

Differentialgeometrie 2

Andreas Kriegl

[email:andreas.kriegl@univie.ac.at](mailto:andreas.kriegl@univie.ac.at)

250075, WS 2009/2010, Mo.–Mi. 10¹⁵-11⁰⁰, D 1.03 im UZA 4

Inhaltsverzeichnis

VI. Differentialformen	1
31. Konstruktion und 1-Formen	1
37. Motivation für Formen höheren Grades	8
38. Multilineare Algebra, Tensoren	10
39. Vektorbündel-Konstruktionen	16
40. Differentialformen	19
41. Differentialformen auf Riemann MF	22
42. Graduierte Derivationen	28
43. Divergenz, Rotation und Laplace	41
44. Kohomologie	44
45. Klassische Mechanik	51
VII. Integration	63
46. Orientierbarkeit	63
47. Integration und der Satz von Stokes	75
48. Integration auf Riemann-Mannigfaltigkeiten	81
49. Der Laplace-Beltrami-Operator	83
50. Anwendungen der Integration auf die Kohomologie	90
19. Topologisches über Mannigfaltigkeiten	112
VIII. Riemann-Geometrie	119
62. Kovariante Ableitung	119
64. Riemann-, Schnitt-, Ricci- und Skalarkrümmung	130
66. Die Begleitbeinmethode von Cartan	145
63. Jacobi-Felder	154
67. Nochmals Jacobi-Felder	159
65. Rückblick auf Krümmungen	162
Literaturverzeichnis	163
Index	167

VI. Differentialformen

In diesem Kapitel werden wir 1-Formen, wie wir sie in vorhergehenden Kapitel behandelt haben, zu Differentialformen höheren Grades (kurz: n -Formen) verallgemeinern. Nach einem der Motivation dienenden Abschnitt stellen wir die nötige multilineare Algebra zusammen, und verkleben die damit aus den Tangential- und Kotangential-Räumen konstruierten Tensorräume zu Tensorbündel. Als Schnitte der Bündel alternierender Tensoren erhalten wir die Differentialformen. Wir behandeln die wichtigsten Operationen auf ihnen: Die äußere Ableitung, die Lieableitung und den Einsetzungshomomorphismus. Insbesondere schauen wir uns das für Riemann-Mannigfaltigkeiten genauer an. Als Anwendung reißen wir die De Rham Kohomologie an.

31. Konstruktion und 1-Formen

31.1 Motivation

Für Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^m$ ist der Begriff der 1-Form wichtig, da dies längs Kurven integrierbare Objekte sind (siehe [68, 3.10]). Wir wollen diesen Begriff nun auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Wir erinnern uns daran, daß eine 1-Form auf einer offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Abbildung $\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ ist. Das Kurvenintegral von ω längs einer Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ ist dann als gewöhnliches Riemannintegral von $t \mapsto \omega(c(t))(c'(t))$ definiert. Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit M ist $c'(t) \in T_{c(t)}M$ und somit muß $\omega(x) \in L(T_x M, \mathbb{R}) = (T_x M)^*$ für jedes $x \in M$ sein.

31.2 Definition (1-Formen)

Unter einer 1-FORM auf einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Abbildung ω , die jedem Punkt $x \in M$ ein lineares Funktional $\omega(x) \in (T_x M)^*$ zuordnet.

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann erhalten wir eine 1-Form, das TOTALE DIFFERENTIAL df von f , durch $df(x)(v) := v(f) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in T_x M \cong \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}))$.

Wir wollen nun 1-Formen in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu benötigen wir Koordinaten in $(T_x M)^*$. Ist E ein m -dimensionaler Vektorraum und $(g_i)_{i=1}^m$ eine Basis in E , so erhält man eine Basis $(g^i)_{i=1}^m$ von E^* , die sogenannte DUALE BASIS indem man die Funktionale g^i auf der Basis $(g_j)_{j=1}^m$ durch $g^i(g_j) := \delta_j^i$ festlegt, wobei δ_j^i das Kronecker-Deltasymbol ist, d.h. $\delta_i^i := 1$ und $\delta_j^i := 0$ für $i \neq j$.

Seien nun $(u^1, \dots, u^m)$ lokale Koordinaten auf M . Dann ist $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$ eine Basis von $T_x M$. Berechnen wir nun das totale Differential du^i der i -ten Koordinatenfunktionen u^i , so erhalten wir:

$$du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}(u^i) = \partial_j(u^i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \partial_j(\text{pr}_i) \circ \varphi^{-1} = \delta_j^i.$$

Also ist $(du^i)_{i=1}^m$ gerade die duale Basis zur Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$ von $T_x M$ und für $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ ist $du^i(\xi) = \xi^i$. Für das totale Differential df einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir somit

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i,$$

denn $df(x)(\xi_x) = \xi_x(f) = \left(\sum_i \xi_x^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right)(f) = \sum_i du^i(\xi_x) \frac{\partial f}{\partial u^i} = \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i \right)(\xi_x)$.

31.3 Transformationsverhalten von Vektoren

(Vgl. mit [72, 1.1] und [72, 20.9]) Sei im Folgenden E ein endlich dimensionaler Vektorraum, $\mathcal{G} := (g_i)_{i=1}^m$ eine Basis in E und x^i die Komponenten (Koordinaten) eines Punktes x in E bezüglich (g_i) , also $x = \sum_{i=1}^m x^i g_i$. Sei $\bar{\mathcal{G}} := (\bar{g}_j)_j$ eine weitere Basis und $\bar{x}^j$ die Koordinaten von x bezüglich $(\bar{g}_j)$. Und sei A jener Isomorphismus von E , welcher g_i auf $\bar{g}_i$ abbildet. Stellt man die Vektoren $\bar{g}_j$ bezüglich der Basis (g_i) dar, d.h. $\bar{g}_j = \sum_{i=1}^m a_j^i g_i$, so ist $[A] := (a_j^i)_{i,j}$ die Matrixdarstellung $[A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}$ von A bezüglich der Basis (g_i) für $\text{Dom}(A) = E$ und für $\text{Bild}(A) = E$, sowie die Matrixdarstellung $[\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}}$ der Identität bezüglich der Basis $(\bar{g}_i)$ für $\text{Dom}(\text{id}) = E$ und der Basis (g_i) für $\text{Bild}(\text{id}) = E$, und ebenso $[A]_{\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}}$ bezüglich der Basis $(\bar{g}_j)$ für $\text{Dom}(A) = E$ und für $\text{Bild}(A) = E$. Dabei zählt der obere Index i die Zeile und der untere die Spalte der Matrix. Die ersten beiden Matrixdarstellungen folgen aus [72, 1.1] wonach die j -te Spalte der Matrixdarstellung einer linearen Abbildung die Koeffizienten des Bildes des j -ten Basisvektors bzgl. der Basis im Bildraum sind. Hingegen ist $[A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} = 1$, denn $A(g_i) = \bar{g}_i$ also $[A(g_i)]_{\bar{\mathcal{G}}} = (\delta_i^j)_j$, und somit ist

$$[A]_{\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}} = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} \cdot [\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}} = 1 \cdot [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} = [A].$$

Zusammengefaßt: $[A] = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} = [A]_{\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}} = [\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}}$ und $[A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} = 1$.

Für das Transformationsverhalten der Komponenten erhalten wir somit:

$$[x]_{\bar{\mathcal{G}}} = 1 \cdot [x]_{\mathcal{G}} = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} \cdot [x]_{\mathcal{G}} = [A(x)]_{\bar{\mathcal{G}}} = [A] \cdot [x]_{\mathcal{G}}$$

Umgekehrt ist $A^{-1} : E \rightarrow E$ gegeben durch $A^{-1} : \bar{g}_j \mapsto g_j$ mit Matrixdarstellung $[A^{-1}] = [A]^{-1} =: (b_j^i)_{i,j}$.

Es bezeichne $E^* := L(E, \mathbb{R})$ den zu E dualen Raum, $\mathcal{G}^* := (g^i)$ die duale Basis zu $\mathcal{G} = (g_i)$ definiert durch $g^i(g_j) := \delta_j^i$. Jeder Vektor $x^* \in E^*$ kann dann in der Form $x^* = \sum_{i=1}^m x_i g^i$ geschrieben werden, mit $x_i = x^*(g_i) \in \mathbb{R}$.

Wie transformieren jetzt diese Koordinaten?

Die Matrixdarstellung $[T^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*, \mathcal{G}^*}$ der Adjungierten einer linearen Abbildung T ist die Transponierte der Matrixdarstellung $(t_k^i)_{k,i} := [T]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}$ von T , d.h. $[T^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*, \mathcal{G}^*} = [T]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}^t$, denn

$$T^*(\bar{g}^i)(g_j) = \bar{g}^i(T(g_j)) = \bar{g}^i\left(\sum_k t_j^k \bar{g}_k\right) = \sum_k t_j^k \bar{g}^i(\bar{g}_k) = t_j^i = \sum_k t_k^i g^k(g_j).$$

Indem wir dies auf die Basiswechselabbildung $A : g_i \mapsto \bar{g}_i$ anwenden erhalten wir

$$[A^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*, \mathcal{G}^*} = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}^t = 1^t = 1, \text{ also } A^*(\bar{g}^j) = g^j$$

und weiters $g^j = A^*(\bar{g}^j) = \sum_{i=1}^m a_i^j \bar{g}^i$, denn $[A^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*, \mathcal{G}^*} = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}^t = [A]^t$, und damit das Transformationsverhalten für die Koordinaten von dualen Vektoren:

$$\sum_i \bar{x}_i \bar{g}^i = x^* = \sum_j x_j g^j = \sum_{i,j} x_j a_i^j \bar{g}^i \Rightarrow \bar{x}_i = \sum_j a_i^j x_j.$$

Vergleicht man nun die Transformationsformeln, so zeigt sich, daß die Komponenten x_i der dualen Vektoren wie die Basisvektoren g_i des Grundraumes transformieren:

$$x_i = \sum b_i^j \bar{x}_j, \quad g_i = \sum b_i^j \bar{g}_j; \quad \bar{x}_j = \sum a_j^i x_i, \quad \bar{g}_j = \sum a_j^i g_i.$$

Hingegen transformieren die Komponenten x^i eines Vektors wie die Vektoren der dualen Basis g^i :

$$x^i = \sum a_j^i \bar{x}^j, \quad g^i = \sum a_j^i \bar{g}^j; \quad \bar{x}^j = \sum b_i^j x^i, \quad \bar{g}^j = \sum b_i^j g^i.$$

Dieser Sachverhalt motiviert auch die Verwendung von “oberen” und “unteren” Indizes: Die Komponentenvektoren dualer Vektoren transformieren wie die Basis im Grundraum (sie transformieren kovariant), die duale Basis und die Komponentenvektoren im Grundraum transformieren kontravariant.

Vergleiche das aber mit folgender

31.4 Definition (Funktork)

Unter einem FUNKTOR $\mathcal{F}$ auf einer Kategorie versteht man eine Zuordnung, die jedem Raum M einen anderen Raum $\mathcal{F}(M)$ zuordnet und jedem Morphismus $f : M \rightarrow N$ einen entsprechenden Morphismus $\mathcal{F}(f)$ zwischen $\mathcal{F}(M)$ und $\mathcal{F}(N)$ zuordnet, sodaß $\mathcal{F}(\text{id}_M) = \text{id}_{\mathcal{F}(M)}$ und $\mathcal{F}$ von der Zusammensetzung je zweier Morphismen die Zusammensetzung der zugeordneten Morphismen ist.

Man nennt einen Funktor $\mathcal{F}$ KOVARIANT, falls $\mathcal{F}(f)$ in die gleiche Richtung läuft wie f , d.h. für $f : M \rightarrow N$ ist $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$. Er heißt KONTRAVARIANT, falls $\mathcal{F}(f)$ in die entgegengesetzte Richtung läuft, d.h. für $f : M \rightarrow N$ ist $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}(M)$. Insbesondere ist der Dualraum-Funktor $(f : E \rightarrow F) \mapsto (f^* : F^* \rightarrow E^*)$ **kontravariant**.

31.5 Transformationsverhalten von 1-Formen

Es sei $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$ bzw. $\psi^{-1} = (v^1, \dots, v^m)$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit M und $\partial_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial u^i}$ bzw. $\partial_j^\psi = \frac{\partial}{\partial v^j}$ seien die (lokalen) Basisvektorfelder des Tangentialbündels. Diese hängen nach [72, 20.9] wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \partial_j^\psi|_x &= \sum_{i=1}^m \partial_j^\psi|_x (\varphi^{-1})^i \partial_i^\varphi|_x \text{ oder intuitiver } \frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \partial_j^\varphi|_x &= \sum_{i=1}^m \partial_j^\varphi|_x (\psi^{-1})^i \partial_i^\psi|_x \text{ oder intuitiver } \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^i} \end{aligned}$$

Seien $a_j^i := \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$ bzw. $b_i^j := \frac{\partial v^j}{\partial u^i}$ die Koeffizienten der Jakobimatrix des Kartenwechsels und das Vektorfeld ξ habe die Darstellungen $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial v^j}$, dann gilt auch

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_i \left(\sum_j \eta^j \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \Rightarrow \quad \xi^i &= \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \eta^j = \sum_j a_j^i \eta^j \end{aligned}$$

und analog $\eta^j = \sum_i b_i^j \xi^i$.

Für Kotangentialvektoren erhalten wir wegen [31.3](#) die folgenden Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} du^i &= \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j = \sum_j a_j^i dv^j \\ dv^j &= \sum_i \frac{\partial v^j}{\partial u^i} du^i = \sum_i b_i^j du^i. \end{aligned}$$

Die Komponenten der Kotangentialvektoren, transformieren also kovariant, daher heißen Schnitte im Kotangentialbündel (d.h. 1-Formen) auch KOVARIANTE VEKTORFELDER.

31.6 Konstruktion des dualen Bündels

Um über Glattheit von 1-Formen sprechen zu können, müssen wir nun die disjunkte Vereinigung $T^*M := (TM)^* := \bigsqcup_{x \in M} (T_x M)^*$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit, oder besser noch einem Vektorbündel machen. Noch allgemeiner wollen wir für ein allgemeines Vektorbündel $E \xrightarrow{p} M$ die disjunkte Vereinigung $E^* := \bigsqcup_{x \in M} (E_x)^*$ wieder zu einem solchen machen. Seien dazu Trivialisierungen $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} E|_U$ von E über offenen Mengen $U \subseteq M$ gegeben. Wir brauchen eine Trivialisierung

$$\varphi^* : \bigsqcup_{x \in U} (\mathbb{R}^k)^* = U \times (\mathbb{R}^k)^* \xrightarrow{\cong} E^*|_U = \bigsqcup_{x \in U} (E_x)^*$$

Faserweise können wir φ^* als $(\varphi^*)_x := ((\varphi_x)^*)^{-1} = ((\varphi_x)^{-1})^* : (\mathbb{R}^k)^* \rightarrow (E_x)^*$ definieren, wobei $(\varphi_x)^* : (E_x)^* \rightarrow (\mathbb{R}^k)^*$ die adjungierte Abbildung zum Isomorphismus $\varphi_x : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ bezeichnet.

Sei $\psi : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ die Transitionsfunktion für zwei Vektorbündelkarten von E . Die zu den Trivialisierungen φ^* gehörenden Transitionsfunktionen ψ^* sind dann durch

$$\psi^*(x) = (\psi(x)^*)^{-1} \in GL((\mathbb{R}^k)^*) \cong GL(\mathbb{R}^k)$$

gegeben, wobei $\psi(x)^*$ die adjungierte Abbildung zum linearen Isomorphismus $\psi(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ bezeichnet. Da $A \mapsto A^*$ linear ist von $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \rightarrow L((\mathbb{R}^l)^*, (\mathbb{R}^k)^*)$, die Inversion $A \mapsto A^{-1}$ von $GL(\mathbb{R}^k) \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ glatt ist und $\psi : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ als Transitionsfunktion des Vektorbündels E ebenfalls glatt ist, gilt gleiches auch für die Zusammensetzung ψ^*

$$\begin{array}{ccccc} & & GL(\mathbb{R}^k) & & \\ & \nearrow^{(-)^*} & & \searrow^{\text{inv}} & \\ U \cap V & \xrightarrow{\psi} & GL(\mathbb{R}^k) & & GL(\mathbb{R}^k) \\ & \searrow^{\text{inv}} & & \nearrow^{(-)^*} & \\ & & GL(\mathbb{R}^k) & & \end{array}$$

Also bilden die ψ^* einen Kozykel von Transitionsfunktionen für ein glattes Vektorbündel $E^* \rightarrow M$ und die φ^* sind die zugehörigen Vektorbündelkarten. Diese Vektorbündel $E^* \rightarrow M$ heißt das DUALE VEKTORBÜNDEL zu $E \rightarrow M$.

Im Spezialfall, wo $E \rightarrow M$ gerade das Tangentialbündel $TM \rightarrow M$ ist, heißt $T^*M := (TM)^* \rightarrow M$ KOTANGENTIALBÜNDEL von M .

Der Raum $\Gamma(T^*M \rightarrow M)$ der glatten Schnitte des Kotangentialbündels wird auch mit $\Omega^1(M)$ bezeichnet.

31.7 Glatte 1-Formen

Wie erkennt man, ob eine 1-Form ω wirklich glatt ist? Nun, das ist lokal um einen Punkt $x \in M$ genau dann der Fall, wenn ihre Darstellung bezüglich einer Trivialisierung $T^*M|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$ mit $x \in U \subseteq M$ glatt ist. Nach [31.6] werden die Trivialisierungen von T^*M durch Dualisieren aus jenen von TM gewonnen. Zu einer Karte $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$ mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(u^1, \dots, u^m) = \varphi^{-1}$, war die entsprechende lokale Trivialisierung von $TM \rightarrow M$ in [72, 25.4] durch

$$TM \supseteq T(\varphi(U)) \xleftarrow{T\varphi} TU \cong U \times \mathbb{R}^m \xleftarrow{\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m} \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

gegeben. Wobei der standard-Basis (e_i) in $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ die Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x) \in T_x M$ der Richtungsableitungen entspricht. Die duale Abbildung zu $T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$ bildet somit die duale Basis (du^i) von $(T_x M)^*$ auf die duale Basis (e^i) von $(\mathbb{R}^m)^* \cong \mathbb{R}^m$. Die lokale Trivialisierung von T^*M bildet somit e^i auf du^i ab, und eine 1-Form ω genau dann glatt, wenn alle ihre lokalen Koordinaten (Koeffizienten) ω_i – gegeben durch $\omega = \sum_i \omega_i du^i$ – glatt sind.

31.8 Lemma (Schnitte des dualen Bündels).

Sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, dann gibt es folgende Beschreibungen für die glatten Schnitte des dualen Bündels $E^* := \bigsqcup_x (E_x)^* \rightarrow M$:

$$\begin{aligned} \Gamma(E^* \rightarrow M) &:= \{\sigma \in C^\infty(M, E^*) : \forall x : \sigma(x) \in E_x^*\} \\ &\cong \{s \in C^\infty(E, \mathbb{R}) : \forall x : s|_{E_x} \in L(E_x, \mathbb{R})\} \\ &\cong \text{dem Raum der Vektorbündelhomomorphismen} \\ &\quad \text{von } E \text{ nach } M \times \mathbb{R} \text{ über } \text{id}_M. \end{aligned}$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß die Schnitte $\sigma \in \Gamma(E^* \rightarrow M)$ genau den faserweise linearen glatten Abbildungen $s : E \rightarrow \mathbb{R}$ entsprechen.

Definiert man $\sigma \leftrightarrow s$ durch $\sigma(x) = s|_{E_x} =: s_x$, so ist klar, daß sich die Abbildungen $\sigma = \{(x, \sigma(x)) : x \in M\}$ und $s = \bigsqcup_{x \in M} s_x$ in eindeutiger Weise entsprechen. Verbleibt zu zeigen, daß σ genau dann glatt ist, wenn s es ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft. Sei $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U$ eine Vektorbündelkarte von $p : E \rightarrow U$ und $\varphi^* : U \times (\mathbb{R}^k)^* \rightarrow E^*|_U$ die zugehörige Karten von $E^* \rightarrow M$. Lokal ist σ durch $\bar{\sigma} : U \rightarrow (\mathbb{R}^k)^* = L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ mit $\sigma(x) = (\varphi^*)_x(\bar{\sigma}(x)) = \bar{\sigma}(x) \circ ((\varphi_x)^*)^{-1}$ und s durch $\bar{s} := s \circ \varphi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Also ist $\bar{s}(x, v) = s_x(\varphi_x(v)) = \sigma(x)(\varphi_x(v)) = \bar{\sigma}(x)(v)$. Sei σ (und also auch $\bar{\sigma}$) glatt, dann ist $(x, v) \mapsto \bar{s}(x, v) = \bar{\sigma}(x)(v) = (\text{eval} \circ (\bar{\sigma} \times \text{id}_{\mathbb{R}^k}))(x, v)$ ebenfalls glatt. Umgekehrt: Ist s glatt, so auch $\bar{s}$ und damit auch $\text{eval}_v \circ \bar{\sigma} = \bar{s}(\cdot, v)$. Somit ist aber $\bar{\sigma} : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ glatt, und damit auch σ selbst. $\square$

31.9 Bemerkung

Wir wollen nun wie für glatte Vektorfelder in [72, 29.1] auch für glatte 1-Formen eine algebraische Beschreibung. Wir können eine 1-Form ω auf ein Vektorfeld ξ punktweise anwenden, da $\omega_x \in (T_x M)^* = L(T_x M, \mathbb{R})$ und $\xi_x \in T_x M$, und erhalten eine Funktion $\omega(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \omega_x(\xi_x)$. In lokalen Koordinaten sieht das wie

folgt aus:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_i \omega_i du^i; \quad \xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \omega(\xi) &= \left(\sum_i \omega_i du^i \right) \left(\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} \omega_i \xi^j du^i \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_i \omega_i \xi^i.\end{aligned}$$

Also ist die resultierende Funktion $\omega(\xi)$ glatt, falls ω und ξ glatt sind. Und klarerweise ist die Zuordnung $(\omega, \xi) \mapsto \omega(\xi)$ bilinear als Abbildung von $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$.

31.10 Lemma (Raum der 1-Formen als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineare Abbildungen).

Die bilineare Abbildung $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ induziert einen $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linearen Isomorphismus

$$\Omega^1(M) \cong \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R})),$$

wobei der rechte Raum aus allen $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linearen Abbildungen von $\mathfrak{X}(M)$ nach $C^\infty(M, \mathbb{R})$ besteht.

Beweis. Klarerweise induziert obige bilineare Abbildung eine lineare Abbildung von $\Omega^1(M)$ in den Raum $L(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$ der linearen Abbildungen.

Jedes $\omega \in \Omega^1(M)$ wirkt aber auch $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear auf $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, denn

$$\omega(f \cdot \xi)|_x = \omega_x((f \cdot \xi)_x) = \omega_x(f(x) \cdot \xi_x) = f(x) \cdot \omega_x(\xi_x) = (f \cdot \omega(\xi))_x$$

Weiters ist $\Omega^1(M) \rightarrow \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$ sogar $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear, denn $(f \cdot \omega)(\xi)|_x = (f \cdot \omega)_x(\xi_x) = (f(x) \omega_x)(\xi_x) = f(x) \cdot \omega_x(\xi_x) = f(x) \cdot \omega(\xi)|_x = (f \cdot \omega(\xi))_x$.

Sei umgekehrt ein $\omega \in \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$ gegeben.

Dann wirkt ω lokal, d.h. $\xi = 0$ auf $U \subseteq M$ impliziert $\omega(\xi) = 0$ auf U : Zu $x \in U$ wählen wir ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(x) = 1$ und $\text{Trg}(f) \subseteq U$. Dann ist $f \cdot \xi = 0$ und somit

$$0 = \omega(0) = \omega(f \cdot \xi) = f \cdot \omega(\xi) \quad \Rightarrow \quad 0 = \underbrace{f(x)}_{=1} \cdot \omega(\xi)(x) = \omega(\xi)(x).$$

Es wirkt ω sogar punktal, d.h. $\xi(x) = 0$ impliziert $\omega(\xi)(x) = 0$, denn

$$\omega(\xi)(x) = \omega\left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(x) = \sum_i \underbrace{\xi^i(x)}_{=0} \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)(x) = 0.$$

Folglich können wir eine 1-Form ω durch $\omega(x)(\xi_x) := \omega(\xi)(x)$ definieren, wobei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ so gewählt ist, daß $\xi(x) = \xi_x$ ist. Die 1-Form ω ist dann glatt, denn lokal gilt:

$$\omega = \sum_i \omega_i du^i \text{ mit } \omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right).$$

Daß diese beiden Zuordnungen invers zueinander sind, ist offensichtlich. $\square$

31.11 Lemma (Pull-back von Schnitten dualer Bündel).

Seien $p : E \rightarrow M, q : F \rightarrow N$ Vektorbündel und f ein Vektorbündelhomomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{f_0} & N \end{array}$$

Dann ist $f^* : \Gamma(F^* \rightarrow N) \rightarrow \Gamma(E^* \rightarrow M)$ durch die Formel

$$f^*(s)_x \cdot v_x := s_{f_0(x)} \cdot f(v_x) \text{ für } s \in \Gamma(F^* \rightarrow N), x \in M, \text{ und } v_x \in E_x$$

wohldefiniert.

Vergleiche dies mit [72, 29.5] und [72, 29.4].

Beweis. Z.z. ist nur, daß $f^*(s)$ glatt ist. Via lokaler Trivialisierungen reduziert man das Problem auf triviale Bündel. Betrachten wir also die Bündel $p : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$, $q : V \times \mathbb{R}^i \rightarrow V$, und die Abbildungen $s : V \rightarrow (\mathbb{R}^i)^*$, $f_0 : U \rightarrow V$ und $f : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i)$. Dann ist

$$f^*(s)_x \cdot v_x := s_{f_0(x)} \cdot f(v_x) = (s \circ f_0)(x) \cdot f_x(v_x) = \text{komp}((s \circ f_0)(x), f_x) \cdot v_x$$

also kommutiert

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f^*(s)} & (\mathbb{R}^k)^* \\ & \searrow (s \circ f_0, f) & \nearrow \text{komp} \\ & (\mathbb{R}^i)^* \times L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i) & \end{array}$$

und $f^*(s)$ ist als Zusammensetzung zweier C^∞ -Funktionen selbst glatt. $\square$

31.12 Pull-back von 1-Formen in lokalen Koordinaten

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt und $\omega \in \Omega^1(N)$. Dann ist $f^*\omega \in \Omega^1(M)$ definiert durch

$$(f^*\omega)_x(\xi) := ((Tf)^*\omega)(x) \stackrel{31.11}{=} \omega_{f(x)}(T_x f \cdot \xi) \text{ für } x \in M \text{ und } \xi \in T_x M.$$

Wir wollen $f^*\omega$ in lokalen Koordinaten ausdrücken. Seien dazu $(u^1, \dots, u^i)$ lokale Koordinaten um $x \in M$ und $(v^1, \dots, v^j)$ lokale Koordinaten um $y := f(x) \in N$. Sei weiters $\omega = \sum_j \omega_j dv^j$ die Koordinatendarstellung von ω um y und $f^*\omega = \sum_i \eta_i du^i$ jene von $f^*\omega$ um x . Setzen wir speziell $\xi := \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x$ so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \omega_{f(x)}(T_x f \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x) &= (f^*\omega)_x(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x) = \left(\sum_k \eta_k du^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x \right) \stackrel{31.9}{=} \eta_i \\ \omega_{f(x)}(T_x f \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x) &\stackrel{[72, 20.9]}{=} \left(\sum_j \omega_j dv^j \right)_y \left(\sum_l \frac{\partial f^l}{\partial u^i} \Big|_x \frac{\partial}{\partial v^l} \Big|_y \right) \stackrel{31.9}{=} \sum_j \omega_j(y) \frac{\partial f^j}{\partial u^i} \Big|_x \end{aligned}$$

Also gilt

$$f^* \left(\sum_j \omega_j dv^j \right) = \sum_i \left(\sum_j (\omega_j \circ f) \frac{\partial f^j}{\partial u^i} \right) du^i.$$

Man beachte, daß das Kurvenintegral aus [68, 3.10] einer 1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ längs einer Kurve $c : I \rightarrow U$ gerade durch

$$\int_c \omega = \int_c \sum_i \omega_i(x) dx^i := \int_0^1 \sum_i \omega_i(c(t)) \frac{dc^i}{dt} dt = \int_0^1 c^*(\omega)$$

gegeben ist. Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit M können wir genauso das Kurvenintegral $\int_c \omega$ einer 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ längs einer Kurve $c : I \rightarrow M$ durch

$$\int_c \omega := \int_0^1 c^*(\omega)$$

definieren. Wir werden diese Definition im Abschnitt [47] weiter verallgemeinern.

37. Motivation für Formen höheren Grades

37.1 Die Riemann-Metrik als Tensorfeld

In [72, 32.2] hatte wir Riemann-Metriken als Abbildungen definiert, die jedem $x \in M$ eine Bilinearform $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnen, und zwar so, daß $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$, $M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist für je zwei glatte Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$. Schreiben wir die beiden Vektorfelder mittels lokaler Koordinaten $(u^1, \dots, u^m)$ als $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ und $\eta = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, so erhalten wir

$$g_x(\xi_x, \eta_x) = \sum_{i,j} \xi_x^i \eta_x^j g_x \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} du^i(\xi)|_x du^j(\eta)|_x g_{i,j}(x),$$

wobei wir $g_{i,j}(x) := g_x \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$ gesetzt haben. Es ist $(\xi_x, \eta_x) \mapsto du^i(\xi)|_x \cdot du^j(\eta)|_x$ eine bilineare Abbildung $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, die wir mit $du^i|_x \otimes du^j|_x$ bezeichnen. Also gilt lokal

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} du^i \otimes du^j$$

37.2 Hessische Form

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit lokalem Extremum bei x , dann ist $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ die Nullabbildung. Um umgekehrt schließen zu können benötigen wir die 2. Ableitung: Sei M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, (oder M eine Teilmannigfaltigkeit die wir durch eine offene Umgebung und f durch eine Erweiterung darauf ersetzen).

$$\begin{aligned} M \times \mathbb{R}^m &= TM \xrightarrow{Tf} T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ Tf(x, v) &= (f(x), f'(x)(v)) \\ M \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &= T^2 M := T(TM) \xrightarrow{T^2 f} T^2 \mathbb{R} = \mathbb{R}^4 \\ T^2 f(x, v; y, w) &= \left(f(x), f'(x)(v), f'(x)(y), f''(x)(v, y) + f'(x)(w) \right) \end{aligned}$$

Im $\mathbb{R}^m$ ist $\text{pr}_4(T^2 f(x, v; y, 0)) = f''(x)(v, y)$, falls $(x, v; y, 0)$ im 2. Tangentialraum der Mannigfaltigkeit liegt.

37.3 Beispiel

Zweite Ableitung von Funktionen am Kreis:

$$\begin{aligned} S^1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \\ TS^1 &= \{(x, v) \in (\mathbb{R}^2)^2 : |x| = 1, \langle x, v \rangle = 0\} \\ T^2 S^1 &= \{(x, v; y, w) \in (\mathbb{R}^2)^4 : |x| = 1, \langle x, v \rangle = \langle x, y \rangle = 0, \\ &\quad \langle y, v \rangle + \langle x, w \rangle = 0\} \end{aligned}$$

Somit ist $(x, v; y, 0) \in T^2 S^1$ genau dann, wenn $|x| = 1$, $v \perp x$, $y \perp x$ und $v \perp y$, also nur dann wenn $v = 0$ oder $y = 0$ ist. D.h. auf einer allgemeine Mannigfaltigkeit läßt sich $f''(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ nicht sinnvoll definieren.

Falls $T_x f = 0$, so ist dies doch möglich. Sei $\xi_x, \eta_x \in T_x M$, dann definieren wir $f''(x)(\xi_x, \eta_x) := \eta_x(\xi(f))$, wobei ξ ein Vektorfeld mit $\xi(x) = \xi_x$ sei. Schreiben wir

ξ_x und η_x in lokalen Koordinaten, d.h. $\xi_x = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ bzw. $\eta_x = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\xi(f) &= \sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i} \\ \eta_x(\xi(f)) &= \left(\sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \left(\sum_i \xi^i \cdot \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \Big|_x \\ &= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\xi^i \cdot \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \Big|_x = \sum_j \eta^j \sum_i \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \Big|_x \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} (x), \quad \text{da } \frac{\partial f}{\partial u^i} \Big|_x = 0.\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, daß obige Definition von der Fortsetzung unabhängig ist und in lokalen Koordinaten die übliche 2. Ableitung liefert, falls $f'(x) = 0$.

Es ist also unter dieser Voraussetzung $f''(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}f''(x)(\xi, \eta) &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \Big|_x = \sum_{i,j} du^i(\xi) du^j(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \Big|_x \\ &= \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} du^i \otimes du^j \right) \Big|_x(\xi, \eta).\end{aligned}$$

Demnach ist $f''(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} (x) du^i \Big|_x \otimes du^j \Big|_x$. Wie transformiert sich dieser Ausdruck beim Wechsel von Koordinaten u^i zu neuen Koordinaten v^j ? Wir haben $dv^i = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} du^j$ und $\frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^k}$. Also ist $\frac{\partial}{\partial u^j}(f) = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k}$ und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}(f) &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial}{\partial u^j}(f) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial v^k} \cdot \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} + \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \cdot \left(\sum_l \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^l} \right) \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial f}{\partial v^k} + \sum_{k,l} \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} du^i \otimes du^j = \sum_{l,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k} dv^l \otimes dv^k + \sum_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} \right) \frac{\partial f}{\partial v^k} du^i \otimes du^j,$$

und der zweite Summand verschwindet im Punkt x , da $\frac{\partial f}{\partial v^k} \Big|_x = 0$.

37.4 Exakte 1-Formen

Für eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sei, ist $f' : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ glatt. Natürlich interessiert man sich dafür, wann die Umkehrung gilt, also wann zu einer 1-Form $\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodaß $\omega = f'$, ein solches ω nennt man EXAKTE 1-FORM. Der Satz von Frobenius [68, 30.7] liefert so eine Integrabilitäts-Bedingung (siehe auch [64, 6.5.2]):

Lokal existiert so ein f genau dann wenn $d\omega(x)(v_1, v_2) = 0 \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, wobei $2d\omega(x)(v_1, v_2) := \omega'(x)(v_1) \cdot v_2 - \omega'(x)(v_2) \cdot v_1$. Das so definierte $d\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ ist für festes $x \in M$ alternierend (= schiefsymmetrisch) und bilinear. Kürzer schreibt man $d\omega : M \rightarrow L_{Alt}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und sagt: $d\omega$ ist eine 2-FORM.

Allgemein bezeichnet man eine Abbildung $\omega : M \rightarrow L_{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ als k -FORM, wobei $L_{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ den Raum der alternierenden k -linearen Funktionale bezeichnet. Ist $M = \mathbb{R}^m$, so genügt $d\omega = 0$ um ein global gegebenes f mit $\omega = f'$ zu finden. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^m$, so genügt es i.a. nicht. Dazu ein Beispiel:

37.5 Beispiel

Wir betrachten die 1-Form

$$\omega(x, y)(v, w) := \frac{-yv + xw}{x^2 + y^2} \quad \text{also} \quad \omega(x, y) := -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

auf $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aus [68, 3.10]. Wegen $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2}) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})$ ist $d\omega = 0$. Angenommen, es gäbe ein f mit $\omega = f'$, so müßte gelten:

$$f'(x, y) = (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Ist $(x_0, y_0) \in S^1$ ein Punkt, in dem f eingeschränkt auf S^1 ein Minimum annimmt, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_0, y_0)(-y_0, x_0) = -y_0 \cdot \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}(-y_0) + x_0 \cdot \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}(x_0) \\ &= 1, \text{ ein Widerspruch.} \end{aligned}$$

Für die eben betrachtete Form gilt also: $d\omega = 0$, aber es gibt keine Stammfunktion zu ω . Diese Diskrepanz zwischen Formen ω mit $d\omega = 0$ und solchen der Gestalt $\omega = f' = df$ kann verwendet werden, um etwas über die topologischen Eigenschaften von M auszusagen (In unserem Beispiel war M nicht einfach zusammenhängend).

Wie sieht das nun für beliebige Mannigfaltigkeiten M aus?

Sei allgemeiner $\omega : x \mapsto \omega(x)$ eine 1-Form, dann müßte $d\omega$ eine, auf M gegebene Abbildung $d\omega : x \mapsto d\omega(x)$ mit Werten $d\omega(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ sein, die bilinear und alternierend sind (solche $d\omega$ heißen 2-FORM). Also ist $(d\omega)_x \in L_{Alt}^2(T_x M, \mathbb{R})$. Analog werden wir k -Formen definieren. Dazu wollen wir jetzt die grundlegenden Tatsachen aus der multilinearen Algebra zusammenfassen.

38. Multilineare Algebra, Tensoren

38.1 Definition

Wir stellen zuerst die (multi)linear Theorie zusammen, für ein vertiefendes Studium vgl. etwa [39] und [102, Vol.I, Cap.7]. Im folgenden bezeichnen E, F , etc. endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $L^k(E_1, \dots, E_k; F)$ (oder kurz $L(E_1, \dots, E_k; F)$) den RAUM DER k -LINEAREN ABBILDUNGEN $E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$. Dieser ist ein Vektorraum der endlicher Dimension $\dim(E_1) \cdots \dim(E_k) \cdot \dim(F)$.

Die Abbildung $T : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{R}$ sei k -linear und $S : E_{k+1} \times \dots \times E_{k+i} \rightarrow \mathbb{R}$ sei i -linear.

Das TENSORPRODUKT von T mit S ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T \otimes S : E_1 \times \dots \times E_{k+i} &\rightarrow \mathbb{R} \quad (k+i)\text{-linear} \\ (T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= T(v_1, \dots, v_k) S(v_{k+1}, \dots, v_{k+i}) \end{aligned}$$

Völlig analog kann man auch das Tensorprodukt $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$ mehrerer multilinearer Funktionale T_i definieren.

38.2 Das Tensorprodukt von Vektorräumen.

Für endlichdimensionale Vektorräume $E_1, \dots, E_k$ ist das Tensorprodukt durch $E_1 \otimes \dots \otimes E_k := L^k(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R})$ definiert. Gemeinsam mit der k -linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes : E_1 \times \dots \times E_k &\rightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_k, \\ \otimes : (x_1, \dots, x_k) &\mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_k, \text{ wobei} \\ (x_1 \otimes \dots \otimes x_k)(y_1^*, \dots, y_k^*) &:= y_1^*(x_1) \cdot \dots \cdot y_k^*(x_k), \end{aligned}$$

löst es folgendes universelles Problem:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_k & \xrightarrow{\quad \otimes \quad} & E_1 \otimes \dots \otimes E_k \\ & \searrow \text{\textit{k-linear}} & \swarrow \text{\textit{linear}} \\ & & F \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists ! \\ \text{\textit{linear}} \end{array}$$

Ist $\{e_i^j : 1 \leq i \leq \dim E_j\}$ eine Basis von E_j , dann ist eine Basis von $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ gegeben durch:

$$\{e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k : 1 \leq i_1 \leq \dim E_1, \dots, 1 \leq i_k \leq \dim E_k\}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Aussage über die Basis. Die Menge $\{e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k : i_1, \dots, i_k\}$ ist linear unabhängig, denn aus $\sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k = 0$ folgt durch Anwenden auf $(e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k})$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} \underbrace{e_1^{j_1}(e_{i_1}^1)}_{\delta_{i_1}^{j_1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{e_k^{j_k}(e_{i_k}^k)}_{\delta_{i_k}^{j_k}} = \mu^{j_1, \dots, j_k} \end{aligned}$$

Dies ist auch ein Erzeugendensystem für $E_1 \otimes \dots \otimes E_k := L(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R})$, denn jedes k -lineare $\mu : E_1^* \times \dots \times E_k^* \rightarrow \mathbb{R}$ läßt sich auf $(x^1, \dots, x^k) \in E_1^* \times \dots \times E_k^*$ wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned} \mu(x^1, \dots, x^k) &= \mu\left(\sum_{i_1} x_{i_1}^1 e_{i_1}^{i_1}, \dots, \sum_{i_k} x_{i_k}^k e_{i_k}^{i_k}\right) \\ &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} x_{i_1}^1 \dots x_{i_k}^k \cdot \mu(e_{i_1}^{i_1}, \dots, e_{i_k}^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} e_{i_1}^1(x^1) \dots e_{i_k}^k(x^k) \cdot \mu(e_{i_1}^{i_1}, \dots, e_{i_k}^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k)(x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

wobei $\mu^{i_1, \dots, i_k} := \mu(e_{i_1}^{i_1}, \dots, e_{i_k}^{i_k}) \in \mathbb{R}$.

Folglich läßt sich jede multilineare Abbildung $\mu : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ auf eine eindeutige Weise zu einer linearen Abbildung $\tilde{\mu} : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow F$ durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert. $\square$

38.3 Bemerkungen

1. Wir erhalten folgende Identitäten (die erste mittels vollständiger Induktion):

$$\begin{aligned} (\dots (E_1 \otimes E_2) \otimes \dots \otimes E_k) &\cong L((E_1 \otimes \dots \otimes E_{k-1})^*, E_k^*; \mathbb{R}) \\ &\cong L((E_1 \otimes \dots \otimes E_{k-1})^*, L(E_k^*, \mathbb{R})) \\ &\cong L(E_1^*, \dots, E_{k-1}^*, L(E_k^*, \mathbb{R})) \\ &\cong L(E_1^*, \dots, E_{k-1}^*, E_k^*; \mathbb{R}) \\ &\cong E_1 \otimes \dots \otimes E_k \\ E_1 \otimes E_2 &= L(E_1^*, E_2^*; \mathbb{R}) \cong L(E_2^*, E_1^*; \mathbb{R}) = E_2 \otimes E_1 \\ E_1 \otimes \mathbb{R} &= L(E_1^*, \mathbb{R}^*; \mathbb{R}) \cong L(E_1^*, \mathbb{R}^{**}) \cong L(E_1^*, \mathbb{R}) = E_1^{**} \cong E_1 \\ (E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^* &\cong L(E_1, \dots, E_k; \mathbb{R}) \cong L(E_1^*, \dots, E_k^{**}; \mathbb{R}) \\ &= E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^* \\ L(E, F) &\cong L(E, F^{**}) = L(E, L(F^*, \mathbb{R})) \cong L(E, F^*; \mathbb{R}) \\ &\cong L(E^{**}, F^*; \mathbb{R}) = E^* \otimes F \\ L(E_1, \dots, E_k; F) &\cong L(E_1 \otimes \dots \otimes E_k, F) \\ &\cong (E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^* \otimes F \cong E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^* \otimes F. \end{aligned}$$

2. Zu linearen Abbildungen $T_i : E_i \rightarrow F_i$ existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung $T_1 \otimes \dots \otimes T_k : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow F_1 \otimes \dots \otimes F_k$:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_k & \xrightarrow[k\text{-linear}]{\otimes} & E_1 \otimes \dots \otimes E_k \\ T_1 \times \dots \times T_k \downarrow \text{linear} & & \text{linear} \downarrow T_1 \otimes \dots \otimes T_k \\ F_1 \times \dots \times F_k & \xrightarrow[k\text{-linear}]{\otimes} & F_1 \otimes \dots \otimes F_k. \end{array}$$

Dabei ist $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$ auf der Basis $(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k)$ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes \dots \otimes T_k)(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k) &= T_1(e_{i_1}^1) \otimes \dots \otimes T_k(e_{i_k}^k) \\ &= \sum_{j_1} (T_1)_{i_1}^{j_1} f_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes \sum_{j_k} (T_k)_{i_k}^{j_k} f_{j_k}^k \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} (T_1)_{i_1}^{j_1} \dots (T_k)_{i_k}^{j_k} f_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes f_{j_k}^k \end{aligned}$$

3. Zwischen den verschiedensten soeben definierten Tensorprodukten besteht der folgende Zusammenhang: Für $T_i \in L(E_i^*, F_i)$ stimmen die Tensorprodukte

1. $T_1 \otimes \dots \otimes T_k \in L(E_1, \dots, E_k; \mathbb{R}) \cong (E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^*$ von [38.1](#);
2. $T_1 \otimes \dots \otimes T_k \in E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*$ von [38.2](#);
3. $T_1 \otimes \dots \otimes T_k : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow \mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}$ von [38.3.2](#)

vermöge der Isomorphismen $(E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^* \cong E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*$ und $\mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ aus [38.3.1](#) überein.

