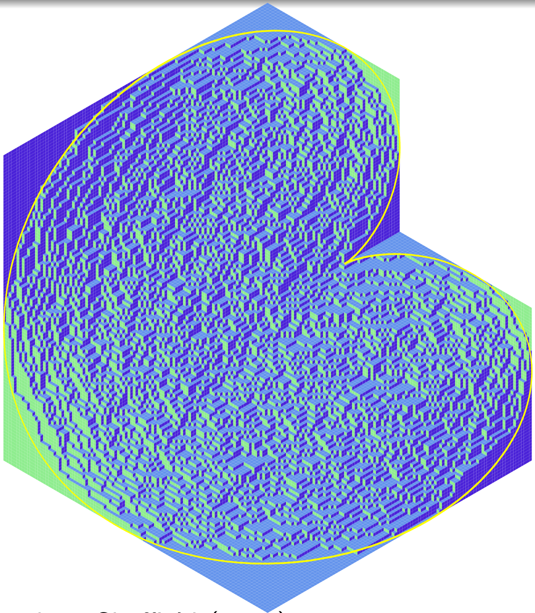


Cohn, Larsen, Propp (1998)

Eine zufällige Rhombuspflasterung einer anderen Region



Eine zufällige Rhombuspflasterung einer anderen Region



Kenyon, Okounkov, Sheffield (2005)