4. $\otimes E := \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\bigotimes_{i=1}^m E)$ ist eine graduierte, assoziative Algebra mit 1 und heißt die TENSORALGEBRA über E . Dabei heißt eine Algebra GRADUIERT,

falls $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und die Multiplikation $A^k \times A^l$ in A^{k+l} abbildet. Die Elemente $\omega \in A_k$ heißen HOMOGEN VOM GRAD k . Dabei setzt man $\bigotimes^0 E := \bigotimes_{i \in \emptyset} E = \mathbb{R}$, denn $\prod_{i \in \emptyset} E^* = \{0\}$ und jedes $f : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist 0-linear. Die 1 ist dann $1 \in \mathbb{R} = \bigotimes^0 E \subseteq \bigotimes E$.

5. Die Tensoralgebra hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder linearen Abbildung $f : E \rightarrow A$, wo A eine assoziative Algebra mit 1 ist, existiert ein eindeutiger Algebramorphismus $\tilde{f} : \bigotimes E \rightarrow A$, welcher auf $\bigotimes^1 E = E$ mit f übereinstimmt:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\cong} & \bigotimes^1 E & \hookrightarrow & \bigotimes E \\ & \searrow f & & \nearrow \tilde{f} & \\ & \text{linear} & & \text{alg-homo} & \\ & & A & & \end{array}$$

38.4 Definition

Mit $L_{Alt}^k(E, F)$ bezeichnen wir den durch die alternierenden k -linearen Abbildungen gebildeten Teilraum von $L^k(E, F)$. Bekanntlich heißt eine Abbildung $T : E \times \dots \times E \rightarrow F$ alternierend, wenn $\pi^{**}(T) := T \circ \pi^* = \text{sgn}(\pi) \cdot T$ für alle Permutationen $\pi \in S_k := \{\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} : \pi \text{ ist bijektiv}\}$ gilt, d.h.

$$\begin{aligned} T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) &= T(\pi^*(v)_1, \dots, \pi^*(v)_k) = \pi^{**}(T)(v_1, \dots, v_k) \\ &= \text{sgn}(\pi) T(v_1, \dots, v_k) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in E. \end{aligned}$$

Eine Projektion $\text{alt} : L^k(E, F) \rightarrow L_{Alt}^k(E, F) \subseteq L^k(E, F)$, genannt ALTERNATOR, auf diesen Teilraum ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{alt}(T)(v_1, \dots, v_k) &:= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sign}(\pi) T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \\ \text{alt}(T) &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sign}(\pi) \pi^{**}(T). \end{aligned}$$

Für alternierende multilineare Funktionale T und S definiert man das ÄUSSERE oder "HACK"-PRODUKT (englisch: wedge-product) durch:

$$\begin{aligned} (T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= \frac{(k+i)!}{k! i!} \text{alt}(T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+i}) = \\ &= \frac{1}{k! i!} \sum_{\pi} \text{sgn } \pi \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+i)}) \\ &= \frac{1}{k! i!} \sum_{\pi_1, \pi_2} \sum_{\sigma \text{ stkw. } \nearrow} \text{sgn } \sigma \text{sgn } \pi_1 \text{sgn } \pi_2 \cdot \\ &\quad \cdot T(v_{\sigma(\pi_1(1))}, \dots, v_{\sigma(\pi_1(k))}) \cdot S(v_{\sigma(\pi_2(k+1))}, \dots, v_{\sigma(\pi_2(k+i))}) \\ &= \sum_{\sigma(1) < \dots < \sigma(k)} (-1)^{\sum_{j \leq k} (\sigma(j) - j)} \cdot \\ &\quad \cdot T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot S(v_1, \dots, \overbrace{v_{\sigma(1)}}, \dots, \overbrace{v_{\sigma(k)}}, \dots, v_{k+i}). \end{aligned}$$

In dieser Rechnung haben wir die Permutation π von $\{1, \dots, k+i\}$ in eindeutiger Weise als $\sigma \circ (\pi_1 \sqcup \pi_2)$ geschrieben, wobei π_1 eine beliebige Permutation von $\{1, \dots, k\}$, π_2 eine solche von $\{k+1, \dots, k+i\}$ ist und σ eine von $\{1, \dots, k+i\}$ welche auf $\{1, \dots, k\}$ und $\{k+1, \dots, k+i\}$ streng monoton wachsend ist. Es ist also $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ die monotone Anordnung von $\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$ und $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+i)$ die monotone Anordnung von $\{\pi(k+1), \dots, \pi(k+i)\}$.

$\dots < \sigma(k+i)$ jene von $\{\pi(k+1), \dots, \pi(k+i)\}$. Damit ist $\pi_1 = \sigma^{-1} \circ \pi|_{\{1, \dots, k\}}$ und $\pi_2 = \sigma^{-1} \circ \pi|_{\{k+1, \dots, k+i\}}$. Es ist $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sum_{j \leq k} (\sigma(j) - j)}$, denn um die natürliche Ordnung von $\sigma(1), \dots, \sigma(k+i)$ wiederherzustellen müssen für alle $1 \leq j \leq k$ die $\sigma(j) - j$ vielen kleineren Zahlen aus $\{\sigma(k+1), \dots\}$ mit $\sigma(j)$ vertauscht werden.

Falls T, S und R linear sind, dann ist

$$(T \wedge S)(w, v) = T(w)S(v) - T(v)S(w) = \det \begin{pmatrix} T(w) & S(w) \\ T(v) & S(v) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} 2((T \wedge S) \wedge R)(w, v, u) &= \\ &= (T \wedge S)(w, v)R(u) - (T \wedge S)(v, w)R(u) \\ &+ (T \wedge S)(v, u)R(w) - (T \wedge S)(w, u)R(v) \\ &+ (T \wedge S)(u, w)R(v) - (T \wedge S)(u, v)R(w) \\ &= (T(w)S(v) - T(v)S(w))R(u) - (T(v)S(w) - T(w)S(v))R(u) \\ &+ (T(v)S(u) - T(u)S(v))R(w) - (T(w)S(u) - T(u)S(w))R(v) \\ &+ (T(u)S(w) - T(w)S(u))R(v) - (T(u)S(v) - T(v)S(u))R(w) \\ &= 2T(w)S(v)R(u) + 2T(v)S(u)R(w) + 2T(u)S(w)R(v) \\ &- 2T(v)S(w)R(u) - 2T(w)S(u)R(v) - 2T(u)S(v)R(w) \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} T(w) & S(w) & R(w) \\ T(v) & S(v) & R(v) \\ T(u) & S(u) & R(u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und folglich verschwinden auch im 3-fachen Produkt von 1-Formen alle Faktoren. Dies ist der Grund für die Wahl des Faktors $\frac{(k+i)!}{k!i!}$ bzw. $\frac{1}{k!i!}$, siehe auch [38.6.2](#). Analog zu obiger Formel für $T \wedge S$ können wir auch direkt ein Hackprodukt mehrerer multilinear alternierender Funktionale definieren. Beachte noch, daß

$$T \wedge S = (-1)^{ki} S \wedge T,$$

denn

$$\begin{aligned} (T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= \\ &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+i)}) \\ &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi'} \text{sgn}(\pi' \circ \sigma) \cdot T(v_{\pi'(\sigma(1))}, \dots, v_{\pi'(\sigma(k))}) \cdot S(v_{\pi'(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\pi'(\sigma(k+i))}) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi'} \text{sgn}(\pi') \cdot S(v_{\pi'(1)}, \dots, v_{\pi'(i)}) \cdot T(v_{\pi'(i+1)}, \dots, v_{\pi'(i+k)}) \\ &= (-1)^{ki} (S \wedge T)(v_1, \dots, v_{k+i}) \end{aligned}$$

wobei $\pi = \pi' \circ \sigma$ und σ jene Permutation ist, welche den Block $(1, \dots, k)$ mit $(k+1, \dots, k+i)$ vertauscht und Vorzeichen $(-1)^{ik}$ hat.

38.5 Lemma (Das äußere Produkt eines Vektorraums).

Es sei das k -fache äußere Produkt der Vektorräume E definiert durch $\bigwedge^k E := L_{\text{Alt}}^k(E^*, \mathbb{R})$ und $\wedge : E \times \dots \times E \rightarrow \bigwedge^k E \subseteq \bigotimes^k E = L^k(E^*, \mathbb{R})$ sei die folgende

alternierende, k -lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \wedge : (v_1, \dots, v_k) &\mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \quad \text{mit} \\ (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(w^1, \dots, w^k) &:= \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) w^{\pi(1)}(v_1) \dots w^{\pi(k)}(v_k) \\ &= k! \operatorname{alt}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)(w^1, \dots, w^k), \\ \text{also } v_1 \wedge \dots \wedge v_k &:= k! \operatorname{alt}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k). \end{aligned}$$

Das äußere Produkt löst folgendes universelles Problem:

$$\begin{array}{ccc} E \times \dots \times E & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k E \\ & \searrow \text{\textit{k-linear, alt.}} & \swarrow \text{\textit{linear}} \\ & & F \end{array}$$

Ist $\{e_i\}_{i=1}^m$ eine Basis von E (also $m = \dim E$), dann ist $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$ eine Basis von $\bigwedge^k E$, also ist $\dim \bigwedge^k E = \binom{m}{k}$. Speziell für $k = \dim E$ erzeugt $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ ganz $\bigwedge^k E$ und

$$(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)(w^1, \dots, w^k) = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) w_1^{\pi(1)} \dots w_k^{\pi(k)} = \det(w^1, \dots, w^k).$$

Beweis. Es ist $\wedge : E \times \dots \times E \rightarrow \bigwedge^k E$ durch $E \times \dots \times E \xrightarrow{\otimes} \bigotimes^k E \xrightarrow{k! \operatorname{alt}} \bigwedge^k E$ gegeben, folglich bildet $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$ ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^k E = L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})$.

Es ist auch linear unabhängig, denn für aus $\sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k = 0$ folgt durch Anwenden auf $(e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k})$ mit $j_1 < \dots < j_k$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\ &= \mu^{j_1, \dots, j_k} \end{aligned}$$

Folglich läßt sich jede alternierende multilineare Abbildung $\mu : E \times \dots \times E \rightarrow F$ auf eine eindeutige Weise zu einer lineare Abbildung $\tilde{\mu} : \bigwedge^k E \rightarrow F$ durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert. $\square$

38.6 Bemerkungen

1. Es gelten die folgenden Identitäten:

$$L_{Alt}^k(E, F) \cong L\left(\bigwedge^k E, F\right) \text{ und } \left(\bigwedge^k E\right)^* \cong L_{Alt}^k(E, \mathbb{R}) \cong L_{Alt}^k(E^{**}, \mathbb{R}) = \bigwedge^k E^*$$

2. Zu jeder linearen Abbildung $T : E \rightarrow F$ existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\bigwedge^k T : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^k F$:

$$\begin{array}{ccc} E \times \dots \times E & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k E \\ \downarrow T \times \dots \times T & & \downarrow \bigwedge^k T \\ F \times \dots \times F & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k F \end{array}$$

Damit wird $\bigwedge^k$ zu einem Funktor. In der Tat ist $\bigwedge^k T$ auf der Basis $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})$ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
 \left(\bigwedge^k T\right)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) &:= T(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge T(e_{i_k}) \\
 &= \sum_{j_1} T_{i_1}^{j_1} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{j_k} T_{i_k}^{j_k} f_{j_k} \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_k} T_{i_1}^{j_1} \cdots T_{i_k}^{j_k} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k} \\
 &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{\pi} T_{i_1}^{j_{\pi(1)}} \cdots T_{i_k}^{j_{\pi(k)}} f_{j_{\pi(1)}} \wedge \cdots \wedge f_{j_{\pi(k)}} \\
 &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{\pi} T_{i_1}^{j_{\pi(1)}} \cdots T_{i_k}^{j_{\pi(k)}} \operatorname{sgn}(\pi) f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k} \\
 &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \det(T_{i_s}^{j_r})_{r,s} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k}.
 \end{aligned}$$

3. Für $m = \dim(E)$ ist der Raum $\bigwedge E := \bigoplus_{i=0}^m \bigwedge^i E$ eine graduiert-kommutative assoziative Algebra mit $1 \in \bigwedge^0 E := \mathbb{R}$, die sogenannte ÄUSSERE ALGEBRA über E . Dabei heißt eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$ KOMMUTATIV, falls: $a \in A_k, b \in A_j \Rightarrow a \cdot b = (-1)^{kj} b \cdot a$. Es ist $\dim(\bigwedge E) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m$.

39. Vektorbündel-Konstruktionen

39.1 Definition (Tensorfelder und Differentialformen)

Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Als Vektorraum E verwenden wir nun den Tangentialraum $T_x M$ von M bei x . Dann ist $E^* = (T_x M)^*$, und wir bilden das Tensorprodukt

$$\underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} = L^{p+q}(T_x^* M, \dots, T_x M; \mathbb{R}).$$

Die Elemente dieses Vektorraums bezeichnet man als p -FACH KONTRAVARIANTE, q -FACH KOVARIANTE VEKTOREN oder Tensoren. Eine Basis von $T_x M$ ist gegeben durch $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$, wobei $(u^1, \dots, u^m)$ lokale Koordinaten um x von M sind. Die duale Basis von $(T_x M)^*$ haben wir mit $(du^i)_{i=1}^m$ bezeichnet. Nach [38.3](#) erhalten wir als Basis des Tensorprodukts:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \right)_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, m}$$

Analog bilden wir $\Lambda^k(T_x M)^* \cong L_{alt}^k(T_x M, \mathbb{R})$. Die Elemente dieses äußeren Produktes nennt man k -FORMEN und eine Basis bildet

$$(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k})_{i_1 < \cdots < i_k}.$$

Lassen wir nun noch den Punkt $x \in M$ variieren, so können wir Abbildungen

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}}$$

betrachten. Diese heißen p -FACH KONTRAVARIANTE UND q -FACH KOVARIANTE TENSORFELDER.

Eine Abbildung

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \Lambda^k(T_x M)^*$$

heißt DIFFERENTIALFORM VOM GRAD k .

Um von der Glattheit eines Tensorfelds (oder einer Differentialform) sprechen zu können sollten wir die Familie der Vektorräume

$$\left(\underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} \right)_{x \in M}$$

zu einer Mannigfaltigkeit oder besser gleich zu einem Vektorbündel über M machen.

Wir gehen dabei wie beim Tangentialbündel und den daraus konstruierten Kotangentenbündel vor:

39.2 Direkte Summe von Vektorbündel

Seien $E \xrightarrow{p} M$ und $F \xrightarrow{q} M$ zwei Vektorbündel über M sowie φ^E eine Trivialisierung von E über $U \subset M$ und φ^F eine solche von F über dem o.B.d.A. gleichen U . Mit $\psi^E : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ und $\psi^F : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^l)$ bezeichnen wir die Transitionsfunktionen zu je zwei solcher Vektorbündelkarten über U und V . Wir wollen nun die disjunkte Vereinigung $E \oplus F := \bigsqcup_{x \in M} (E_x \oplus F_x)$ zu einem Vektorbündel machen. Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E \oplus F} := \varphi_x^E \oplus \varphi_x^F : \mathbb{R}^{k+l} \cong \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l \xrightarrow{\cong} E_x \oplus F_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{E \oplus F} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{k+l})$ sind dann durch

$$\psi^{E \oplus F}(x) := \psi^E(x) \oplus \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^k) \times GL(\mathbb{R}^l) \hookrightarrow GL(\mathbb{R}^{k+l})$$

gegeben. Die Matrixdarstellung von $\psi^{E \oplus F}(x)$ ist $\begin{pmatrix} [\psi^E(x)] & 0 \\ 0 & [\psi^F(x)] \end{pmatrix}$. Also ist $\psi^{E \oplus F}$ glatt. Somit ist $E \oplus F \rightarrow M$ ein Vektorbündel, die sogenannte WHITNEY-SUMME von E und F .

39.3 Tensorprodukt von Vektorbündel

Analog zur direkten Summe machen wir nun die disjunkte Vereinigung $E \otimes F := \bigsqcup_{x \in M} (E_x \otimes F_x)$ zu einem Vektorbündel, dem sogenannten TENSORPRODUKT von E und F . Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E \otimes F} := \varphi_x^E \otimes \varphi_x^F : \mathbb{R}^{kl} \cong \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \xrightarrow{\cong} E_x \otimes F_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{E \otimes F} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{kl})$ sind dann durch

$$\psi^{E \otimes F}(x) := \psi^E(x) \otimes \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^{kl}) \subset L(\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l)$$

gegeben. Als Matrix ist $\psi^{E \otimes F}(x)$ gerade $(a_i^r b_j^s)_{(i,j),(r,s)}$, wobei (a_i^r) die Matrix von $\psi^E(x)$ und (b_j^s) die Matrix von $\psi^F(x)$ sei. Sind nämlich $(e_i)_{i=1}^k$ und $(f_j)_{j=1}^l$ die Standardbasen im $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^l$ und (a_i^r) sowie (b_j^s) die Matrixdarstellungen von $A \in L(\mathbb{R}^k)$ und $B \in L(\mathbb{R}^l)$, so ist $A \otimes B : \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l$ gegeben durch $(A \otimes B)(v \otimes w) = A(v) \otimes B(w)$. Auf die Standardbasis $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ angewandt erhalten wir also:

$$A(e_i) \otimes B(f_j) = \left(\sum_r a_i^r e_r \right) \otimes \left(\sum_s b_j^s f_s \right) \stackrel{\boxed{38.3.2}}{=} \sum_{r,s} a_i^r b_j^s e_r \otimes f_s.$$

Also ist $\psi^{E \otimes F}$ glatt.

39.4 Äußeres Produkt eines Vektorbündels

Schließlich machen wir die disjunkte Vereinigung $\bigwedge^p E := \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^p E_x$ zu einem Vektorbündel, dem sogenannten p -FACHEN ÄUSSEREN PRODUKT von E . Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{\bigwedge^p E} := \bigwedge^p (\varphi_x^E) : \mathbb{R}^{\binom{k}{p}} \cong \bigwedge^p \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} \bigwedge^p E_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{\bigwedge^p E} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}})$ sind dann durch

$$\psi^{\bigwedge^p E}(x) := \bigwedge^p (\psi^E(x)) \in GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}}) \subset L\left(\bigwedge^p \mathbb{R}^k, \bigwedge^p \mathbb{R}^k\right)$$

gegeben. Wie zuvor zeigt man wieder, diesmal mittels [38.6.2](#), daß die Transitionsfunktionen glatt sind.

Allgemeiner hat man folgende Konstruktion:

39.5 Theorem (Funktorielle Vektorbündel Konstruktionen).

Es sei $\mathcal{F}$ eine Zuordnung, die jeder Familie von $(k+i)$ endlichdimensionalen Vektorräumen einen endlichdimensionalen Vektorraum zuweist und die FUNKTORIELL ist.

Funktoriell bedeutet, daß jedem $(k+i)$ -Tupel linearer Abbildungen

$T_j : F_j \rightarrow E_j$ für $j \leq k$ "kontravariant in den vorderen Variablen"

$T_j : E_j \rightarrow F_j$ für $k < j$ "kovariant in den hinteren Variablen"

eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F}(T_1, \dots, T_{k+i}) : \mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) \rightarrow \mathcal{F}(F_1, \dots, F_{k+i})$$

zugeordnet wird, die mit Komposition und Identität verträglich ist und glatt von $T_1, \dots, T_{k+i}$ abhängt.

Dann ist für $(k+i)$ viele Vektorbündel $p_j : E_j \rightarrow M$ eine natürliche Vektorbündel-Struktur auf $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) := \bigsqcup_x \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x)$ gegeben.

Ein Beispiel eines solchen Funktors ist die direkte Summe $\oplus$; der auf Vektorbündel angewandt die Whitney-Summe liefert.

Ein weiteres ist der Dualraum-Funktor, der auf das Tangentenbündel $\pi : TM \rightarrow M$ angewandt das Kotangentenbündel $T^*M = \bigsqcup_x (T_x M)^* \rightarrow M$ liefert.

Andere Beispiele sind das Tensorprodukt und das äußere Produkt sowie Kombinationen von ihnen, wie $\bigwedge^k T^*M = L_{Alt}^k(TM, \mathbb{R}) = \left(\bigwedge^k TM\right)^*$.

Beweis. Die Vektorbündelkarten $\mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})$ werden aus jenen für E_i faserweise durch folgende Formel gewonnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})|_x &= \\ &= \mathcal{F}\left((\psi_1)_x^{-1}, \dots, (\psi_k)_x^{-1}, (\psi_{k+1})_x, \dots, (\psi_{k+i})_x\right) \\ &= \mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})|_x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1}, \dots, \mathbb{R}^{N_{k+i}}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x) \end{aligned}$$

Die zugehörigen Transitionsfunktionen sind dann die Zusammensetzung folgender drei Abbildungen:

$$\begin{aligned} (\psi_1|_x, \dots, \psi_{k+i}|_x) : U \cap V &\rightarrow GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\ (\text{inv}, \dots; \text{id}, \dots) : GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) &\rightarrow GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\ \mathcal{F} : GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) &\rightarrow GL\left(\mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1}, \dots, \mathbb{R}^{N_{k+i}})\right) \quad \square \end{aligned}$$

40. Differentialformen

40.1 Definition (glatte Tensorfelder und Differentialformen)

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN p -FACH KONTRAVARIANT UND q -FACH KOVARIANTEN TENSORFELDER oder kurz p - q -TENSORFELDER, d.h. der glatten Schnitte des Vektorbündels

$$\underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(TM)^* \otimes \cdots \otimes (TM)^*}_{q\text{-mal}}$$

wird auch mit $\mathcal{T}_p^q(M)$ bezeichnet.

Lokal läßt sich jedes Tensorfeld Φ als

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ j_1, \dots, j_q=1}}^{\dim(M)} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q}$$

schreiben. Und wir wissen, daß Φ genau dann glatt ist, wenn alle Komponenten $\Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ glatte reell-wertige Funktionen sind. Insbesondere sind die 0-0-Tensorfelder gerade die reell-wertigen Funktionen, die 1-0-Tensorfelder die Vektorfelder und die 0-1-Tensorfelder die 1-Formen.

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN DIFFERENTIALFORMEN VOM GRAD p , d.h. glatten Schnitte des Vektorbündels $\bigwedge^p(TM)^*$ wird mit $\Omega^p(M)$ bezeichnet. Diesen Raum können wir auch anders beschreiben:

$$\begin{aligned} \Omega^p(M) &:= \Gamma\left(\bigwedge^p(TM)^* \rightarrow M\right) \\ &\cong \Gamma\left(\left(\bigwedge^p TM\right)^* \rightarrow M\right) \\ &\cong \left\{ \omega : \bigwedge^p TM \rightarrow \mathbb{R} : \omega_x \in L\left(\bigwedge^p T_x M, \mathbb{R}\right) \forall x \right\} \\ &\cong \left\{ \omega : \bigoplus^p TM \rightarrow \mathbb{R} : \omega_x \in L_{Alt}^p(T_x M, \mathbb{R}) \forall x \right\} \end{aligned}$$

Wegen $\bigwedge^0(TM)^* = M \times \mathbb{R}$ stimmt der Raum $\Omega^0(M)$ der 0-Formen mit $C^\infty(M, \mathbb{R})$ überein. Jede Differentialform ω vom Grad k läßt sich lokal als

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k}$$

schreiben. Wieder gilt, daß ω glatt ist, wenn alle seine lokalen Komponenten $\omega_{i_1, \dots, i_k}$ glatt sind.

Für die Koeffizienten $\omega_{i_1, \dots, i_k}$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} &(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k}) \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) \stackrel{\boxed{38.5}}{=} \\ &= \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) du^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(1)}}} \right) \cdots du^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(k)}}} \right) \\ &= \begin{cases} \text{sgn}(\pi) & \text{falls eine Permutation } \pi \text{ existiert mit } j_{\pi(k)} = i_k \forall k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

folgende Formel für $j_1 < \dots < j_k$:

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) &= \\ &= \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) = \omega_{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

40.2 Bemerkung

Wegen

$$\begin{aligned} \underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \dots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} &\cong \\ &\cong L(\underbrace{(T_x M)^*, \dots, (T_x M)^*}_{p\text{-mal}}, \underbrace{T_x M, \dots, T_x M}_{q\text{-mal}}; \mathbb{R}) \end{aligned}$$

können wir ein p - q -Tensorfeld

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$$

punktweise auf q Tangentialvektoren $\xi_1, \dots, \xi_q \in T_x M$ und p Kotangentialvektoren $\omega^1, \dots, \omega^p$ anwenden:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) &= \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes du^{j_q}\right) \left(\sum_{r_1} \omega_{r_1}^1 du^{r_1}, \dots, \sum_{s_q} \xi_q^{s_q} \frac{\partial}{\partial u^{s_q}}\right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q \\ r_1, \dots, r_p \\ s_1, \dots, s_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{r_1}^1 \delta_{i_1}^{r_1} \dots \xi_q^{s_q} \delta_{s_q}^{j_q} \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q}. \end{aligned}$$

Satz (Tensorfelder als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildungen).

Obige Abbildung liefert einen linearen Isomorphismus des Raums $\mathcal{T}_p^q$ der glatten p - q -Tensorfelder mit dem Raum $L_{C^\infty(M, \mathbb{R})}^k(\Omega^1(M), \dots, \mathfrak{X}(M); C^\infty(M, \mathbb{R}))$ der $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilinearen Abbildungen.

Beweis. Wir gehen analog zum Beweis von [31.11](#) vor:

Offensichtlich wirkt jedes Tensorfeld Φ auf 1-Formen $\omega^1, \dots, \omega^p \in \Omega^1(M)$ und auf Vektorfelder $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathfrak{X}(M)$ als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineare Abbildung, durch

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) := \Phi_x(\omega^1(x), \dots, \omega^p(x), \xi_1(x), \dots, \xi_q(x))$$

und wegen der obigen lokalen Formel

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q}$$

liegt $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Umgekehrt sei $\Phi : \Omega^1(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildung. Falls eines der Vektorfelder oder 1-Formen σ lokal um $x \in M$ verschwindet, so auch $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)$, denn sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ so gewählt, daß $f = 1$ auf dem Träger jenes Schnittes σ und $f(x) = 0$ gilt. Dann ist $f \cdot \sigma = \sigma$ und wegen der $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Linearität ist

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) = f(x) \cdot \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) = 0.$$

Folglich erhalten wir die lokale Formel

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_q^{j_q},$$

mit $\Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := \Phi(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, du^{i_p}, \xi_1^{j_1}, \dots, \xi_q^{j_q})$, deren rechte Seite an der Stelle x nur von Wert der 1-Formen und Vektorfelder an dieser Stelle abhängt. Also definiert

$$\Phi_x(\omega^1|_x, \dots, \xi_q|_x) := \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x)$$

ein glattes Tensorfeld, das gesuchte inverse Bild zu Φ . $\square$

40.3 Satz (Differentialformen als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildungen).

Es existiert ein linearer Isomorphismus von $\Omega^k(M)$ mit $\left\{ \omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) : \omega \text{ ist } k\text{-linear alternierend und } C^\infty(M, \mathbb{R})\text{-homogen} \right\}$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Offensichtlich ist $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = \omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p)$ k -linear und alternierend.

Die Abbildung ω ist aber auch $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen:

$$\begin{aligned} \omega(f \xi_1, \dots, \xi_k)|_p &= \omega_p(f_p \xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) = f(p) \omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) \\ &= f \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p \end{aligned}$$

Weiters ist $M \xrightarrow{(\xi_1, \dots, \xi_k)} TM \oplus \dots \oplus TM \xrightarrow[\boxed{40.1}]{\omega} \mathbb{R}$ glatt, also $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

($\Leftarrow$) Sei $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit obigen Eigenschaften. Es ist z.z., daß $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p$ nur von $\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p$ abhängt, denn dann können wir definieren: $\omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) := \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p$.

Sei $\xi_1 = 0$ lokal um p , sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(p) = 0$ und $f = 1$ dort wo $\xi_1 \neq 0$. Dann gilt $f \cdot \xi_1 = \xi_1$ und somit wie zuvor

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = \omega(f \xi_1, \dots, \xi_k)|_p = f(p) \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = 0.$$

Sei weiters $\xi_1 = \sum_{i=1}^m \xi_1^i (\frac{\partial}{\partial x^i})$ lokal. Dann gilt

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega\left(\sum_i \xi_1^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \dots, \xi_k\right) = \sum_i \xi_1^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \xi_k\right)$$

und da $\xi_1|_p = 0$ gilt $\xi_1^i|_p = 0 \ \forall i$ und somit $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = 0$.

Sei $\omega = \sum \omega_I dx^I$ eine lokale Darstellung von ω , dabei ist $dx^I := dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ für $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$. Es ist $\omega_I(p) = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}})|_p$ glatt bei p , also ist $\omega \in \Omega^k(M)$. $\square$

41. Differentialformen auf Riemann MF

32.1 Bemerkung zur Dualität

Für $M = U \subset \mathbb{R}^m$ können wir das Tangentialbündel und das Kotangentialbündel identifizieren, denn $TM = M \times \mathbb{R}^m$ und $T^*M = M \times (\mathbb{R}^m)^*$. Es sind also sowohl die Vektorfelder als auch die 1-Formen auf M mit Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ident. Im allgemeinen gibt es aber keinen solchen kanonischen Isomorphismus zwischen $T_x M$ und $(T_x M)^*$. Wir wollen nun Mannigfaltigkeiten beschreiben, für welche es einen solchen dennoch gibt. Inwiefern ist denn ein endlich dimensionaler Vektorraum E und sein Dualraum E^* isomorph? Da sie die gleiche Dimension haben sind sie isomorph. Aber um einen solchen Isomorphismus angeben zu können, verwendet man üblicherweise eine Basis von E und als Bildvektoren die duale Basis von E^* . Wählt man eine andere Basis, so ändert sich auch der Isomorphismus. So können wir auf einer Mannigfaltigkeit nicht vorgehen, denn in $T_x M$ haben wir keine ausgezeichnete Basis zur Verfügung.

Eine zweite Möglichkeit so einen Isomorphismus zu erhalten ist die Verwendung eines inneren Produkts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf E . Dann induziert diese bilineare Form eine lineare Abbildung $\sharp : E \rightarrow L(E, \mathbb{R}) = E^*$ durch $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$. Diese ist injektiv, denn: $\forall w : \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Aus Dimensionsgründen ist sie somit ein Isomorphismus. Ihre Umkehrabbildung bezeichnen wir mit $\flat := \sharp^{-1} : E^* \rightarrow E$. Wegen $\sharp(\xi)(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle$ ist $\langle \flat\omega, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \sharp(\xi)(\eta) = \omega(\eta)$, wobei wir $\xi := \flat\omega$ gesetzt haben und somit $\omega = \sharp\xi$ ist.

Wie sieht $\sharp$ in Koordinaten aus? Sei (e_i) eine Orthonormal(!)basis von E und (e^i) die dazugehörige duale Basis. Dann ist $\sharp(e_i)(e_j) := \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = e^i(e_j)$, also bildet $\sharp$ die Basis (e_i) auf die duale Basis (e^i) ab.

Falls (g_i) eine beliebige Basis von E ist und (g^i) die dazugehörige duale Basis von E^* , so gilt:

$$\begin{aligned} \sharp(g_i)(g_k) &= \langle g_i, g_k \rangle =: g_{i,k} = \sum_j g_{i,j} g^j(g_k) \\ \Rightarrow \sharp(g_i) &= \sum_j g_{i,j} g^j \text{ und} \\ \sharp(v) &= \sharp\left(\sum_i v^i g_i\right) = \sum_i v^i \sum_j g_{i,j} g^j = \sum_j \left(\sum_i g_{i,j} v^i\right) g^j \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit v^i die Koordinaten des Vektors $v \in E$ bezüglich der Basis (g_i) und mit v_j die Koordinaten des dazugehörigen dualen Vektors $\sharp(v) \in E^*$ bezüglich der dualen Basis (g^i) , so gilt also:

$$v_j = \sum_i g_{i,j} v^i.$$

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $T_x M$ ein Teilraum vom $\mathbb{R}^n$ und erbt somit das übliche innere Produkt von $\mathbb{R}^n$. Also ist $(T_x M)^*$ isomorph zu $T_x M$ vermöge dem Isomorphismus $\sharp : T_x M \rightarrow (T_x M)^*$. Wir erhalten also auch eine faserlineare Bijektion der Bündel $TM \rightarrow M$ und $T^*M \rightarrow M$. In Koordinaten ist sie durch

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \mapsto \sum_j g_{i,j} du^j$$

gegeben, wobei $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$ mit $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ und $g^i = du^i$. Da die g_i glatte Funktionen von $M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind, sind alle Koeffizienten $g_{i,j} : M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, und somit die Bündel TM und T^*M isomorph.

Es entsprechen sich also auch die glatten Schnitte eindeutig, d.h. $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^1(M)$. Das Vektorfeld, welches einer exakten 1-Form df entspricht, heißt GRADIENTENFELD $\text{grad}(f)$ von f . Für offene Teilmannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^M$ wird die Koordinatendarstellung von $\text{grad}(f)$ aus jener von df durch transponieren gewonnen, nicht aber für allgemeine M .

41.1 Tensorfelder auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

Allgemein wissen wir, daß $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist und wir wollen nun $\Omega^1(M)$ anders beschreiben. Sei dazu vorerst E ein endlich dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. Wir haben dann nach [32.1](#) einen Isomorphismus $\sharp : E \xrightarrow{\cong} E^*$ definiert durch $\sharp : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$. Sein Inverses bezeichnen wir mit $\flat := \sharp^{-1}$. Sei (e_i) eine Orthonormalbasis von E und (e^i) die duale Basis von E^* , dann ist:

$$\sharp : x = \sum_i x^i e_i \in E \mapsto \sum_i x^i e^i \in E^*.$$

Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit mit dem zugehörigen Tangentialraum $\sharp : T_x M \cong (T_x M)^*$. Eine Basis im Tangentialraum ist gegeben durch $\frac{\partial}{\partial u^i}$, diese wird nach [32.1](#) abgebildet auf $\sharp(\frac{\partial}{\partial u^i}) = \sum_j g_{j,i} du^j$. Und allgemeiner wird $\xi \in T_x M$ wie folgt abgebildet:

$$\sharp : \xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in T_x M \mapsto \omega = \sum_i \omega_i du^i \in (T_x M)^*.$$

wobei $\xi^i = \sum_j g^{i,j} \omega_j$, $\omega_i = \sum_j g_{i,j} \xi^j$ und $g_{i,j} = \langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \rangle$ sind, und $(g^{i,j}) = (g_{i,j})^{-1}$ ist. Es folgt, daß auf kanonische Weise $TM \cong T^*M$ ist, und somit der Raum der Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ kanonisch isomorph zum Raum der 1-Formen $\Omega^1(M)$ ist.

Allgemeiner gilt:

$$\mathcal{T}_p^q(M) \cong \mathcal{T}_{p+q}^0(M) \cong \mathcal{T}_0^{p+q}(M)$$

41.2 Volumsform

Sei E ein endlich dimensionaler, orientierter Vektorraum mit innerem Produkt. Falls $(e_1, \dots, e_m)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von E ist, so definieren wir $\det \in L_{Alt}^m(E; \mathbb{R})$ durch $\det(e_1, \dots, e_m) = 1$. Um zu zeigen, daß diese Definition nicht von der gewählten Basis abhängt wählen wir beliebige Vektoren $g_i \in E$ und betrachten die Abbildung $A : E \rightarrow E$, welche e_j auf $g_j := \sum_i a_j^i e_i$ abbildet. Dann ist

$$\begin{aligned} \det(g_1, \dots, g_m) &= \det\left(\sum_{j_1} a_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_m} a_m^{j_m} e_{j_m}\right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_m} a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m} \underbrace{\det(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})}_{\substack{=0, \text{ falls } j_1, \dots, j_m \text{ keine} \\ \text{Permutation von } 1, \dots, m}} \\ &= \sum_{j \text{ Permutation}} a_1^{j(1)} \dots a_m^{j(m)} \underbrace{\text{sgn}(j) \det(e_1, \dots, e_m)}_{=1} \\ &= \det(a_i^j)_{i,j}. \end{aligned}$$

Falls also $(g_i)_i$ insbesondere eine andere positiv orientierte Orthonormalbasis ist, so ist $[A] \in SO(n)$, also $1 = \det[A] = \det(g_1, \dots, g_m)$.

Da wir diese Konstruktion auf den Tangentialraum einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit anwenden wollen (dort aber nicht eine orthonormal-Basis) sondern nur eine (positiv orientierte) Basis $(\frac{\partial}{\partial u^j})_j$ gegeben haben, benötigen wir auch für so eine Basis (g_j) eine Formel für die Determinante: Dazu betrachten wir wieder die inneren Produkte

$$g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_k a_i^k e_k, \sum_l a_j^l e_l \right\rangle = \sum_{k,l} a_i^k a_j^l \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{k,l}} = \sum_k a_i^k a_j^k$$

und erhalten $(g_{i,j})_{i,j} = [A \cdot A^t]$ und weiters

$$\det(g_{i,j})_{i,j} = \det([A] \cdot [A]^t) = (\det[A])^2$$

und schließlich (wegen $\det[A] > 0$)

$$\det(g_1, \dots, g_m) = \det[A] = \sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}} =: \sqrt{G}.$$

Für jede orientierte (siehe [72, 34.3]) Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) ist $\det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M, \mathbb{R})$ und wir definieren die VOLUMSFORM $\text{vol}_M \in \Omega^m(M)$ der Mannigfaltigkeit durch

$$\text{vol}_M(x) := \det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M; \mathbb{R}).$$

Diese Volumsform wollen wir mittels lokaler Koordinaten $(u^1, \dots, u^m)$ berechnen. Es bilden die $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ eine Basis in $T_x M$, von der wir annehmen dürfen, daß sie positiv orientiert ist, wenn wir ein Orientierungs-erhaltende Karte $\varphi = (u^1, \dots, u^m)^{-1}$ verwenden. Es ist $\text{vol} = \text{vol}_{1,\dots,m} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^m$ mit

$$\begin{aligned} \text{vol}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) &= \left(\text{vol}_{1,\dots,m} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^m\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) \\ &= \text{vol}_{1,\dots,m} \cdot \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \underbrace{du^1\left(\frac{\partial}{\partial u^{\pi(1)}}\right)}_{\delta_{\pi(1),1}} \dots \underbrace{du^m\left(\frac{\partial}{\partial u^{\pi(m)}}\right)}_{\delta_{\pi(m),m}} = \text{vol}_{1,\dots,m}, \end{aligned}$$

da π die Identität sein muß, siehe auch [40.1]. Wegen obiger Rechnung ist

$$\text{vol}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) = \det(g_1, \dots, g_m) = \sqrt{G}$$

$$\text{mit } G := \det(g_{i,j})_{i,j} \text{ und } g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right).$$

Wir erhalten für orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten der Dimension m folgenden Isomorphismus:

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \Omega^m(M), \quad f \mapsto f \cdot \text{vol}_M.$$

41.3 Skalare Produkt auf $\Omega(M)$

Dazu betrachten wir zuerst einen orientierten, m -dimensionalen Vektorraum E . Seien die (e_i) eine positiv-orientierte Orthonormalbasis von E . Wir definieren ein skalares Produkt auf E^* indem wir fordern, daß die duale Basis (e^i) ebenfalls eine Orthonormalbasis sei. Auf $\bigotimes^k E$ definieren wir ein skalares Produkt indem wir fordern, daß die Basis $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})_{i_1, \dots, i_k}$ eine Orthonormalbasis sei und analog auf $\bigwedge^k E$ durch die Orthonormalbasis $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$. Diese Definition ist von der Basis unabhängig, denn das skalare Produkt auf E^* ist durch folgende Formel gegeben:

$$\langle x^*, y^* \rangle_{E^*} = \langle \flat x^*, \flat y^* \rangle_E, \text{ da } \langle e^i, e^j \rangle_{E^*} = \langle e_i, e_j \rangle_E = \delta_{i,j},$$

wobei $\flat : E^* \rightarrow E$ den inversen Isomorphismus zu $\sharp : E \rightarrow E^*$ bezeichnet. Auf $\bigotimes^k E$ ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_k, y_1 \otimes \dots \otimes y_k \rangle_{\bigotimes^k E} = \langle x_1, y_1 \rangle_E \cdot \dots \cdot \langle x_k, y_k \rangle_E$$

Auf $\bigwedge^k E$ ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\begin{aligned}\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_k \rangle_{\bigwedge^k E} &= \det \left((\langle x_i, y_j \rangle_E)_{i,j} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_k \rangle_{\otimes^k E}.\end{aligned}$$

Achtung: Die Einschränkung des skalaren Produkts von $\otimes^k E$ auf den Teilraum $\bigwedge^k E$ hat noch einen Faktor $k!$, denn

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = k! \operatorname{alt}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}$$

und somit ist

$$\begin{aligned}\langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, x_1 \wedge \dots \wedge x_k \rangle_{\otimes^k E} &= \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi) \langle x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}, x_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes x_{\pi(k)} \rangle_{\otimes^k E} \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(1)} \rangle \dots \langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(k)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(\sigma(1))} \rangle \dots \langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(\sigma(k))} \rangle \\ &= k! \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \langle x_1, x_{\pi(1)} \rangle \dots \langle x_k, x_{\pi(k)} \rangle.\end{aligned}$$

41.4 Definition (Hodge-Sternoperator)

Sei E ein orientierter m -dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist $\dim(\bigwedge^k E) = \binom{m}{k}$. Und somit ist $\bigwedge^k E \cong \bigwedge^{m-k} E$. Wir wollen nun einen Isomorphismus $*$: $\bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^{m-k} E$ angeben, der nicht von der Wahl einer Basis abhängt. Dieser heißt Hodge-Sternoperator und ist durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$\eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \cdot \det \text{ für } \eta, \omega \in \bigwedge^k E.$$

Um zu zeigen, daß dadurch wirklich ein linearer Operator eindeutig bestimmt ist wählen wir eine positiv orientierte Orthonormalbasis $(e^1, \dots, e^m)$ in E .

Eine Basis von $\bigwedge^k E$ ist dann durch die Elemente $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ und eine solche von $\bigwedge^{m-k} E$ durch die Elemente

$$e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{i_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{i_k}} \wedge \dots \wedge e^m$$

gegeben. Wir wollen die Koeffizienten $\alpha_{j_1, \dots, j_k}$ des Bildes von $\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ unter dem Sternoperator bestimmen:

$$*\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \alpha_{j_1, \dots, j_k} e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{j_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{j_k}} \wedge \dots \wedge e^m.$$

Dazu verwenden wir die implizite Gleichung mit

$$\eta := e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_k} \text{ für } l_1 < \dots < l_k$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha_{l_1, \dots, l_k} e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_k} \wedge e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_k}} \wedge \dots \wedge e^m &= \\ = \eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \det & \\ = \underbrace{\langle e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_k}, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \rangle}_{\delta^{(l_1, \dots, l_k), (i_1, \dots, i_k)}} e^1 \wedge \dots \wedge e^m. \end{aligned}$$

Um das Hackprodukt auf der linken Seite auch in die natürliche Reihenfolge zu bekommen müssen wir zuerst e^{l_k} mit $e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_k}}$ vertauschen und erhalten ein Vorzeichen $(-1)^{l_k - k}$, danach $e^{l_{k-1}}$ mit $e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_{k-1}}}$ und erhalten ein Vorzeichen $(-1)^{l_{k-1} - k - 1}$ u.s.w. und schließlich e^{l_1} mit $e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_1}}$ mit $(-1)^{l_1 - 1}$ als resultierenden Vorzeichen. Also verschwinden alle $\alpha_{l_1, \dots, l_k}$ bis auf

$$\alpha_{i_1, \dots, i_k} = (-1)^{i_k - k} \dots (-1)^{i_1 - 1} = (-1)^{(\sum_{j=1}^k i_j) - k(k+1)/2}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $*$ bis auf ein Vorzeichen zu sich selbst invers ist. Sei $\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \in \bigwedge^k E$ gegeben. Dann ist

$$*\omega = (-1)^{(\sum_{j=1}^k i_j) - k(k+1)/2} e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{i_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{i_k}} \wedge \dots \wedge e^m$$

und

$$**\omega = (-1)^{1 + \dots + \overline{i_1} + \dots + \overline{i_k} + \dots + m - (m-k)(m-k+1)/2} (-1)^{i_1 + \dots + i_k - k(k+1)/2} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

Die Berechnung des Vorzeichen ergibt: $(-1)^{k(m-k)}$, d.h. $* \circ * = (-1)^{k(m-k)} : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^{m-k} E \rightarrow \bigwedge^k E$. Dieses Vorzeichen ist genau dann -1 (und sonst $+1$), wenn m gerade und k ungerade ist.

Der Hodge-Stern Operator ist eine Isometrie, wie man entweder durch die Wirkung auf einer orthonormal-Basis sofort sieht, oder wie aus

$$\langle *\alpha, *\beta \rangle \cdot \text{vol}_M = *\alpha \wedge **\beta = (-1)^{k(m-k)} *\alpha \wedge \beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle \text{vol}_M$$

folgt. Umgekehrt hätten wir auch die Isometrie-Eigenschaft von $*$ verwenden können um mit dieser Rechnung $* \circ * = (-1)^{k(m-k)}$ zu zeigen.

Für eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension m definieren wir den HODGE-STERNOperator $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$ durch $(*\omega)(x) := *(\omega(x))$.

41.5 Spezialfälle

($k = 0$)

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(M) & \xrightarrow[\cong]{*} & \Omega^m(M) \\ & \searrow & \nearrow \\ & C^\infty(M, \mathbb{R}) & \end{array} \quad \begin{array}{c} \cong \\ (-) \cdot \text{vol}_M \end{array}$$

Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dann ist $g \wedge *f = \langle g, f \rangle_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \cdot \text{vol}_M$. Wählen wir $g := 1$, so gilt:

$$*f = 1 \wedge *f = f \cdot \text{vol}_M \quad \text{für } * : C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^m(M)$$

und wegen $* \circ * = \text{id}$, ist

$$*(f \cdot \text{vol}_M) = f \quad \text{für } * : \Omega^m(M) \rightarrow \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

($k = 1$)

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(M) & \xrightarrow[\cong]{*} & \Omega^{m-1}(M) \\ & \nwarrow \cong \quad \nearrow \cong & \\ & \mathfrak{X}(M) & \end{array}$$

Sei $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \omega = \sum \omega_i du^i \in \Omega^1(M)$, wobei $\omega_i = \sum_j g_{i,j} \xi^j$ und $\text{vol}_M = \sqrt{G} du^1 \wedge \dots \wedge du^m$, dann gilt für

$$*\omega = \sum_{i=1}^m \overbrace{\eta_{1,\dots,\hat{i},\dots,m}}^{\eta_i :=} du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m$$

$$\begin{aligned} \eta_i (-1)^{i-1} du^1 \wedge \dots \wedge du^m &= \eta_i du^i \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\ &= du^i \wedge (*\omega) = \left\langle du^i, \sum \omega_j du^j \right\rangle \cdot \text{vol}_M \\ &= \sum_j \omega_j \underbrace{\langle du^i, du^j \rangle_{\Omega^1(M)}}_{g^{i,j}} \cdot \text{vol}_M \\ &= \sum_j \omega_j g^{i,j} \sqrt{G} du^1 \wedge \dots \wedge du^m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da } \langle du^i, du^j \rangle &= \langle \flat(du^i), \flat(du^j) \rangle = \left\langle \sum_k g^{i,k} \frac{\partial}{\partial u^k}, \sum_l g^{j,l} \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle \\ &= \sum_{k,l} g^{i,k} g^{j,l} \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle}_{g_{k,l}} = \sum_k g^{i,k} \delta_k^j = g^{i,j}, \end{aligned}$$

wobei $(g^{i,k})$ die inverse Matrix zu $(g_{i,k})$ ist. Mit dieser Behauptung folgt:

$$\begin{aligned} \eta_i &= \sum_j (-1)^{i-1} \omega_j g^{i,j} \sqrt{G} \quad \text{und somit} \\ *\omega &= \sum_i \eta_i du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} \sqrt{G} \underbrace{\sum_j g^{i,j} \omega_j}_{\xi^i} du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\ &= \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} * \circ \sharp : \mathfrak{X}(M) &\ni \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \mapsto \\ &\mapsto \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \in \Omega^{m-1}(M). \end{aligned}$$

42. Graduierte Derivationen

42.1 Lemma (Algebra der Differentialformen).

Es ist $\Omega(M) := \bigoplus_k \Omega^k(M)$ eine graduiert kommutative Algebra bezüglich dem punktweisen Hackprodukt (siehe [38.4](#))

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k+i}) &= \\ &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_x(\xi_{\pi(1)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \cdot \beta_x(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+i)}), \end{aligned}$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^i(M)$ und $\xi_i \in T_x M$. Für parakompakte Mannigfaltigkeiten M ist sie als Algebra durch $\{f, df : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$ erzeugt.

Beweis. Da die Fasern $\bigwedge T_x^* M = \bigoplus_k \bigwedge^k T_x^* M$ graduiert kommutative Algebren sind, ist auch $\Omega(M) = \Gamma(\bigwedge T^* M)$ eine graduiert kommutative Algebra. Lokal wird $\Omega(M)$ durch $\{f, df : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$ erzeugt, denn $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$. Um das auch global zu erhalten, benötigen wir einen endlichen Atlas von M . Für zusammenhängende parakompakte Mannigfaltigkeiten existiert ein solcher nach [19.11](#). Wir wählen eine Partition $\{f_1, \dots, f_N\}$ der Eins, welche dem zugehörigen Vektorbündel-Atlas von T^*M untergeordnet ist. Dann ist $\omega = \sum_j f_j \omega$ und $f_j \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{j; i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$, wobei $(u^1, \dots, u^m)$ lokale Koordinaten auf eine Umgebung W_i von $\operatorname{Trg}(f_j)$ sind, die zu globalen glatten Funktionen auf M erweitert wurden und die Koeffizienten $\omega_{j; i_1, \dots, i_k}$ globale glatte Funktionen mit Träger in W_i sind. $\square$

42.2 Zurückziehen von Formen

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt, dann haben wir die Tangentialabbildung $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, sowie deren Adjungierte $(T_p f)^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$. Falls nun p nicht durch $f(p)$ determiniert ist, d.h. f nicht injektiv ist, oder zu gewissen $q \in N$ kein p mit $f(p) = q$ existiert, d.h. f nicht surjektiv ist, läßt sich keine Abbildung $T^* f : T^* N \rightarrow T^* M$ aus den $(T_p f)^*$ zusammensetzen. Es läßt sich aber nach [31.11](#) dennoch ganz allgemein aus

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k T^* M & \xrightarrow{\bigwedge^k T^* f} & \bigwedge^k T^* N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

eine Abbildung

$$f^* := \left(\bigwedge^k T^* f \right)^* : \Omega^k(N) := \Gamma \left(\left(\bigwedge^k T^* N \right)^* \rightarrow N \right) \rightarrow \Gamma \left(\left(\bigwedge^k T^* M \right)^* \rightarrow M \right) =: \Omega^k(M)$$

definieren. Dabei heißt $f^*(\omega)$ die mit f ZURÜCKGEZOGENE FORM zu ω .

$$(f^* \omega)_p(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k) := \omega_{f(p)} \left(\left(\bigwedge^k T^* f \right)(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k) \right)$$

oder unter Verwendung des Isomorphismuses $\left(\bigwedge^k T_x^* M \right)^* \cong L_{Alt}^k(T_x M; \mathbb{R})$ auch als

$$(f^* \omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega_{f(p)}(T_p f \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p f \cdot \xi_k|_p).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} f^*(dg)_p(\xi_p) &= (dg)_{f(p)}(T_p f \cdot \xi_p) = \text{pr}_2 \cdot T_{f(p)} g \cdot T_p f \cdot \xi_p \\ &= \text{pr}_2 \cdot T_p(g \circ f) \cdot \xi_p = d(g \circ f)_p \cdot \xi_p \end{aligned}$$

Das so definierte $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ ist ein Algebromorphismus, wie man leicht nachrechnet. Mittels des Isomorphismus $(\bigwedge^k TM)^* \cong \bigwedge^k (T^*M)$ kann man f^* für $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega^1(M)$ auch durch $f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) := f^*(\omega_1) \wedge \dots \wedge f^*(\omega_k)$ definieren, wobei $f^*(\omega_k)$ die in [31.12](#) definierte zurückgezogene 1-Form ist. Weiters gilt:

$$\begin{aligned} f^*(g) &= g \circ f \text{ und} \\ f^*(dg) &= d(g \circ f) \text{ für } g \in C^\infty(N, \mathbb{R}) \\ (f_1 \circ f_2)^* &= f_2^* \circ f_1^* \text{ für zusammensetzbare Abbildungen } f_1 \text{ und } f_2 \end{aligned}$$

Seien $(u^i)_{i=1}^m$ lokale Koordinaten auf M und $(v^j)_{j=1}^n$ lokale Koordinaten auf N . Dann läßt sich $\omega \in \Omega^k(N)$ lokal als

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1, \dots, j_k} dv^{j_1} \wedge \dots \wedge dv^{j_k}$$

schreiben. Die zurückgezogene Form muß eine lokale Darstellung der Form

$$f^*(\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \eta_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

besitzen. Wir berechnen nun die lokalen Koeffizienten $\eta_{i_1, \dots, i_k}$ von $f^*(\omega)$:

$$\begin{aligned} \eta_{i_1, \dots, i_k}(x) &= f^*(\omega)_x \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{i_k}} \right) \\ &= \omega_{f(x)} \left(\left(\bigwedge_{t=1}^k T_x f \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{i_k}} \right) \right) \\ &\stackrel{\text{38.6}}{=} \omega_{f(x)} \left(\sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left(\frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \frac{\partial}{\partial v^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial v^{j_k}} \right) \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left(\frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \omega_{f(x)} \left(\frac{\partial}{\partial v^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{j_k}} \right) \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left(\frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \omega_{j_1, \dots, j_k}(f(x)). \end{aligned}$$

Wir können dies auch durch die Multiplikativität von f^* wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned} f^*(dv^{j_1} \wedge \dots \wedge dv^{j_k}) &= d(v^{j_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(v^{j_k} \circ f) \\ &= \left(\sum_{i_1} \frac{\partial(v^{j_1} \circ f)}{\partial u^{i_1}} du^{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_k} \frac{\partial(v^{j_k} \circ f)}{\partial u^{i_k}} du^{i_k} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \det \left(\frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}. \end{aligned}$$

Also ist

$$f^*(\omega) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ i_1, \dots, i_k = 1 \dots m}} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_k \\ j_1, \dots, j_k = 1 \dots n}} \omega_{(j_1, \dots, j_k)} \rho_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

Wobei $\rho_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} := \det \left(\frac{\partial(v^{j_1}, \dots, v^{j_k})}{\partial(u^{i_1}, \dots, u^{i_k})} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_k}} \end{pmatrix}$

mit $\frac{\partial v^j}{\partial u^i} := \frac{\partial}{\partial u^i}(v^j \circ f),$

In [72, 29.1] haben wir die kommutative Algebra $A := C^\infty(M, \mathbb{R})$ betrachtet. Den Raum $\text{Der}(A)$ ihrer Derivationen konnten wir mit dem Raum $\mathfrak{X}(M)$ der Vektorfelder auf M identifizieren. Wir haben auf $\text{Der}(A)$ die Struktur einer Lie-Algebra gefunden. Wir wollen ähnliche Ideen nun auf die graduiert kommutative Algebra $A := \Omega(M)$ der Differentialformen auf M anwenden.

42.3 Definition (graduierte Derivation)

Eine Abbildung $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ heißt GRADUIERTE DERIVATION VOM GRAD d , falls D linear ist, für alle k den Summanden $\Omega^k(M)$ in $\Omega^{d+k}(M)$ abbildet und für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega(M)$ die Produktregel $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge \eta + (-1)^{dk} \omega \wedge D\eta$ gilt.

Mit $\text{Der}_d(\Omega(M))$ bezeichnen wir den VEKTORRAUM ALLER GRADUIERTEN DERIVATIONEN von $\Omega(M)$ vom Grad d , und mit $\text{Der}(\Omega(M))$ bezeichnen wir die direkte Summe $\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{Der}_d(\Omega(M))$.

Allgemeiner heißt für eine glatte Abbildung $g : N \rightarrow M$ eine Abbildung $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$ GRADUIERTE DERIVATION ÜBER g^* , falls D linear ist, für alle k den Summanden $\Omega^k(M)$ in $\Omega^{d+k}(N)$ abbildet und für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega(M)$ die Produktregel $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge g^*(\eta) + (-1)^{dk} g^*(\omega) \wedge D\eta$ gilt.

42.4 Lemma (Eindeutigkeit graduierten Derivationen).

Es sei $g : N \rightarrow M$ C^∞ . Jede graduierte Derivation $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$ über dem Algebra-Homomorphismus $g^* : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$ ist eindeutig durch die Werte $D(f)$ und $D(df)$ für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ festgelegt.

Beweis. Da f und df die Algebra $\Omega(M)$ erzeugen folgt dies sofort aus [42.1]. Wollen wir aber die dort verwendete Dimensionstheorie nicht hineinstecken so können wir dies auch wie folgt zeigen:

Hätten wir zwei solche Derivationen, so betrachten wir die Differenz D . Wir müssen zeigen: $\forall f : D(f) = 0, D(df) = 0 \Rightarrow D = 0$.

Wir behaupten zuerst, daß die Derivation D ein lokaler Operator ist. Sei nämlich $\omega \in \Omega(M)$ lokal um $g(x)$ gleich 0. Dann wählen wir ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(g(x)) = 1$ und $f\omega = 0$, und erhalten

$$0 = D(0) = D(f\omega) = \underbrace{D(f)}_{=0} \wedge g^*(\omega) + g^*(f) \cdot D(\omega)$$

Und an der Stelle $x \in N$ gilt $0 = f(g(x)) \cdot D(\omega)(x) = D(\omega)(x)$. Da D ein lokaler und linearer Operator ist, dürfen wir ihn durch eine lokale Darstellung durchtauschen:

$$\begin{aligned}
 D(\omega) &= D\left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}\right) \\
 &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left(\underbrace{D(\omega_{i_1, \dots, i_p})}_{=0} \wedge g^*(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^p \pm g^*(\omega_{i_1, \dots, i_p}) g^*(du^{i_1}) \wedge \dots \wedge \underbrace{D(du^{i_k})}_{=0} \wedge \dots \wedge du^{i_p} \right) = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

42.5 Beispiele graduierter Derivationen.

Aus [42.4] folgt, daß $\text{Der}_d(\Omega(M)) = \{0\}$ für $d < -1$, denn $D(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+d}(M) = \{0\}$ für $k + d < 0$ und insbesondere für $k \in \{0, 1\}$ und $d < -1$.

Wir wollen als nächstes $\text{Der}_{-1}(\Omega(M))$ bestimmen. Sei also $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ eine graduierte Derivation vom Grad $d = -1$. Dann ist $D(C^\infty(M, \mathbb{R})) = \{0\}$ und die lineare Abbildung $D \circ d : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ erfüllt $(D \circ d)(f \cdot g) = D(g \cdot df + f \cdot dg) = D(g) \wedge df + (-1)^{0 \cdot d} g \cdot D(df) + D(f) \wedge dg + (-1)^{0 \cdot d} f \cdot D(dg) = (D \circ d)f \cdot g + f \cdot (D \circ d)g$, wegen $D(g) = 0 = D(f)$. Also ist $D \circ d$ auf $C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine Derivation und somit durch ein Vektorfeld ξ gegeben, d.h. $D(f) = 0$ und $D(df) = \xi(f) = df(\xi)$ für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Wir werden in [42.6] zeigen, daß wir durch $(i_\xi \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_k)$ zu jedem Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ eine graduierte Derivation i_ξ vom Grad $d = -1$ definieren können.

Nun zu $\text{Der}_0(\Omega(M))$. Sei also $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ eine graduierte Derivation vom Grad $d = 0$. Dann wirkt D auf $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ derivativ, ist also durch ein Vektorfeld ξ gegeben, d.h.

$$D(f) = \xi(f) = \mathcal{L}_\xi(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* f \quad (\text{siehe [72, 29.9] und [72, 29.10]}).$$

Der letzte Ausdruck $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* \omega$ macht aber auch für $\omega \in \Omega(M)$ einen Sinn und wir werden in [42.6] zeigen, daß dadurch für jedes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ eine Derivation $\mathcal{L}_\xi$ vom Grad $d = 0$ auf $\Omega(M)$ definiert wird. Wir werden in [42.8] zeigen, daß dies alle Derivationen vom Grad 0 sind, die zusätzlich $D(df) = d(Df)$ erfüllen. Um eine globale Formel für $\mathcal{L}_\xi$ zu erhalten, differenzieren wir die Funktion $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$ (für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$) in Richtung von ξ an der Stelle

$x \in M$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
 (\xi \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k))_x &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \circ \text{Fl}_t^\xi)_x \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \omega_{\text{Fl}_t^\xi(x)}(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \omega_{\text{Fl}_t^\xi(x)}(T \text{Fl}_t^\xi \cdot T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_1, \dots, T \text{Fl}_t^\xi \cdot T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_k) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x (T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_1|_{\text{Fl}_t^\xi(x)}, \dots, T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_k|_{\text{Fl}_t^\xi(x)}) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x ((\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_1)(x), \dots, (\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_k)(x)) \right) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x \right) (\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^k \omega_x \left(\xi_1(x), \dots, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_j)(x)), \dots, \xi_k(x) \right) \\
 &= (\mathcal{L}_\xi \omega)_x (\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k \omega_x \left(\xi_1(x), \dots, [\xi, \xi_i](x), \dots, \xi_k(x) \right),
 \end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{L}_\xi \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \xi \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega \left(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_k \right).$$

Insbesondere ist

$$(\mathcal{L}_\xi df)(\eta) = \xi(df(\eta)) - df([\xi, \eta]) = \xi(\eta \cdot f) - [\xi, \eta] \cdot f = \eta(\xi \cdot f) = d(\xi \cdot f)(\eta)$$

Schließlich wollen wir noch eine ausgezeichnete Derivation vom Grad $d = 1$ angeben. Nach [37.4](#) hoffen wir ja durch die Abweichung der Ableitung einer 1-Form (oder allgemeiner einer k -Form) davon symmetrisch zu sein, zu erkennen ob die Form selbst Ableitung einer Funktion (bzw. $k - 1$ -Form) ist. Betrachten wir dazu zuerst den Fall, wo $M = U$ offen in einen Vektorraum E ist. Dann ist eine k -Form auf U eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})$$

und ihre Ableitung ist

$$\omega' : U \rightarrow L(E, L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})).$$

Setzen wir diese mit dem Alternator von

$$L(E, L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})) \subseteq L(E, L^k(E; \mathbb{R})) \cong L^{k+1}(E, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{alt}} L_{Alt}^{k+1}(E, \mathbb{R})$$

zusammen, so erhalten wir die Abweichung $d\omega$ davon, daß $\omega'(x)$ symmetrisch ist für alle $x \in U$.

Es ist also

$$\begin{aligned}
 d\omega(x)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega'(x)(\xi_{\sigma(0)})(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \\
 &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i)(\xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_k).
 \end{aligned}$$

Um nun eine globale Formel für d auf beliebige Mannigfaltigkeiten M zu erhalten ersetzen wir die Vektoren $\xi_i \in E$ durch Vektorfelder $\xi_i \in \mathfrak{X}(E)$ und Differenzieren

$\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k)$ an der Stelle $x \in M$ in Richtung $\xi_i(x)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \right)'(x)(\xi_i(x)) &= \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_k(x)) \\ &\quad + \sum_{j < i} \omega(x)(\dots, \xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots) \\ &\quad + \sum_{j > i} \omega(x)(\dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \dots) \end{aligned}$$

Und Einsetzen in obige Formel liefert

$$\begin{aligned} (k+1)d\omega(x)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_k(x)) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k))(x) \\ &\quad - \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \omega(x)(\xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \xi_0(x), \dots, \overline{\xi_j(x)}, \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots) \\ &\quad - \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} \omega(x)(\xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \overline{\xi_j(x)}, \dots) \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi(k)) \right)(x). \end{aligned}$$

Wegen des lästigen Faktors $(k+1)$ ersetzen wir $d\omega$ besser durch $(k+1)d\omega$.

42.6 Lemma (Lie-Algebra der graduierten Derivationen).

Der Raum $\text{Der}(\Omega(M))$ ist eine graduierte Lie-Algebra bezüglich der punktweisen Vektoroperationen und dem graduierten Kommutator als Lie-Klammer:

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1 \text{ für } D_i \in \text{Der}_{d_i}(\Omega(M))$$

Im Detail bedeutet das:

1. Die Klammer $[\cdot, \cdot] : \text{Der}_{d_1}(\Omega(M)) \times \text{Der}_{d_2}(\Omega(M)) \rightarrow \text{Der}_{d_1+d_2}(\Omega(M))$ ist bilinear für alle d_1, d_2 .
2. Sie ist GRADUIERT ANTIKOMMUTATIV: $[D_1, D_2] + (-1)^{d_1 d_2} [D_2, D_1] = 0$.
3. $[D_0, \cdot]$ ist eine graduierte Derivation bezüglich $[\cdot, \cdot]$, d.h. es gilt die GRADUIERTE JACOBI-IDENTITÄT

$$[D_0, [D_1, D_2]] = [[D_0, D_1], D_2] + (-1)^{d_0 d_1} [D_1, [D_0, D_2]],$$

oder äquivalent und zyklisch symmetrisch

$$(-1)^{d_0 d_2} [D_0, [D_1, D_2]] + (-1)^{d_1 d_0} [D_1, [D_2, D_0]] + (-1)^{d_2 d_1} [D_2, [D_0, D_1]] = 0.$$

Beweis. Wir führen den Beweis abstrakt für eine beliebige graduiert-kommutative Algebra A anstelle von $\Omega(M)$.

Behauptung: $[D_1, D_2] \in \text{Der}_{d_1+d_2}(A)$ für $D_i \in \text{Der}_{d_i}(A)$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
 [D_1, D_2](X \cdot Y) &= (D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1)(X \cdot Y) \\
 &= D_1(D_2 X \cdot Y + (-1)^{x d_2} X \cdot D_2 Y) \\
 &\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2(D_1 X \cdot Y + (-1)^{x d_1} X \cdot D_1 Y) \\
 &= D_1 D_2 X \cdot Y + (-1)^{d_1(d_2+x)} D_2 X \cdot D_1 Y \\
 &\quad + (-1)^{x d_2} D_1 X \cdot D_2 Y + (-1)^{x d_2 + x d_1} X \cdot D_1 D_2 Y \\
 &\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1 X \cdot Y - (-1)^{d_1 d_2 + (d_1+x) d_2} D_1 X \cdot D_2 Y \\
 &\quad - (-1)^{d_1 d_2 + x d_1} D_2 X \cdot D_1 Y - (-1)^{d_1 d_2 + d_1 x + d_2 x} X \cdot D_2 D_1 Y \\
 &= [D_1, D_2]X \cdot Y + (-1)^{x(d_1+d_2)} X \cdot [D_1, D_2]Y \quad \text{für } x := \text{grad}(X).
 \end{aligned}$$

Klarerweise ist $[-, -]$ bilinear und graduiert antikommutativ.

Verbleibt die graduierte Jacobi-Identität zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 [D_0, [D_1, D_2]] - [[D_0, D_1], D_2] - (-1)^{d_0 d_1} [D_1, [D_0, D_2]] &= \\
 = [D_0, D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1] - [D_0 D_1 - (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0, D_2] &= \\
 - (-1)^{d_0 d_1} [D_1, D_0 D_2 - (-1)^{d_0 d_2} D_2 D_0] &= \\
 = D_0 D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_0 D_2 D_1 &= \\
 - (-1)^{(d_1+d_2)d_0} D_1 D_2 D_0 + (-1)^{d_1 d_2 + d_0(d_1+d_2)} D_2 D_1 D_0 &= \\
 - D_0 D_1 D_2 + (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0 D_2 &= \\
 + (-1)^{(d_0+d_1)d_2} D_2 D_0 D_1 - (-1)^{d_0 d_1 + (d_0+d_1)d_2} D_2 D_1 D_0 &= \\
 - (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0 D_2 + (-1)^{d_0 d_1 + d_0 d_2} D_1 D_2 D_0 &= \\
 + (-1)^{d_0 d_1 + (d_0+d_2)d_1} D_0 D_2 D_1 - (-1)^{d_0(d_1+d_2) + (d_0+d_2)d_1} D_2 D_0 D_1 &= \\
 = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

42.7 Theorem (Die wichtigsten graduierten Derivationen).

Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$.

- (i_ξ) Durch $i_\xi(f) := 0$, $i_\xi(df) := \xi \cdot f$ ist eine graduierte Derivation i_ξ vom Grad -1 , der EINSETZOPERATOR festgelegt.
- ($\mathcal{L}_\xi$) Durch $\mathcal{L}_\xi(f) := \xi \cdot f$, $\mathcal{L}_\xi(df) := d(\xi \cdot f)$ ist eine graduierte Derivation $\mathcal{L}_\xi$ vom Grad 0 , die LIE-ABLEITUNG festgelegt.
- (d) Durch $d(f) := df$, $d(df) := 0$ ist eine graduierte Derivation d vom Grad $+1$, die ÄUSSERE ABLEITUNG, festgelegt.

Globale Formeln für diese graduierten Derivationen sind mit $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 (\iota_{\xi_0} \omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &:= \omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\
 (\mathcal{L}_{\xi_0} \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) &:= \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi_0, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) \\
 (d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k)
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k).$$

Die graduierten Kommutatoren sind durch folgende Tabelle gegeben:

$[D_1, D_2]$	i_η	$\mathcal{L}_\eta$	d
i_ξ	0	$-\iota_{[\xi, \eta]}$	$-\mathcal{L}_\xi$
$\mathcal{L}_\xi$	$\iota_{[\xi, \eta]}$	$\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}$	0
d	$\mathcal{L}_\eta$	0	0

Falls $\eta \in \mathfrak{X}(N)$ verwandt mit $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ bezüglich einem glatten $g : M \rightarrow N$ ist, d.h. $Tg \circ \xi = \eta \circ g$ erfüllt ist, so gilt:

$$g^* \circ i_\eta = i_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ \mathcal{L}_\eta = \mathcal{L}_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ d = d \circ g^*$$

Weiters gilt:

$$\iota_{f\xi}\omega = f i_\xi\omega, \quad \mathcal{L}_{f\xi}\omega = f \mathcal{L}_\xi\omega + df \wedge i_\xi\omega, \quad (\mathcal{L}_\xi\omega)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_t^\xi)^* \omega|_x$$

Beweis. Wir führen den Beweis in 15 Schritten:

1. Behauptung. $i_\xi\omega \in \Omega^{k-1}(M)$:

Offensichtlich ist $i_\xi\omega$ alternierend und $k-1$ -linear und es gilt

$$\begin{aligned} i_\xi\omega(f\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &= \omega(\xi, f\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = f \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ &= f i_\xi\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}). \end{aligned}$$

2. Behauptung. $i_\xi \in \text{Der}_{-1}(\Omega(M))$. Sei dazu $\alpha \in \Omega^{k+1}$ und $\beta \in \Omega^l$, dann ist:

$$\begin{aligned} \iota_{\xi_0}(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) &= (\alpha \wedge \beta)(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\ &= \frac{1}{(k+1)!l!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\ &= \sum_{\pi \text{ stkw.} \uparrow} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\ &= \sum_{\pi(0)=0} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\ &\quad + \sum_{\pi(k+1)=0} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\ &= \left(\iota_{\xi_0} \alpha \wedge \beta \right)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\ &\quad + \sum_{\pi' \text{ stkw.} \uparrow} (-1)^{k+1} \text{sgn}(\pi') \alpha(\xi_{\pi'(1)}, \dots, \xi_{\pi'(k+1)}) \beta(\xi_0, \xi_{\pi'(k+2)}, \dots, \xi_{\pi'(k+l)}) \\ &= \left(\iota_{\xi_0} \alpha \wedge \beta + (-1)^{k+1} \alpha \wedge \iota_{\xi_0} \beta \right)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}). \end{aligned}$$

Dabei ist $\pi' := \pi \circ (k+1, k, \dots, 1, 0)$ jene Permutation, die 0 auf 0 abbildet, auf $i+1 \leq k+1$ mit $\pi(i)$ übereinstimmt, und auf $i > k+1$ mit π ident ist.

3. Behauptung. $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$:

Offensichtlich ist $d\omega$ ist $(k+1)$ -linear und alternierend. Die $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Homogenität

ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
d\omega(f\xi_0, \dots, \xi_k) &= (f\xi_0) \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i \cdot f\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i=0} (-1)^j \omega([f\xi_0, \xi_j], \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i>0} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], f\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= f \cdot (\xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)) \\
&\quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + f \cdot \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i=0} (-1)^j \omega(f[\xi_0, \xi_j] - \xi_j(f)\xi_0, \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + f \cdot \sum_{j>i>0} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= f \cdot d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad - \sum_{j>i=0} (-1)^j \xi_j(f) \omega(\xi_0, \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= f \cdot d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

4. Behauptung. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$

$$\begin{aligned}
d(f\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \\
&= \sum_i (-1)^i \xi_i \cdot (f\omega)(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} f\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^i \xi_i(f) \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + f \sum_i (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + f \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^i df(\xi_i) \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) + f \cdot d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) \\
&= (df \wedge \omega + f \wedge d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

5. Behauptung. d ist ein lokaler Operator

Sei dazu $\omega|_U = 0$ und $x \in U$. Dann existiert ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $\text{Trg } f \subseteq U$, $f(x) = 1$ und $df(x) = 0$. Folglich ist $f\omega = 0$ und damit

$$0 = d(f\omega)(x) \stackrel{\boxed{4}}{=} df(x) \wedge \omega(x) + f(x) \cdot d\omega(x) = d\omega(x).$$

6. Behauptung. d und i_ξ erfüllen die “Anfangsbedingungen”.

Das folgt sofort durch Einsetzen in die globalen Formeln:

$$\begin{aligned} i_{\xi_0}(f) &:= 0 \\ i_{\xi_0}(df) &= df(\xi_0) = \xi_0(f) \\ df(\xi_0) &= \sum_{i=0}^0 \xi_0 \cdot f(\overline{\xi_0}) + \sum_{\emptyset} = \xi_0(f) \\ d(df)(\xi_0, \xi_1) &= \xi_0 \cdot df(\xi_1) - \xi_1 \cdot df(\xi_0) + (-1)^{0+1} df([\xi_0, \xi_1]) \\ &= \xi_0 \cdot (\xi_1 \cdot f) - \xi_1 \cdot (\xi_0 \cdot f) - [\xi_0, \xi_1] \cdot f = 0 \end{aligned}$$

7. Behauptung. $d(du^I) = 0$, wobei $du^I := du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_{k-1}}$ für $I := (i_1, \dots, i_{k-1})$.

$$\begin{aligned} d(du^I)\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{\partial}{\partial u^{j_i}} \left(du^I \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{l>i} (-1)^{i+l} du^I \left(\left[\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}, \frac{\partial}{\partial u^{j_l}} \right], \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_l}}}, \dots \right) \\ &= 0, \quad \text{da } \left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right] = 0 \text{ und } du^i \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \text{ konstant ist.} \\ \Rightarrow d\left(\sum_I \omega_I du^I\right) &\stackrel{\boxed{4}}{=} \sum_I d\omega_I \wedge du^I + \omega_I \wedge d(du^I) \stackrel{\boxed{7}}{=} \sum_{i,I} \frac{\partial \omega_I}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \end{aligned}$$

8. Behauptung. $d \in \text{Der}_{+1}(\Omega(M))$, i.e. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|} \alpha \wedge d\beta$ mit $\alpha = \sum_I \alpha_I du^I$ und $\beta = \sum_J \beta_J du^J$.

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{I,J} d(\alpha_I \beta_J du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,J,i} \frac{\partial(\alpha_I \beta_J)}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \wedge du^J + \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J d(du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,i} \frac{\partial \alpha_I}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \wedge \sum_J \beta_J du^J + (-1)^{|I|} \sum_I \alpha_I du^I \wedge \sum_{J,i} \frac{\partial \beta_J}{\partial u^i} du^i \wedge du^J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|} \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

9. Behauptung. Es gelten die Formeln für die Kommutatoren von Einsetzoperatoren i_ξ beziehungsweise für d .

Wegen $\boxed{42.4}$ genügt es die “Anfangswerte” zu überprüfen:

$$\begin{aligned} [i_\xi, i_\eta] &= 0, \text{ da dies eine Derivation vom Grad -2 ist} \\ [d, d](f) &= (d \circ d - (-1)^{(-1) \cdot (-1)} d \circ d)(f) = 2d(df) = 0 \\ [d, d](df) &= 2(d \circ d)(df) = 2d(d(df)) = 2d(0) = 0 \end{aligned}$$

10. Behauptung. Der Kommutator $[d, i_\xi]$ ist durch die globale Formel von $\mathcal{L}_\xi$ gegeben, also ist $\mathcal{L}_\xi \in \text{Der}_0(\Omega(M))$.

$$\begin{aligned}
([d, \iota_{\xi_0}]\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= d(\iota_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) - (-1)^{1 \cdot (-1)} \iota_{\xi_0}(d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^{i-1} \xi_i \cdot \iota_{\xi_0}\omega(\xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{0 < i < j} (-1)^{i-1+j-1} \iota_{\xi_0}\omega([\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + d\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= - \sum_{i > 0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{0 < i < j} (-1)^{i+j} \omega(\xi_0, [\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) + \sum_{j > 0} (-1)^j \omega([\xi_0, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= (\mathcal{L}_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

11. Behauptung. Es gilt die “Anfangsbedingung” für $\mathcal{L}_\xi$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi &= d \circ i_\xi - (-1)^{(-1)(+1)} i_\xi \circ d \Rightarrow \\
\mathcal{L}_\xi(f) &= d(i_\xi f) + i_\xi(df) = 0 + \xi \cdot f \\
\mathcal{L}_\xi(df) &= d(i_\xi df) + i_\xi(d^2 f) = d(\xi \cdot f) + 0.
\end{aligned}$$

12. Behauptung. Es gelten die Formeln für Kommutatoren mit $\mathcal{L}_\xi$.

Wieder brauchen wir nur die Anfangswerte zu überprüfen (oder wir verwenden die Jacobi-Identität):

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_\xi, i_\eta](f) &= 0 = \iota_{[\xi, \eta]}(f), \text{ da der Grad } -1 \text{ ist} \\
[\mathcal{L}_\xi, i_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(\eta \cdot f) - i_\eta(d(\xi \cdot f)) \\
&= \xi \cdot (\eta \cdot f) - \eta \cdot (\xi \cdot f) = [\xi, \eta](f) = \iota_{[\xi, \eta]}(df) \\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](f) &= \xi \cdot \eta \cdot f - \eta \cdot \xi \cdot f = [\xi, \eta](f) = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}(f) \\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(d(\eta \cdot f)) - \mathcal{L}_\eta(d(\xi \cdot f)) \\
&= d(\xi \cdot \eta \cdot f - \eta \cdot \xi \cdot f) = d([\xi, \eta] \cdot f) = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}(df) \\
[d, \mathcal{L}_\xi](f) &= d(\xi \cdot f) - \mathcal{L}_\xi(df) = 0 \\
[d, \mathcal{L}_\xi](df) &= d(d(\xi \cdot f)) - \mathcal{L}_\xi(ddf) = 0.
\end{aligned}$$

13. Behauptung. Es gelten die Vertauschbarkeitsrelationen mit g^* .

$$\begin{aligned}
(g^* \circ \iota_\eta)(df) &= g^*(df(\eta)) = g^*(\eta(f)) = \eta(f) \circ g \\
\underline{\underline{[72, 29.3]}} \quad \xi(f \circ g) &= d(f \circ g)(\xi) = i_\xi(g^*(df)) = (i_\xi \circ g^*)(df)
\end{aligned}$$

oder direkt

$$\begin{aligned}
 (g^* \circ i_\eta)\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k) &= g^*(i_\eta\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
 &= (i_\eta\omega)|_{g(p)}(T_pg \cdot \xi_1|_p, \dots, T_pg \cdot \xi_k|_p) \\
 &= \omega|_{g(p)}(\eta|_{g(p)}, T_pg \cdot \xi_1|_p, \dots, T_pg \cdot \xi_k|_p) \\
 &= \omega|_{g(p)}(T_pg \cdot \xi|_p, T_pg \cdot \xi_1|_p, \dots, T_pg \cdot \xi_k|_p) \\
 &= (g^*\omega)_p(\xi|_p, \xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) \\
 &= (i_\xi(g^*\omega))(\xi_1, \dots, \xi_k)_p \\
 &= (i_\xi \circ g^*)\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k).
 \end{aligned}$$

Für d haben wir das folgende bereits in [42.2](#) gezeigt:

$$\begin{aligned}
 (g^* \circ d)(f)(\xi|_p) &= g^*(df)(\xi|_p) = df|_{g(p)}(Tg \cdot \xi|_p) \\
 &= d(f \circ g)(\xi|_p) = d(g^*(f))(\xi|_p) = (d \circ g^*)(f)(\xi|_p) \\
 (g^* \circ d)(df) &= g^*(ddf) = g^*(0) = 0 = d^2(g^*f) \\
 &= d((d \circ g^*)(f)) = d((g^* \circ d)(f)) = (d \circ g^*)(df).
 \end{aligned}$$

Für $\mathcal{L}$ folgt es nun durch Anwenden der Kommutatorformel:

$$\begin{aligned}
 g^* \circ \mathcal{L}_\eta &= g^* \circ (d \circ i_\eta + i_\eta \circ d) \\
 &= g^* \circ d \circ i_\eta + g^* \circ i_\eta \circ d \\
 &= d \circ g^* \circ i_\eta + i_\xi \circ g^* \circ d \\
 &= d \circ i_\xi \circ g^* + i_\xi \circ d \circ g^* \\
 &= (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \circ g^* \\
 &= \mathcal{L}_\xi \circ g^*.
 \end{aligned}$$

14. Behauptung. Es gelten die Homogenitätsformeln für $\iota_{f\xi}$ und $\mathcal{L}_{f\xi}$.

$$\begin{aligned}
 \iota_{f\xi}\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &= \omega(f\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = f \cdot \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\
 &= f \cdot i_\xi\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\
 \mathcal{L}_{f\xi}\omega &= [d, \iota_{f\xi}]\omega = d(\iota_{f\xi}\omega) + \iota_{f\xi}(d\omega) \\
 &= d(f \cdot i_\xi\omega) + f \cdot i_\xi(d\omega) \\
 &= df \wedge i_\xi\omega + f \cdot d(i_\xi\omega) + f \cdot i_\xi(d\omega) \\
 &= df \wedge i_\xi\omega + f \cdot \mathcal{L}_\xi\omega.
 \end{aligned}$$

15. Behauptung. $\mathcal{L}_\xi$ ist die Lie-Ableitung aus [\[72, 29.9\]](#).

Beide Seiten definieren eine Derivation vom Grad 0, also genügt es auf Funktionen und exakten 1-Formen auszutesten:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}|_{t=0}(\text{Fl}_t^\xi)^* f &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ \text{Fl}_t^\xi = \xi f = \mathcal{L}_\xi f, \\
 \frac{d}{dt}|_{t=0}(\text{Fl}_t^\xi)^*(df_p)(\eta_p) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(df)_{(\text{Fl}_t^\xi(p))}(T\text{Fl}_t^\xi \cdot \eta_p) \\
 &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(T\text{Fl}_t^\xi \cdot \eta_p)f = \frac{d}{dt}|_{t=0}\eta_p(f \circ \text{Fl}_t^\xi) \\
 &= \eta_p\left(\frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \text{Fl}_t^\xi)\right) = \eta_p(\xi f) \\
 &= \mathcal{L}_\xi(df)(\eta_p).
 \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis von [42.7](#). □

42.8 Die Frölicher-Nijenhuis und Nijenhuis-Richardson Klammer

Wir wollen nun allgemeine graduierte Derivationen genauer beschreiben. Dazu nennen wir eine graduierte Derivation $D \in \text{Der}_k(\Omega(M))$ **ALGEBRAISCH**, wenn sie auf den 0-Formen $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ verschwindet. Für so eine Derivation gilt

$$D(f \omega) = D(f) \wedge \omega + (-1)^{0 \cdot k} f \cdot D(\omega) = f \cdot D(\omega).$$

Folglich ist D ein lokaler Operator und sogar tensoriell, d.h. $D(\omega)_x$ hängt nur von ω_x ab (Hinweis: Wende d auf lokale Darstellungen von ω an). Nach [42.4](#) ist D eindeutig durch $D|_{\Omega^1(M)} : \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) \subseteq \Omega(M)$ bestimmt, und dies ist faserweise ein Element von

$$\begin{aligned} L\left(T_x^*M, \bigwedge^{k+1} T_x^*M\right) &\cong T_x M \otimes \bigwedge^{k+1} T_x^*M \cong T_x M \otimes \left(\bigwedge^{k+1} T_x M\right)^* \cong \\ &\cong L\left(\bigwedge^{k+1} T_x M, T_x M\right) \cong L_{\text{alt}}^{k+1}(T_x M; T_x M) \end{aligned}$$

welche glatt von $x \in M$ abhängt, also eine vektorwertige $k+1$ -Form

$$K \in \Omega^{k+1}(M; TM) := \Gamma\left(L\left(\bigwedge^{k+1} TM, TM\right)\right) \cong \Gamma\left(L\left(T^*M, \bigwedge^{k+1} T^*M\right)\right).$$

Sei umgekehrt $K \in \Omega^{k+1}(M; TM)$ beliebig. Dann können wir eine algebraische Derivation $i_K \in \text{Der}_k(\Omega(M))$ durch folgende Formel definieren:

$$\begin{aligned} (i_K \omega)(X_1, \dots, X_{k+l}) &:= \\ &= \frac{1}{(k+1)!(l-1)!} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \omega(K(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}), X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}), \end{aligned}$$

wobei $\omega \in \Omega^l(M)$ mit $l \geq 1$ und $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}(M)$. Dabei zeigt man $i_K \omega \in \Omega^{k+l}(M)$ und $i_K \in \text{Der}_k(\Omega(M))$ wie in [41.1](#) und [41.2](#).

Die Abbildung $i : \Omega^{*+1}(M; TM) \rightarrow \text{Der}_*(\Omega(M))$ definiert einen linearen Isomorphismus auf die Teil-Liealgebra der algebraischen Derivationen, und macht somit $\Omega^{*+1}(M; TM)$ selbst zu einer graduierten Liealgebra (deren Klammer auch Nijenhuis-Richardson Klammer heißt).

Beweis. Sei $x \in M$. Da $\bigwedge T_x^*M$ nach [38.6.3](#) die freie graduiert kommutative Algebra über dem Vektorraum T_x^*M ist, können wir

$$K_x \in L\left(\bigwedge^{k+1} T_x M, T_x M\right) \cong L\left(T_x^*M, \bigwedge^{k+1} T_x^*M\right) \subseteq L\left(T_x^*M, \bigwedge T_x^*M\right)$$

zu einer eindeutig bestimmten graduierten Derivation $\bigwedge T_x^*M \rightarrow \bigwedge T_x^*M$ ausdehnen und erhalten somit eine eindeutig bestimmten Derivation $D \in \text{Der}_k(\Omega(M))$.

Die angegebene Formel verifiziert man durch Anwendung auf Hackprodukte ω von 1-Formen. Offensichtlich ist der graduierte Kommutator zweier algebraischer graduierter Derivationen selbst algebraisch, und somit gelten auch die übrigen Aussagen. $\square$

Wir definieren für $K \in \Omega^k(M; TM)$ eine graduierte Derivation $\mathcal{L}_K := [i_K, d]$. Die Abbildung $\mathcal{L} : \Omega(M; TM) \rightarrow \text{Der}(\Omega(M))$ ist injektiv, da $\mathcal{L}_K f = [i_K, d]f = i_K(df) \pm d(i_K f) = df \circ K$ für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Proposition.

Jedes $D \in \text{Der}_k(\Omega(M))$ hat eine eindeutige Darstellung $D = i_L + \mathcal{L}_K$ mit $L \in \Omega^{k+1}(M; TM)$ und $K \in \Omega^k(M; TM)$. Das Bild von $\mathcal{L}$ ist die Teil-Liealgebra aller D

mit $[D, d] = 0$. Die Abbildung $\mathcal{L}$ induziert somit eine graduierte Liealgebra Struktur (die Frölicher-Nijenhuis Klammer) auf $\Omega^*(M; TM)$.

Beweis. Für Vektorfelder $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ beschreibt $f \mapsto D(f)(X_1, \dots, X_k)$ eine Derivation $C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$. Folglich gibt es ein Vektorfeld $K(X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$ mit $D(f)(X_1, \dots, X_k) = K(X_1, \dots, X_k)(f) = df(K(X_1, \dots, X_k))$. Es ist $K \in \Omega^k(M; TM)$. Die definierende Gleichung für K ist $D(f) = df \circ K = \mathcal{L}_K f$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Also ist $D - \mathcal{L}_K$ algebraisch, d.h. $D = \mathcal{L}_K + i_L$ für ein $L \in \Omega^{k+1}(M; TM)$. Wir haben

$$0 = [i_K, 0] = [i_K, [d, d]] = [[i_K, d], d] + (-1)^{k-1} [d, [i_K, d]] = 2[\mathcal{L}_K, d]$$

Somit ist $0 = [d, D]$ für $D = \mathcal{L}_K + i_L$ genau dann, wenn $0 = [i_L, d] = \mathcal{L}_L$, i.e. $L = 0$. Die Eindeutigkeit der Zerlegung ergibt sich aus der Injektivität von i und $\mathcal{L}$ und weil einzig die 0 eine algebraische mit d kommutierende Derivation ist. $\square$

Es ist $df \circ [X, Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]} f = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] f$ für die Frölicher-Nijenhuis-Klammer $[X, Y]$ von $X, Y \in \Omega^*(M, TM)$.

43. Divergenz, Rotation und Laplace

43.1 Differentialformen am $\mathbb{R}^3$

Für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^m$ wissen wir, daß $\mathfrak{X}(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ ist vermöge der Abbildung $\xi = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto (f_i)_{i=1}^m = f$, wobei x^i die Standardkoordinaten sind. Ebenso ist $\Omega^m(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$ vermöge $* : f \cdot \text{vol}_M \mapsto f$, mit $\text{vol}_M = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. Schließlich sieht der Isomorphismus $* \circ \sharp : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{m-1}(M)$ nach [41.5](#)

wie folgt aus: $*(\sharp\xi) = \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i dx^i \wedge \dots \wedge \overline{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m$.

Für $m = 3$ liefert das

$$\begin{aligned} *(\sharp\xi) &= \xi^1 dx^2 \wedge dx^3 - \xi^2 dx^1 \wedge dx^3 + \xi^3 dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \xi^1 dx^2 \wedge dx^3 + \xi^2 dx^3 \wedge dx^1 + \xi^3 dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben also folgende Isomorphismen:

1. $\Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$
2. $\Omega^1(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ via der Basis dx^1, dx^2, dx^3
3. $\Omega^2(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ via der Basis $dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2$
4. $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ via der Basis $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Wie sieht nun d bezüglich dieser Basen aus?

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ \parallel & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \\ & & & & & & \\ & & f & & (f_1, f_2, f_3) & & (f_1, f_2, f_3) & & f \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & f & & \sum_i f_i dx^i & & \begin{matrix} f_1 dx^2 \wedge dx^3 \\ + f_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \end{matrix} & & f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{array}$$

Der Operator d ist somit durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned}
 d : \Omega^0(\mathbb{R}^3) \ni f &\mapsto df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\
 d : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \ni \sum f_i dx^i &\mapsto \sum df_i \wedge dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\
 &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\
 d : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \ni f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 &\mapsto \\
 &\mapsto \left(\sum \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
 \end{aligned}$$

Also stimmt er bis auf natürliche Isomorphismen überein mit:

$$\begin{aligned}
 \text{grad } f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \\
 \text{rot}(f_1, f_2, f_3) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}, \frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1}, \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) \\
 \text{div}(f_1, f_2, f_3) &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}.
 \end{aligned}$$

Es folgen direkt aus $d^2 = 0$ die bekannten Sätze aus der Vektoranalysis:

$$(\text{rot} \circ \text{grad})f = 0, \quad (\text{div} \circ \text{rot})(f_i) = 0$$

und ebenso folgt direkt aus dem Lemma von Poincaré (siehe (6) in [44.5](#)):

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(f_i) = 0 &\Rightarrow \exists f, \text{ soda\ss lokal } \text{grad } f = (f_i) \text{ gilt.} \\
 \text{div}(f_i) = 0 &\Rightarrow \exists (g_i), \text{ soda\ss lokal } \text{rot}(g_i) = (f_i) \text{ gilt.}
 \end{aligned}$$

43.2 Divergenz auf orientierten Riemann-Mannigfaltigkeiten

Für orientierte Riemann-Mannigfaltigkeiten M der Dimension m erhalten wir nach [41.5](#) mittels $\sharp$ und Hodge-Sternoperator $*$ einen Isomorphismus $\mathfrak{X} \xrightarrow[\cong]{\sharp} \Omega^1 \xrightarrow[\cong]{*} \Omega^{m-1}$. Dieser stimmt mit der Abbildung $\xi \mapsto i_\xi \text{vol}_M \in \Omega^{m-1}$ überein, denn dazu müssen wir $\omega \wedge i_\xi \text{vol}_M = \langle \omega, \sharp \xi \rangle \text{vol}_M$ für alle $\omega \in \Omega^1$ beweisen, was wegen

$$\begin{aligned}
 0 &= i_\xi(0) = i_\xi(\omega \wedge \text{vol}_M) = i_\xi \omega \cdot \text{vol}_M + (-1)^1 \omega \wedge i_\xi \text{vol}_M \\
 &\text{und } \langle \omega, \sharp \xi \rangle = \langle \flat \omega, \xi \rangle = \omega(\xi) = i_\xi(\omega)
 \end{aligned}$$

gilt. Lokal kann man das auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 i_\xi \text{vol}_M &\stackrel{\text{41.2}}{=} i_{\left(\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right)} \left(\sqrt{G} du^1 \wedge \dots \wedge du^m \right) \\
 &= \sum_j \xi^j \sqrt{G} i_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \left(du^1 \wedge \dots \wedge du^m \right) \\
 &= \sum_j \xi^j \sqrt{G} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} du^1 \wedge \dots \wedge \underbrace{du^k \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)}_{\delta_j^k} \wedge \dots \wedge du^m \\
 &= \sqrt{G} \sum_j (-1)^{j-1} \xi^j du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^j} \wedge \dots \wedge du^m \\
 &\stackrel{\text{41.4}}{=} * \omega, \quad \text{wobei } \mathfrak{X}(M) \ni \xi \stackrel{\Delta}{=} \omega \in \Omega^1(M).
 \end{aligned}$$

Die DIVERGENZ $\text{DIV } \xi$ eines Vektorfelds ξ wird dann durch

$$\text{div } \xi := * \left(d(i_\xi \text{vol}_M) \right) = (* \circ d \circ * \circ \#)(\xi) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

definiert. Also gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M &\stackrel{\text{41.5}}{=} *(\text{div } \xi) = ** \left(d(i_\xi \text{vol}_M) \right) \\
 &\stackrel{\text{41.4}}{=} d(i_\xi \text{vol}_M) = (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \text{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M,
 \end{aligned}$$

d.h. $\text{div } \xi$ mißt die infinitesimale Änderung $\mathcal{L}_\xi \text{vol}_M = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^*(\text{vol}_M)$ des infinitesimalen Volumens vol_M unter dem Fluß Fl^ξ des Vektorfelds ξ .

Um auf eine Formel der Divergenz in Koordinaten zu kommen, rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \xrightarrow{* \circ \#} i_\xi \text{vol}_M \stackrel{\text{s.o.}}{=} \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \xrightarrow{d} \\
 &\xrightarrow{d} \sum_i (-1)^{i-1} d(\sqrt{G} \xi^i) \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m + 0 \\
 &= \sum_i (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^k} du^k \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\
 &= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i} (-1)^{i-1} du^1 \wedge \dots \wedge du^m \\
 &= \left(\sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i} \right) du^1 \wedge \dots \wedge du^m \xrightarrow{*} \\
 &\xrightarrow{*} \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\text{div } \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i}.$$

43.3 Laplace-Operator

Wir verallgemeinern nun den Laplace-Operator auf allgemeine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeiten. Dazu ist KODIFFERENTIALOPERATOR d^* definiert durch:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p & \xrightarrow{(-1)^p d^*} & \Omega^{p-1} \\ \downarrow * \cong & & \downarrow \cong * \\ \Omega^{m-p} & \xrightarrow{d} & \Omega^{m-p+1} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} \Omega^p & \xrightarrow{d^*} & \Omega^{p-1} \\ \downarrow * \cong & & \uparrow \cong * \\ \Omega^{m-p} & \xrightarrow{(-1)^{pm+m+1} d} & \Omega^{m-p+1} \end{array}$$

Man sollte beachten, daß dieser keine gradierte Derivation ist. Das Vorzeichen ist so gewählt, daß d^* formal adjungiert zu d wird, wie wir in [49.1](#) zeigen werden. Um die Gleichwertigkeit der beiden Diagramme zu zeigen rechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned} * \circ (-1)^p d^* &= d \circ * \Leftrightarrow * \circ (-1)^{pm+m+1} d \circ * = * \circ (-1)^{pm+m+1} * \circ (-1)^p d^* \quad \text{41.4} \\ &= (-1)^{(pm+m+1)+p+(p-1)(m-p+1)} d^* = d^* \end{aligned}$$

Die Abbildung $\Delta := d d^* + d^* d : \Omega^p \rightarrow \Omega^p$ heißt LAPLACE-BELTRAMI-OPERATOR.

Für 3-dimensionale orientierte Riemann-Mannigfaltigkeiten (und insbesondere für M offen im $\mathbb{R}^3$) ist somit:

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty \\ \parallel & & \downarrow \sharp \cong & & \downarrow * \circ \sharp \cong & & \downarrow \cdot \text{vol} \cong \\ \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\ \uparrow * \cong & & \uparrow * \cong & & \uparrow * \cong & & \uparrow * \cong \\ \Omega^3 & \xrightarrow{-d^*} & \Omega^2 & \xrightarrow{d^*} & \Omega^1 & \xrightarrow{-d^*} & \Omega^0 \end{array}$$

Allgemein gilt für Funktionen $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ die Formel $\Delta f = -\text{div grad } f$, denn

$$\begin{aligned} \Delta f &= d^* d f + 0 = (-1)^{1m+m+1} * d^* d f \\ &= - * d^* \sharp \text{grad } f \quad \text{43.2} = - * d i_{\text{grad } f} \text{vol}_M \quad \text{43.2} = -\text{div}(\text{grad } f). \end{aligned}$$

Der hier definierte Laplace-Operator hat somit ein vielleicht ungewohntes Vorzeichen, welches dazu dient, ihn zu einen positiven Operator zu machen, siehe [49.1](#).

44. Kohomologie

Wir wollen nun das Bild von $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ zu beschreiben versuchen.

44.1 Definition der Kohomologie

Es sei $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ die äußere Ableitung.

1. $Z^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : d\omega = 0\}$, der RAUM DER GESCHLOSSENEN DIFFERENTIALFORMEN (oder auch KOZYKELN).
2. $B^k(M) := \{d\omega : \omega \in \Omega^{k-1}(M)\}$, der RAUM DER EXAKTEN DIFFERENTIALFORMEN (oder auch KORÄNDER).
3. $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$, die k -TE DE-RHAM KOHOMOLOGIE von M . Diese ist wohldefiniert, da $B^k(M) \subseteq Z^k(M)$ wegen $d \circ d = 0$ gilt.

4. $H(M) := \bigoplus_k H^k(M)$, die DE-RHAM KOHOMOLOGIE von M .
5. $b_k(M) := \dim(H^k(M)) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, die k -TE BETTIZAHLE.
6. $f_M(t) := \sum_k b_k t^k$, das POINCARÉ-POLYNOM. Dieses ist wohldefiniert, falls alle Bettizahlen endlich sind.
7. $\chi(M) := f_M(-1) = \sum_k (-1)^k b_k$, die EULER-CHARAKTERISTIK von M .

44.2 Definition (Kohomologie-Funktor)

Sei $g : M \rightarrow N$ glatt, so gilt $g^*(d\omega) = d(g^*\omega)$ für $g^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ nach [42.7](#). Somit existieren die Einschränkungen $g^* : Z^k(N) \rightarrow Z^k(M)$ und $g^* : B^k(N) \rightarrow B^k(M)$ und die Definition der linearen Abbildung

$$g^* : H(N) \rightarrow H(M), \quad [\omega] \mapsto [g^*\omega].$$

macht Sinn:

$$\begin{array}{ccccc} B^k(M) & \hookrightarrow & Z^k(M) & \twoheadrightarrow & H^k(M) \\ \downarrow g^* & & \downarrow g^* & & \downarrow g^* \\ B^k(N) & \hookrightarrow & Z^k(N) & \twoheadrightarrow & H^k(N) \end{array}$$

44.3 Satz (Kohomologie-Axiome).

Die Kohomologie hat folgende Eigenschaften:

1. $H^0(\{*\}) = \mathbb{R}$, $H^k(\{*\}) = 0$ für $k \neq 0$ (DIMENSIONSAXIOM).
2. $f, g : M \rightarrow N$ glatt, $f \sim g \Rightarrow f^* = g^*$ (HOMOTOPIEAXIOM).
3. Sei $M = \bigsqcup_\alpha M_\alpha \Rightarrow H^k(M) = \prod_\alpha H^k(M_\alpha)$ (DISJUNKTE VEREINIGUNG).
4. Sei $M = U \cup V$ mit $U, V \subseteq M$ offen, dann existieren lineare Abbildungen δ_k , die die folgende lange Sequenz exakt machen:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^k(M) &\xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta_k} \\ &\xrightarrow{\delta_k} H^{k+1}(M) \rightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \rightarrow H^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

mit den Inklusionen $i_U : U \hookrightarrow U \cup V$, $i_V : V \hookrightarrow U \cup V$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$ und $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$. Diese Sequenz heißt MAYER-VIETORIS SEQUENZ und δ^k heißt EINHÄNGUNGSOPERATOR.

Ein Folge linearer Abbildungen $\dots \xrightarrow{f_k} E_k \xrightarrow{f_{k+1}} \dots$ heißt EXAKT, falls $\text{Bild } f_k = \text{Ker } f_{k+1}$ für alle k ist.

Beweis.

1 Klar, da $\Omega^k(\{*\}) = \{0\}$ für $k \neq 0$ und $\Omega^0(\{*\}) = C^\infty(\{*\}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2 Sei $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ eine (glatte) Homotopie von f nach g , d.h. $H(0, x) = f(x)$ und $H(1, x) = g(x)$ für alle $x \in M$. Für $\omega \in \Omega^k(N)$ ist $H^*\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$. Sei $j_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ definiert durch $j_t(x) := (x, t)$. Dann ist $H \circ j_0 = f$ und $H \circ j_1 = g$ und somit

$$g^* - f^* = (H \circ j_1)^* - (H \circ j_0)^* = (j_1^* - j_0^*) \circ H^*.$$

Für $\varphi \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ ist $j_t^*\varphi \in \Omega^k(M)$ und $t \mapsto j_t^*\varphi$ ist eine glatte Kurve in $\Omega^k(M)$ und somit

$$(j_1^* - j_0^*)\varphi = \int_0^1 \frac{d}{dt} j_t^*\varphi dt = \int_0^1 j_t^*(\mathcal{L}_\xi \varphi) dt,$$

wobei $\xi := \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ das Einheitsvektorfeld in $\mathbb{R}$ -Richtung bezeichnet, denn

$$\begin{aligned} j_{t+s} &= \text{Fl}_s^\xi \circ j_t \text{ für } t, s \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} j_t^* \varphi &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (j_{t+s})^* \varphi = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s^\xi \circ j_t)^* \varphi \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (j_t^* \circ (\text{Fl}_s^\xi)^*) \varphi = j_t^* \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s^\xi)^* \varphi \right) = j_t^* (\mathcal{L}_\xi \varphi). \end{aligned}$$

Somit definieren wir Faserintegration I_0^1 durch

$$I_0^1 : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(M), \quad I_0^1(\varphi) := \int_0^1 j_t^* \varphi \, dt.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (d \circ I_0^1)(\varphi) &= d \left(\int_0^1 j_t^* \varphi \, dt \right) = \int_0^1 d(j_t^* \varphi) \, dt = \int_0^1 j_t^* (d\varphi) \, dt \\ &= I_0^1(d\varphi) = (I_0^1 \circ d)(\varphi); \\ (j_1^* - j_0^*)\varphi &= \int_0^1 j_t^* (\mathcal{L}_\xi \varphi) \, dt = I_0^1(\mathcal{L}_\xi \varphi) = I_0^1((d \circ i_\xi + i_\xi \circ d)\varphi). \end{aligned}$$

Wir definieren nun den Homotopie-Operator $G : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ mit $G := I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*$, d.h.:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(N) & \xrightarrow{\quad G \quad} & \Omega^{k-1}(M) \\ H^* \downarrow & & \uparrow I_0^1 \\ \Omega^k(M \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad i_\xi \quad} & \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R}) \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g^* - f^* &= (j_1^* - j_0^*) \circ H^* \\ &= I_0^1 \circ (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \circ H^* \\ &= (d \circ I_0^1 \circ i_\xi + I_0^1 \circ i_\xi \circ d) \circ H^* \\ &= d \circ (I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*) + (I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*) \circ d = d \circ G + G \circ d. \end{aligned}$$

und somit ist $g^*\omega - f^*\omega = d(G\omega) + G(d\omega) = d(G\omega)$ exakt, falls $d\omega = 0$. Also ist $g^* - f^* = 0 : H(N) \rightarrow H(M)$.

3 Klar, da $\Omega^k(\bigsqcup_\alpha M_\alpha) \cong \prod_\alpha \Omega^k(M_\alpha)$ und d diese Zerlegung respektiert.

4 Wir zeigen zuerst, daß

$$0 \rightarrow \Omega^k(U \cup V) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Die Abbildung $f := (i_U^*, i_V^*)$ ist klarerweise injektiv mit $\text{Bild}(i_U^*, i_V^*) = \text{Ker}(j_U^* - j_V^*)$. Die Abbildung $g := (j_U^* - j_V^*)$ ist surjektiv: Sei dazu $\{h_U, h_V\}$ eine Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\{U, V\}$ und $\varphi \in \Omega(U \cap V)$. Mit $\varphi_U := h_V \varphi \in \Omega(U)$ (und $\varphi_U|_{U \setminus \text{Trg}(h_V)} := 0$) bzw. $\varphi_V := -h_U \varphi \in \Omega(V)$ (und $\varphi_V|_{V \setminus \text{Trg}(h_U)} := 0$) gilt:

$$(j_U^* - j_V^*)(\varphi_U, \varphi_V) = \varphi_U|_{U \cap V} - \varphi_V|_{U \cap V} = (h_V + h_U)\varphi = \varphi.$$

Also ist die Sequenz exakt.

Um daraus die lange exakte Sequenz in der Kohomologie zu erhalten können wir das nachfolgende allgemeine Resultat verwenden. $\square$

44.4 Theorem.

Es sei $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von Ketten-Abbildungen,

d.h. C , C' und C'' sind Kettenkomplexe (i.e. $\mathbb{Z}$ -graduierte Vektorräume mit sogenannten Randoperatoren, d.h. linearen Operatoren ∂ vom Grad 1, welche $\partial^2 = 0$ erfüllen) und die verbindenden linearen Abbildungen f und g sind vom Grad 0 und vertauschen mit den Randoperatoren.

Dann erhalten wir eine lange exakte Folge in Homologie:

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{H_q(f)} H_q(C) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q+1}(C') \xrightarrow{H_{q+1}(f)} \dots$$

Dabei ist die q -te HOMOLOGIE $H_q(C)$ des Kettenkomplexes C wie zuvor durch

$$H_q(C) := \text{Ker}(\partial_q : C_q \rightarrow C_{q+1}) / \text{Bild}(\partial_{q-1} : C_{q-1} \rightarrow C_q)$$

definiert.

Beweis. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{f} & C_q & \xrightarrow{g} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{f} & C_{q+1} & \xrightarrow{g} & C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Es sei $\partial_*[z''] := [(f^{-1} \circ \partial \circ g^{-1})(z'')]$ für $z'' \in C''$ mit $\partial z'' = 0$.

Wir zuerst zeigen, daß es möglich ist Elemente in den entsprechenden inversen Bildern zu wählen und dann zeigen wir, daß die resultierende Klasse nicht von irgendeiner der Wahlen abhängt.

Sei dazu $z''_q \in C''_q$ ein Zykel, d.h. $\partial z''_q = 0$. Da g surjektiv ist finden wir ein $x_q \in C_q$ mit $gx_q = z''_q$. Da $g\partial x_q = \partial gx_q = \partial z''_q = 0$, finden wir ein $x'_{q+1} \in C'_{q+1}$ mit $fx'_{q+1} = \partial x_q$. Und daher ist $x'_{q+1} \in f^{-1}\partial g^{-1}z''_q$. Weiters ist $f\partial x'_{q+1} = \partial fx'_{q+1} = \partial \partial x_q = 0$. Da f injektiv ist erhalten wir $\partial x'_{q+1} = 0$ und daher können wir die Klasse $\partial z''_q := [x'_{q+1}]$ bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & & x_q & \xrightarrow{g} & z''_q \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ x'_{q+1} & \xrightarrow{f} & x_{q+1} & \xrightarrow{g} & 0 \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ \partial x'_{q+1} & \xrightarrow{f} & 0 & & \end{array}$$

Nun die Unabhängigkeit von allen Wahlen. Sei dazu $[z''_q] = [\bar{z}''_q]$, d.h. $\exists x'_{q-1} : \partial x''_{q-1} = z''_q - \bar{z}''_q$. Wähle $x_q, \bar{x}_q \in C_q$ wie zuvor, so daß $gx_q = x''_q$ und $g\bar{x}_q = \bar{x}''_q$. Ebenso wie zuvor wählen wir $x'_{q+1}, \bar{x}'_{q+1} \in C'_{q+1}$ mit $fx'_{q+1} = \partial x_q$ und $f\bar{x}'_{q+1} = \partial \bar{x}_q$. Wir haben zu zeigen, daß $[x'_{q+1}] = [\bar{x}'_{q+1}]$. Dazu wählen wir $x_{q-1} \in C_{q-1}$ mit $gx_{q-1} = x''_{q-1}$. Dann ist $g\partial x_{q-1} = \partial gx_{q-1} = \partial x''_{q-1} = z''_{q-1} - \bar{z}''_{q-1} = g(x_q - \bar{x}_q)$ und daher existiert ein $x'_q \in C_q$ mit $fx'_q = x_q - \bar{x}_q - \partial x_{q-1}$. Weiters ist $f\partial x'_q = \partial fx'_q = \partial(x_q - \bar{x}_q - \partial x_{q-1}) = \partial x_q - \partial \bar{x}_q - 0 = f(x'_{q+1} - \bar{x}'_{q+1})$. Da f injektiv ist, haben wir $x'_{q+1} - \bar{x}'_{q+1} = \partial x'_q$, d.h. $[x'_{q+1}] = [\bar{x}'_{q+1}]$.

Exaktheit bei $H_q(C')$:

$$(\subseteq) f_*\partial_*[z''] = [ff^{-1}\partial g^{-1}z''] = [\partial g^{-1}z''] = 0.$$

($\supseteq$) Es sei $\partial z' = 0$ und $0 = f_*[z'] = [fz']$, d.h. $\exists x : \partial x = fz'$. Dann erfüllt $x'' := gx$ sowohl $\partial x'' = \partial gx = g\partial x = gfz' = 0$ als auch $\partial_*[x''] = [f^{-1}\partial g^{-1}gx] = [f^{-1}\partial x] = [z']$.

Exaktheit bei $H_q(C)$:

$$(\subseteq) \text{ da } g \circ f = 0.$$

($\supseteq$) Es sei $\partial z = 0$ mit $0 = g_*[z] = [gz]$, d.h. $\exists x'' : \partial x'' = gz$. Dann $\exists x : gx = x''$. Daher ist $gz = \partial x'' = \partial gx = g\partial x \Rightarrow \exists x' : fx' = z - \partial x \Rightarrow f\partial x' = \partial fx' = \partial(z - \partial x) = 0 \Rightarrow \partial x' = 0$ und $f_*[x'] = [fx'] = [z - \partial x] = [z]$.

Exaktheit bei $H_q(C'')$:

($\subseteq$) Wir haben $\partial_* g_*[z] = [f^{-1}\partial g^{-1}gz] = [f^{-1}\partial z] = [f^{-1}0] = 0$.

($\supseteq$) Es sei $\partial z'' = 0$ und $0 = \partial_*[z'']$, d.h. $\exists x' : \partial x' = z'$, wobei $z' \in f^{-1}\partial g^{-1}z''$, d.h. $\exists x : gx = z''$ und $fx' = \partial x$. Dann ist $\partial(x - fx') = fz' - f(\partial x) = 0$ und $g(x - fx') = z'' - 0$, d.h. $g_*[x - fx'] = [z'']$. $\square$

44.5 Bemerkungen

1. Die De-Rham Kohomologie ist durch die Eigenschaften aus Satz 44.3 schon eindeutig bestimmt, siehe [112, Kap.5].
2. Für die 0. Kohomologie gilt:

$$\begin{aligned} H^0(M) &= \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : df = 0\} \\ &= \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : f \text{ ist lokal konstant}\} = \mathbb{R}^\mu, \end{aligned}$$

wobei μ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M ist.

3. Falls $k < 0$ oder $k > \dim M$ so ist $\Omega^k(M) = 0$ und somit $H^k(M) = 0$.
4. Seien M und N HOMOTOPIEÄQUIVALENT, d.h. es gibt glatte Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow M$ mit $f \circ g \sim \text{id}_N$ und $g \circ f \sim \text{id}_M$. Die Abbildungen $H(f) := f^* : H(N) \rightarrow H(M)$ und $H(g) := g^* : H(M) \rightarrow H(N)$ sind dann inverse Isomorphismen. Z.B. ist offene Möbiusband homotopieäquivalent mit dem Zylinder.
5. Ist insbesondere $A \subseteq M$ ein DEFORMATIONSRETRAKT, d.h. eine Homotopie $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ existiert mit $h(\cdot, 1) = \text{id}_M$, $h(X \times \{0\}) \subseteq A$ und $h(\cdot, 0)|_A = \text{id}_A$, so gilt $H(M) \cong H(A)$. Z.B. ist die Basis jedes Vektorbündels vermöge der Einbettung als Nullschnitt ein Deformationsretrakt des Totalraums.
6. Ist M KONTRAHIERBAR, d.h. ein Punkt p in M existiert, welcher ein Deformationsretrakt von M ist, dann gilt $H(M) \cong H(\{p\})$, d.h. jede geschlossene Form ist exakt (dies ist das versprochene POINCARÉ-LEMMA). Falls $M = \mathbb{R}^m$ – oder allgemeiner $M \subseteq \mathbb{R}^m$ sternförmig (bzgl. 0) ist – so ist $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $(x, t) \mapsto t \cdot x$ eine Kontraktion von M zu einem Punkt, also ist M kontrahierbar. Lokal ist also jede Mannigfaltigkeit kontrahierbar.
7. Ist M einfach zusammenhängend, dann ist $H^1(M) = 0$. Um dies zu zeigen geht man so vor: Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ mit $d\omega = 0$. Wir wollen ein $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ finden mit $df = \omega$. Dazu wählen wir einen fixen Punkt $x_0 \in M$ und suchen für jeden anderen Punkt $x \in M$ eine Kurve c , welche x_0 mit x verbindet, und definieren

$$f(x) := \int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Kurve ab, denn die Zusammensetzung mit einer zweiten verkehrt durchlaufenen Kurve liefert eine geschlossene Kurve c . Diese ist nach Voraussetzung homotop zur konstanten Kurve konst_{x_0} , also ist $[c^*(\omega)] = [(\text{konst}_{x_0})^*(\omega)]$. Die beiden Formen auf $[0, 1]$ unterscheiden sich also nur um eine exakte Form dg , und somit ist:

$$\int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega) = \int_0^1 (\text{konst}_{x_0})^*(\omega) = \int_0^1 0 = 0.$$

Da lokal so ein f mit $df = \omega$ immer existiert und $\int_c df = f(c(1)) - f(c(0))$ gilt, ist das oben definierte f glatt und ist die gesuchte Stammfunktion wegen

$$\begin{aligned} df|_{c(0)}(c'(0)) &= (f \circ c)'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(c(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(f(c(0)) + \int_0^1 c(t_-)^*(\omega) \right) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_0^1 \omega_{c(t s)}(t c'(t s)) ds = \int_0^1 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \omega_{c(t s)}(t c'(t s)) ds \\ &= \int_0^1 \omega_{c(0)}(c'(0)) ds = \omega_{c(0)}(c'(0)) \end{aligned}$$

8. Falls $\dots \rightarrow E_i \xrightarrow{T_i} E_{i+1} \rightarrow \dots$ eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen ist, so folgt durch Aufsummieren der Gleichung

$$\dim E_i = \dim(\text{Ker } T_i) + \dim(\text{Bild}(T_i)) = \dim(\text{Ker } T_i) + \dim(\text{Ker } T_{i+1})$$

die Identität

$$\sum_i (-1)^i \dim E_i = 0$$

Die Mayer-Vietoris Sequenz impliziert also, daß für die Euler-Charakteristik folgendes gilt:

$$\chi(U \cup V) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V)$$

9. Da $\mathbb{R}^m$ kontrahierbar ist, ist seine Euler-Charakteristik jene des Punktes also 1 nach Dimensionsaxiom [44.3.1](#). Es ist $\chi(S^0) = 2$ wegen [44.3.3](#). Nach [8](#) ist für jeden Punkt $* \in M$ einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi(M \setminus \{*\}) + \chi(\mathbb{R}^m) - \chi(\mathbb{R}^m \setminus \{*\}) \\ &= \chi(M \setminus \{*\}) + \chi(\{*\}) - \chi(S^{m-1}) \\ &= \chi(M \setminus \{*\}) + 1 - \chi(S^{m-1}). \end{aligned}$$

Für die Sphären erhalten wir somit

$$\chi(S^m) = \chi(\mathbb{R}^m) + 1 - \chi(S^{m-1}) = 2 - \chi(S^{m-1})$$

und insbesondere $\chi(S^1) = 2 - \chi(S^0) = 0$ und somit $\chi(M) = \chi(M \setminus \{*\}) + 1$ für $\dim(M) = 2$.

Kompakte 2-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M_g vom Geschlecht g erhält man aus S^2 durch Ankleben von g Henkeln (nach [\[72, 9.2\]](#)) oder g Möbiusbändern (nach [\[72, 9.4\]](#)), also ergibt sich rekursiv im nicht-orientierbaren Fall:

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi((M_{g-1} \setminus \{*\}) \cup \text{Möb}) = \chi(M_{g-1} \setminus \{*\}) + \chi(\text{Möb}) - \chi(S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 1 = 2 - (g - 1) - 1 = 2 - g, \end{aligned}$$

und im orientierbaren Fall:

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi((M_{g-1} \setminus \{*_-, *_+\}) \cup S^1 \times \mathbb{R}) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 + \chi(S^1 \times \mathbb{R}) - \chi(S^1 \sqcup S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 = 2 - 2(g - 1) - 2 = 2 - 2g \end{aligned}$$

10. Die Euler-Charakteristik χ einer Mannigfaltigkeit, läßt sich auch dadurch berechnen, daß man sie TRIANGULIERT, d.h. in Simplexe zerlegt. Sei γ_i die Anzahl der verwendeten Simplexe der Dimension i , dann gilt: $\chi = \sum_i (-1)^i \gamma_i$. Insbesondere gilt für jeden Polyeder, daß die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Seitenflächen gleich $2 = \chi(S^2)$ ist (siehe algebraische Topologie).

11. Eine weitere Möglichkeit die Euler-Charakteristik zu berechnen ist mittels MORSE-FUNKTIONEN, das sind Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, deren kritische Punkte nicht degeneriert sind, d.h. die Hessesche Matrix ist definit. Sei $\beta_k(f)$ die Anzahl der kritischen Punkte, in denen die Hessesche Matrix genau k negative Eigenwerte hat, so gelten die Morse-Ungleichungen, siehe [50, S.161–162]

$$\beta_k(M) \leq \beta_k(f)$$

$$\sum_k (-1)^k \beta_k(f) = \chi(M).$$

12. Noch allgemeiner kann man für ein Vektorfeld ξ mit ausschließlich isolierten Nullstellen (z.B. das Gradientenfeld einer Morsefunktion) einen Index $\text{ind}_x(\xi)$ in diesen Punkten definieren, siehe [50.30] oder [50, S.133]. Und es gilt dann $\chi(M) = \sum_{\xi(x)=0} \text{ind}_x(\xi)$ nach einem Satz von Hopf, siehe [50.32] oder [50, S.164].
Falls es also ein nirgends verschwindendes Vektorfeld gibt, so muß die Eulercharakteristik $\chi(M)$ verschwinden. Dies zeigt den Igelsatz [50.11].
Man kann umgekehrt zeigen, daß auf jeder kompakten, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit $\chi(M) = 0$ ein Nullstellen-freies Vektorfeld existiert, siehe [50, S.137].
13. Die Kohomologie der Sphären S^n für $n \geq 1$ ist:

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & 0 < k < n \\ \mathbb{R} & k = n \\ 0 & n < k \end{cases}$$

also hat das Poincaré-Polynom die Form: $f_{S^n}(t) = 1 + t^n$ und – wie wir in [9] bereits gesehen haben – ist die Euler-Charakteristik $\chi(S^{2n-1}) = 0$ und $\chi(S^{2n}) = 2$.

(i) $H^0(S^n) = \mathbb{R}$ folgt aus (2).

(ii) $H^k(S^n) = 0$ für $k > n$ gilt immer, vergl. (3).

(iii) Bleibt zu zeigen: $H^k(S^n) \cong H^{k+1}(S^{n+1})$ für $0 < k$ sowie $H^1(S^n) = 0$ für $n > 2$ und $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Es ist $S^{n+1} = U \cup V$ mit $U := \{x \in S^{n+1} : -1 \leq \langle x, a \rangle\}$ und $V := \{x \in S^{n+1} : +1 \geq \langle x, a \rangle\}$ für fix gewähltes $a \in S^{n+1}$. Also ist $U \cap V \cong S^n \times \mathbb{R}$ und somit $H(U \cap V) \cong H(S^n)$ nach [5]. Die Mayer-Vietoris Sequenz (für $k \geq 1$)

ist

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 H^k(U) \oplus H^k(V) \cong H^k(\{*\}) \oplus H^k(\{*\}) \\
 \downarrow \\
 H^k(U \cap V) \cong H^k(S^n) \\
 \downarrow \delta \\
 H^{k+1}(U \cup V) = H^{k+1}(S^{n+1}) \\
 \downarrow \\
 H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \cong H^{k+1}(\{*\}) \oplus H^{k+1}(\{*\}) \\
 \downarrow \\
 \vdots
 \end{array}$$

Also ist $H^k(S^n) \xrightarrow[\cong]{\delta} H^{k+1}(S^{n+1})$ für alle $k > 0$. Der Anfang der Sequenz sieht so aus:

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \downarrow \\
 H^0(S^{n+1}) \cong \mathbb{R} \\
 \downarrow \\
 H^0(\{*\}) \oplus H^0(\{*\}) \cong \mathbb{R}^2 \\
 \downarrow \\
 H^0(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{für } n = 0 \\ \mathbb{R} & \text{für } n > 0 \end{cases} \\
 \downarrow \\
 H^1(S^{n+1}) \\
 \downarrow \\
 0
 \end{array}$$

Folglich ist $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ und $H^1(S^{n+1}) = 0$ für $n > 0$ wegen [8](#).

45. Klassische Mechanik

45.1 Kraftgesetz von Newton

Für die KRAFT F , die MASSE m , und die BESCHLEUNIGUNG $\ddot{x}$ gilt folgende Formel:

$$F(x) = m \cdot \ddot{x},$$

wobei wir uns hier und im Folgendem der Einfachheit halber auf zeitunabhängige Kräfte beschränken. Weiters setzen wir $m = 1$, denn ein allgemeines m lässt sich in F absorbieren.

Sei vorerst der Raum $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Orte x offen. Die Funktion $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann dann als Vektorfeld interpretiert werden. Besonders wichtig ist der Fall, wo F ein GRADIENTEN-FELD ist, d.h. ein POTENTIAL $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $F = -\text{grad } U$.

Dies ist eine lokale (INTEGRABILITÄTS-)Bedingung $dF = 0$ und eine globale (KOHOMOLOGISCHE) Bedingung $H^1(Q) = 0$ an Q , siehe [44.5.6](#) und [44.5.7](#).

Die Newton'sche Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung. Eine solche läßt sich als (System) gewöhnliche(r) Differentialgleichung(en) 1-ter Ordnung auf $TQ = Q \times \mathbb{R}^n$ umschreiben indem man als zusätzliche Variable den Geschwindigkeitsvektor $v = \dot{x}$ verwendet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &=: v \\ \dot{v} &= F(x).\end{aligned}$$

Die einfachste Bewegungsinvariante dieser DG ist die ENERGIE

$$E(x, v) := \frac{|v|^2}{2} + U(x),$$

denn

$$\frac{d}{dt}E(x, \dot{x}) = \langle \dot{x}, \ddot{x} \rangle + U'(x) \cdot \dot{x} = \langle \dot{x}, -\text{grad}(U)(x) \rangle + U'(x) \cdot \dot{x} = 0.$$

Dabei heißt $m \frac{|\dot{x}|^2}{2}$ die KINETISCHE und $U(x)$ die POTENTIELLE Energie.

45.2 Newton'sches Gesetz auf Mannigfaltigkeiten

Wie wir in [\[72, 25.1\]](#) bemerkt haben, wird eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung auf einer Mannigfaltigkeit Q durch ein Vektorfeld $\xi : Q \rightarrow TQ$ beschrieben, denn die erste Ableitung einer Kurve $x : \mathbb{R} \rightarrow Q$ ist eine Kurve $\dot{x} : \mathbb{R} \rightarrow TQ$ mit Werten im Tangentialbündel TQ . Wenn $(x^1, \dots, x^n)$ lokale Koordinaten auf Q sind, dann bilden die Derivationen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ eine Basis des Tangentialraums $T_x Q$. Seien $(v^1, \dots, v^n)$ die Koordinaten bezüglich dieser Basis, so sind $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$ lokale Koordinaten des Tangentialbündels TQ , die Fußpunkt-Abbildung $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$ ist in lokalen Koordinaten durch die Zuordnung

$$(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

gegeben und die Ableitung der Kurve $t \mapsto x(t) \in Q$ ist durch

$$t \mapsto (x^1(t), \dots, x^n(t); \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$$

gegeben.

Was entspricht einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2-ter Ordnung, wie sie das Kraftgesetz darstellt? Die zweite Ableitung einer Kurve $x : \mathbb{R} \rightarrow Q$ ist eine Kurve $\ddot{x} : \mathbb{R} \rightarrow T(TQ) =: T^2Q$ mit Werten im 2-ten Tangentialbündel von Q . Seien $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$ obige lokale Koordinaten auf TQ , dann bilden die Derivationen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^1}, \dots)$ eine Basis des Tangentialraums $T_{(x,v)}(TQ)$ an die Mannigfaltigkeit TQ im Punkte $(x, v) \in TQ$. Seien $(y^1, \dots, y^n; w^1, \dots, w^n)$ die Koordinaten bezüglich dieser Basis, so sind $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n; y^1, \dots, y^n; w^1, \dots, w^n)$ lokale Koordinaten des zweiten Tangentialbündels T^2Q und die zweite Ableitung der Kurve $t \mapsto x(t) \in Q$ sieht wie folgt aus:

$$\ddot{x} = (x^1, \dots, x^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n; \ddot{x}^1, \dots, \ddot{x}^n).$$

Bezüglich dieser Koordinaten von T^2Q ist die Fußpunkt-Abbildung $\pi_{TQ} : T^2Q \rightarrow TQ$ gegeben durch $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n; y^1, \dots, y^n; w^1, \dots, w^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$, hingegen ist die Ableitung $T\pi_Q : T^2Q \rightarrow TQ$ der Fußpunkt-Abbildung $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$ durch $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n; y^1, \dots, y^n; w^1, \dots, w^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$ gegeben. Eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung $\ddot{x} = X(x, \dot{x})$ ist demnach durch eine Abbildung $X : TQ \rightarrow T(TQ)$ gegeben, welche in Koordinaten folgendes Aussehen hat:

$$X(x, v) = (x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n; X^1(x, v), \dots, X^n(x, v)).$$

Oder unter Verwendung der Basis-Vektorfelder

$$X(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n X^i(x, v) \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Die Abbildung $X : TQ \rightarrow T(TQ)$ ist also ein Vektorfeld auf TQ , welches zusätzlich die Eigenschaft hat, daß auch $T\pi_Q \circ X = \text{id}$ ist, also die 2-te und 3-te Komponente gleich sind. Man kann diese zusätzliche Bedingung auch durch $\kappa_Q \circ X = X$ formulieren, wobei $\kappa_Q : T^2Q \rightarrow T^2Q$ den kanonischen Flip bezeichnet, welcher gerade die beiden mittleren Komponenten vertauscht (Dieser ist global definiert!). Ein Vektorfeld X auf TQ mit dieser zusätzlichen Eigenschaft nennt man einen SPRAY. Diese beschreiben also gerade gewöhnliche Differentialgleichungen 2-ter Ordnung auf Q . Für die Lösungskurven $c : \mathbb{R} \rightarrow TQ$ der entsprechenden Differentialgleichung 1-ter Ordnung auf TQ ist somit

$$\frac{d}{dt}(\pi_Q \circ c) = T\pi_Q \circ X \circ c = \text{id} \circ c = c.$$

45.3 Variationsproblem

Mit der Philosophie, daß die Natur minimalistisch vorgeht, wird man versucht sein ein Funktional am Raum der Kurven zu finden, dessen kritische Punkte gerade die Lösungskurven der Differentialgleichung sind. Betrachten wir vorerst wieder den Fall, daß $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Die KRITISCHEN PUNKTE eines Funktionals I der Gestalt

$$I(x) := \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

sind gerade die Lösungen der EULER-LAGRANGE GLEICHUNG

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L(x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L(x, \dot{x}) \text{ für } i = 1, \dots, n$$

einer impliziten Differentialgleichung 2-ter Ordnung.

Um das einzusehen, beachten wir, daß das Funktional

$$x \mapsto I(x) := \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

genau x als kritischen Punkt hat, wenn die Richtungsableitung $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I(x + s v)$ für alle v (mit $v(a) = 0 = v(b)$) verschwindet. Diese berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I(x + s v) &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot v(t) + \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \dot{v}(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \right) \cdot v(t) dt \\ &\quad + \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot v(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \right) \cdot v(t) dt + 0. \end{aligned}$$

Da v beliebig war, müssen folglich alle Komponenten

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0$$

sein.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Variablen x und $\dot{x}$ in L getrennt sind, d.h. $L(x, \dot{x}) = f(x) + g(\dot{x})$ ist, dann lautet die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(x) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} g(\dot{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} g(\dot{x}) \cdot \ddot{x}^j \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Durch Vergleich mit der Newton-Gleichung $-\text{grad } U(x) = F(x) = \ddot{x}$, erhalten wir als einfachste Lösung für L die Terme

$$g(\dot{x}) := \frac{|\dot{x}|^2}{2} \quad \text{und} \quad f(x) := -U(x)$$

und somit die sogenannte LAGRANGE-FUNKTION

$$L(x, v) = f(x) + g(v) = \frac{|v|^2}{2} - U(x).$$

Die Zeitentwicklung ist also anstelle des komplizierteren Objekts eines Sprays $X : TQ \rightarrow T(TQ)$ durch eine reellwertige Funktion $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ festgelegt. Allerdings ist die schöne gewöhnliche explizite Differentialgleichung 2-ter Ordnung (das Newton'sche Kraftgesetz) durch eine in Koordinaten implizite Differentialgleichung 2-ter Ordnung (die Euler-Lagrange Gleichung) zu ersetzen, für die wir keine Theorie auf Mannigfaltigkeiten entwickelt haben.

45.4 Lagrange-Formalismus

Versuchen wir nun umgekehrt aus einer allgemeinen Lagrange-Funktion $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ einer Mannigfaltigkeit Q das Vektorfeld $X : TQ \rightarrow T^2Q$ und die Energie $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ zu erhalten. Die Euler-Lagrange Gleichung sieht in Koordinaten wieder wie folgt aus:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L = \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L + \sum_j \ddot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L$$

Schreiben wir auch das gesuchte Vektorfeld X_L in den lokalen Koordinaten als:

$$X_L(x, v) = (x^1, \dots; v^1, \dots; v^1, \dots; X^1(x, v), \dots, X^n(x, v)).$$

so erhalten wir für die Koeffizienten X^i durch Einsetzen von $\ddot{x}^i = X^i(x, \dot{x})$ die implizite Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L = \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L + \sum_j X^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L$$

Falls die Matrix $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j})_{i,j=1}^n$ invertierbar ist können wir durch Multiplikation mit der inversen Matrix $L^{k,i}$ die X^i berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_i L^{k,i} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} L - \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L \right) &= \sum_i \sum_j L^{k,i} X^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L \\ &= \sum_j X^j \delta_j^k = X^k \end{aligned}$$

Das dadurch definierte Vektorfeld

$$X_L = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i \sum_k L^{i,k} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} L - \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^k} L \right) \frac{\partial}{\partial v^i}$$

heißt dann LAGRANGE-VEKTORFELD zu L . Wir müßten allerdings noch überprüfen ob diese Definition wirklich etwas Koordinaten-unabhängiges definiert. Das werden wir später zeigen.

Da wir die implizite Gleichung für das Lagrange-Vektorfeld nur unter zusätzlichen Bedingungen lösen können, wollen wir versuchen die einfachste Bewegungsinvariante, die Energie E , direkt aus L zu bestimmen.

Im speziellen Fall wo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $L(x, v) = \frac{|v|^2}{2} - U(x)$ ist, versuchen wir die kinetische Energie $|v|^2/2$ aus L zu gewinnen. In Koordinaten können wir das durch

$$|v|^2 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} L(x, tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(x, v + tv) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v)$$

erreichen. Für ein allgemeines Vektorbündel $V \rightarrow Q$ und eine Funktion $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir folglich die sogenannte FASERABLEITUNG $d_f L : V \rightarrow V^*$ von L durch

$$d_f L(\xi)(\eta) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\xi + t\eta).$$

Wenn $(x^1, \dots, v^1, \dots)$ lokale Vektorbündel-Koordinaten von V mit Fußpunkt-Koordinaten $(x^1, \dots, x^n)$ sind, dann ist

$$(d_f L)(x, v)(x, w) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v) \cdot w^i.$$

Für eine Lagrange-Funktion $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ einer allgemeinen Mannigfaltigkeit Q definieren wir die WIRKUNG $A : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$A(\xi) := d_f L(\xi) \cdot \xi, \text{ d.h. } A(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v)$$

und die ENERGIE $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$E := A - L, \text{ d.h. } E(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v) - L(x, v).$$

Wir können nun leicht nachrechnen, daß die Energie in der Tat eine Bewegungs-invariante ist, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i v^i(t) \frac{\partial}{\partial v^i} L(x(t), v(t)) - L(x(t), v(t)) \right) \\ &= \sum_i \dot{v}^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + \sum_i v^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{v}^i \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wegen der Euler-Lagrange Gleichung.

45.5 Mechanik auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Auf einer (Pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (Q, g) wird die Lagrange-Funktion bezüglich eines Potentials $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$ in Analogie durch

$$L(\xi) = \frac{1}{2} g(\xi, \xi) - U(\pi(\xi))$$

definiert, d.h. in lokalen Koordinaten

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{i,j}(x) v^i v^j - U(x).$$

Die Faserableitung ist dann offensichtlich

$$d_f L(\xi) \cdot \eta = g(\xi, \eta)$$

und somit ist die Wirkung $A(\xi) = g(\xi, \xi)$ und die Energie

$$E(\xi) = \frac{1}{2} g(\xi, \xi) + U(\pi(\xi)).$$

Im Falle, daß $U = 0$ ist, heißt das Vektorfeld X_L geodätischer Spray. Es ist dann $\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} v^j v^k$ und $\frac{\partial}{\partial v^i} L = \sum_j g_{i,j}(x) v^j$. Und somit ist die Matrix

($\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}$) gerade die Koeffizienten Matrix $(g_{i,j})$ der Metrik und ihre Inverse $(L^{i,j})$ wird üblicherweise mit $(g^{i,j})$ bezeichnet, siehe [41.1](#). Außerdem ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial v^i} L = \frac{\partial}{\partial x^k} \sum_j g_{i,j}(x) v^j = \sum_j \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} v^j$$

Also lautet die Euler-Lagrange Gleichung in expliziter Form (siehe [45.4](#))

$$\begin{aligned} \ddot{x}^k &= \sum_i g^{k,i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j,r} \frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} v^j v^r - \sum_j \dot{x}^j \sum_r \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} v^r \right) \\ &= \sum_{i,j,r} g^{k,i} \dot{x}^j \dot{x}^r \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} \right) \\ &= - \sum_i g^{k,i} \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^r} \right) \\ &= - \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \sum_i g^{k,i} \Gamma_{j,r,i} \\ &= - \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \Gamma_{j,r}^k. \end{aligned}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Geodäten, wobei $\Gamma_{j,r,i}$ die Christoffelsymbole der 1-ten Art und $\Gamma_{j,r}^k$ jene der 2-ten Art sind, siehe [72](#), [58.2](#). Also sind die Integral-Kurven in Q des geodätischen Spray's X_L gerade die Geodäten, die wir auch als kritischen Punkten der Bogenlänge erkannt haben.

Für eine allgemeines U und ein $\varepsilon > U(x)$ für alle $x \in Q$ definiert man eine neue (die sogenannte JACOBI-METRIK) $g_\varepsilon := (\varepsilon - U) \cdot g$. Man kann dann zeigen, daß die Integralkurven c von X_L mit Energie $\varepsilon = g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ für alle t bis auf Reparametrisierung genau die Geodäten der Jacobi-Metrik g_ε mit Energie 1 sind.

45.6 Zusammenhang zwischen Lagrange-Vektorfeld X_L und Energie E

Schön wäre wenn zwischen X_L und E ein ähnlicher Zusammenhang bestünde, wie er zwischen Gradient und Potential besteht. Dazu erinnern wir uns daran, daß der Gradient eines Potentials $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einer Riemann-Metrik g auf Q gegeben ist durch:

$$g_x(\text{grad } U(x), \eta) = dU(x) \cdot \eta \text{ für alle } \eta \in T_x Q,$$

wobei dU das totale Differential von U bezeichnet. Wir suchen also eine Bilinearform ω , welche

$$\omega_{x,v}(X_L, Y) = dE(x, v) \cdot Y \text{ für alle } Y \in T_{(x,v)}(TQ)$$

erfüllt. Sei X_L das Vektorfeld auf TQ , welches die Euler-Lagrange Gleichung für eine hinreichen reguläre Lagrange-Funktion L beschreibt. In Koordinaten hat jedes Vektorfeld X_L , welches eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung beschreibt, nach dem in [45.2](#) Gezeigten die folgende Gestalt:

$$X_L(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n X^i(x, v) \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Für die Energie haben wir nach [45.4](#) die Formel

$$E(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v) - L(x, v)$$

und für ihr Differential

$$\begin{aligned}
 dE(x, v) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} E(x, v) dx^j + \sum_j \frac{\partial}{\partial v^j} E(x, v) dv^j \\
 &= \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \right) dx^j \\
 &\quad + \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial v^j} L + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial v^j} L \right) dv^j \\
 &= \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \right) dx^j + \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L \right) dv^j.
 \end{aligned}$$

Eine allgemeine Bilinearform ω auf TQ , d.h. ein 2-fach kovariantes Tensorfeld auf TQ ist bezüglich der lokalen Koordinaten $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^i \otimes dx^j + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) dx^i \otimes dv^j \\
 &\quad + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) dv^i \otimes dx^j + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) dv^i \otimes dv^j.
 \end{aligned}$$

Folglich wäre

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \omega(X_L, \frac{\partial}{\partial x^j}) = dE \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \\
 &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \\
 \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= \omega(X_L, \frac{\partial}{\partial v^j}) = dE \cdot \frac{\partial}{\partial v^j} = \\
 &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L.
 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir durch Koeffizienten-Vergleich

$$\begin{aligned}
 \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L \\
 \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Setzen wir die implizite Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v^i} L = \sum_j v^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial v^i} L + \sum_j X^j \frac{\partial^2}{\partial v^j \partial v^i} L$$

in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \\
 &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial v^j} L - \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} L
 \end{aligned}$$

und es drängt sich auf $\omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) := -\frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} L$ und

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) := \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial v^i} L - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial v^j} L.$$

zu setzen.

In den lokalen Koordinaten $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ ist also ω gegeben durch:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} \right) dx^i \otimes dx^j \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dx^i \otimes dv^j - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dv^i \otimes dx^j\end{aligned}$$

Es zeigt sich also, daß die Bilinearform ω schief-symmetrisch ist, und somit eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(TQ)$ darstellt. Unter Verwendung von $du^i \wedge du^j := du^i \otimes du^j - du^j \otimes du^i$ ist sie in lokalen Koordinaten durch

$$\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dx^i \wedge dv^j$$

gegeben. Sie ist sogar exakt, denn die 1-Form

$$\vartheta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i \in \Omega^1(TQ)$$

hat als äußere Ableitung $d\vartheta = -\omega$.

Allerdings haben wir noch nicht überprüft, ob ω und ϑ wirklich Koordinaten-unabhängig definiert sind. Wir werden auch das in [45.7](#) nachholen.

Für jeden Spray $X : TQ \rightarrow T^2Q$ ist

$$\vartheta X = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i \right) \left(\sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j(x, v) \frac{\partial}{\partial v^j} \right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i = A.$$

Global läßt sich die definierende implizite Gleichung für das Lagrange Vektorfeld X als

$$i_X \omega = dE$$

schreiben, wobei i der Einsetz-Operator $(i_X \omega)(Y) := \omega(X, Y)$ ist.

Leider hängen diese Differentialformen aber von L ab, und wir schreiben besser $\omega_L := \omega$, $\vartheta_L := \vartheta$.

45.7 Hamilton-Formalismus

Um diese Abhängigkeit der Differentialformen ω_L und ϑ_L von der Lagrange-Funktion L loszuwerden, wollen wir neue Koordinaten einführen. Es drängen sich natürlich die partiellen Ableitungen $p_i := \frac{\partial L}{\partial v^i}$ auf. Die Koordinaten x^i in der Basis-Mannigfaltigkeit benennen wir bloß um in $q^i := x^i$.

Die Form ϑ_L ist dann in den neuen Koordinaten gegeben durch

$$\vartheta_0 := \sum_{i=1}^n p_i dq^i$$

und ihre äußere Ableitung $-\omega_0 := d\vartheta_0$ durch

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

Wir haben aber das Problem, ob die q^i und p_i wirklich Koordinaten einer Mannigfaltigkeit $(TQ?)$ sind. Dazu benötigen wir einerseits, daß die $\frac{\partial p_i}{\partial v^j} := \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}$ eine invertierbare Matrix bilden und andererseits müssen wir den Koordinatenwechsel

bestimmen. Seien dazu $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ andere Koordinaten auf Q , so gilt für die Basen von TQ

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

und für die Komponenten v^j bezüglich dieser Basen

$$v^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \bar{v}^i.$$

Weiters ist

$$\frac{\partial v^j}{\partial \bar{v}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} \left(\sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \bar{v}^k \right) = \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{v}^k}{\partial \bar{v}^i} = \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \delta_i^k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}.$$

Somit gilt für die neuen Koordinaten:

$$\bar{p}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} L = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial \bar{v}^i} \frac{\partial}{\partial v^k} L = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} p_k$$

Dies ist nicht das richtige Transformationsverhalten für Punkte im Tangentialraum. Vergleichen wir es aber mit den Koordinaten-Wechsel im Kotangentialbündel T^*Q der Komponenten $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ bezüglich der Basis $(dx^1, \dots, dx^n)$ (siehe [31.5](#)):

$$dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j \quad \text{und} \quad \bar{\eta}_j = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \eta_i,$$

so zeigt sich, daß $(q^1, \dots; p_1, \dots)$ gerade die üblichen Koordinaten eines Punktes des Kotangentialbündels T^*Q sind. Der Übergang von den Koordinaten $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ am Tangentialbündel TQ zu den Koordinaten $(q^1, \dots; p_1, \dots)$ am Kotangentialbündel T^*Q ist gerade durch die Faserableitung $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$ gegeben, welche bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ und $(dx^1, \dots, dx^n)$ nach [45.4](#) die Darstellung $(d_f L)_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ hat, also:

$$[d_f L] : (x^1, \dots; v^1, \dots) \mapsto (q^1, \dots; p_1, \dots) = \left(x^1, \dots; \frac{\partial L}{\partial v^1}, \dots \right).$$

Wir zeigen nun, daß die kanonische 1-Form ϑ_0 wirklich Koordinaten-unabhängig ist und damit auch $\omega_0 = -d\vartheta_0$:

Die beiden Abbildungen $\pi_Q^* : TT^*Q \rightarrow TQ$ und $\pi_{T^*Q} : TT^*Q \rightarrow T^*Q$ welche lokal gegeben sind durch $(q, p, v, \rho) \mapsto (q, v)$ und $(q, p, v, \rho) \mapsto (q, p)$ definieren eine Abbildung $(\pi_{T^*Q}, \pi_Q^*) : TT^*Q \rightarrow T^*Q \times_Q TQ := \{(\alpha, \xi) : \pi^*(\alpha) = \pi(\xi)\}$. Zusammengesetzt mit der Evaluation $\text{ev} : T^*Q \times_Q TQ \rightarrow \mathbb{R}$, $(q, p; q, v) \mapsto \sum_i p_i v^i$ ist dies genau die kanonische 1-Form ϑ_0 , denn

$$\sum_i p_i v^i = \sum_i p_i dq^i(q, p, v, \rho) = \vartheta_0(q, p, v, \rho).$$

Man sieht nun sofort, daß

$$\vartheta_L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i = (d_f L)^* \left(\sum_i p_i dq^i \right) = (d_f L)^* \vartheta_0$$

und somit auch

$$\omega_L = -d\vartheta_L = -d(d_f L)^* \vartheta_0 = -(d_f L)^* d\vartheta_0 = (d_f L)^* \omega_0$$

ist, also sind auch diese Formen Koordinaten-unabhängig.

Der Energie $E = \sum_i v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht dann eine sogenannte HAMILTON-Funktion $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$H \circ d_f L := E$$

und dem Vektorfeld X_L entspricht nun das sogenannte HAMILTONSCHE Vektorfeld X_H , welches $d_f L$ -verwandt zu X_L definiert ist durch

$$X_H \circ d_f L := T(d_f L) \circ X_L.$$

Die Gleichung $i_{X_H} \omega_L = dE$ geht über in

$$i_{X_H} \omega_0 = dH, \text{ d.h. } \omega_0(X_H, Y) = dH \cdot Y \text{ für alle } Y.$$

Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} i_{X_H} \omega_0(T_x(d_f L)\xi) &= \omega_0\left((X_H)_{(d_f L)(x)}, T_x(d_f L)\xi\right) \\ &= \omega_0\left(T_x(d_f L)X_L, T_x(d_f L)\xi\right) = \omega_L(X_L, \xi) \\ &= (i_{X_L} \omega_L)(\xi) = dE(\xi) = d(H \circ d_f L)(\xi) \\ &= dH_{(d_f L)(x)} \cdot T_x(d_f L) \cdot \xi, \end{aligned}$$

wobei $T_x(d_f L)\xi$ alle Tangentialvektoren in $T_{(d_f L)(x)}^* Q$ durchläuft.

Bezüglich der Koordinaten (q^i, p_i) ist $X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$.
Denn $\omega_0 = \sum_i dq^i \wedge dp_i$ und sei $X_H = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i &= dH = i_{X_H} \omega_0 \\ &= \sum_{i,j} a^i i_{\frac{\partial}{\partial q^j}} (dq^j \wedge dp_j) + \sum_{i,j} b^i i_{\frac{\partial}{\partial p_i}} (dq^j \wedge dp_j) \\ &= \sum_i a^i dp_i - \sum_i b^i dq^i \end{aligned}$$

und ein Koeffizienten-Vergleich liefert $a^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ und $b^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$.

Die Integralkurven $t \mapsto (q(t), p(t))$ von X_H sind also die Lösungen von

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Da die Integral-Kurven von X_H die Ableitung von Kurven in der Basis Q sind und die Basiskoordinaten einander entsprechen, sind die Basiskurven für X_H und X_L die selben.

Es ist $A = \vartheta_0(X_H) \circ d_f L$:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(X_H) \circ d_f L &= \text{ev} \circ (\pi_{T^*Q}, T\pi_Q^*) \circ X_H \circ d_f L = \text{ev} \circ (\text{id} \circ d_f L, T\pi_Q^* \circ T(d_f L) \circ X_L) \\ &= \text{ev} \circ (d_f L, T(\pi_Q^* \circ d_f L) \circ X_L) = \text{ev} \circ (d_f L, T\pi_Q \circ X_L) \\ &= \text{ev} \circ (d_f L, \text{id}_{TQ}) = A \end{aligned}$$

oder für $\xi \in TQ$

$$\begin{aligned} (\vartheta_0(X_H) \circ d_f L)(\xi) &= \vartheta_0|_{d_f L \cdot \xi}(X_H|_{d_f L \cdot \xi}) = \vartheta_0|_{d_f L \cdot \xi}(T(d_f L)(X_L|_\xi)) \\ &= (d_f L)^*(\vartheta_0)(X_L|_\xi) = \vartheta_L(X_L|_\xi) = A(\xi) \end{aligned}$$

Wir haben als Vorteile der Hamilton-Mechanik, daß die Zeitentwicklung beschreibende Objekt eine reell-wertige Funktion $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist die gleichzeitig auch eine Bewegungsinvariante darstellt und das zugehörige (Hamiltonsche) Vektorfeld X_H sich auf einfache Weise aus $i_{X_H} \omega = dH$ berechnen läßt.

Hamilton-Mechanismus auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Riemann-Metrik auf Q und $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ die Lagrange-Funktion, die durch ein Potential $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge $L(v) := \frac{1}{2}\langle v, v \rangle - U(\pi(v))$ gegeben ist. Dann ist $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$ die Abbildung $\sharp : w \mapsto \langle w, \cdot \rangle$ und $A(v) = \langle v, v \rangle$. Also ist $E = A - L = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle + U(\pi(v))$. Ist insbesondere $U = 0$, so ist $A = 2E = 2L$ und die Hamilton-Funktion $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann durch $H(\eta) = \frac{1}{2}\langle \eta^\flat, \eta^\flat \rangle$ gegeben, d.h. in Koordinaten durch $H(\sum_i \eta_i dx^i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{i,j} \eta_i \eta_j$.

45.9 Legendre-Transformation

Um den Hamilton-Formalismus auf T^*Q zurück in den Lagrange Formalismus auf TQ zu übersetzen, benötigen wir eine Beschreibung der Inversen der Legendre-Transformation $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$ ausschließlich durch die Hamilton-Funktion H .

Es ist $d_f H \circ d_f L = \delta : TQ \rightarrow T^{**}Q$ der kanonische Isomorphismus:

Um dies zu sehen sei $\xi \in T_x Q$ und $\eta \in (T_x Q)^*$. Sei $\xi_t \in T_x Q$ so, daß $d_f L \cdot \xi_t = d_f L \cdot \xi + t \eta \in (T_x Q)^*$, also $\xi_0 = \xi$ und $\eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d_f L \cdot \xi + t \eta) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_f L \cdot \xi_t$. Dann ist einerseits

$$\begin{aligned} (d_f H \circ d_f L)(\xi)(\eta) &= d_f H(d_f L \cdot \xi)(\eta) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(d_f L \cdot \xi + t \eta) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(d_f L \cdot \xi_t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\xi_t) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (A - L)(\xi_t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_f L(\xi_t) \cdot \xi_t - L(\xi_t) \\ &= \left(T(d_f L)(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0 + d_f L(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \right) - d_f L(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \\ &= T(d_f L)(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0 \end{aligned}$$

und andererseits auch

$$\delta(\xi)(\eta) = \eta(\xi_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d_f L \cdot \xi_t)(\xi_0) = T(d_f L)(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0$$

Unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit von $d_f H$ können wir somit

$$\begin{aligned} E &:= (d_f H^{-1})^*(H), \\ A &:= (d_f H^{-1})^*(G) \text{ wobei } G := \vartheta_0(X_H), \\ L &:= A - E \text{ und} \\ X_L &:= (d_f H^{-1})^*(X_H) \end{aligned}$$

zurückgewinnen.

45.8 Symplektische Mechanik

Allgemeiner betrachtet man anstelle von T^*Q nun SYMPLEKTISCHE MANNIGFALTIGKEITEN M , d.h. Mannigfaltigkeiten zusammen mit einer sogenannten SYMPLEKTISCHE FORM ω , d.h. einer nicht-degenerierten geschlossenen 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$. Wir haben in [72, 14.9] gezeigt, daß solch eine Mannigfaltigkeit gerade-dimensional sein muß, und wir werden in [50.39] weiters zeigen, daß man lokal immer Koordinaten $(q^1, \dots, p_1, \dots)$ wählen kann, so daß $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$ ist. Das n -fache wedge-Produkt von ω definiert eine Volumsform

$$\text{vol}_\omega := \omega \wedge \dots \wedge \omega$$

auf M . Insbesondere ist M orientiert. Sei $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (eine sogenannte HAMILTON-FUNKTION), so bezeichnet man mit X_H das sogenannte HAMILTONSCHE VEKTORFELD, welches durch die implizite Gleichung

$$i_{X_H}\omega = dH$$

gegeben ist. In lokalen Koordinaten ist X_H durch

$$X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

gegeben.

Die Hamilton-Funktion H ist konstant längs der Integral-Kurven des Hamilton-Vektorfelds X_H :

Sei $t \mapsto x(t)$ eine Integralkurve, d.h. $x : \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$ mit $\dot{x}(t) = X_H(x(t))$. Dann ist

$$\begin{aligned} (H \circ x)(t) &= dH_{x(t)}(\dot{x}(t)) = i_{X_H}\omega_{x(t)}(\dot{x}(t)) \\ &= \omega(X_H(x(t)), \dot{x}(t)) = \omega(X_H(x(t)), X_H(x(t))) = 0, \end{aligned}$$

also $H \circ x$ konstant.

Der Fluß Fl_t des Vektorfelds X_H ist ein Symplektomorphismus, d.h. läßt die symplektische Form ω invariant und folglich auch die symplektische Volumsform $\omega^m = \text{vol}_\omega$, d.h.

$$\left(\text{Fl}_t^{X_H}\right)^* \text{vol}_\omega = \text{vol}_\omega.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{Fl}_t)^*\omega &= (\text{Fl}_t^*) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s)^*\omega = (\text{Fl}_t^*)\mathcal{L}_{X_H}\omega \\ &= (\text{Fl}_t^*)(i_{X_H}d\omega + di_{X_H}\omega) = (\text{Fl}_t^*)(i_{X_H}0 + ddH) = 0, \end{aligned}$$

Also ist $(\text{Fl}_t)^*\omega$ konstant gleich $(\text{Fl}_0)^*\omega = \omega$.

Nicht jedes Vektorfeld X auf M ist ein Hamiltonsches Vektorfeld. Um eines zu sein muß wieder eine lokale (Integrabilitäts-)Bedingung $\mathcal{L}_X\omega = 0$ für X erfüllt sein, sowie eine globale (kohomologische) Bedingung $H^1(M) = 0$ an M , siehe 50.40.

VII. Integration

In diesem Kapitel entwickeln wir die Integration auf orientierten Mannigfaltigkeiten. Die integrierbaren Objekte sind dabei die Differentialformen maximalen Grades. Wir beweisen den allgemeinen Satz von Stokes und führen dafür auch Mannigfaltigkeiten mit Rand ein. Im Fall einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit haben wir eine ausgezeichnete Form maximalen Grades, die Volumsform. Damit sind wir in der Lage auch Funktionen zu integrieren und führt zu den Green'schen Formeln. Schließlich folgt noch ein Abschnitt über den Laplace-Beltrami Operator, wo wir den Satz von Hodge über harmonische Formen beweisen.

46. Orientierbarkeit

Um Integrationen auf Mannigfaltigkeiten durchführen zu können benötigen wir einen Orientierungsbegriff: Man beachte etwa die Formel $\int_a^b f = -\int_b^a f$ für das gewöhnliche Riemann-Integral über ein Intervall $[a, b]$.

46.1 Definition (Orientierbarkeit)

Eine Mannigfaltigkeit M heißt ORIENTIERBAR $:\Leftrightarrow$ es existiert ein kompatibler Atlas $\mathcal{A}$, sodaß $(M, \mathcal{A})$ im Sinne von [72, 34.3] orientiert ist.

Ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ heißt ORIENTIERBAR $:\Leftrightarrow$ es existiert ein Vektorbündelatlas $\mathcal{A}$, dessen Transitionsfunktionen Werte in $GL_+(\mathbb{R}^n) := \{T \in GL(n) : \det(T) > 0\}$ haben.

46.2 Proposition (Orientierbare Vektorbündel).

Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Das Vektorbündel $E \rightarrow M$ ist orientierbar.
2. Auf jeder Faser E_x kann eine Orientierung gewählt werden und dazu ein Vektorbündelatlas, dessen Vektorbündelkarten faserweise orientierungserhaltend sind.
3. Auf jeder Faser E_x kann eine Orientierung gewählt werden, sodaß jede Vektorbündelkarte mit zusammenhängender Domäne entweder überall faserweise orientierungserhaltend oder überall orientierungsvertauschend ist.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (3): Sei also $\mathcal{A}$ ein Vektorbündelatlas, dessen Transitionsfunktionen faserweise orientierungserhaltend sind. Wir definieren eine Orientierung auf E_x , indem wir für irgendeine VB-Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ um x die induzierte Orientierung vom $\mathbb{R}^k$ nehmen.

Das ist wohldefiniert, denn würden φ, φ' auf E_x verschiedene Orientierungen induzieren, so wäre $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ bei x orientierungsvertauschend. $\mathcal{A}$ ist also ein VB-Atlas, der aus faserweise orientierungserhaltenden Karten besteht.

Sei ψ irgendeine beliebige VB-Karte um x mit zusammenhängender Domäne, dann ist zu zeigen, daß ψ lokal um x orientierungserhaltenden bzw. vertauschend ist. Sei also ψ_x orientierungserhaltend bzw. vertauschend. Die Transitionsfunktion ψ zu φ hat Werte in $GL(\mathbb{R}^k)$, in x hat sie einen Wert in GL_+ bzw. GL_- . Also hat sie lokal Werte in der offenen Menge GL_+ bzw. GL_- , und damit ist ψ lokal orientierungserhaltenden bzw. vertauschend.

(3) $\Rightarrow$ (2) ist klar.

(2) $\Rightarrow$ (1) Der in (2) geforderte Atlas hat faserweise orientierungserhaltende Transitionsfunktionen. (Diese sind faserweise Zusammensetzungen von orientierungserhaltenden Vektorraumisomorphismen.) $\square$

46.3 Lemma (Orientierbare Mannigfaltigkeiten).

M ist orientierbare Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow TM \rightarrow M$ ist orientierbares Vektorbündel.

Beweis. ($\Rightarrow$) Die Transitionsfunktionen des durch M induzierten Vektorbündelatlas auf $TM \rightarrow M$ sind genau die Ableitungen der Kartenwechsel für M .

($\Leftarrow$) Betrachte den von den Karten auf M induzierten VB-Atlas auf $TM \rightarrow M$ und wähle auf den Fasern von TM eine Orientierung wie in Punkt (3) der Proposition 46.2: Ist φ' eine durch eine Karte φ von M induzierte Vektorbündelkarte von $TM \rightarrow M$, die orientierungsvertauschend ist, so ersetze φ durch eine umparametrisierte Karte $\psi := \varphi \circ j$, mit $j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$j := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Der so erhaltene Atlas auf M hat nur orientierungserhaltende Kartenwechsel, liefert also eine Orientierung auf M . $\square$

46.4 Beispiel

Sei G eine Lie-Gruppe, also eine Mannigfaltigkeit mit glatter Gruppenstruktur: Dann ist $TG \rightarrow G$ global ein triviales Vektorbündel (siehe 67.2) und da jedes triviale Vektorbündel orientierbar ist, sind $TG \rightarrow G$ und G selbst orientierbar.

46.5 Bemerkung

Sind alle Mannigfaltigkeiten M_i orientierbar, dann sind es klarerweise auch $\coprod M_i$ und $\coprod M_i$. Z.B. sind alle Tori, $T^n := (S^1)^n$, orientierbar, denn S^1 ist eine Lie-Gruppe.

Es gilt auch die Umkehrung, denn offene Teilmannigfaltigkeiten von orientierbaren Mannigfaltigkeiten sind offensichtlich orientierbar (also mit $\coprod_i M_i$ auch M_i) und falls $M \times N$ orientierbar und $N \neq \emptyset$ ist, dann wählen wir einen Punkt $y \in N$ und eine kontrahierbare (und somit orientierbare) Kartenumgebung V von y . Es ist dann $M \times V$ als offene Teilmannigfaltigkeit orientierbar und wir können $T_x M$ kohärent orientieren indem wir die Orientierung von $T_{(x,y)}(M \times V)$ und jene von $T_y V$ verwenden.

21.20 Definition (Transversale Abbildungen)

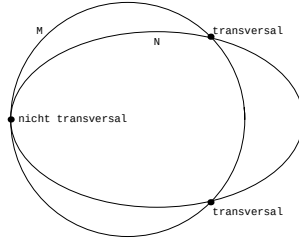
Zwei glatte Abbildungen $f_i : M_i \rightarrow N$ für $i \in \{1, 2\}$ zwischen Mannigfaltigkeiten heißen TRANSVERSAL falls $\text{Bild}(T_{x_1}f_1) + \text{Bild}(T_{x_2}f_2) = T_yN$ für alle $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ mit $f(x_1) = f(x_2) = y \in N$.

Ist f_2 die Inklusion einer Teilmannigfaltigkeit, so sagt man f_1 sei TRANSVERSAL zu M_2 in dieser Situation, d.h. wenn $\text{Bild}(T_x f_1) + T_y M_2 = T_y N$ für alle $x \in M_1$ mit $y := f(x) \in M_2$.

Sind beide f_i Inklusionen von Teilmannigfaltigkeiten, so sagt an diese schneiden einander TRANSVERSAL in dieser Situation, d.h. wenn $T_x M_1 + T_x M_2 = T_x N$ für alle $x \in M_1 \cap M_2$.

21.21 Beispiel

Sei $A := S^1$ in $N := \mathbb{R}^2$ und $M := \mathbb{R}$ sowie $f : M \rightarrow N$ wie im folgenden Bild.



Es ist bei Transversalität nicht gefordert, daß die Summe “direkt” ist; Z.B. ist die Identität $f : M := N \rightarrow N$ transversal zu jeder Teilmannigfaltigkeit $A \subseteq N$ mit $\text{Bild}(T_x f) \cap T_{f(x)} A = T_{f(x)} A \neq \{0\}$.

21.23 Satz (Pull-back von Mannigfaltigkeiten).

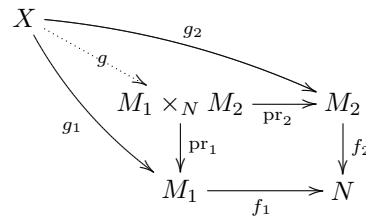
Für $i \in \{1, 2\}$ sei $f_i \in C^\infty(M_i, N)$ mit f_1 transversal zu f_2 .

Dann ist das PULL-BACK

$$M_1 \times_N M_2 := M_1 \times_{(f_1, N, f_2)} M_2 := \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 : f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$

eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$ und hat folgende universelle Eigenschaft:

Für jedes Paar glatter Abbildungen $g_i : X \rightarrow M_i$ mit $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ existiert eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $g : X \rightarrow M_1 \times_N M_2$ mit $\text{pr}_i \circ g = g_i$.



Beweis. Nach [72, 10.4] genügt es $M_1 \times_N M_2$ lokal durch eine reguläre Gleichung zu beschreiben. Sei also $(x_1^0, x_2^0) \in M_1 \times_N M_2$. Indem wir N lokal um $f_1(x_1^0) = f_2(x_2^0)$ durch eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ ersetzen, ist $f(x_1, x_2) := f_1(x_1) - f_2(x_2) = 0$ eine lokale Gleichung für das Pullback und diese ist regulär, denn $\text{Bild}(T_{(x_1, x_2)} f) = \text{Bild}(T_{x_1} f_1) + \text{Bild}(T_{x_2} f_2) = T_y N$.

Nach Definition gilt $f_1 \circ \text{pr}_1 = f_2 \circ \text{pr}_2$ auf $M_1 \times_N M_2$. Es ist $g = (g_1, g_2) : X \rightarrow M_1 \times M_2$ die einzige (glatte) Abbildung mit $\text{pr}_i \circ g = g_i$. Diese hat wegen $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ Werte in der Teilmannigfaltigkeit $M_1 \times_N M_2$ und ist somit auch dorthinein glatt. $\square$

21.22 Folgerung (Urbilder von Teilmannigfaltigkeiten).

Es sei $f \in C^\infty(M, N)$ transversal zu einer regulären Teilmannigfaltigkeit K von N . Dann ist $f^{-1}(K)$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von M .

Insbesondere ist der Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ zweier sich transversal schneidender Teilmannigfaltigkeiten M_1 und M_2 von N selbst eine Teilmannigfaltigkeit. $\square$

In [68, 24.46] wird ein Beispiel gegeben, das zeigt, daß dieser Satz “stärker” ist als [72, 21.14.2].

Man rufe sich die Begriffe Vektorbündel (siehe [69, 25.5]), Vektorbündel-Homomorphismus (siehe [69, 25.9]) und Teilvektorbündel (siehe [69, 26.1]) in Erinnerung.

26.2 Proposition (Bild eines Vektorbündelmonomorphismuses).

Seien $q : F \rightarrow M$, $p : E \rightarrow M$ zwei VB, $f : F \rightarrow E$ ein VB-Monomorphismus (d.h. ein faserweise injektiver VB-Homomorphismus) über id_M , d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow q & \swarrow p \\ & M & \end{array}$$

Dann gilt: $f(F)$ ist ein Teilvektorbündel von E und ist isomorph via f zu $F \rightarrow M$:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow[\cong]{f} & f(F) \\ & \searrow q & \swarrow p|_{f(F)} \\ & M & \end{array}$$

Beweis. Da lokal beide VB trivial sind, nehmen wir o.B.d.A. an, daß $F = M \times \mathbb{R}^n$ und $E = M \times \mathbb{R}^k$ ist, und somit $f : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ die Form $f(x, v) = (x, f_x(v))$ hat. Da $f_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv und linear ist, können wir weiters $f_{x_0} = \text{incl} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ annehmen. Sei pr eine Projektion $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu incl , dann ist $\text{pr} \circ \text{incl} = \text{id} \in GL(n)$. Die Abbildung $x \mapsto \text{pr} \circ f_x$ ist eine Abbildung von M nach $GL(n)$, die somit lokal um x_0 Werte in der offenen Teilmenge $GL(n) \subseteq L(n, n)$ hat. O.B.d.A. sei M diese Umgebung von x_0 . Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} & \xrightarrow{\psi} & M \times \mathbb{R}^k = E \\ \text{incl} \uparrow & & \uparrow \text{incl} \\ M \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi|_{(M \times \mathbb{R}^n)}} & f(F) \\ \text{id} \uparrow & & \uparrow f \\ M \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{id}} & M \times \mathbb{R}^n = F, \end{array}$$

wobei $\psi : (x; v, w) \mapsto (x; f_x(v) + (0, w))$ dann eine VB-Karte mit Umkehrabbildung

$$\psi^{-1} : (x, z) \mapsto \left(x, \left((\text{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \text{pr} \right)(z), z - f_x \left(\left((\text{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \text{pr} \right)(z) \right) \right)$$

ist und $f(F)$ entspricht $M \times \mathbb{R}^n$. Es ist also f bezüglich dieser Karte die Inklusion $M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^{k-n}$. $\square$

26.3 Folgerung (Tangentialbündel einer Teilmannigfaltigkeit).

Sei $\text{incl} : A \subseteq M$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Dann ist $TA \cong T\text{incl}(TA)$ ein Teilbündel vom $TM|_A$.

Beweis.

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{T\text{incl}} & TM|_A \\ \pi_A \searrow & & \swarrow \pi_M \\ & A & \end{array}$$

Man wende [26.2](#) auf den VB-Monomorphismus $T\text{incl}$ an. □

26.4 Folgerung (Tangentialbündel von Summen und Produkten).

Die folgenden Diagramme beschreiben Vektorbündel-Isomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} T(\prod M_i) & \xrightarrow{(T\text{pr}_i)_i} & \prod TM_i \\ \pi_{\prod M_i} \downarrow & & \downarrow \prod \pi_{M_i} \\ \prod M_i & \xlongequal{\quad} & \prod M_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T(\bigsqcup M_i) & \xleftarrow{\bigsqcup T\text{incl}_i} & \bigsqcup TM_i \\ \pi_{\bigsqcup M_i} \downarrow & & \downarrow \bigsqcup \pi_{M_i} \\ \bigsqcup M_i & \xlongequal{\quad} & \bigsqcup M_i \end{array} \quad \square$$

26.5 Lemma (Pull-back Bündel).

Sei $p : E \rightarrow M$ ein VB und $f : N \rightarrow M$ glatt. Dann existiert am Pull-back $f^*E := N \times_M E \rightarrow N$ eine eindeutig bestimmte VB-Struktur $f^*p := \text{pr}_1 : f^*E \rightarrow N$ für welche $p^*f := \text{pr}_2 : f^*E \rightarrow E$ ein faserweise bijektiver VB-Homomorphismus über f ist.

Dieses Bündel hat folgende universelle Eigenschaft: Für jedes andere VB $q : F \rightarrow N$ und VB-Homomorphismus $\bar{f} : F \rightarrow E$ über f existiert ein eindeutiger VB-Homomorphismus $f^+ : F \rightarrow f^*E$ über id_N , der das nebenstehende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccc} F & & \xrightarrow{\bar{f}} & & E \\ & \searrow f^+ & & \searrow p^*f & \\ & & f^*E & \xrightarrow{p^*f} & E \\ & \searrow q & \downarrow f^*p & & \downarrow p \\ & & N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Beachte, daß die Faser $(f^*E)_x := (f^*p)^{-1}(x)$ von $f^*p : f^*E \rightarrow N$ über x gegeben ist durch $\{(x, v) : v \in p^{-1}(f(x)) = E_{f(x)}\}$ und durch $p^*f = \text{pr}_2$ bijektiv auf $E_{f(x)}$ abgebildet wird, also $f^*E \cong \bigsqcup_{x \in M} E_{f(x)}$ als Reparametrisierung vermöge $f : N \rightarrow M$ des Bündels $E = \bigsqcup_{y \in N} E_y$ aufgefaßt werden kann.

Beweis. Da $p : E \rightarrow M$ submersiv ist, sind f und p transversal zueinander und somit $f^*E := N \times_M E$ eine Teilmannigfaltigkeit von $N \times E$ nach [21.23](#) mit der universellen Eigenschaft für glatte Abbildungen q und $\bar{f}$.

Um zu zeigen, daß $f^* : f^*E \rightarrow N$ ein Faserbündel ist müssen wir lokale Trivialisierungen finden. Sei dazu $\psi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U$ eine lokale Trivialisierung von $E|_U$. Beachte, daß das Pull-back einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ vermöge einer glatten Abbildung $p : E \rightarrow M$ gegeben ist durch $p^{-1}(U)$ wie ein direkter Nachweis der universellen Eigenschaft zeigt. Explizit ist der Diffeomorphismus $p^{-1}(U) \cong U \times_M E$ gegeben durch $z \mapsto (p(z), z)$ und $z \mapsto (u, z)$. Weiters ist das Pull-back eines trivialen Bündels $\text{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ längs $f : N \rightarrow M$ das triviale Bündel $\text{pr}_1 : N \times \mathbb{R}^k \rightarrow N$ wie ebenfalls ein direkter Nachweis der universellen Eigenschaft zeigt. Explizit ist der Diffeomorphismus $N \times \mathbb{R}^k \cong N \times_M (M \times \mathbb{R}^k)$ gegeben durch $(x, v) \mapsto (x, (f(x), v))$ und $(x, v) \mapsto (x, (y, v))$. Betrachten man ein Rechteck

welches horizontal in zwei Quadrate zerlegt ist wobei das rechte Quadrat ein Pull-backs ist, so ist das Rechteck genau dann ein Pull-back wenn es das linke Quadrat ist, wie eine einfache Diagramm-Jagd zeigt. Wir wenden dies nun an auf $\text{incl} \circ f$:

$$\begin{array}{ccccccc} f^*(E|_U) & \xleftarrow{\cong} & f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f \times \mathbb{R}^k} & U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\cong} & E|_U \hookrightarrow E \\ \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \\ f^{-1}(U) & \xlongequal{\quad} & f^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & U & \xlongequal{\quad} & U \hookrightarrow M \end{array}$$

und auf $f \circ \text{incl}$:

$$\begin{array}{ccccc} f^*(E|_U) & \cong & (f^*E)|_{f^{-1}(U)} & \hookrightarrow & f^*E \longrightarrow E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ f^{-1}(U) & \hookrightarrow & N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Daß die so konstruierten Bündelkarten sowie p^*f und $\bar{f}$ faserweise linear sind entnimmt man ebenfalls diesen Diagrammen. $\square$

26.6 Lemma (Einschränkung als Pull-back).

Ist $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel und A eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von M , dann gilt $E|_A \cong \text{incl}^* E$.

Beweis. Klarerweise hat $p|_{p^{-1}(A)} : E|_A := p^{-1}(A) \rightarrow A$ die universelle Eigenschaft von Lemma 26.5, da $p^{-1}(A)$ reguläre Teilmannigfaltigkeit von E ist (p ist Submersion). Somit ist $E|_A$ zu $\text{incl}^*(E)$ isomorph. $\square$

26.7 Lemma (Exakte Vektorbündelsequenzen splitten).

Sei $E^0 \xrightarrow{i} E^1 \xrightarrow{p} E^2$ eine kurze exakte Sequenz von VB über einer parakompakten Mannigfaltigkeit M (d.h. i und p sind VB-Homomorphismen über id_M , i faserweise injektiv, p faserweise surjektiv und faserweise gelte: $\text{Bild}(i_x) = \text{Ker}(p_x)$). Dann gilt: $E^1 \cong E^0 \oplus E^2$.

Beweis. Nach 26.2 induziert $i : E^0 \rightarrow E^1$ einen Isomorphismus auf ein Teilvektorbündel, d.h. o.B.d.A. ist i die Inklusion eines Teilbündels. ist.

Wir konstruieren nun einen rechtsinversen Vektorbündelhomomorphismus $j : E^2 \rightarrow E^1$ zu $p : E^1 \rightarrow E^2$. Lokal ist $E^1|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$ und $E^2|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ für geeignete $m, k \in \mathbb{N}$. Unter dem ersten Isomorphismus entspricht E^0 den Teilbündel $U \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$ für ein $n \leq m$. Damit induziert die lokale Darstellung von p einen Isomorphismus $U \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ und dessen Inverse ist ein lokales Rechtsinverses zu p .

$$\begin{array}{ccccc} E^0 & \xrightarrow{i} & E^1 & \xrightarrow{p} & E^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ E^0|_U & \xrightarrow{i} & E^1|_U & \xrightarrow{p} & E^2|_U \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{U \times \text{incl}_1} & U \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\quad} & U \times \mathbb{R}^k \\ & & \nwarrow U \times \text{incl}_2 & & \uparrow \\ & & & & U \times \mathbb{R}^k \end{array}$$

Mittels einer Partition der 1, welche der Überdeckung mit diesen trivialisierenden Umgebungen U untergeordnet ist können wir diese lokalen Rechtsinverse verkleben und erhalten klarerweise ein Rechtsinverses $j : E^2 \rightarrow E^1$ zu p . Der Isomorphismus $E^0 \times_M E^2 \cong E^1$ ist dann durch $(z^0, z^2) \mapsto i(z^0) + j(z^2)$ gegeben und hat als Inverses $z \mapsto (i^{-1}(z - j(p(z))), p(z))$, denn $z - j(p(z)) \in \text{Ker}(p) = \text{Bild}(i)$. $\square$

Wir wollen nun das Tangentialbündel $\pi_E : TE \rightarrow E$ (des Totalraums eines) Vektorbündels $p : E \rightarrow M$ genauer bestimmen. Das Interesse daran ist insbesondere in

Hinblick auf $T^2M = T(TM)$ gegeben. Lokal ist E durch $M \times \mathbb{R}^k$ und damit TE durch $T(M \times \mathbb{R}^k) = TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ gegeben. Andererseits ist das Pull-back-Bündel $p^*(TM) = E \times_M TM$ lokal durch $TM \times \mathbb{R}^k$ und $p^*(E) = E \times_M E$ lokal durch $M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ gegeben. Somit ist TE lokal isomorph zu $p^*(TM) \times_E p^*(E)$. Um diese lokalen Isomorphismen zu globalen zu machen werden wir eine natürliche kurze exakte Sequenz $p^*(E) \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM)$ von Vektorbündeln über E konstruieren und darauf dann [26.7](#) anwenden.

26.8 Lemma (Tangentialbündel eines Vektorbündels).

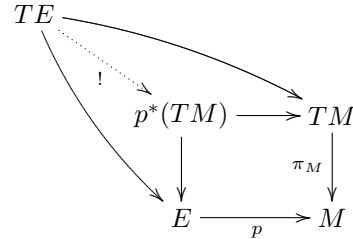
Sei $p : E \rightarrow M$ ein VB. Dann existiert eine kurze exakte Sequenz von VB über E :

$$E \times_M E = p^*(E) \xrightarrow{\text{vl}_E} TE \xrightarrow{(\pi, Tp)} p^*(TM) = E \times_M TM.$$

Nach [26.7](#) ist somit $TE \cong (E \times_M E) \times_E (E \times_M TM) = E \times_M E \times_M TM$, allerdings ist kein natürlicher Isomorphismus vorhanden.

Beweis.

Am einfachsten ist es einen Vektorbündelhomomorphismus $(\pi, Tp) : TE \rightarrow p^*(TM)$ in das Pull-back durch nebenstehendes Diagramm anzugeben. Lokal ist TE durch $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ und $p^*(TM)$ durch $TM \times \mathbb{R}^k$ sowie $Tp : TE \rightarrow TM$ durch $(\xi, v, w) \mapsto \xi$ gegeben. Somit ist (π, Tp) lokal durch $(\xi, v, w) \mapsto (\xi, v)$ beschrieben. Insbesondere ist (π, Tp) faserweise surjektiv.



Der faserweise Kern von (π, Tp) sind jene Vektoren, die durch Tp auf 0-Vektoren abgebildet werden, sollten also die Tangentialvektoren an Kurven in den Fasern von E sein. Deshalb definieren wir einen VB-Homomorphismus (den sogenannten VERTIKALEN LIFT) $\text{vl}_E : p^*(E) = E \times_M E \rightarrow TE$ durch $p^*(E) = E \times_M E \ni (v, w) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} v + tw \in TE$. Bezüglich der lokalen Beschreibungen $M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ von $p^*(E)$ und $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ von TE ist er durch $(x, v, w) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} (x, v + tw) = (0_x, v, w)$ gegeben. Faserweise ist er somit injektiv und es gilt

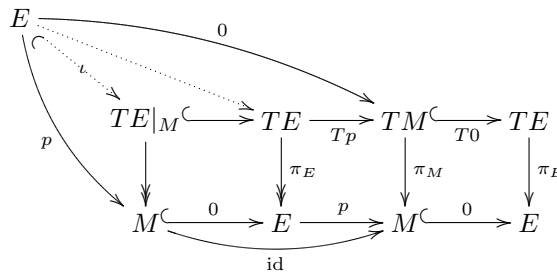
$$\begin{aligned} \text{Bild}(\text{vl}_E)_{(x,v)} &= \{(0_x, v; w) : w \in \mathbb{R}^k\} \\ &= \{(\xi_x, v, w) : (\xi_x, v) = 0_{(x,v)} = (0_x, v)\} = \text{Ker}((\pi, Tp)_{(x,v)}), \end{aligned}$$

also ist die Sequenz exakt. $\square$

26.9 Proposition.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Dann ist $TE|_M := 0^*(TE) \cong E \oplus TM$ (kanonisch) als Vektorbündel über M , wobei $0 : M \hookrightarrow E$ den Nullschnitt bezeichnet.

Beweis. Wir betrachten folgendes Diagramm:



Die obere punktierte Abbildung ist durch $v \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} t \cdot v$ gegeben und die diagonale Abbildung ι existiert wegen der Eigenschaft des Pullbacks. Nach Konstruktion ist

$Tp \circ \iota = 0$. Offensichtlich ist ι ein Vektorbündelmonomorphismus und $Tp|_{TE|_M}$ ein Vektorbündelepimorphismus, denn $Tp \circ T0 = T(p \circ 0) = T \text{id}_M = \text{id}_{TM}$.

Exaktheit von

$$0 \rightarrow E \rightarrow TE|_M \rightarrow TM \rightarrow 0$$

folgt, denn lokal wird E durch $M \times \mathbb{R}^k$, sowie TE durch $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ und $TE|_M$ durch $TM \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$ beschrieben. Weiters ist ι lokal durch $(x, v) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0}(x, tv) = (0_x, 0, v)$ und Tp auf $TE|_M$ durch $(\xi, 0, v) \mapsto \xi$ gegeben.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\iota} & TE|_M & \xrightarrow{Tp|_{TE|_M}} & TM \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ M \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\text{incl}_{1,3}} & TM \times \{0\} \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\text{pr}_1} & TM \\ & & (x, v) \mapsto & (0_x, 0, v) & \square \end{array}$$

26.12 Proposition. Linearer Zusammenhang eines Vektorbündels.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Ein Isomorphismus $TE \cong p^*(E) \times_E p^*(TM)$ wird äquivalent durch jede der folgenden Abbildungen beschrieben:

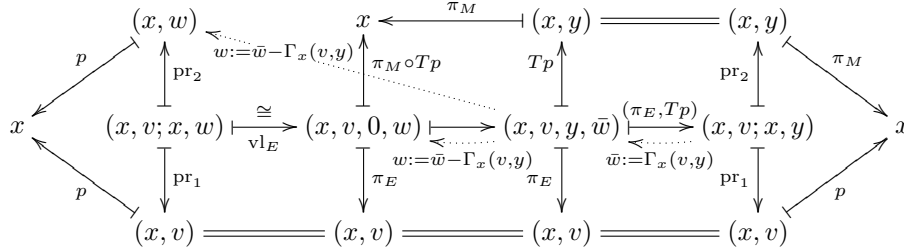
1. Ein HORIZONTALER LIFT, d.h. ein rechtsverser Vektorbündelhomomorphismus $C : p^*(TM) \rightarrow TE$ über E zu $(\pi, Tp) : TE \rightarrow p^*(TM) = E \times_M TM$ der auch Faser-linear über TM ist.
2. Eine KONNEXION (engl. LINEAR CONNECTION) $\Phi : TE \rightarrow VE := p^*(E)$ Faser-linear über E (d.h. $\Phi \in \Omega^1(E; VE)$) und auch über $\pi_M : TM \rightarrow M$ mit $\text{Bild } \Phi = VE$ und $\Phi|_{\text{Bild } \Phi} = \text{id}$.
3. Einen KONNEKTOR, d.h. ein Vektorbündelhomomorphismus $K : TE \rightarrow E$ über p und über π_M mit $K \circ \text{vl}_E = \text{pr}_2 : E \times_M E \rightarrow TE \rightarrow E$.
4. Eine KOVARIANTE ABLEITUNG $\nabla : \Omega^0(M; E) = \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) = \Omega^1(M; E)$ mit $\nabla(f \cdot s) = f \cdot \nabla s + df \otimes s$ für alle $s \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. (Es kann ∇ mit der gleichen Formel wie in [42.7](#) zu einer sogenannten ÄUSSEREN KOVARIANTEN ABLEITUNG $\Omega^*(M; E) \rightarrow \Omega^{*+1}(M; E)$ erweitert werden, siehe z.B. [\[73, 37.29\]](#)).
5. Eine KOVARIANTE ABLEITUNG $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, welche $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear in der ersten und $\mathbb{R}$ -linear in der zweiten Variable ist und $\nabla_X(f \cdot s) = f \cdot \nabla_X s + X(f) \cdot s$ erfüllt für alle $s \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Beweis. Die Morphismen in [1](#)–[3](#) sind durch folgendes Diagramm beschrieben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & E & & M & \xleftarrow{\pi_M} & TM & \xlongequal{\quad} & TM & & \\ & & \uparrow \text{pr}_2 & & \uparrow \pi_M \circ Tp & & \uparrow Tp & & \uparrow \text{pr}_2 & & \\ M & \xleftarrow{p} & p^*(E) & \xrightarrow[\cong]{\quad} & VE & \xrightarrow[\Phi]{\quad} & TE & \xrightarrow[(\pi_E, Tp)]{C} & p^*(TM) & \xrightarrow{\pi_M} & M \\ & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi_E & & \downarrow \text{pr}_1 & & \\ & & E & \xlongequal{\quad} & E & \xlongequal{\quad} & E & \xlongequal{\quad} & E & & \end{array}$$

Bezüglich lokaler Trivialisierungen $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$, $TU \cong U \times \mathbb{R}^m$ und somit $T(E|_U) \cong (E|_U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \cong U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ haben die Abbildungen des

obigen Diagramms folgende Gestalt



wobei $\Gamma_x : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ bilinear und $x \mapsto \Gamma_x$ glatt ist.

(1 $\Leftrightarrow$ 2) Eine kurze exakte Sequenz $E^0 \xrightarrow{i} E^1 \xrightarrow{p} E^2$ splittet (d.h. $E^1 \cong E^0 \oplus E^2$) genau dann wenn p ein Rechtsinverses s , bzw. wenn i ein Linksinverses q besitzt: Die Verbindung zwischen s und q ist durch $q(z_1) = i^{-1}(z_1 - s(p(z_1)))$ und $s(p(z_2)) := z_2 - i(q(z_2))$ gegeben.

(2 $\Leftrightarrow$ 3) Da $i : p^*(E) \rightarrow TE$ ein VB-Isomorphismus auf das vertikale Bündel VE ist, ist eine Projektion $TE \rightarrow VE$ eindeutig durch ihre zweite Komponente $K : TE \xrightarrow{\Phi} VE \cong E \oplus E \xrightarrow{\text{pr}_2} E$ gegeben.

(3 $\Rightarrow$ 5) Mittels Konnektor $K : TE \rightarrow E$ erhalten wir zu $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$ einen Schnitt $\nabla_X s : M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{Ts} TE \xrightarrow{K} E$ von $p : E \rightarrow M$, da $p \circ \nabla_X s = p \circ K \circ Ts \circ X = \pi \circ Tp \circ Ts \circ X = \pi \circ T \text{id} \circ X = \pi \circ X = \text{id}$. Beachte, daß diese Formel auch Sinn macht, wenn $f : N \rightarrow M$ glatt ist, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $s \in \Gamma(f^*E)$, d.h. ein Schnitt längs f in E ist.

Bezüglich lokaler Trivialisierungen $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$, $TU \cong U \times \mathbb{R}^m$ und somit $T(E|_U) \cong (E|_U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \cong U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ hat ∇ folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \xi(x) &= (x, y(x)), \quad s(x) = (x, \bar{s}(x)), \\ Ts(x, y) &= (x, \bar{s}(x), y, \bar{s}'(x)(y)), \quad K(x, v, y, \bar{w}) = (x, \bar{w} - \Gamma_x(v, y)) \\ \nabla_\xi s(x) &= (K \circ Ts \circ \xi)(x) = K(x, \bar{s}(x), y(x), \bar{s}'(x)(y(x))) \\ &= (x, \bar{s}'(x)(y(x)) - \Gamma_x(\bar{s}(x), y(x))) \end{aligned}$$

(4 $\Leftrightarrow$ 5) Es ist $(\nabla s)(X_x) := (\nabla_X s)(x)$. Wegen der $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Linearität von $X \mapsto \nabla_X s$ wird dadurch $\nabla s \in \Omega^1(M; E)$ definiert.

(3 $\Leftrightarrow$ 4) Jeder nicht-vertikale Vektor $\sigma \in TE$ läßt sich schreiben als $\sigma = Ts \cdot \xi$ für gewisse $\xi \in T_x M$ und $s \in \Gamma(E)$ mit $x = \pi_M(Tp \cdot \sigma)$ und $s(x) = \pi_E(\xi) \in E_x$. Wegen $p \circ s = \text{id}$ ist dabei $\xi = Tp(Ts \cdot \xi) = Tp(\sigma)$ eindeutig bestimmt. Wir definieren $K(\sigma) := (\nabla s)(\xi) \in E_x \subseteq E$. Diese Definition hängt nicht von s ab: Aus der geforderten Produktregel folgt, daß ∇ ein lokaler Operator ist. Sei eine lokale Trivialisierung $U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U$ beschrieben durch $s_i : U \ni x \mapsto (x, e_i) \mapsto s_i(x) \in E_x$ also $s = \sum_i \bar{s}^i \cdot s_i$ lokal mit gewissen Koeffizienten $\bar{s}^i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann ist

$$\nabla s(\xi) = \nabla \left(\sum_i \bar{s}^i \cdot s_i \right) (\xi) = \sum_i \left(\bar{s}^i(x) \cdot \nabla s_i(\xi) + d\bar{s}^i(\xi) \cdot s_i(x) \right).$$

und hängt somit nur von $\bar{s}^i(x)$ und $d\bar{s}^i(\xi)$, also von $Ts \cdot \xi = \sigma$ ab. Wir erweitern K auf VE durch $K \circ \text{vl}_E = \text{pr}_2 : E \times_M E \cong VE \subseteq TE \rightarrow E$.

Bezüglich lokaler Trivialisierungen $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$, $TU \cong U \times \mathbb{R}^m$ und somit $T(E|_U) \cong (E|_U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \cong U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ hat $\nabla s(\xi)$ und damit K folgende

Gestalt:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= (x, v, y, w) = Ts \cdot \xi, \quad s(x) = (x, \bar{s}(x)), \quad \xi = (x, y), \\
 Ts(x, y) &= \left(x, \bar{s}(x), y, \bar{s}'(x)(y) \right), \quad \bar{s}'(x)(y) = \left((\bar{s}^1)'(x)(y), \dots, (\bar{s}^k)'(x)(y) \right) \\
 \Gamma_x(v, y) &:= - \sum_i v^i \cdot \nabla s_i(x, y) \in \mathbb{R}^k \text{ ist bilinear in } v \text{ und } y \\
 \nabla s(\xi) &= (x, -\Gamma_x(v, y) + \bar{s}'(x)(y)) \text{ nach obiger Formel} \\
 K(x, v, y, w) &= \nabla s(\xi) = (x, \bar{s}'(x)(y) - \Gamma_x(v, y)) = (x, w - \Gamma_x(v, y)). \quad \square
 \end{aligned}$$

26.10 Proposition.

Jedes Vektorbündel $p : E \rightarrow M$ ist isomorph zu einem Teilvektorbündels eines trivialen Bündels $M \times \mathbb{R}^s \rightarrow M$.

Beweis.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & M \times \mathbb{R}^s & & \\
 & & & & \nearrow & & \searrow \\
 E \hookrightarrow E \oplus TM & \xrightarrow[\cong]{\text{26.9}} & TE|_M & \hookrightarrow & TE & \xrightarrow{Tf} & \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \\
 \downarrow p & & \downarrow & & \downarrow \pi_E & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 M & \xlongequal{\quad} & M & \xrightarrow{0} & E & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^s
 \end{array}$$

Es sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$ eine Einbettung (oder auch nur eine Immersion) der Mannigfaltigkeit E in einen $\mathbb{R}^s$. Dann ist $Tf : TE \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündelmonomorphismus über $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$ und somit $Tf \circ \iota : E \hookrightarrow TE|_M \hookrightarrow TE \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s = (f \circ 0)^*(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$ ein Vektorbündelmonomorphismus über $M \rightarrow E \rightarrow \mathbb{R}^s$, also $(p, \text{pr}_2 \circ Tf \circ \iota) : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündelmonomorphismus über id_M . $\square$

Man kann zeigen (siehe [68, 26.22]), daß so ein Vektorbündelmonomorphismus bereits für $s = \dim(E)$ existiert.

26.21 Definition. Universelles Vektorbündel.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Faserdimension k (ein sogenanntes k -Ebenenbündel über M) und $f : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündel-Monomorphismus wie 26.10 über id_M . Daraus erhalten wir eine Abbildung $g : M \rightarrow G(k, s)$ mit Werten in der Grassmann-Mannigfaltigkeit der k -Ebenen im $\mathbb{R}^s$ indem wir x auf das Bild von $f_x : \mathbb{R}^k \cong E_x \rightarrow \mathbb{R}^s$ abbilden. Nun betrachten wir das UNIVERSELLE VEKTORBÜNDEL $E(k, s) \rightarrow G(k, s)$, wobei

$$E(k, s) := \{(\varepsilon, v) \in G(k, s) \times \mathbb{R}^s : v \in \varepsilon\}$$

und den Vektorbündelhomomorphismus

$$\gamma : E \rightarrow E(k, s), \quad v \mapsto (g(p(v)), f_{p(v)}(v)).$$

Damit ist $E \cong g^*(E(k, s))$ und g heißt KLASSIFIZIERENDE ABBILDUNG des Vektorbündels $p : E \rightarrow M$.

$$\begin{array}{ccc}
 & M \times \mathbb{R}^s & \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{R}^k \\
 & \nearrow f & \uparrow \text{pr}_2 \\
 E & \xrightarrow{\gamma} E(k, s) \hookrightarrow G(k, s) \times \mathbb{R}^s & \\
 \downarrow p & \downarrow & \downarrow \text{pr}_1 \\
 M & \xrightarrow{g} G(k, s) = G(k, s) &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} M \times \mathbb{R}^s & \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{R}^s \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 E_x & \xrightarrow{f_x} g(x) := f_x(E_x) &
 \end{array}$$

46.6 Bemerkungen

1. Sind 2 der folgenden 3 Vektorbündel orientierbar, so auch das dritte: $E_1 \rightarrow M$, $E_2 \rightarrow M$, $E_1 \oplus E_2 \rightarrow M$. Aus faserweisen Orientierungen zweier dieser Bündel läßt sich leicht eine Orientierung auf dem dritten konstruieren.
2. Sei $E_0 \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{p} E_2$ eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln. Falls zwei der Bündel orientierbar sind, so ist es auch das dritte (Benütze, daß jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündel nach [26.7](#) splittet, d.h. $E_1 \cong E_0 \oplus E_2$, und dann [1](#)).
3. Ist ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ orientierbar und $f : N \rightarrow M$ glatt, so ist auch das induzierte Bündel $f^*(E) \rightarrow N$ orientierbar (Wähle auf $(f^*(E))_x \cong E_{f(x)}$ die Orientierung von $E_{f(x)}$).
4. Sind 2 der folgenden 3 Objekte orientierbar, so auch das dritte: $E \rightarrow M$ als Vektorbündel, E als Mannigfaltigkeit, M als Mannigfaltigkeit (Benütze die kurze exakte Sequenz aus [26.8](#): $p^*(E) \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM)$, sowie die Tatsache, daß $E \rightarrow M$ das von $0 : M \rightarrow E$ induzierte Bündel zu $p^*(E) \rightarrow E$ und $TM \rightarrow M$ das von $0 : M \rightarrow E$ induzierte Bündel zu $p^*(TM) \rightarrow E$ ist, also M genau dann orientierbar ist, wenn $p^*(TM) \rightarrow E$ es ist, und E genau dann, wenn $p^*(E) \rightarrow E$ es ist).

$$\begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & p^*E & \longrightarrow & E \\
 \downarrow p & & \downarrow & & \downarrow p \\
 M & \xrightarrow{0} & E & \xrightarrow{p} & M \\
 & \searrow \text{id} & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 TM & \longrightarrow & p^*(TM) & \longrightarrow & TM \\
 \downarrow \pi_M & & \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 M & \xrightarrow{0} & E & \xrightarrow{p} & M \\
 & \searrow \text{id} & & &
 \end{array}$$

46.7 Beispiele

1. Vektorbündel mit eindimensionaler Faser sind genau dann orientierbar, falls sie trivial sind. Alle 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind orientierbar. Das Vektorbündel $\text{Möb} \rightarrow S^1$ ist nicht orientierbar, ebensowenig das Möbiusband als Mannigfaltigkeit nach Bemerkung [46.6.4](#).
2. Jedes komplexe Vektorbündel ist orientierbar, denn $GL(\mathbb{C}^n) \subseteq GL_+(\mathbb{R}^{2n})$ nach [72](#), [14.14](#) oder auch weil $GL(\mathbb{C}^n)$ zusammenhängend ist und die Orientierungserhaltende Identität enthält. Das Tangentialbündel einer komplexen Mannigfaltigkeit ist ein komplexes Vektorbündel und daher orientierbar. Somit ist also jede komplexe Mannigfaltigkeit selbst orientierbar.
3. Eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn eine komplexe Struktur existiert, siehe [19](#).

4. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einfach zusammenhängender Basismanigfaltigkeit M , dann ist das Vektorbündel $E \rightarrow M$ orientierbar, da wir längs Kurven in der Basis die Orientierung der Fasern fortsetzen können und diese nicht von der gewählten Kurve abhängt, da die Basis einfach zusammenhängend ist. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit orientierbar.

46.8 Lemma (Nullstellenmengen sind orientierbar).

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt, $y \in N$ und $\text{rang } T_x f = \dim N$ für alle $x \in f^{-1}(y)$. Falls M orientierbar ist, so auch die Mannigfaltigkeit $f^{-1}(y)$.

Beachte, daß dies nicht für f von konstantem Rang $r < n$ gilt: So ist das Möbiusband diffeomorph zum Urbild der 0 unter der Abbildung $f : (\varphi, v) \mapsto \langle \begin{pmatrix} -\sin(\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}, v \rangle \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}$ vom Volltorus $S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Rang 1, denn

$$\begin{aligned} f(x, y, u, w) &= f(\cos \varphi, \sin \varphi; u, w) \\ &= \left(u \sin^2 \frac{\varphi}{2} - w \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, -u \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + w \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1-\cos \varphi}{2} u - \frac{\sin \varphi}{2} w, -\frac{\sin \varphi}{2} u + \frac{1+\cos \varphi}{2} w \right) \\ &= \left(\frac{1-x}{2} u - \frac{y}{2} w, -\frac{y}{2} u + \frac{1+x}{2} w \right) \quad \text{und} \\ \det \begin{pmatrix} \frac{1-x}{2} & -\frac{y}{2} \\ -\frac{y}{2} & \frac{1+x}{2} \end{pmatrix} &= \frac{1 - (x^2 + y^2)}{4} = 0 \end{aligned}$$

Beweis. Indem wir N durch eine bei y zentrierte Karte V ersetzen und M durch die offene Teilmannigfaltigkeit $f^{-1}(U)$ können wir o.B.d.A. $N = \mathbb{R}^m$ und $y = 0$ annehmen. Es ist $A := f^{-1}(0)$ nach [72, 21.2] bzw. [72, 21.14.2] eine Teilmannigfaltigkeit von M mit $T_x A = \text{Ker}(T_x f)$. Folglich ist $TA \hookrightarrow TM|_A \rightarrow f^*(T\mathbb{R}^k)|_A$ eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündel über A . Da $TM \rightarrow M$ ein orientierbares und $T\mathbb{R}^k$ ein trivial Bündel ist, sind auch die Pullback-Bündel $TM|_A$ und $f^*(T\mathbb{R}^k)|_A$ orientierbar und somit auch $TA \rightarrow A$ nach [46.6.2], also ist A orientierbar. $\square$

46.9 Beispiele

1. Alle S^n sind orientierbar.
2. Alle kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$ sind orientierbar, siehe Klassifikationssatz [72, 9.2].
3. $\mathbb{P}^1 \cong S^1$ ist orientierbar. Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ enthält ein Möbiusband als offenen Teil, also ist sie nicht orientierbar. Allgemein gilt: $\mathbb{P}^n$ ist orientierbar $\Leftrightarrow n$ ungerade.
4. TM ist als Mannigfaltigkeit immer orientierbar, als Vektorbündel hingegen nur, wenn M als Mannigfaltigkeit orientierbar ist:

Für jedes beliebige Vektorbündel $p : E \rightarrow M$ haben wir nach [26.8] die kurze exakte Sequenz $p^*(E) \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM)$. Im Falle $E = TM$ und $p = \pi_M$ reduziert sich das auf $\pi^*(TM) \rightarrow T(TM) \rightarrow \pi^*(TM)$, also ist $T^2M \rightarrow TM$ als Vektorbündel isomorph zu $\pi^*(TM) \oplus \pi^*(TM)$. Die Summe gleicher Bündel ist aber immer orientierbar: Wählt man auf den Fasern der beiden Summanden die gleiche Orientierung, so ergibt das auf der Summe offenbar eine Orientierung, die, unabhängig von der jeweiligen Wahl ist.

46.10 Die Orientierungsüberlagerung

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $M^{or} := \{(p, \omega) : p \in M, \omega \text{ Orientierung auf } T_p M\}$. Wir definieren einen Atlas $\mathcal{A}$ für M^{or} mittels Karten φ für M durch $\varphi_{\pm} : \text{Dom } \varphi \rightarrow M^{or}$, $x \mapsto (\varphi(x), \pm\omega)$ wobei ω die Orientierung ist, welche unter $T\varphi$ aus der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ entsteht, ist. Es ist $\mathcal{A}$ ein C^∞ -Atlas auf M^{or} , denn seien φ und ψ Karten auf M , dann folgt $\varphi_+^{-1} \circ \psi_+$ (und genauso $\varphi_+^{-1} \circ \psi_-$, etc.) ist genau auf der offenen Menge $\{x \in \mathbb{R}^m : (\varphi^{-1} \circ \psi)'(x) \text{ ist orientierungserhaltend (vertauschend)}\}$ definiert und stimmt dort mit $\varphi^{-1} \circ \psi$ überein:

$$\begin{aligned} & x \in \text{Dom}(\varphi_+^{-1} \circ \psi_+) \\ \Leftrightarrow & x \in \text{Dom}(\varphi^{-1} \circ \psi) \text{ s.d. } T_x \psi \text{ und } T_{(\varphi^{-1} \circ \psi)(x)} \varphi \text{ die gleiche Orientierung induzieren} \\ \Leftrightarrow & x \in \text{Dom}(\varphi^{-1} \circ \psi) \text{ s.d. } (\varphi^{-1} \circ \psi)'(x) \text{ orientierungserhaltend ist.} \end{aligned}$$

Es ist $\text{pr}_1 : M^{or} \rightarrow M$ offensichtlich eine zweiblättrige Überlagerung von M , die sogenannte ORIENTIERUNGSÜBERLAGERUNG von M .

Die Mannigfaltigkeit M^{or} ist orientiert, wobei die Orientierung auf $T_{(p, \omega)} M^{or} \cong T_p M$ gerade ω ist.

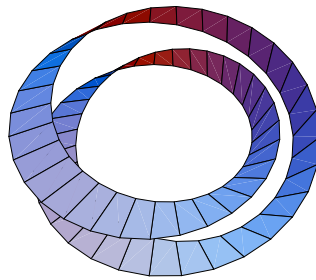
Es gilt außerdem: M ist orientierbar $\Leftrightarrow M^{or} \cong M \times \{-1, 1\}$, denn:

($\Leftarrow$) Die Einbettung $M \hookrightarrow M \times \{-1, 1\} \cong M^{or}$ ist offen also ist mit M^{or} auch M orientierbar.

($\Rightarrow$) Ist M orientierbar, dann gibt es auf $T_p M$ eine ausgezeichnete Orientierung ω_p . Somit liefert $(p, \pm 1) \mapsto (p, \pm \omega_p)$ eine Trivialisierung $M \times \{-1, 1\} \cong M^{or}$.

46.11 Beispiel

(1) Ein zweifach verdrehtes Möbiusband ist die Orientierungsüberlagerung des Möbiusbandes.



(2) $S^n = (\mathbb{P}^n)^{or}$ für n ungerade.

47. Integration und der Satz von Stokes

47.1 Proposition (Pull-back von Volumsformen).

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt, $\dim M = m = \dim N$ und $(x^1, \dots, x^m)$ lokale Koordinaten

von M und $(y^1, \dots, y^m)$ solche von N . Dann gilt:

$$f^*(g \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = (g \circ f) \cdot \det \left(\left(\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i} \right)_{i,j=1}^m \right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Beweis. Als m -Form ist $f^*(g \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = h \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ für eine glatte Funktion h . Durch Anwenden auf $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ erhalten wir (siehe [42.2](#)):

$$\begin{aligned} h &= f^*(g \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= f^*(g) \cdot (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left(Tf \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, Tf \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= (g \circ f) \cdot (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left(\sum_{i_1} \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \dots, \sum_{i_m} \frac{\partial f^{i_m}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^{i_m}} \right) \\ &= (g \circ f) \cdot \sum_{i_1, \dots, i_m} (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left(\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{i_m}} \right) \frac{\partial(y^{i_1} \circ f)}{\partial x^1} \dots \frac{\partial(y^{i_m} \circ f)}{\partial x^m} \\ &= (g \circ f) \cdot \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^m \frac{\partial(y^{\pi(i)} \circ f)}{\partial x^i} = (g \circ f) \cdot \det \left(\left(\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i} \right)_{i,j=1}^m \right) \quad \square \end{aligned}$$

47.2 Bemerkung

Speziell für $f = \operatorname{id}$ und $g = 1$ folgt aus [47.1](#):

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m = \det \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

47.3 Proposition.

M ist orientierbar $\Leftrightarrow \Lambda^{\dim M} T^*M$ ist als Vektorbündel trivial.

Beweis. Es sei $m := \dim M$.

($\Rightarrow$) Es genügt die Existenz eines nirgends verschwindenden Schnittes $\omega \in \Omega^m(M)$ zu zeigen (Ein solcher liefert dann unmittelbar eine globale Trivialisierung $\Phi : (x, t) \mapsto t \cdot \omega_x$ des eindimensionalen Bündels $\Lambda^m T^*M \rightarrow M$). Auf dem Bild U jeder Orientierungserhaltenden Karte $(u^1, \dots, u^m)^{-1}$ können wir ein $\omega_U \in \Omega^m(U)$ durch $\omega_U(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}) := 1$ definieren. Es ist dann $\omega_U(v_1, \dots, v_m) > 0$ für jede positiv orientierte Basis. Wir wählen eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von M mit solchen offenen Mengen U und zugehörigen ω_U , und sei $\{f_U : U \in \mathcal{U}\}$ eine untergeordnete Partition der Eins. Wir definieren $\omega \in \Omega^m(M)$ durch $\omega := \sum_U f_U \cdot \omega_U \in \Omega^m(M)$. Dann ist $\omega_x(v_1, \dots, v_m) > 0$ für jede positiv orientierte Basis von $T_x M$, also insbesondere $\omega_x \neq 0$.

($\Leftarrow$) Sei $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^m T^*M$ ein globaler VB-Isomorphismus, dann ist $\omega := \Phi(\cdot \times \{1\})$ eine nirgends verschwindende m -Form. Wir orientieren $T_x M$ indem wir eine Basis $(v_i)_{i=1}^m$ von $T_x M$ positiv orientiert nennen, falls $\omega_x(v_1, \dots, v_m) > 0$ ist. Sei $(u^1, \dots, u^m)^{-1}$ eine Karte mit zusammenhängender Domäne. Da ω nirgends verschwindet ist $\omega_p(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}) \neq 0$ und somit $\omega_p(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}) \neq 0$ überall positiv oder überall negativ, also ist $TM \rightarrow M$ als Vektorbündel orientierbar nach [46.2.3](#) und damit auch M als Mannigfaltigkeit. $\square$

47.4 Motivation

Wir können Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ nicht so ohne weiteres über eine Mannigfaltigkeit integrieren. Sehen wir uns dazu den einfachsten Fall der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten an. Wenn M ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit Grenzen a und b ist, dann mißt das übliche Riemann-Integral $\int_M f = \int_a^b f$ die orientierte Fläche unterhalb des Graphen von f . Damit wir das Integral für eine beliebige (1-dimensionale) Mannigfaltigkeit M definieren können, brauchen auf jeden Fall eine Orientierung auf M . In diesem Kapitel seien also alle Mannigfaltigkeiten orientiert. Weiters müssen wir aber auch (infinitesimale) Längen (bzw. Volumina) auf M messen können. Falls M eine Riemann-Mannigfaltigkeit ist, dann können wir das mittels der Volumensform vol_M tun, im eindimensionalen Riemann'schen Fall also mit dem Bogenelement.

Auf abstrakten Mannigfaltigkeiten brauchen wir ein Substitut für das Volumenelement. Im 1-dimensionalen, wäre das eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ (welche in keinem Punkt verschwindet). Dann könnten wir das Integral $\int_M f \cdot \omega$ von f bzgl. ω über M definieren. Da aber $f \cdot \omega$ selbst eine 1-Form ist, genügt es $\int_M \omega$ für beliebige 1-Formen $\omega \in \Omega^1(M)$ zu erklären. Sei dazu $c : [a, b] \rightarrow M$ eine orientierungserhaltende globale Parametrisierung, dann ist $\int_M \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt$ das wie üblich definierte Kurvenintegral.

Auf allgemeinen orientierten m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten M wollen wir nun das Integral $\int_M \omega$ für beliebige m -Formen $\omega \in \Omega^m(M)$ mit kompaktem Träger definieren.

47.5 Definition (Integration von Differentialformen)

Sei M eine orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^m(M)$ mit kompaktem Träger.

1. Falls $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen ist, dann läßt sich ω als

$$\omega(x^1, \dots, x^m) = f(x^1, \dots, x^m) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

mit $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ schreiben. Das Integral definieren wir dann als gewöhnliches Riemann-Integral:

$$\int_M \omega := \int_U f(x^1, \dots, x^m) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Man beachte, daß für jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $g : \mathbb{R}^m \supseteq V \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\int_{g(V)} \omega = \int_V g^*(\omega),$$

denn falls $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ ist, so ist

$$(g^*(\omega))(x) = (f \circ g)(x) \underbrace{\det(g'(x))}_{>0} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

nach [47.1](#) und somit die Integrale gleich nach der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale, siehe z.B. [\[65, 7.5.10\]](#).

2. Falls $\text{Trg } \omega \subseteq \varphi(U)$ für eine orientierungserhaltende Karte $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$ ist, definieren wir:

$$\int_M \omega := \int_U \varphi^*(\omega).$$

Diese Definition macht Sinn, denn sei $\text{Trg } \omega \subseteq \varphi(U) \cap \psi(V) =: W$ für zwei Karten φ und ψ mit orientierungserhaltenden Kartenwechsel $g := \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \rightarrow \varphi^{-1}(W)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_U \varphi^*(\omega) &\stackrel{\text{Trg}(\varphi^*\omega) \subseteq \varphi^{-1}(W)}{=} \int_{\varphi^{-1}(W)} \varphi^*(\omega) = \int_{g(\psi^{-1}(W))} \varphi^*(\omega) = \\ &\stackrel{\boxed{1}}{=} \int_{\psi^{-1}(W)} \underbrace{g^*(\varphi^*(\omega))}_{(\varphi \circ g)^*(\omega)} = \int_{\psi^{-1}(W)} \psi^*(\omega) \stackrel{\text{Trg}(\psi^*\omega) \subseteq \psi^{-1}(W)}{=} \int_V \psi^*(\omega). \end{aligned}$$

3. Ist $\text{Trg } \omega$ beliebig kompakt, so wählen wir eine endliche, offene Überdeckung mit Kartenumgebungen von $\text{Trg } \omega$, sowie eine Partition der Eins $\{h_i\}$, die der Überdeckung untergeordnet ist. Dann hat jedes $h_i \cdot \omega$ Träger in einer Karte, und somit können wir nach $\boxed{2}$ definieren:

$$\int_M \omega = \int_M \left(\sum_i h_i \right) \omega := \sum_i \int_M h_i \omega.$$

Auch diese Definition macht Sinn, denn sei $\{g_j\}$ eine zweite Partition der Eins, die einer endlichen Überdeckung des Trägers mit Kartenumgebungen untergeordnet ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \int_M h_i \omega &= \sum_i \int_M \left(\sum_j g_j \right) h_i \omega = \sum_i \sum_j \int_M g_j h_i \omega = \\ &= \sum_j \int_M \left(\sum_i h_i \right) g_j \omega = \sum_j \int_M g_j \omega. \end{aligned}$$

47.6 Bemerkung (Dichten)

Falls wir über nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeiten integrieren wollen, brauchen wir etwas anderes als m -Formen. Dazu definieren wir ein eindimensionales Vektorbündel $\text{vol}(M)$ durch Angabe der Transitionsfunktionen $x \mapsto |\det \psi'(x)| \in GL(1)$ zu den Kartenwechseln ψ von M . Schnitte von $\text{vol}(M)$ heißen DICHTEN, solche kann man dann über M integrieren. Falls M orientierbar ist, ist $\text{vol}(M) \cong \Lambda^m T^*M$.

47.7

Wir steuern jetzt auf den Satz von Stokes zu: Nach dem Hauptsatz [64, 5.2.2] der Analysis ist $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$. Insbesondere gilt: $\int_{-\infty}^0 f' = \int_a^0 f' = f(0)$, falls $\text{Trg } f$ kompakt ist und $a \leq \inf(\text{Trg } f)$ ist.

Lemma (Satz von Stokes für Halbräume).

Sei $H = H^{m+1} := \{(t, x) : t \leq 0, x \in \mathbb{R}^m\}$ ein $(m+1)$ -DIMENSIONALER HALBRAUM. Die Teilmenge $\partial H := \{(0, x) : x \in \mathbb{R}^m\} \cong \mathbb{R}^m$ heißt der RAND von H , und für jede m -Form ω mit kompaktem Träger am $\mathbb{R}^{m+1}$ gilt:

$$\int_H d\omega = \int_{\partial H} \omega := \int_{\partial H} \text{incl}^* \omega,$$

wo $\text{incl} : \partial H \hookrightarrow H$ die Inklusion ist.

Beweis. Es gilt für $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^{m+1})$:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sum_{i=0}^m \omega_i dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m; \\
 d\omega &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m + 0 \\
 &= \sum_{i=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} (-1)^i dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int_H d\omega &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \int_H \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} d(x^0, \dots, x^m) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x^0}(x^0, x^1, \dots, x^m) dx^0 \right) d(x^1, \dots, x^m) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_{H_i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i \right) d(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, x^1, \dots, x^m) d(x^1, \dots, x^m) + 0,
 \end{aligned}$$

wobei $H_i := \{(t, x^1, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m) : t \leq 0\}$ ist, und der 2. Summand 0 ist, da $\text{Trg } \omega$ kompakt ist. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial H} \omega &:= \int_{\partial H} \text{incl}^* \omega \\
 &\stackrel{42.2}{=} \int_{\partial H} \sum_{i=0}^m \omega_i(0, x^1, \dots, x^m) \det \left(\frac{\partial(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\
 &= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, x^1, \dots, x^m) d(x^1, \dots, x^m) + 0,
 \end{aligned}$$

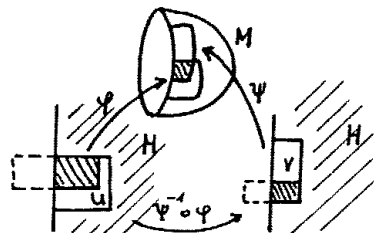
denn

$$\det \left(\frac{\partial(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

Wir wollen diese Überlegungen nun auf Räume übertragen, die nur lokal wie H aussehen:

47.8 Definition (Berandete Mannigfaltigkeit)

Eine C^∞ -MANNIGFALTIGKEIT MIT RAND ist eine Menge M zusammen mit einem Atlas $\mathcal{A}$ von injektiven Abbildungen $\varphi : U \rightarrow M$, wobei $U \subseteq H$ offen in einem abgeschlossenen Halbraum H , und die Kartenwechsel $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(U))$ auf offenen Teilmengen von Halbräumen definiert und glatt sind.



Dabei heißt eine Abbildung zwischen solchen Mengen glatt, wenn es eine glatte Fortsetzung auf offene Mengen im $\mathbb{R}^m$ gibt. Wie üblich setzen wir voraus, daß die

durch den Atlas induzierte finale Topologie Hausdorff und parakompakt ist. Der Rand von M (nicht im topologischen Sinn) ist dann definiert als

$$\partial M := \{p \in M : \exists \text{ eine Karte } \varphi \text{ um } p \text{ mit } \varphi^{-1}(p) \in \partial H\}.$$

Da der Kartenwechsel ein lokaler (Diffeomorphismus und somit) Homöomorphismus des $\mathbb{R}^n$ ist, erhält er innere Punkte, und folglich ist $p \in \partial M \Leftrightarrow \varphi^{-1}(p) \in \partial H$ für jede Karte φ um p . Der Rand ∂M ist dann eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand), wobei ein Atlas auf ∂M durch die Einschränkungen $\varphi|_{\partial M}$ der Karten φ von M gegeben ist.

Man kann die Begriffe TM , T^*M , $C^\infty(M, N)$, $\Lambda^k T^*M$ und $\Omega^k(M)$ wie auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand definieren.

47.9 Definition (innerer Tangentialvektor)

Ein Vektor $v \in T_p M$ heißt INNERER TANGENTIALVEKTOR falls $p \notin \partial M$ oder $T\varphi^{-1}(p, v) \in T_{\varphi^{-1}(p)} H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ 0-te Komponente kleiner als 0 hat.

47.10 Lemma (Verlängern berandeter Mannigfaltigkeiten).

Jede Mannigfaltigkeit mit Rand läßt sich zu einer Mannigfaltigkeit ohne Rand "verlängern", d.h. sie ist Teilmannigfaltigkeit der gleichen Dimension:

Beweisskizze. Mittels Partition der Eins findet man ein VF auf M , das nur aus inneren Tangentialvektoren besteht. Durch "Zusammenstauchen" kann dessen Fluß global gemacht werden: $\text{Fl}(1, \cdot) : M \rightarrow M \setminus \partial M$ ist dann eine Einbettung von M in die Mannigfaltigkeit ohne Rand $M \setminus \partial M$. $\square$

Einfache Beispiele für berandete Mannigfaltigkeiten sind das abgeschlossene Möbiusband und die abgeschlossene Kugel.

47.11 Lemma (Rand einer Mannigfaltigkeit).

Der Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit M mit Rand ist in kanonischer Weise orientierbar.

Beweis. Eine Basis $(e_i)_{i=1}^m$ von $T_p(\partial M)$ heißt positiv orientiert, falls $(e_0, \dots, e_m)$ in $T_p M$ positiv orientiert ist für einen nach außen weisenden Tangentialvektor e_0 . (d.h. $-e_0$ ist innerer Tangentialvektor) $\square$

47.12 Satz von Stokes.

Sei M eine $(n+1)$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und dieser trage die kanonische Orientierung. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\text{Trg } \omega$ kompakt, dann gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega := \int_{\partial M} \text{incl}^* \omega \quad (\text{wobei } \text{incl} : \partial M \hookrightarrow M)$$

Beweis. Sei $\{h_i\}$ eine Partition der Eins, die einer Überdeckung mit Kartenbildern untergeordnet ist und $\omega_i := h_i \cdot \omega$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_i \omega_i, \text{ wobei } \text{Trg } \omega_i \subseteq \text{Trg } h_i && \xRightarrow{47.5.3} \int_{\partial M} \omega = \sum_i \int_{\partial M} \omega_i, \\ d\omega &= \sum_i d(\omega_i), \text{ wobei } \text{Trg}(d\omega_i) \subseteq \text{Trg } \omega_i && \xRightarrow{47.5.3} \int_M d\omega = \sum_i \int_M d(\omega_i). \end{aligned}$$

Also ist der Beweis auf den Fall reduziert, wo $\text{Trg } \omega$ in einer Kartenumgebung liegt, also o.B.d.A. $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ und $M = H$, und diesen haben wir in [47.7](#) bewiesen. $\square$

48. Integration auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

48.1 Bemerkungen

1. Nach [41.2](#) ist die Volumsform auf einer m -dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit M jene eindeutig bestimmte m -Form vol_M , welche punktweise auf positiv orientierten Orthonormalbasen von TM den Wert 1 hat, und in lokalen Koordinaten ist sie gegeben durch

$$\text{vol}_M = \sqrt{G} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$$

mit $G := \det((g_{i,j})_{i,j})$ und $g_{i,j} := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$,

wobei g die Riemann-Metrik auf M bezeichnet.

2. Sei N eine orientierte Teilmannigfaltigkeit von Kodimension 1 der $(n+1)$ -dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit M und sei ν_x für $x \in N$ der eindeutig bestimmte Vektor in $T_x M$, sodaß $(\nu_x, e_1, \dots, e_n)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis in $T_x M$ ist für eine (jede) orientierte Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $T_x N$. Sei ν zu einem Vektorfeld gleichen Namens auf ganz M fortgesetzt, so gilt

$$\text{vol}_N = \text{inkl}^*(i_\nu(\text{vol}_M)) \text{ auf } N,$$

denn $\text{vol}_N(e_1, \dots, e_n) = 1 = \text{vol}_M(\nu_N, e_1, \dots, e_n) = (i_{\nu_N} \text{vol}_M)(e_1, \dots, e_n)$. Insbesondere gilt das für den kanonisch orientierten Rand $N = \partial M$ einer berandeten Mannigfaltigkeit M . Der Vektor ν ist dann der nach außen weisende Einheitsnormalvektor, siehe [47.11](#)

3. Sei allgemeiner $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein beliebiges Vektorfeld. Dann ist $\text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M$ nach [43.2](#) und auf ∂M gilt:

$$\text{inkl}^*(i_\xi \text{vol}_M) = \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M},$$

denn

$$\begin{aligned} (i_\xi \text{vol}_M)(e_1, \dots, e_m) &= \text{vol}_M(\xi, e_1, \dots, e_m) = \\ &= \text{vol}_M\left(\underbrace{\langle \xi, \nu \rangle \nu}_{\in (T(\partial M))^\perp} + \underbrace{\xi - \langle \xi, \nu \rangle \nu}_{\in T(\partial M)}, e_1, \dots, e_m\right) \\ &= \langle \xi, \nu \rangle \cdot \text{vol}_M(\nu, e_1, \dots, e_m) + 0 \\ &\stackrel{\text{2}}{=} \langle \xi, \nu \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}(e_1, \dots, e_m). \end{aligned}$$

48.2 Greensche Satz.

Sei M eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}.$$

Diese Formel rechtfertigt die Bezeichnung QUELLDICHTEN für div .

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_M \operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{vol}_M &\stackrel{43.2}{=} \int_M \mathcal{L}_\xi \operatorname{vol}_M \stackrel{42.7}{=} \int_M (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \operatorname{vol}_M \\
 &= \int_M d(i_\xi \operatorname{vol}_M) + 0 \stackrel{47.12}{=} \int_{\partial M} \operatorname{incl}^*(i_\xi \operatorname{vol}_M) \\
 &\stackrel{48.1.3}{=} \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M}. \quad \square
 \end{aligned}$$

48.3 Produktregeln

Für $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \operatorname{grad}(f) + f \cdot \operatorname{grad}(g) \\
 \operatorname{div}(f \cdot \xi) &= f \cdot \operatorname{div}(\xi) + df \cdot \xi = f \cdot \operatorname{div}(\xi) + \langle \operatorname{grad}(f), \xi \rangle \\
 \Delta(f \cdot g) &= f \cdot \Delta(g) + \Delta(f) \cdot g - 2\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle,
 \end{aligned}$$

siehe Aufgabe [68, 72.69].

48.4 Greensche Formeln.

Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und seien f und h in $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\int_M (\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle - f \cdot \Delta h) \cdot \operatorname{vol} = \int_{\partial M} f \cdot \langle \operatorname{grad} h, \nu \rangle \cdot \operatorname{vol} \\
 (2) \quad &\int_M (f \cdot \Delta h - h \cdot \Delta f) \cdot \operatorname{vol} = - \int_{\partial M} (f \, dh - h \, df)(\nu) \cdot \operatorname{vol}
 \end{aligned}$$

Beweis. (1) Es gilt

$$\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} h) \stackrel{48.3}{=} f \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle = -f \cdot \Delta h + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle$$

und somit für $\xi := f \cdot \operatorname{grad} h$:

$$\begin{aligned}
 \int_M (\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle - f \cdot \Delta h) \cdot \operatorname{vol}_M &= \int_M \operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} h) \cdot \operatorname{vol}_M = \\
 &= \int_M \operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{vol}_M \stackrel{48.2}{=} \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} \\
 &= \int_{\partial M} \langle f \cdot \operatorname{grad} h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} = \int_{\partial M} f \cdot \langle \operatorname{grad} h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} \\
 &= \int_{\partial M} f \cdot dh(\nu_{\partial M}) \cdot \operatorname{vol}_{\partial M}.
 \end{aligned}$$

(2) Vertauscht man f und h in (1) und zieht das Resultat von (1) ab, so erhält man die zweite Greensche Formel. $\square$

48.5 Folgerung (Subharmonische Funktionen sind konstant).

Sei M eine kompakte, orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann ist jede SUBHARMONISCHE FUNKTION $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ – d.h. $\Delta f \leq 0$ – konstant. Insbesondere gilt dies für harmonische Funktionen, d.h. die stationären Punkte f der Wärmeleitungsgleichung $\Delta f = 0$.

Beweis. Wählen wir in der 1.ten Greenschen Formel [48.4.1](#) die erste Funktion konstant 1, so erhalten wir $\int_M -\Delta f \cdot \text{vol}_M = \int_{\emptyset} df(\nu) \cdot \text{vol} = 0$. Wegen $\Delta f \leq 0$ ist also $\Delta f = 0$, d.h. f ist harmonisch. Nach der 1.ten Greenschen Formel für $h = f$ erhalten wir analog

$$0 \stackrel{\text{48.4.1}}{=} \int_M \left(|\text{grad } f|^2 - \underbrace{f \cdot \Delta f}_{=0} \right) \cdot \text{vol}_M = \int_M |\text{grad } f|^2 \cdot \text{vol}_M,$$

also ist $\text{grad } f = 0$ und somit ist f konstant. $\square$

49. Der Laplace-Beltrami-Operator

49.1 Der Laplace-Beltrami-Operator ist selbstadjungiert

Was läßt sich allgemein über den Laplace-Beltrami-Operator $\Delta := dd^* + d^*d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ einer kompakten orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit M aussagen? Auf jedem homogenen Teil $\Omega^k(M)$ haben wir nach [41.3](#) ein inneres Produkt, welches gegeben ist durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \alpha(\cdot), \beta(\cdot) \rangle_{\Lambda^k T^*M} \text{vol}_M \in \mathbb{R}.$$

Es sind d und d^* formal adjungierte Operatoren bezüglich diesem inneren Produkt, denn

$$\alpha \wedge * \beta \stackrel{\text{41.4}}{=} \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \text{vol} \text{ für } \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

und für $\alpha \in \Omega^k$ und $\beta \in \Omega^{k-1}$ rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \left(\langle \alpha, d\beta \rangle - \langle d^* \alpha, \beta \rangle \right) \text{vol} &\stackrel{\text{43.3}}{=} \langle d\beta, \alpha \rangle \text{vol} - \langle \beta, (-1)^{km+m+1} * d * \alpha \rangle \text{vol} \\ &= d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge * * d * \alpha \\ &\stackrel{\text{41.4}}{=} d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge (-1)^{(m-k+1)(k-1)} d * \alpha \\ &= d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{k-1} \beta \wedge d * \alpha \\ &= d(\beta \wedge * \alpha). \\ \Rightarrow \int_M \langle \alpha, d\beta \rangle \text{vol} &= \int_M \langle d^* \alpha, \beta \rangle \text{vol} + \underbrace{\int_M d(\beta \wedge * \alpha)}_{=0}. \end{aligned}$$

Somit ist der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta = dd^* + d^*d$ symmetrisch, d.h.

$$\langle \Delta \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta \beta \rangle$$

Er ist auch positiv, denn

$$\langle \Delta \alpha, \alpha \rangle = \langle (dd^* + d^*d)\alpha, \alpha \rangle = \langle d^* \alpha, d^* \alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle \geq 0.$$

Wegen dieser Gleichung gilt auch:

$$\Delta \alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0 = d^* \alpha, \text{ also } \text{Ker}(\Delta) = \text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(d^*).$$

Die Formen im Kern von Δ werden auch als HARMONISCHE FORMEN bezeichnet.

Der Operator Δ ist ein linearer Differentialoperator vom Grad 2. Man kann zeigen, daß er elliptisch ist, siehe [\[112, 6.35\]](#) und damit folgende Lemmas gelten:

49.2 Lemma.

Eine Folge von k -Formen $\alpha_n \in \Omega^k(M)$, für die sowohl $\{\|\alpha_n\|^2 := \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle : n \in$

$\mathbb{N}$ als auch $\{\|\Delta(\alpha_n)\|^2 : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, besitzt eine Cauchy-Teilfolge im normierten Raum $\Omega^k(M)$.

Ohne Beweis, siehe [112, 6.6].

49.3 Lemma.

Jede SCHWACHE LÖSUNG α von $\Delta\alpha = \gamma$ ist eine wirkliche Lösung, d.h. Aus $\alpha \in L(\Omega^k(M), \mathbb{R})$ mit $\langle \gamma, \beta \rangle = \alpha(\Delta(\beta))$ für alle $\beta \in \Omega^k(M)$ folgt, daß ein $\tilde{\alpha} \in \Omega^k(M)$ existiert mit $\alpha(\beta) = \langle \tilde{\alpha}, \beta \rangle$ für alle β .

Ohne Beweis, siehe [112, 6.5].

49.4 Theorem von Hodge.

Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit so gilt:

1. $\dim(\text{Ker } \Delta) < \infty$.
2. $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Bild } \Delta$ ist eine offene Abbildung.
3. $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$.

Beweis.

1 Angenommen $\text{Ker } \Delta$ ist unendlich-dimensional, dann existiert eine orthonormale Folge von $\varphi_n \in \text{Ker } \Delta$. Diese hat nach **49.2** eine Cauchy-Teilfolge, ein Widerspruch zu $\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = \|\varphi_n\|^2 + \|\varphi_m\|^2 = 2$.

2 Klarerweise ist $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Bild } \Delta$ bijektiv.

Behauptung: $\exists c \forall \beta \in (\text{Ker } \Delta)^\perp : \|\beta\| \leq c \|\Delta\beta\|$ (also ist $\Delta^{-1} : \text{Bild } \Delta \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp$ stetig).

Wir wollen die Behauptung indirekt beweisen. Angenommen $\exists \beta_n \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$ mit $\|\beta_n\| = 1$ und $\|\Delta\beta_n\| \rightarrow 0$. Nach Lemma **49.2** dürfen wir annehmen, daß β_n eine Cauchy-Folge ist. Also existiert

$$\ell(\psi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \beta_n, \psi \rangle \text{ für alle } \psi \in \Omega^k.$$

Das lineare Funktional $\ell : \Omega^k \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, denn $|\ell(\varphi)| \leq \sup_n |\langle \beta_n, \varphi \rangle| \leq 1 \cdot \|\varphi\|$ und es gilt $\ell|_{\text{Ker } \Delta} = 0$, denn

$$\varphi \in \text{Ker } \Delta \Rightarrow \ell(\varphi) = \lim_n \langle \beta_n, \varphi \rangle \stackrel{\beta_n \in (\text{Ker } \Delta)^\perp}{=} \lim_n 0 = 0$$

aber auch $\ell|_{\text{Bild } \Delta} = 0$, denn

$$\ell(\Delta\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \beta_n, \Delta\varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Delta\beta_n, \varphi \rangle = 0.$$

Also ist ℓ eine schwache Lösung von $\Delta\ell = 0$. Nach Lemma **49.3** ist es eine wirkliche Lösung, d.h. $\exists \beta \in \Omega^k : \ell(\psi) = \langle \beta, \psi \rangle$ für alle $\psi \in \Omega^k$. Somit ist $\beta \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$, denn $\langle \beta, \psi \rangle = \ell(\psi) = 0$ für $\psi \in \text{Ker } \Delta$, und $\beta \neq 0$, ja sogar $\|\beta\| = \lim_n \|\beta_n\| = 1$. Aber es ist $0 = \ell(\Delta\varphi) = \langle \beta, \Delta\varphi \rangle = \langle \Delta\beta, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \Omega^k$ und somit $\Delta\beta = 0$. Das ist ein Widerspruch.

3 Die Idee zum Beweis von $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ ist die Gleichung $(\text{Ker } T)^\perp = \text{Bild}(T^*)$ aus der linearen Algebra für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Im unendlich-Dimensionalen stimmt diese so nicht mehr, aber mittels der Elliptizität können wir sie nun für $T := \Delta$ zeigen.

($\subseteq$) Es gilt $\text{Bild } \Delta \subseteq (\text{Ker } \Delta)^\perp$, denn für $\beta \in \text{Ker } \Delta$ ist $\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta^*\beta \rangle = 0$ da Δ symmetrisch ist.

($\supseteq$) Sei $\gamma \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$. Wir definieren $\alpha(\Delta\varphi) := \langle \gamma, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \Omega^k$. Dann ist $\alpha : \text{Bild } \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert, denn aus $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ folgt $\varphi_1 - \varphi_2 \in \text{Ker } \Delta$ und

somit $\langle \gamma, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$. Und $\alpha : \text{Bild } \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, denn für den auf $\text{Ker } \Delta$ orthogonal stehenden Anteil ψ von φ gilt $\Delta\varphi = \Delta\psi$ und somit nach [2]:

$$|\alpha(\Delta\varphi)| = |\alpha(\Delta\psi)| = |\langle \gamma, \psi \rangle| \leq \|\gamma\| \cdot \|\psi\| \leq c \cdot \|\gamma\| \cdot \|\Delta\psi\| = c \cdot \|\gamma\| \cdot \|\Delta\varphi\|$$

Also ist α nach dem SATZ VON HAHN-BANACH (siehe [54, 7.2.1]) erweiterbar zu einem $\|\cdot\|$ -beschränkten linearen Funktional auf Ω^k . Diese Erweiterung ist aber eine schwache Lösung von $\Delta\alpha = \gamma$, und somit existiert nach Lemma [49.3] ein $\tilde{\alpha} \in \Omega^k$ mit $\langle \tilde{\alpha}, \varphi \rangle = \alpha(\varphi)$ für alle φ mit $\langle \Delta\tilde{\alpha}, \varphi \rangle = \langle \tilde{\alpha}, \Delta^*\varphi \rangle = \alpha(\Delta\varphi) = \langle \gamma, \varphi \rangle \forall \varphi$. Also ist $\gamma = \Delta\tilde{\alpha} \in \text{Bild } \Delta$. $\square$

49.5 Folgerung (Orthogonale Zerlegung der Formen).

Für kompakte orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten M haben wir folgende orthogonale Zerlegungen:

$$\Omega = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } \Delta \quad \text{und} \quad \text{Bild } \Delta = \text{Bild } d \oplus \text{Bild } d^*$$

Beweis. Die erste direkte Summenzerlegung haben wir in [49.4] gezeigt. Nun zur zweiten:

($\supseteq$) Die linearen Unterräume $\text{Bild } d$ und $\text{Bild } d^*$ sind in $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ enthalten, da $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$ und $\langle d^*\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d\beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$ für alle $\beta \in \text{Ker } \Delta$ nach [49.1].

($\subseteq$) Dies ist wegen $\Delta = dd^* + d^*d$ offensichtlich.

($\oplus$) Die Summe ist orthogonal, denn wegen $\langle d\alpha, d^*\beta \rangle = \langle d^2\alpha, \beta \rangle = \langle 0, \beta \rangle = 0$ steht $\text{Bild } d$ auf $\text{Bild } d^*$ normal. $\square$

49.6 Definition (Green-Operator)

Wegen [49.4.2] und [49.4.3] ist $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ eine offene Bijektion und, wenn wir mit $H : \Omega \rightarrow \text{Ker } \Delta$ die orthonormale Projektion bezeichnen, so ist der durch $G := (\Delta|_{\text{Bild } \Delta})^{-1} \circ H^\perp : \Omega \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp$ mit $H^\perp := \text{id}_\Omega - H$ definierte GREEN-OPERATOR G der eindeutig bestimmte Lösungsoperator von $\Delta(G(\alpha)) = H^\perp(\alpha)$ für alle $\alpha \in \Omega$. Folglich ist G beschränkt und – als Inverse des symmetrischen elliptischen Differentialoperators Δ – symmetrisch und kompakt.

49.7 Folgerung.

Sei $T : \Omega \rightarrow \Omega$ ein linearer Operator, welcher mit Δ kommutiert, d.h. $T \circ \Delta = \Delta \circ T$, so kommutiert er auch mit G . Insbesondere gilt das für d , d^* und Δ .

Beweis. Aus $T \circ \Delta = \Delta \circ T$ folgt, daß $\text{Ker } \Delta$ und $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ beide T -invariant sind. Somit kommutiert T mit H und $H^\perp$ (denn $T(H(x)) \in \text{Bild } \Delta$ und $T(H^\perp(x)) \in \text{Ker } \Delta$ und wegen $T(H(x)) + T(H^\perp(x)) = T(x) = H(T(x)) + H^\perp(T(x))$ ist $T(H(x)) = H(T(x))$ und $T(H^\perp(x)) = H^\perp(T(x))$) also auch mit $G = \Delta^{-1} \circ H^\perp$. $\square$

49.8 Folgerung (Harmonische Repräsentanten).

Die Kohomologie $H(M)$ von M ist isomorph zum Raum $\text{Ker } \Delta$ der harmonischen Formen. Genauer, in jeder Kohomologiekategorie gibt es genau einen harmonischen Repräsentanten.

Beweis. Nach [49.5] ist $\Omega = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d \oplus \text{Bild } d^*$. Wir behaupten $\text{Ker } d = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d$.

- ($\supseteq$) Nach [49.1](#) ist $\text{Ker } \Delta = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^* \subseteq \text{Ker } d$ und wegen $d^2 = 0$ ist $\text{Bild } d \subseteq \text{Ker } d$.
- ($\subseteq$) Sei $\omega \in \text{Ker } d$. Nach [49.5](#) ist $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ mit $\omega_1 \in \text{Ker } \Delta$, $\omega_2 \in \text{Bild } d$ und $\omega_3 \in \text{Bild } d^*$ und somit $0 = d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3$ mit $d\omega_1 = 0 = d\omega_2$ wegen ($\supseteq$) also auch $d\omega_3 = 0$. Da $\omega_3 \in \text{Bild } d^*$ existiert ein α mit $d^*\alpha = \omega_3$ und somit $\|\omega_3\|^2 = \|d^*\alpha\|^2 = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle = \langle dd^*\alpha, \alpha \rangle = \langle d\omega, \alpha \rangle = \langle 0, \alpha \rangle = 0$. Also ist $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d$.

49.9 Folgerung (Kohomologie ist endlichdimensional).

Die Kohomologie jeder kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit ist endlichdimensional, d.h. alle Betti-Zahlen sind endlich.

Beweis. Wir wählen eine Riemann-Metrik auf M , dann ist $H(M) \cong \text{Ker } \Delta$ nach [49.8](#), und ist somit endlichdimensional nach [49.4](#). $\square$

49.10 Definition (Poincaré-Dualität)

Für jede kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit induziert die Abbildung $\Omega^{m-k}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$ gegeben ist, eine bilineare Abbildung $H^{m-k}(M) \times H^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$, die sogenannte POINCARÉ-DUALITÄT.

Diese Definition macht Sinn, denn aus $\alpha_2 - \alpha_1 = d\alpha$ folgt $\alpha_2 \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta = d\alpha \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta) \pm \alpha \wedge d\beta$, wo $d\beta = 0$, da $[\beta] \in H^k(M) = \text{Ker } d/\text{Bild } d$ ist. Somit ist nach dem Satz von Stokes $\int_M \alpha_2 \wedge \beta = \int_M \alpha_1 \wedge \beta$.

49.11 Lemma.

Die Poincaré-Dualität induziert einen Isomorphismus $H^{m-k} \cong (H^k)^*$, i.e. für die Betti-Zahlen gilt $\beta_k = \beta_{m-k}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Poincaré-Dualität nicht degeneriert ist.

Sei dazu $[\alpha] \in H^{m-k} \setminus \{0\}$, wegen [49.8](#) dürfen wir annehmen, daß α harmonisch und damit auch $d^*\alpha = 0$ ist. Wählen wir $\beta := *\alpha$, so gilt: $d\beta = d*\alpha = \pm *d^*\alpha = 0$ und $\int_M \alpha \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge *\alpha = \int_M \langle \alpha, \alpha \rangle \text{ vol} > 0$, da $\alpha \neq 0$.

Bekanntlich induziert jede bilineare nicht-degenerierte Abbildung $b : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ auf endlichdimensionalen Vektorräumen einen Isomorphismus $b^\vee : E \rightarrow F^*$:

Die induzierte Abbildung $E \ni v \mapsto b(v, \cdot) \in F^*$ ist injektiv, denn $b(v, w) = 0$ für alle $w \in F$ impliziert $v = 0$. Also ist $\dim E \leq \dim(F^*) = \dim F$, und aus Symmetriegründen $\dim E = \dim F$. Somit ist die induzierte Abbildung ein Isomorphismus. $\square$

Bemerkung.

Da H^k nach [49.9](#) endlich-dimensional ist, liefert jedes innere Produkt auf H^k einen Isomorphismus $\sharp : H^k \rightarrow (H^k)^*$ und somit nach [49.11](#) einen Isomorphismus $H^{m-k} \rightarrow (H^k)^* \leftarrow H^k$. Verwenden wir insbesondere den Isomorphismus $H(M) \cong \text{Ker } \Delta \subseteq \Omega(M)$ und das von $\Omega(M)$ induzierte innere Produkt aus [49.1](#) so läßt sich

oberiger Isomorphismus $H^{m-k} \leftrightarrow H^k$ wie folgt beschreiben:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{m-k} \times H^k & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longleftarrow & H^k \times H^k \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 Z^{m-k} \times Z^k & & \int_M & & \text{Ker } \Delta \times \text{Ker } \Delta \\
 \downarrow & & \langle -, - \rangle & & \downarrow \\
 \Omega^{m-k} \times \Omega^k & \xrightarrow{\wedge} & \Omega^m & & \Omega^k \times \Omega^k
 \end{array}$$

$$H^{m-k} \xrightarrow{\cong} (H^k)^* \xleftarrow{\cong} H^k$$

$$[\alpha] \leftrightarrow ([\beta] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \gamma \in \text{Ker } \Delta,$$

mit $\int_M \alpha \wedge \beta = \langle \gamma, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \gamma, \beta \rangle_{\Lambda^k(M)} \text{vol}_M = \int_M * \gamma \wedge \beta$ für alle $[\beta] \in H^k(M)$, also ist $[\alpha] = [* \gamma]$, d.h. der Isomorphismus ist durch den Hodge-Stern-Operator gegeben. Beachte dabei, daß

$$\begin{aligned}
 \Delta(*\gamma) &= (dd^* + d^*d) * \gamma \\
 &= (-1)^{1+m+m(m-k)} d * d * * \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\
 &= (-1)^{1+m+m(m-k)+k(m-k)} d * d \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\
 &= *((-1)^{m(m-1-2k)} (-1)^{1+m+m(k+1)} * d * d \\
 &\quad + (-1)^{m(m-1-2k)} (-1)^{2m} (-1)^{1+m+m k} d * d *) \gamma \\
 &= (-1)^{m(m-1-2k)} * (d^* d + dd^*) \gamma = * \Delta \gamma = * 0 = 0, \quad \text{für } \gamma \in \text{Ker } \Delta,
 \end{aligned}$$

d.h. $*$ bildet die harmonischen Formen wieder auf solche ab.

49.12 Folgerung.

Ist M eine kompakte zusammenhängende orientierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist $H^m(M) \cong \mathbb{R}$, i.e. $\beta_M = 1$.

Vgl. dies mit 50.5.

Beweis. Die Poincaré-Dualität liefert den Isomorphismus $H^m \cong (H^0)^*$, und $H^0 \cong \mathbb{R}$, da M zusammenhängend ist. Die Zusammensetzung der Isomorphismen $H^m \cong (H^0)^* \cong H^0 \cong \mathbb{R}$ ist: $[\omega] \mapsto \int_M \omega \wedge 1 = \int_M \omega$. $\square$

49.13 Folgerung.

Ist M kompakt, zusammenhängend, orientierbar und von ungerader Dimension so verschwindet die Euler-Charakteristik $\chi = \sum_k (-1)^k \beta_k$.

Beweis. Sei $\dim M = 2n + 1 = m$ so gilt

$$\begin{aligned}
 \chi &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k + \sum_{k=n+1}^m (-1)^k \beta_k \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k + \sum_{k=0}^n (-1)^{m-k} \beta_{m-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k (\underbrace{\beta_k - \beta_{m-k}}_{=0, \text{ nach } \text{49.11}}) = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

49.14 Kann man die Form einer Trommel hören?

Um diese sehr anschauliche Problem in eine mathematische Formulierung zu bekommen, denken wir uns eine Trommel als ein berandetes Gebiet im $\mathbb{R}^2$. Lassen wir diese nun mit festgehaltenem Rand schwingen, so besitzt sie gewisse Eigenfrequenzen, die wir – zumindest mit absolut absolutem Gehör – hören könnten. Es stellt sich nun die Frage, ob das Gebiet durch dieses Spektrum von Eigenfrequenzen bereits bis auf Isometrien eindeutig festgelegt ist.

Allgemeiner können wir das Problem auch für beliebig dimensionale, abstrakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten stellen, [56].

Da wir sie nur ein wenig aus der Ruhelage bringen wollen, ist es egal in welchem umgebenden Raum die Mannigfaltigkeit isometrisch eingebettet ist, am einfachsten in $M \times \mathbb{R}$. Sei nun $u(x, t)$ die Entfernung des Punktes $x \in M$ von seiner Ruhelage zum Zeitpunkt t . Dann erfüllt u , wie bei der üblichen Gleichung der schwingenden Saite (siehe z.B. [65, 9.3.1]), die partielle Differentialgleichung 2.ter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \text{ mit } u|_{\partial M} = 0,$$

wobei Δ der Laplace-Beltrami-Operator der Riemann-Mannigfaltigkeit ist.

Die übliche Lösungsmethode verwendet den Ansatz der getrennten Variablen (vgl. [65, 9.3.2]), d.h. $u(x, t) := \varphi(x) \cdot \psi(t)$. Die Gleichung übersetzt sich dann in $\frac{\Delta \varphi}{\varphi}(x) = -\frac{\psi''}{\psi}(t)$ und somit müssen beide Seiten konstant – z.B. gleich λ – sein. Insbesondere suchen wir also Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenfunktionen $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ des Operators $\Delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Falls M kompakt ist, so sind nach [49.1] alle Eigenwerte reell und die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten stehen orthogonal (da Δ symmetrisch ist). Die Eigenwerte sind alle nicht negativ (da Δ positiv ist) und lassen sich zu einer monoton wachsenden Folge (λ_k) anordnen, die sich nur im Unendlichen häuft, denn andernfalls besäße eine zugehörige orthonormale Folge von Eigenfunktionen nach [49.2] einen Häufungswert. Vermöge einer orthonormalen Folge von zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ läßt sich die Wellengleichung mittels Fourierreihen

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \cdot \varphi_k(x)$$

lösen, wobei die Konstanten a_k und b_k durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die Klangwelle der Mannigfaltigkeit ist dann ein geeigneter Mittelwert:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right).$$

Und somit können wir (in einem gewissen Sinn) die λ_k hören.

Diese Folge (λ_k) heißt das SPEKTRUM DER RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT. Z.B. kann man zeigen, daß das Spektrum der S^n die Folge $(k(k+n-1))_{k=0}^{\infty}$ ist, wobei jedes $k > 0$ mit Vielfachheit $\frac{(n+2k-1)!(n+k-2)!}{(n-1)!k!}$ auftritt.

Man konnte zeigen, daß folgende Dinge gehört werden können, d.h. durch das Spektrum bereits eindeutig bestimmt sind:

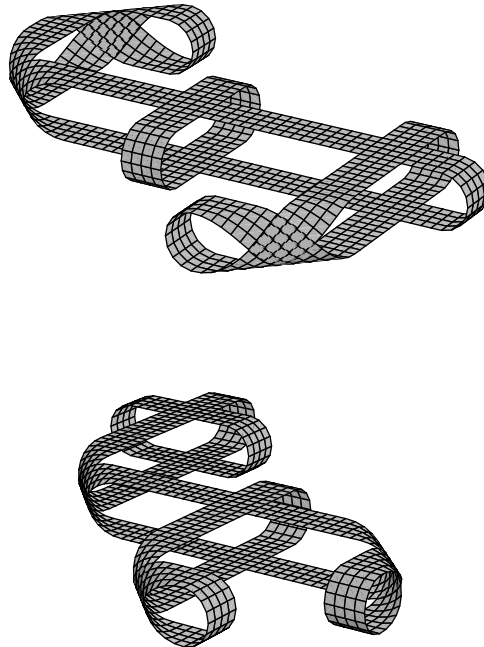
die Dimension, das Volumen und die Euler-Charakteristik und damit das Geschlecht (einer 2-dimensionalen unberandeten Mannigfaltigkeit) und die totale skalare Krümmung (siehe [64.13]).

Man konnte zeigen, daß man die folgenden Riemann-Mannigfaltigkeiten mit ihrer kanonischen Metrik durch Hören erkennen kann: die Sphären S^n , die reellen projektiven Räume $\mathbb{P}^{2n-1}$ für $n \leq 3$, den flachen Torus $S^1 \times S^1$, sowie alle kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit konstanten Krümmung $K > 0$.

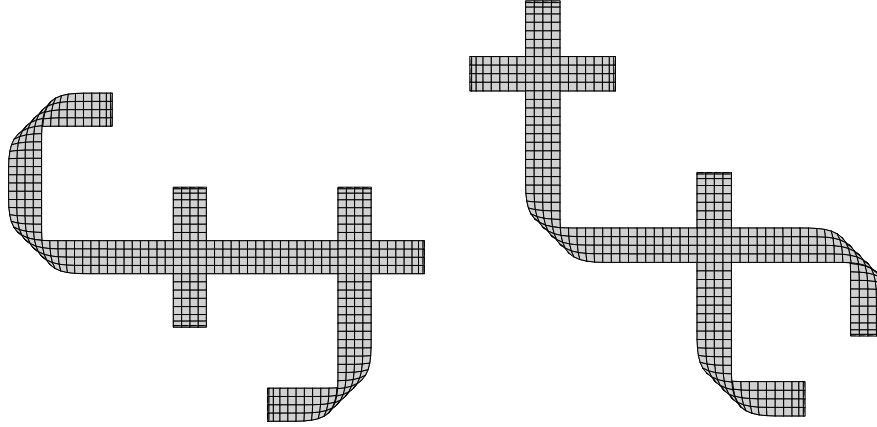
Jedoch gibt es ISOSPEKTRALE RIEMANN-MANNIGFALTIGKEITEN die nicht isometrisch sind. Das erste Beispiel wurde von [84] gefunden und waren zwei 16-dimensionale Tori. [21] gaben 4-dimensionale Tori an. Marie-France Vigneras [110] konstruierte 2-dimensionale Beispiele die als Quotienten der hyperbolischen Halbebene nach diskreten Gruppen von Isometrien erhalten werden. Daß es sogar isospektrale Deformationen von Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, wurde von [36] gezeigt und in [104] systematisiert. Schließlich konstruierten [35] eine berandete Fläche M die aus $168 = 7 \cdot 24$ Kreuzen zusammengesetzt ist und auf welcher die Elemente von $SL_{\mathbb{Z}_2}(3)$ als fixpunktfreie Isometrien wirken. Die jeweils $24 = 2 \cdot 2 \cdot 6$ elementigen Untergruppen

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

liefern dann zwei 24-blättrige Überlagerungen $M \rightarrow M/G_i =: M_i$ mit M_1 und M_2 isospektral aber nicht isometrisch.



Faktorisiert man noch die offensichtliche isometrische Involution $\tau_i : M_i \rightarrow M_i$ heraus, so erhält man zwei isospektrale aber nicht isometrische Gebiete mit Ecken in $\mathbb{R}^2$.



50. Anwendungen der Integration auf die Kohomologie

50.4 Kohomologie

Wir wollen nun für allgemeine Mannigfaltigkeiten M die höchste Kohomologie $H^m(M)$ bestimmen.

50.15 Definition. Kohomologie mit kompakten Träger.

Indem wir die Teilräume $\Omega_c^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : \text{Trg } \omega \text{ ist kompakt}\}$ anstelle von $\Omega^k(M)$ verwenden definieren wir die Kohomologie mit kompakten Träger durch

$$\begin{aligned} Z_c^k(M) &:= \text{Ker}(d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M)) \\ B_c^k(M) &:= \text{Bild}(d : \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M)) \\ H_c^k(M) &:= Z_c^k(M) / B_c^k(M) \end{aligned}$$

Beachte dabei, daß $B_c^k(M) \neq \{d\eta \in \Omega_c^k(M) : \eta \in \Omega_c^{k-1}(M)\}$, denn z.B. ist für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \neq f \geq 0$ die Differentialform $\omega := f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ wegen dem Poincaré-Lemma [44.5.6](#) exakt, aber für kein $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ ist $d\eta = \omega$, denn nach dem Satz [47.12](#) von Stokes wäre dann $0 < \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} d\eta = \int_{\emptyset} \eta = 0$ ein Widerspruch.

Ein direkte Verallgemeinerung dieses Arguments zeigt, daß es für jede orientierbare Mannigfaltigkeit M ein $\omega_0 \in \Omega_c^m(M)$ mit $\int_M \omega_0 = 1$ gibt. Insbesondere ist $H_c^m(M) \neq 0$ für alle orientierbaren m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten M . Wir wollen nun zeigen, daß $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ für alle solchen zusammenhängenden M ist, also für alle $\omega \in \Omega_c^m(M)$ ein $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$ existiert mit $\omega = (\int_M \omega) \omega_0 + d\eta$, und damit $\int : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ einen Isomorphismus $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_M \omega$ induziert.

50.12 Lemma.

Es sei $r : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^m$ die Retraktion $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ und $\nu \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{m+1})$ das Vektorfeld $\nu : x \mapsto x$. Dann ist

$$\begin{aligned} (r^* \text{vol}_{S^m})(x) &= \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \iota_\nu \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}}(x) \\ &= \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m. \end{aligned}$$

Beweis. Da für $x \neq 0$ der Tangentialraum $T_x \mathbb{R}^{m+1}$ von $T_x(\|x\| S^m)$ und ν_x erzeugt wird, genügt es beide Seiten auf Vektoren $v_1, \dots, v_m$ aus diesen Teilräumen auszutesten.

Falls $v_i = \nu_x$ für mindestens ein i ist, so ist die linke Seite 0, denn $T_x r \cdot \nu = \frac{d}{dt}|_{t=0} r(x + tx) = 0$ und ebenso die rechte Seite:

$$\frac{1}{\|x\|^{m+1}} (\iota_\nu \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}})_x(\dots, v_i, \dots) = \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}}(\nu_x, \dots, \nu_x, \dots) = 0.$$

Sind andernfalls alle Vektoren $v_i \in T_x(\|x\| S^m)$, so ist $T_x r \cdot v_i = \frac{1}{\|x\|} v_i$, denn $r : \|x\| S^m \rightarrow S^m$ ist eine Streckung mit Faktor $\frac{1}{\|x\|}$. Damit sind ebenfalls beide Seiten gleich, denn nach [48.1.2](#) (siehe auch Aufgabe [EX27](#)) ist

$$\text{vol}_{S^m} = \text{incl}^*(\iota_\nu(\text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}})) = \text{incl}^*\left(\sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \dots \wedge \overline{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m\right)$$

und somit

$$\begin{aligned} (r^* \text{vol}_{S^m})_x(v_1, \dots, v_m) &= (\text{vol}_{S^m})_{r(x)}\left(\frac{1}{\|x\|} v_1, \dots, \frac{1}{\|x\|} v_m\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^m} \left(\sum_{i=1}^m r(x)^i dx^0 \wedge \dots \wedge \overline{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m\right)(v_1, \dots, v_m) \\ &= \frac{1}{\|x\|^{m+1}} (\iota_\nu \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}})_x(v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

□

50.13 Lemma. Integration nach Polarkoordinaten.

Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1\}$ und $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$. Dann ist

$$\int_B f = \int_B f \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}} = \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m} \quad \text{mit } g : x \mapsto \int_0^1 t^m f(tx) dt.$$

Beweis. Sei $h : S^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $h(y, t) := t^m f(ty)$ und weiters $dt \wedge \text{vol}_{S^m} := \text{pr}_2^*(dt) \wedge \text{pr}_1^*(\text{vol}_{S^m}) \in \Omega^{m+1}(S^m \times [0, 1])$. Wenn wir auf $S^m \times [0, 1]$ die von $dt \wedge \text{vol}_{S^m}$ induzierte Orientierung verwenden so ist

$$\int_{S^m} g \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m} \int_0^1 \underbrace{t^m f(t \cdot)}_{=h(\cdot, t)} dt \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m \times [0, 1]} h dt \wedge \text{vol}_{S^m}.$$

Es ist $B \setminus \{0\} \cong S^m \times (0, 1]$ vermöge $\varphi : x \mapsto (\frac{x}{\|x\|}, \|x\|)$ mit Umkehrabbildung $(y, t) \mapsto ty$. Mit $\rho(x) := \|x\|$ ist dann

$$\begin{aligned} \varphi^*(dt \wedge \text{vol}_{S^m}) &= \varphi^*(\text{pr}_2^*(dt) \wedge \text{pr}_1^*(\text{vol}_{S^m})) = (\text{pr}_2 \circ \varphi)^*(dt) \wedge (\text{pr}_1 \circ \varphi)^*(\text{vol}_{S^m}) \\ &= \rho^*(dt) \wedge r^*(\text{vol}_{S^m}) \\ &\stackrel{\text{50.12}}{=} \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{\|x\|} dx^j \wedge \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \overline{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{\|x\|^{m+2}} \sum_{i=0}^m (x^i)^2 dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m = \frac{1}{\|x\|^m} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m \end{aligned}$$

und für $x \neq 0$ somit

$$\begin{aligned} \varphi^*(h dt \wedge \text{vol}_{S^m})(x) &= h(\varphi(x)) \varphi^*(dt \wedge \text{vol}_{S^m})(x) = \|x\|^m f(x) \frac{1}{\|x\|^m} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= f(x) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_B f &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{B \setminus \varepsilon B} \varphi^*(h dt \wedge \text{vol}_{S^m}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varphi(B \setminus \varepsilon B)} h dt \wedge \text{vol}_{S^m} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{S^m \times [\varepsilon, 1]} h dt \wedge \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m \times [0, 1]} h dt \wedge \text{vol}_{S^m} \\ &= \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m} . \quad \square \end{aligned}$$

50.6 Theorem.

Für jede zusammenhängende orientierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit M ist $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ vermöge $[\omega] \mapsto \int_M \omega$.

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß $B_c^m(M)$ der Kern von $\int_M : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist, d.h. für jedes $\omega \in \Omega_c^m(M)$ mit $\int_M \omega = 0$ ein $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$ existiert mit $\omega = d\eta$.

Beh.: Das Theorem stimmt für $M = \mathbb{R}$.

Sei $\omega \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$. Wegen dem Poincaré Lemma [44.5.6](#) existiert ein $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\omega = df$. Da $\text{Trg } \omega = \text{Trg } f'$ kompakt ist, existiert ein N , s.d. f sowol auf $(-\infty, -N]$ als auch auf $[N, +\infty)$ konstant ist. Wegen $0 = \int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} df = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt = \int_{-N}^{+N} f'(t) dt = f(N) - f(-N)$ ist $f(N) = f(-N)$ und somit $g := f - f(N) \in C_c^\infty$ und $\omega = dg$.

Beh.: Falls das Theorem für S^m gilt, so auch für $\mathbb{R}^{m+1}$.

Sei $\omega = f dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m \in \Omega_c^{m+1}(\mathbb{R}^{m+1})$ mit $\int_{\mathbb{R}^{m+1}} \omega = 0$ und o.B.d.A. sei $\text{Trg}(\omega) \subseteq \{x : \|x\| < 1\}$. Wegen dem Poincaré Lemma [44.5.6](#) existiert ein $\eta \in \Omega^m(\mathbb{R}^{m+1})$ mit $\omega = d\eta$. Nach Aufgabe [EX26](#) ist o.B.d.A.

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int_0^1 t^m f(tx) dt \cdot \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{(t = \frac{s}{\|x\|})}{\|x\|^{m+1}} \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \int_0^{\|x\|} s^m f\left(s \frac{x}{\|x\|}\right) ds \cdot \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{\text{50.12}}{\|x\|^{m+1}} \int_0^{\|x\|} t^m f\left(t \frac{x}{\|x\|}\right) dt \cdot (r^* \text{vol}_{S^m})(x). \end{aligned}$$

Es sei $g : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \int_0^1 t^m f(tx) dt$ und $B := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1\}$. Da

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \omega = \int_B f \frac{\text{50.13}}{\|x\|^{m+1}} \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m}$$

existiert nach Voraussetzung ein $\lambda \in \Omega^{m-1}(S^m)$ mit $g \text{vol}_{S^m} = d\lambda$.

Wegen $f|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 0$ ist

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int_0^1 t^m f\left(t \frac{x}{\|x\|}\right) dt \cdot (r^* \text{vol}_{S^m})(x) \text{ für } x \notin B \\ \Rightarrow \eta &= (g \circ r) \cdot r^* \text{vol}_{S^m} = r^*(g \text{vol}_{S^m}) = r^*(d\lambda) = d(r^*\lambda) \text{ auf } \mathbb{R}^{m+1} \setminus B. \end{aligned}$$

Sei nun $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{m+1}, [0, 1])$ so, daß $h = 0$ nahe 0 und $h|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 1$. Dann ist $h \cdot r^*\lambda \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^{m+1})$ und

$$\omega = d\eta = d(\eta - d(h \cdot r^*\lambda)) \text{ mit } (\eta - d(h \cdot r^*\lambda))|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = (\eta - d(r^*\lambda))|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 0.$$

Beh.: Falls das Theorem für $\mathbb{R}^m$ gilt, so für alle m -dimensionalen zusammenhängenden M .

Sei dazu $\omega_0 \in \Omega_c^m(M)$ mit $\int \omega_0 = 1$ und $\text{Trg } \omega_0 \subseteq \text{Bild } \varphi_0$ für eine Karte $\varphi_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow$

M . Wir zeigen, daß zu $\omega \in \Omega_c^m(M)$ ein $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$ gibt mit $\omega = (\int_M \omega) \cdot \omega_0 + d\eta$. Daraus folgt insbesondere $\omega = d\eta$ für alle ω mit $\int \omega = 0$.

Betrachten wir zuerst den Fall $\text{Trg } \omega \subseteq \text{Bild } \psi$ für eine Karte $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow M$: Es gibt dann endlich viele Karten $\psi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow M$ mit $\text{Bild } \psi_i \cap \text{Bild } \psi_{i+1} \neq \emptyset$, ψ_0 die obige Karte bei ω_0 und weiters $\psi_l = \psi$ ist. Dazu gibt es ω_i mit kompaktem Träger $\text{Trg } \omega_i \subseteq \text{Bild } \psi_{i-1} \cap \text{Bild } \psi_i$ und $\int \omega_i = 1$. Da das Theorem für $\mathbb{R}^m \cong \text{Bild } \psi_{i-1}$ vorausgesetzt ist, existieren $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$ mit $\text{Trg } \eta_i \subseteq \text{Bild } \psi_{i-1}$ und $\omega_i - \omega_{i-1} = d\eta_i$. Schließlich existiert ebenso für $c := \int \omega$ ein η_{l+1} mit $\omega - c\omega_l = d\eta_{l+1}$. Daraus folgt

$$\omega = c\omega_l + d\eta_{l+1} = \dots = c\omega_0 + c \sum_{i=1}^l d\eta_i + d\eta_{l+1} = c\omega_0 + d\left(\eta_{l+1} + c \sum_{i=1}^l \eta_i\right).$$

Sei nun $\omega \in \Omega_c^m(M)$ beliebig und $\{f_i\}$ eine Partition der Eins, die einer Überdeckung mit offenen zu $\mathbb{R}^m$ diffeomorphen Mengen untergeordnet ist, dann ist $f_i\omega = c_i\omega_0 + d\eta_i$ für ein $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$ und somit $\omega = \sum_i f_i\omega = (\sum_i c_i)\omega_0 + d\sum_i \eta_i$, wobei $\int_M \omega = \sum_i c_i \int_M \omega_0 + \int_M d\sum_i \eta_i = \sum_i c_i$, eine endliche Summe. $\square$

50.5 Satz (Höchste Kohomologie).

Für zusammenhängende m -dimensionale Mannigfaltigkeiten M ohne Rand gilt:

$$H^m(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ kompakt und orientierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$H_c^m(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ orientierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für kompaktes orientierbares M haben wir diese Aussage in [49.12](#) unter Verwendung des Theorems von Hodge bewiesen. Der nachfolgende Beweis benutzt dieses nicht.

Beweis. Nach [50.6](#) ist $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ für alle **orientierbaren** M und damit $H^m(M) = H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ für alle **orientierbaren kompakten** M .

Sei als nächstes M **orientierbar aber nicht kompakt**:

Da M nicht kompakt ist existiert eine Überdeckung $\{\text{Bild } \psi_i : i \in \mathbb{N}\}$ für Karten ψ_i , s.d. jede kompakte Menge nur endlich viele $\text{Bild } \psi_i$ trifft (siehe [19.6.3](#)) und (durch Umordnen dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß) $\text{Bild } \psi_i \cap \text{Bild } \psi_{i+1} \neq \emptyset$. Sei $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine untergeordnete Partition der 1. Wir wählen wieder $\omega_i \in \Omega_c^m(M)$ mit $\text{Trg } \omega_i \subseteq \text{Bild } \psi_i \cap \text{Bild } \psi_{i+1}$ und $\int_M \omega_i = 1$. Sei nun $\omega \in \Omega^m(M)$ mit $\text{Trg } \omega \subseteq \text{Bild } \psi_j$ für ein j und $c := \int_M \omega$. Für $i \geq j$ existieren dann $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$ mit $\text{Trg } \eta_i \subseteq \text{Bild } \psi_i$, und $\omega = c\omega_j + d\eta_j$ sowie $c\omega_{i-1} = c\omega_i + d\eta_i$ für $i > j$. Somit ist

$$\omega = c\omega_j + d\eta_j = \dots = c\omega_k + \sum_{i=j}^k d\eta_i = d\left(\sum_{i=j}^\infty \eta_i\right)$$

und $\mu_j := \sum_{i=j}^\infty \eta_i$ lokal endlich.

Sei nun $\omega \in \Omega^m(M)$ beliebig. Dann ist $f_j\omega$ wie zuvor, also existiert ein $\mu_j \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $f_j\omega = d\mu_j$ und $\text{Trg } \mu_j \subseteq \bigcup_{i \geq j} \text{Bild } \psi_i$, somit ist $\sum_j \mu_j$ lokal endlich und

$$\omega = \sum_j f_j\omega = \sum_j d\mu_j = d\left(\sum_j \mu_j\right),$$

also ist $H^m(M) = \{0\}$.

Sei schließlich M **nicht orientierbar**:

Auf dem Totalraum der Orientierungsüberlagerung $p : M^{or} \rightarrow M$ der Mannigfaltigkeit M definieren wir die ORIENTIERUNGSVERTAUSCHUNG $\chi : \chi(x, \pm\omega) := (x, \mp\omega)$ und damit

$$\begin{aligned}\Omega_{\pm}^k(M^{or}) &:= \{\omega \in \Omega^k(M^{or}) : \chi^*\omega = \pm\omega\} \\ \Omega_{\pm,c}^k(M^{or}) &:= \{\omega \in \Omega_c^k(M^{or}) : \chi^*\omega = \pm\omega\} \\ H_{\pm}^k(M^{or}) &:= \{\omega \in \Omega_{\pm}^k(M^{or}) : d\omega = 0\} / \{d\eta : \eta \in \Omega_{\pm}^{k-1}(M^{or})\} \\ H_{\pm,c}^k(M^{or}) &:= \{\omega \in \Omega_{\pm,c}^k(M^{or}) : d\omega = 0\} / \{d\eta : \eta \in \Omega_{\pm,c}^{k-1}(M^{or})\}.\end{aligned}$$

Wir behaupten:

$$\begin{aligned}\Omega^k(M^{or}) &= \Omega_+^k(M^{or}) \oplus \Omega_-^k(M^{or}) \\ H^k(M^{or}) &= H_+^k(M^{or}) \oplus H_-^k(M^{or}) \\ p^* : H^k(M) &\xrightarrow{\cong} H_+^k(M^{or})\end{aligned}$$

und analog für Formen mit kompakten Träger. Sei $\omega \in \Omega^k(M^{or})$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2} \left((\omega + \chi^*\omega) + (\omega - \chi^*\omega) \right) \in \Omega_+^k \oplus \Omega_-^k, \text{ wobei } \Omega_-^k \cap \Omega_+^k = \{0\} \\ \Rightarrow \Omega^k(M^{or}) &= \Omega_-^k(M^{or}) \oplus \Omega_+^k(M^{or}) \quad \text{und} \\ d(\Omega_{\pm}^k) &\subseteq \Omega_{\pm}^{k+1}, \text{ wegen } \chi^*(d\omega) = d(\chi^*\omega) = \pm d\omega \text{ für } \omega \in \Omega_{\pm}^k \\ \Rightarrow H^k(M^{or}) &= H_-^k(M^{or}) \oplus H_+^k(M^{or})\end{aligned}$$

Es ist $p^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M^{or})$ injektiv, da p eine surjektive Submersion ist, mit Bild $p^*(\Omega^k(M)) = \Omega_+^k(M^{or})$:

($\subseteq$) Weil $\chi^*p^*\omega = (p \circ \chi)^*\omega = p^*\omega$.

($\supseteq$) Sei $\omega \in \Omega_+^k(M^{or})$ und sei $U \subseteq M^{or}$, sodaß $p|_U : U \rightarrow p(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\tilde{\omega}|_{p(U)} := ((p|_U)^{-1})^*\omega$. Dann ist $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$ wohldefiniert, weil $\chi^*\omega = \omega$, und $p^*\tilde{\omega} = \omega$.

Somit gilt $p^* : \Omega^k(M) \xrightarrow{\cong} \Omega_+^k(M^{or}) \hookrightarrow \Omega^k(M^{or})$. Wegen $p^* \circ d = d \circ p^*$ folgt daraus $p^* : H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_+^k(M^{or}) \hookrightarrow H^k(M^{or})$ und analog $p^* : H_c^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{+,c}^k(M^{or}) \hookrightarrow H_c^k(M^{or})$, was die letzte Behauptung war.

Sei $\omega \in \Omega_{+,c}^m(M^{or})$. Dann ist $\int \omega = 0$, denn $\int \omega = \int \chi^*\omega \xrightarrow{\chi \text{ orient. vert.}} - \int \omega$. Somit existiert für die orientierte Mannigfaltigkeit M^{or} nach Obigem ein $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M^{or})$ mit $\omega = d\eta$ und damit ist $\omega = \frac{1}{2}(\omega + \chi^*\omega) = \frac{1}{2}(d\eta + \chi^*d\eta) = d(\eta_+)$ mit $\eta_+ := \frac{1}{2}(\eta + \chi^*\eta) \in \Omega_{+,c}^{m-1}(M^{or})$, also $[\omega] = [d\eta_+] = 0 \in H_{+,c}^m(M^{or})$. Somit ist $H_c^m(M) \cong H_{+,c}^m(M^{or}) = \{0\}$. Und damit für kompaktes M auch $H^m(M) = H_c^m(M) = \{0\}$. Falls hingegen M nicht kompakt ist, so folgt $H^m(M) = \{0\}$ aus dem orientierbaren Fall, denn $p^* : H^m(M) \hookrightarrow H^m(M^{or}) = \{0\}$. $\square$

50.7 Beispiel

Für die orientierte zweiblättrige Überlagerung $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ sei χ die Antipodalabbildung $x \mapsto -x$. Dann ist $H^k(\mathbb{P}^n) \cong H_+^k(S^n) \subseteq H^k(S^n)$ analog wie im Beweis von

50.5 und somit

$$H^k(\mathbb{P}^n) \cong H_c^k(\mathbb{P}^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0, n \\ \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \quad (\text{da } \mathbb{P}^n \text{ zush. ist}) \\ 0 & \text{für } k = n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} & \text{für } k = n \text{ ungerade} \end{cases}$$

In der Tat ist χ auf S^n genau dann orientierungserhaltend, wenn n ungerade ist und somit ist $\int_{S^n} \pm \omega = \int_{S^n} \chi^* \omega = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \omega$ für $\omega \in \Omega_{\pm}(S^n)$, also wie am Ende des Beweises von [50.5](#) $H_+^n(S^n) = 0$ falls n gerade ist und für n ungerade ist $H_-(S^n) = 0$ und damit $H^n(\mathbb{P}^n) \cong H_+^n(S^n) = H^n(S^n) = \mathbb{R}$.

50.8 Brouwerscher Fixpunktsatz.

Sei $f : B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \rightarrow B^n$ glatt, dann gibt es ein $x \in B^n$ mit $f(x) = x$.

Beweis. Indirekt: Sei $f(x) \neq x$ für alle x , dann gibt es eine glatte Retraktion $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$, d.h. $r|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$, sei nämlich $r(x)$ der auf der Seite von x liegende Schnittpunkt der wohldefinierten Geraden durch x und $f(x)$ mit der Sphäre S^{n-1} . Wir erweitern r zu einer Retraktion gleichen Namens $r : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$. Nun folgt

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{r^*} & H^{n-1}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{incl}^*} & H^{n-1}(S^{n-1}) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & 0 & & \\
 & \nearrow \text{dotted} & & \searrow \text{dotted} & \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} & & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Das ist ein Widerspruch. □

50.9 Definition (Abbildungsgrad)

Seien M, N zusammenhängende, kompakte und orientierte Mannigfaltigkeiten von gleicher Dimension m und sei $f : M \rightarrow N$ glatt. Der **ABBILDUNGSGRAD** $\deg f \in \mathbb{R}$ sei durch folgendes Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc}
 H^m(M) & \xleftarrow{H^m(f)} & H^m(N) \\
 f \downarrow \cong & & f \downarrow \cong \\
 \mathbb{R} & \xleftarrow{\deg f} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

$$\deg f \cdot t \longleftarrow t$$

wobei

$$\deg f \cdot \int [\omega] = \deg f \cdot \int \omega = \int H^m(f)[\omega] := \int [f^* \omega] = \int f^* \omega.$$

Falls M und N orientierte aber nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension m sind und $f : M \rightarrow N$ glatt und proper (d.h. die Urbilder kompakter Mengen sind kompakt) ist, so verallgemeinern wir den **ABBILDUNGSGRAD** $\deg f \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^m(M) & \xleftarrow{H_c^m(f)} & H_c^m(N) \\
 f \downarrow \cong & & f \downarrow \cong \\
 \mathbb{R} & \xleftarrow{\deg f} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

$$\deg f \cdot t \longleftarrow t$$

Beachte dabei, daß $f^* : \Omega_c^k(N) \rightarrow \Omega_c^k(M)$ für properes f wohldefiniert ist und somit auch $H_c^k(f) : H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$.

50.16 Proposition.

Sei $f : M \rightarrow N$ eine propere glatte Abbildung zwischen zusammenhängenden orientierten m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten und $y \in N$ ein regulärer Wert von f . Dann ist

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}_x f \in \mathbb{Z},$$

wobei

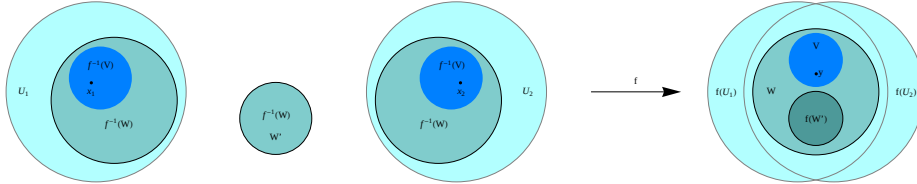
$$\text{sign}_x f := \begin{cases} +1 & \text{falls } T_x f : T_x M \rightarrow T_y N \text{ orientierungserhaltend,} \\ -1 & \text{falls } T_x f : T_x M \rightarrow T_y N \text{ orientierungsvertauschend ist.} \end{cases}$$

Beachte, daß nach dem Theorem [68, 21.17] von Sard so ein regulärer Wert y immer existiert und weil f proper ist, ist $f^{-1}(y)$ endlich.

Beweis. Sei $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Wir wählen paarweise disjunkte offene Koordinatenumgebungen U_i von x_i , s.d. $f : U_i \rightarrow f(U_i)$ ein die Orientierung erhaltender oder vertauschender Diffeomorphismus ist. Wir wollen erreichen, daß $V := f(U_i)$ unabhängig von i und $f^{-1}(V) = \bigsqcup_i U_i$ ist. Sei dazu $W \subseteq \bigcap_i f(U_i)$ eine kompakte Umgebung von y . Dann ist $W' := f^{-1}(W) \setminus \bigcup_i U_i \subseteq M \setminus f^{-1}(y)$ kompakt und somit $f(W')$ abgeschlossen und enthält nicht y . Sei $V \subseteq W \setminus f(W') \subseteq \bigcap_i f(U_i)$ eine Umgebung von y . Dann ist

$$f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W \setminus f(W')) = f^{-1}(W) \setminus f^{-1}(f(W')) \subseteq f^{-1}(W) \setminus W' \subseteq \bigcup_i U_i,$$

und indem wir U_i durch $f^{-1}(V) \cap U_i$ ersetzen dürfen wir o.B.d.A. $f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$ und $f(U_i) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V \subseteq \bigcap_i f(U_i) \subseteq f(U_i)$ also $f(U_i) = V$ annehmen.



Sei nun $w \in \Omega_c^m(N)$ mit $\text{Trg } w \subseteq V$ und $\int_M w = 1$. Dann ist $\text{Trg } f^*(w) \subseteq f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$ und

$$\int_M f^* w = \sum_i \int_{U_i} f^* w = \sum_i \text{sign}_{x_i} f \cdot \int_{f(U_i)} w = \sum_i \text{sign}_{x_i} f \cdot \int_M w. \quad \square$$

50.10 Folgerung.

1. $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
2. $f \sim g$ zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten $\Rightarrow \deg f = \deg g$.
3. f ist Diffeomorphismus $\Rightarrow \deg f = \pm 1$;
Weiters ist $\deg f = 1 \Leftrightarrow f$ orientierungserhaltend ist.
4. $\deg f \neq 0 \Rightarrow f$ ist surjektiv.

Beweis. (1) da $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(2) da dann $H^k(f) = H^k(g)$ nach 44.3.2.

(3) folgt aus (1) unter Verwendung von $\deg f \in \mathbb{Z}$ nach [50.16](#).

(4) Sei f nicht surjektiv. Dann ist $\deg(f) = 0$ nach [50.16](#), da jedes $y \in N \setminus f(M)$ regulärer Wert ist. Direkt sieht man das auch, indem man $\omega \in \Omega^m(N)$ so wählt, daß $\text{Trg } \omega \subseteq N \setminus f(M)$ und $\int_N \omega = 1$. Also ist $\deg f = \deg f \cdot \int_M \omega = \int_M f^* \omega = \int_M 0 = 0$. $\square$

50.11 Igelsatz.

Sei $\xi \in \mathfrak{X}(S^{2n})$. Dann gibt es ein $x \in S^{2n}$ mit $\xi(x) = 0$.

Beweis. Indirekt: Sei $\xi(x) \neq 0$ für alle x . Dann gibt es eine Homotopie zwischen Identität und Antipodalabbildung σ (dazu verbinden wir x mit $-x$ längs des Groß(halb)kreises in Richtung $\xi(x)$) und somit folgt $1 = \deg(\text{id}) = \deg(\sigma) = -1$ (siehe [50.7](#)), ein Widerspruch. $\square$

50.18 Mayer-Vietoris Sequenz für Kohomologie mit kompakten Träger.

Sei $M = U \cup V$ mit $U, V \subseteq M$ offen, dann existieren lineare Abbildungen δ_k , die die folgende lange Sequenz exakt machen:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{(j'_U, -j'_V)} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{i'_U + i'_V} H_c^k(U \cup V) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow H_c^{k+1}(U) \oplus H_c^{k+1}(V) \rightarrow H_c^{k+1}(U \cup V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

mit den Inklusionen $i_U : U \hookrightarrow U \cup V$, $i_V : V \hookrightarrow U \cup V$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$ und $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$ wobei die Abbildungen i'_U , j'_U , etc. durch Fortsetzen mit 0 gegeben sind.

Vgl. die mit [44.3.4](#).

Beweis. Wegen [44.4](#) genügt es die Exaktheit von

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(U \cap V) \rightarrow \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \rightarrow \Omega_c^k(U \cup V) \rightarrow 0$$

zu zeigen. Offensichtlich ist die erste Abbildung injektiv. Die zweite ist surjektiv, denn $\omega = h_U \omega + h_V \omega$, wobei $\{h_U, h_V\}$ eine Partition der 1 sei, welche $\{U, V\}$ untergeordnet ist. Die Zusammensetzung ist offensichtlich 0, und falls $i'_U(\omega_1) + i'_V(\omega_2) = 0$ ist, so ist $\text{Trg } \omega_1 = \text{Trg}(i'_U \omega_1) = \text{Trg}(i'_V \omega_2) = \text{Trg } \omega_2$, also $\omega := \omega_1|_{U \cap V} \in \Omega_c^k(U \cap V)$ und $j'_U(\omega) = \omega_1$ und $j'_V(\omega) = -\omega_2$. $\square$

50.35 Bemerkung.

Die Kohomologie H_c^* mit kompakten Träger ist viel schwerer auszurechnen als H^* , da das Homotopie-Axiom für sie nicht gilt. Z.B. ist $\mathbb{R}^m$ Homotopie-äquivalent zu $\{0\}$ und $H_c^0(\{0\}) = H^0(\{0\}) = \mathbb{R}$ aber $H_c^0(\mathbb{R}^m) = \{0\}$, denn jedes $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $df = 0$ muß konstant und somit gleich 0 sein. In anderes Beispiel ist $H_c^2(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, da der Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ orientierbar und 2-dimensional ist, aber $H_c^2(S^1) = H^2(S^1) = \{0\}$.

50.19 Theorem. Die exakte Sequenz eines Paares.

Sei $N \subseteq M$ eine kompakte Teilmannigfaltigkeit. Dann existiert eine lange exakte Sequenz in der Kohomologie:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_c^k(M \setminus N) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H_c^k(N) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(M \setminus N) \rightarrow H_c^{k+1}(M) \rightarrow H_c^{k+1}(N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Beweis. Beachte, daß

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M) \xrightarrow{\text{incl}^*} \Omega_c^k(N) \rightarrow 0$$

nicht exakt bei $\Omega_c^k(M)$ ist, denn Ker incl^* enthält alle $\omega \in \Omega_c^k(M)$ welche auf N verschwinden, während das Bild des Erweiterungsoperators $\Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M)$ aus jenen $\omega \in \Omega_c^k(M)$ besteht, welche auf einer Umgebung von N verschwinden. Deshalb ersetzen wir $\Omega_c^k(N) = \Omega^k(N)$ durch $\Omega^k(N \subseteq M)$, den Raum der Keime auf $N \subseteq M$ von glatten k -Formen. Also $\Omega^k(N \subseteq M) := \bigcup_{U \supseteq N} \Omega^k(U) / \sim$, wobei U die offenen Umgebungen von N in M durchläuft und $\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$ auf einer Umgebung von N in M .

Dann ist

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M) \xrightarrow{\text{incl}^*} \Omega^k(N \subseteq M) \rightarrow 0$$

offensichtlich exakt.

Aus [44.4](#) folgt nun die Existenz einer langen exakten Sequenz in der Kohomologie:

$$\dots \rightarrow H_c^k(M \setminus N) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H^k(\Omega^*(N \subseteq M)) \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(M \setminus N) \rightarrow \dots$$

Bleibt $H(\Omega^*(N \subseteq M)) \cong H(N)$ zu zeigen: Sei dazu $p : M \supseteq U \rightarrow N$ eine tubuläre Umgebung nach [\[72, 62.9\]](#). Wenn wir eine Metrik g auf $p : U \rightarrow N$ wählen, so sind die Mengen $U_n := \{\xi : g(\xi, \xi) \leq \frac{1}{n^2}\}$ eine Umgebungsbasis von N und $0^* : H^k(U_i) \rightarrow H^k(N)$ ein Isomorphismus, da U_n Homotopie-äquivalent zu N ist. Einschränken $\Omega^k(N \subseteq M) \rightarrow \Omega^k(N)$ induziert eine Abbildung $H^k(\Omega^*(N \subseteq M)) \rightarrow H^k(N)$. Diese ist surjektiv, denn die Zusammensetzung mit $H^k(U_i) \rightarrow H^k(\Omega^*(N \subseteq M))$ ist ein Isomorphismus. Sie ist auch injektiv, denn sei $[\omega] \in \Omega^k(N \subseteq M)$ geschlossen mit $\omega \in \Omega^k(U_i)$ und $\omega|_N \in \Omega^k(N)$ exakt. Dann ist $0 = [\omega] \in H^k(U_i)$, da $\text{incl}^*([\omega]) = [\omega|_N] = 0$, also ω exakt und damit auch $[\omega] \in \Omega^k(N \subseteq M)$ exakt, also verschwindet die Kohomologieklass $[[\omega]]$ von $[\omega]$ in $H^k(\Omega^*(N \subseteq M))$. $\square$

50.20 Folgerung.

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit kompakten Rand ∂M . Dannn existiert eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \rightarrow H_c^k(M \setminus \partial M) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H_c^k(\partial M) \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(M \setminus \partial M) \rightarrow H_c^{k+1}(M) \rightarrow H_c^{k+1}(\partial M) \rightarrow \dots \quad \square$$

50.33 Folgerung.

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m > 0 \end{cases}.$$

1. Beweis. Wir wenden [50.20](#) auf den abgeschlossenen Einheitsball $M \subseteq \mathbb{R}^m$ an. Dann ist $M \setminus \partial M \cong \mathbb{R}^m$, $\partial M = S^{m-1}$ und $H_c^k(M) = H^k(M) \cong H^k(\{*\}) = \{0\}$ für $k > 0$ und somit liefert [50.20](#) für $k > 0$ die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^k(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow 0$$

mit Anfang

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^0(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta_0} H_c^1(\mathbb{R}^m) \rightarrow 0$$

wegen $H_c^0(\mathbb{R}^m) = \{0\}$, siehe [50.35](#). Daraus folgt

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = H^{k-1}(S^{m-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } 1 < k = m \\ 0 & \text{für } 1 < k \neq m \end{cases}$$

und

$$H_c^1(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } m = 1 \\ 0 & \text{für } m > 1. \quad \square \end{cases}$$

2. Beweis. ($k = 0$) haben wir in [50.35](#) schon eingesehen.

($0 < k < n$) Es sei $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ mit $d\omega = 0$. Nach dem Poincaré-Lemma existiert ein $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $d\eta = \omega$. Sei B ein abgeschlossener Ball mit $\text{Trg } \omega \subseteq B$. Für $k = 1$ ist also η außerhalb B konstant, sagen wir c , und somit $\eta - c \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $d(\eta - c) = d\eta = \omega$. Ist $k > 1$ so ist jedenfalls $\eta|_{\mathbb{R}^n \setminus B}$ geschlossen und, wegen $\mathbb{R}^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $H^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^{k-1}(S^{n-1}) = \{0\}$ nach [44.5.13](#), existiert ein $\lambda \in \Omega^{k-2}(\mathbb{R}^n \setminus B)$ mit $d\lambda = \eta|_{\mathbb{R}^n \setminus B}$. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $f = 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus 2B$ und $f = 0$ auf einer Umgebung von B . Dann ist $f\lambda \in \Omega^{k-2}(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert und $\eta - d(f\lambda) \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ hat kompakten Träger in $2B$ mit $d(\eta - d(f\lambda)) = d\eta = \omega$. $\square$

50.36 Vorbereitung für den verallgemeinerten Jordanschen Kurvensatz.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ eine kompakte zusammenhängende Hyperfläche. Wir wollen zuerst zeigen, daß $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$ mindestens 2 Zusammenhangskomponenten besitzt. Sei dazu vorerst M orientiert. Für $p \notin M$ ist die Windungszahl von M bzgl. p definiert durch

$$w_M(p) := \deg(r_p|_M), \text{ wobei } r_p : x \mapsto \frac{1}{\|x - p\|}(x - p), \quad M \rightarrow S^m.$$

Es ist w_M konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$: Sei nämlich $t \mapsto p(t)$ eine Kurve in $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$, dann ist $(t, x) \mapsto r_{p(t)}(x)$ eine Homotopie und somit $t \mapsto \deg(r_{p(t)}|_M) = w_M(p(t))$ konstant. Bis auf einen Diffeomorphismus (mit kompakten Träger) ist $0 \in M$ und M nahe 0 durch eine Hyperebene $v^\perp$ gegeben. Wir behaupten, daß $w_p(M) - w_q(M) = \pm 1$ für p, q nahe 0 auf verschiedenen Seiten von $v^\perp$ und somit hat $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$ mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. In der Tat ist $t \mapsto r_{tv}|_{M \setminus \{0\}}$ eine Homotopie und für $x \in v^\perp$ mit $\|x\| \leq \delta$ ist das Bild eine Polkappe um v die für $t = 0$ zum Äquator degeneriert und dann in die andere Polkappe mutiert.



Erweitern wir diese Homotopie auf ganz M indem wir die Bilder von Punkten nahe 0 konstant nahe dem Pol v halten und die übrigen Punkte nicht in die Nähe der Pole gelangen lassen, so werden Punkte nahe dem Pol $-v$ nicht mehr getroffen. Sei nun y nahe $-v$ ein regulärer Wert für $r_{\pm v}$. Dann besitzt der Endwert ($t = 1$) der Homotopie ein Urbild x nahe 0 weniger als r_v und somit ist $w_M(-v) = w_M(v) + \text{sign}_x(r_{-v}) = w_M(v) \pm 1$ nach [50.16](#).

Sei nun M und N kompakt zusammenhängend aber nicht notwendig orientierbar. Wir definieren den mod-2 Grad von $f : M \rightarrow N$ durch $\deg_2(f) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} 1 \in \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, wobei y ein regulärer Wert von f sei.

Wir müssen zeigen, daß diese Anzahl modulo 2 nicht von der Wahl von y abhängt. Seien dazu vorerst f_0 und f_1 glatt homotop vermöge $H : [0, 1] \times M \subseteq \mathbb{R} \times M \rightarrow N$. O.B.d.A. ist $H(t, x) = f_i(x)$ für t nahe $i \in \{0, 1\}$ (Ersetze H durch $(t, x) \mapsto H(h(t), x)$ mit h konstant nahe 0 und nahe 1). Nach dem Beweis von [50.16](#) sind alle Werte nahe regulärer Werte selbst regulär (und haben die gleiche Anzahl von Urbildern). Somit dürfen wir (wegen dem Satz [68, 21.17](#) von Sard) annehmen, daß y ein regulärer Wert von H und auch von f_0 und f_1 ist. Damit ist $H^{-1}(y)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R} \times M$ die $\{0, 1\} \times M$ transversal schneidet. Die Spur $H^{-1}(y) \cap [0, 1] \times M$ ist somit eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen

zusammenhängenden kompakten 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand $\subseteq \partial([0, 1] \times M) = \{0, 1\} \times M$ und somit ist die Gesamtanzahl der Randpunkte $\{(i, x) : i \in \{0, 1\}, f_i(x) = y\}$ gerade, also ist

$$\sum_{x \in f_0^{-1}(y)} 1 \equiv - \sum_{x \in f_1^{-1}(y)} 1 \equiv \sum_{x \in f_1^{-1}(y)} 1 \pmod{2}$$

Sind nun y_0 und y_1 beides reguläre Werte von f , dann existiert eine Diffeotopie h_1 von N (d.h. ein Diffeomorphismus der mittels einer Homotopie bestehend aus lauter Diffeomorphismen mit der Identität verbunden werden kann) mit kompakten Träger die y_0 auf y_1 abbildet (die Äquivalenzklassen von Punkten bzgl. Diffeotopien sind offen: betrachte den Fluß Fl_t^ξ des Vektorfeld $\xi = f \cdot \frac{\partial}{\partial u^1}$ mit geeigneten f mit kompakten Träger) und somit ist $h_1 \circ f \sim f$ und y_1 regulärer Wert von $h_1 \circ f$ und von f , also $|f^{-1}(y_0)| = |(h_1 \circ f)^{-1}(y_1)| \equiv |f^{-1}(y_1)| \pmod{2}$.

Wenn wir die Windungszahl $w_M(p) \in \mathbb{Z}_2$ nun wie zuvor aber mit $\deg_2$ anstelle von $\deg$ definieren, so können wir den Beweis wie oben führen und erhalten $w_p(M) \neq w_q(M)$ für Punkte lokal auf verschiedenen Seiten von M .

50.23 Verallgemeinerter Jordanscher Kurvensatz.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine kompakte zusammenhängende Hyperfläche. Dann ist M orientierbar und $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ hat genau 2 Zusammenhangskomponenten und M ist der Rand beider. Insbesondere gilt dies für $M \cong S^n$.

Beweis. Die Kohomologiesequenz [50.19](#) des Paares $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist wegen [50.33](#)

$$\underbrace{H_c^n(\mathbb{R}^{n+1})}_{=0} \rightarrow H^n(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus M) \rightarrow \underbrace{H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})}_{\cong \mathbb{R}} \rightarrow \underbrace{H^{n+1}(M)}_{=0}$$

Somit ist $\dim H^n(M) + 1$ nach [44.5.8](#) die Anzahl der (nach [50.36](#) mindestens 2) Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$. Also ist $\dim H^n(M) \geq 1$ und damit M orientierbar, also $\dim H^n(M) = 1$ nach [50.5](#) und damit hat $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ genau $2 = \dim H^n(M) + 1$ Zusammenhangskomponenten.

Da nach den Argumenten aus [50.36](#) nahe $x \in M$ Punkte in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ sind, ist M der Rand jeder Komponente. $\square$

50.24 Folgerung.

Weder die projektive Ebene noch die Klein'sche Flasche läßt sich als Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ realisieren.

Beweis. Andernfalls wären sie nach [50.23](#) orientierbar. $\square$

50.34 Beispiel.

Selbst für orientierbare zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten M muß $H^1(M)$ nicht endlich dimensional sein. Sei z.B. $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $V \subseteq \mathbb{C}$ die Vereinigung der offenen Bälle um alle $z \in \mathbb{Z}$ mit Radius $\frac{1}{3}$. Dann ist $U \cap V \sim \bigcup_{\mathbb{Z}} S^1$ und somit liefert die Mayer-Vietoris [44.3.4](#) Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(U) \oplus \{0\} \rightarrow H^1(U \cap V) \xrightarrow{\delta} 0.$$

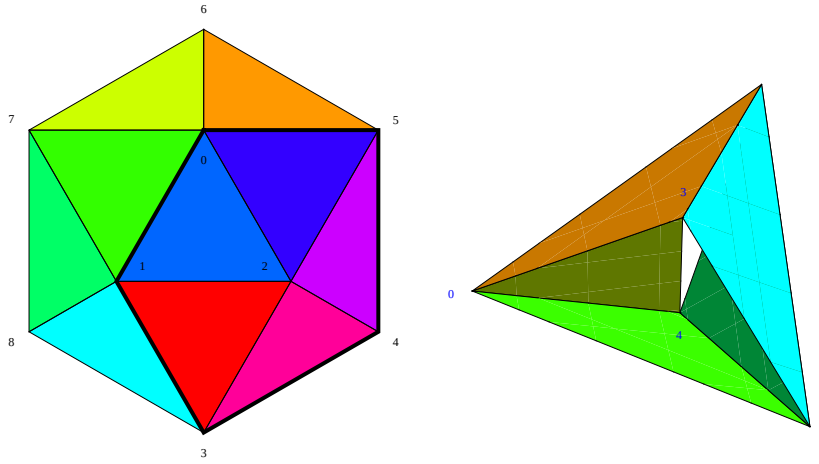
Also ist $H^1(U) \cong H^1(U \cap V) \cong H^1(\bigsqcup_{\mathbb{Z}} S^1) = \prod_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

50.25 Definition.

Analog zur Poincaré-Dualität $H^k(M) \rightarrow H^{m-k}(M)^*$ für kompakte zusammenhängende orientierbare M können wir $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$ für allgemeine zusammenhängende orientierbare M definieren. Dazu sei das CUP-PRODUKT $\cup : H^k(M) \times$

$H_c^j(M) \rightarrow H_c^{k+j}(M)$ definiert durch $[\alpha] \cup [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$ und die POINCARÉ-DUALITÄT $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$ die vermöge $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ induzierte lineare Abbildung.

Eine TRIANGULIERUNG ist eine endliche Familie von diffeomorphen Bildern $\{\sigma_i : i\}$ des STANDARD m -SIMPLEX $\Delta_m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \forall i : x^i \geq 0, \sum_i x^i = 1\}$, s.d. $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_i \cap \sigma_j$ ist eine k -Seite von σ_i und von σ_j , wobei eine k -SEITE das Bild der Teilmenge von Δ_m ist, die durch 0-Setzen von $m - k$ vielen Koordinaten entsteht. Man kann mit einigen Aufwand zeigen, daß jede glatte Mannigfaltigkeit eine Triangulierung besitzt, siehe [88] oder [117].



Eine Triangulierung der projektiven Ebene und des Möbiusbandes

50.26 Proposition.

Sei M eine zusammenhängende orientierte Mannigfaltigkeit. Dann ist die Poincaré-Dualität ein Isomorphismus $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$.

Beweis (für triangulierbare Mannigfaltigkeiten). Falls $M = U \cup V$ ist mit offenen U und V , s.d. der Satz für U , V und $U \cap V$ gilt, so folgt aus der Mayer-Vietoris Sequenz [44.3.4] und der dualen der Mayer-Vietoris Sequenz [50.18] für kompakte Träger

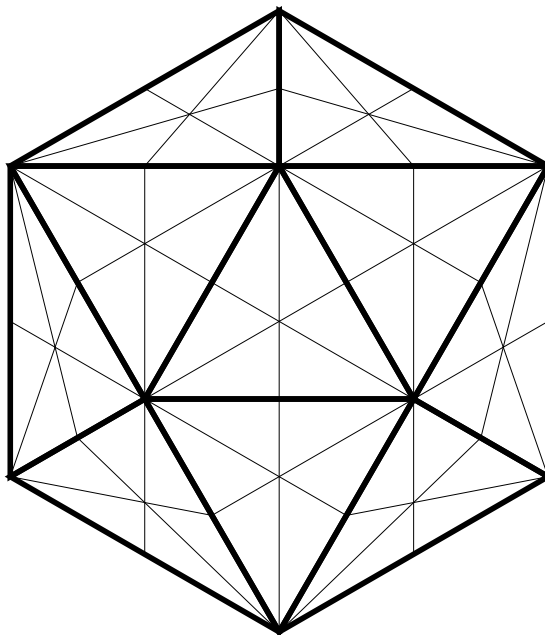
$$\begin{array}{ccccccccc}
 H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \rightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow & H^k(M) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \rightarrow & H^k(U \cap V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^{l+1}(U)^* \oplus H_c^{l+1}(V)^* & \rightarrow & H_c^{l+1}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^l(M)^* & \rightarrow & H_c^l(U)^* \oplus H_c^l(V)^* & \rightarrow & H_c^l(U \cap V)^*
 \end{array}$$

mittels nachstehenden 5-er Lemma [5.37] der Satz für M selbst, denn wie Aufgabe [EX32] zeigt kommutiert das Diagramm und die duale einer exakten Sequenz ist (wie man leicht zeigt) ebenfalls exakt.

Um dies für einen Induktionsbeweis zu nutzen wählen wir auf jedem Seitensimplex der Simplexe der Triangulierung einen “inneren” Punkt, z.B. den Schwerpunkt. Rekursiv definieren wir eine Überdeckung von M durch disjunkte Vereinigungen U_k offener kontrahierbarer Teilmengen von M wie folgt:

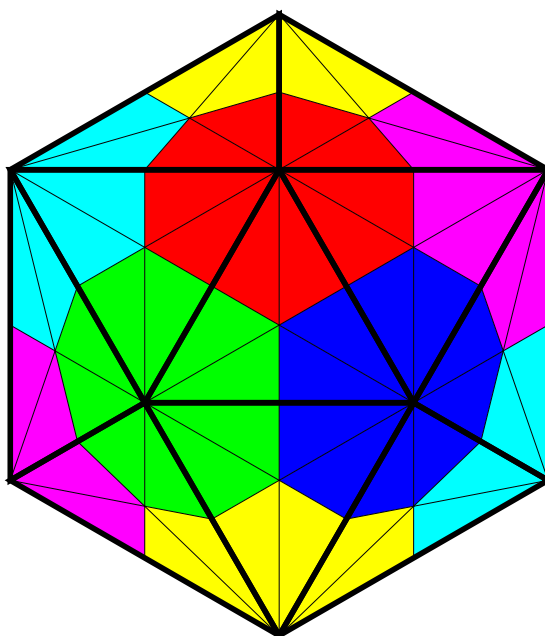
Es sei U_0 die disjunkte Vereinigung von geeignet gewählten kontrahierbaren Umgebungen jeder Ecke, die keinen der anderen inneren Punkte enthält.

Die Menge U_k bestehe dann aus der disjunkten Vereinigung von geeignet gewählten offenen kontrahierbaren Umgebungen der gewählten Punkte auf den Seiten der Dimension k .

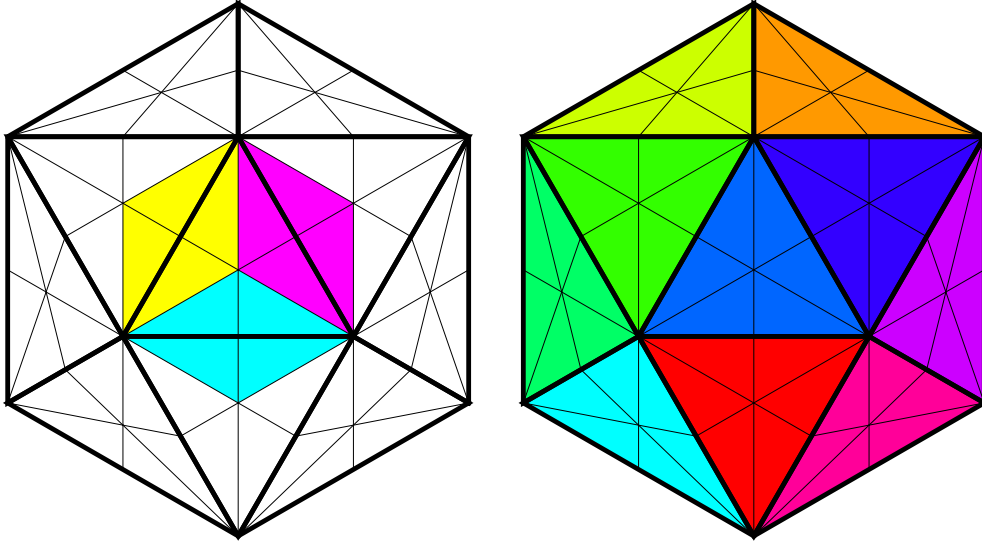


Explizit kann man das erreichen, indem man alle Simplexe betrachtet, die als Ecken die zuvor gewählten inneren Punkte haben, und zwar von aufsteigend geordneten Seiten eines Simplex der Triangulierung.

Nun wählt man U_0 als die Vereinigung aller solcher “offener” Simplexe die jeweils eine der ursprünglichen Ecken als Ecke haben.



Und allgemeiner nimmt man für U_k die Vereinigung aller solcher “offener” Simplexe die jeweils einen der inneren Punkte eines k -Simplexes als Ecke haben.



Offensichtlich ist $\sigma \subseteq \bigcup_{j \leq k} U_j$ für jeden (abgeschlossenen) k -Simplex σ und somit $\bigcup_{k=0}^m U_k = M$. Weiters ist $U_k \cong \bigsqcup_{\alpha_k} \mathbb{R}^m$ und $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j \cong \bigsqcup_{\alpha_k} S^{k-1} \times \mathbb{R}^{m-k+1}$.

Klarerweise gilt die Poincaré-Dualität für $\mathbb{R}^m$ (denn $H_0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R} = H_c^m(\mathbb{R}^m)^*$ und 0 sonst) und mittels Induktion folgt, daß sie auch für $S^m \times \mathbb{R}^k$ gilt (Siehe Aufgabe [EX31](#)). Da $H^k(\bigsqcup_{j \in J} M_j) \cong \prod_{j \in J} H^k(M_j)$ und $H_c^k(\bigsqcup_{j \in J} M_j) \cong \bigoplus_{j \in J} H_c^k(M_j)$ gilt, folgt sie auch für $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j$ und somit mittels Induktion für $\bigcup_{j \leq k} U_j$ und damit auch für $M = \bigcup_{j \leq \dim(M)} U_j$. $\square$

5.37 5'er Lemma.

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & A_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & A_5 \\
 f_1 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \cong & & f_5 \downarrow \cong \\
 B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten horizontalen Zeilen. Falls alle bis auf den mittleren vertikalen Pfeil Isomorphismen sind, so ist es auch dieser.

Beweis.

(f_3 ist injektive)

$$\begin{aligned}
 f_3 a_3 = 0 &\Rightarrow 0 = \psi_3 f_3 a_3 = f_4 \varphi_3 a_3 \\
 &\xrightarrow{f_4 \text{ inj.}} \varphi_3 a_3 = 0 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } A_3} \exists a_2 : a_3 = \varphi_2 a_2 \\
 &\Rightarrow 0 = f_3 a_3 = f_3 \varphi_2 a_2 = \psi_2 f_2 a_2 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } B_2} \exists b_1 : f_2 a_2 = \psi_1 b_1 \\
 &\xrightarrow{f_1 \text{ surj.}} \exists a_1 : b_1 = f_1 a_1 \\
 &\Rightarrow f_2 a_2 = \psi_1 f_1 a_1 = f_2 \varphi_1 a_1 \\
 &\xrightarrow{f_2 \text{ inj.}} a_2 = \varphi_1 a_1 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } A_2} a_3 = \varphi_2 a_2 = \varphi_2 \varphi_1 a_1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & a_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & a_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & 0 \\
f_1 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow \cong & & f_4 \downarrow \cong \\
b_1 & \xrightarrow{\psi_1} & f_2(a_2) & \xrightarrow{\psi_2} & 0 & \xrightarrow{\psi_3} & 0
\end{array}
\quad \bullet$$

(f_3 ist surjektiv)

$$\begin{aligned}
b_3 &\xrightarrow{f_4 \text{ surj.}} \exists a_4 : f_4 a_4 = \psi_3 b_3 \\
&\xrightarrow{\text{exakt bei } B_4} f_5 \varphi_4 a_4 = \psi_4 f_4 a_4 = \psi_4 \psi_3 b_3 = 0 \\
&\xrightarrow{f_5 \text{ inj.}} \varphi_4 a_4 = 0 \\
&\xrightarrow{\text{exakt bei } A_4} \exists a_3 : a_4 = \varphi_3 a_3 \\
&\Rightarrow \psi_3 f_3 a_3 = f_4 \varphi_3 a_3 = f_4 a_4 = \psi_3 b_3 \\
&\xrightarrow{\text{exakt bei } B_3} \exists b_2 : b_3 - f_3 a_3 = \varphi_2 b_2 \\
&\xrightarrow{f_2 \text{ surj.}} \exists a_2 : b_2 = f_2 a_2 \\
&\Rightarrow b_3 = f_3 a_3 + \psi_2 b_2 = f_3 a_3 + \psi_2 f_2 a_2 = f_3(a_3 + \varphi_2 a_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
a_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & a_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & a_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & \varphi_4 a_4 \\
f_2 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow \cong & & f_4 \downarrow \cong & & f_5 \downarrow \cong \\
b_2 & \xrightarrow{\psi_2} & b_3 & \xrightarrow{\psi_3} & \psi_3 b_3 & \xrightarrow{\psi_4} & 0
\end{array}
\quad \square$$

50.28 Proposition.

Sei K eine Triangulierung der kompakten Mannigfaltigkeit m und α_i die Anzahl der i -Simplexe von K . Dann ist

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i \alpha_i.$$

Beweis. Wir verwenden die im Beweis von [50.26](#) konstruierten offene Mengen $U_k \subseteq M$, welche disjunkte Vereinigung von α_k vielen Mengen diffeomorph zu $\mathbb{R}^m$ sind und für die $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j$ disjunkte Vereinigung α_k vieler zu $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{m-k+1} \sim S^{k-1}$ diffeomorpher Mengen sind. Somit gilt nach [44.5.8](#) für die Euler-Charakteristik:

$$\begin{aligned}
\chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + \alpha_k &= \chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + \chi(U_k) = \chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) + \chi\left(U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j\right) \\
&= \chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) + (1 + (-1)^{k-1})\alpha_k.
\end{aligned}$$

Also

$$\chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) = \chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + (-1)^k \alpha_k$$

und damit

$$\chi(M) = \chi\left(\bigcup_{j \leq m} U_j\right) = \chi(\emptyset) + \sum_{j \leq m} (-1)^j \alpha_j = \sum_{j \leq m} (-1)^j \alpha_j. \quad \square$$

50.27 Definition. Thom- und Euler-Klasse eines Vektorbündels.

Sei $p : E \rightarrow M$ ein orientiertes k -Ebenenbündel über einer m -dimensionalen kompakten orientierten zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M . Das Cup-Produkt

$$\cup : H^m(E) \times H_c^k(E) \rightarrow H_c^{m+k}(E) \cong \mathbb{R}, \quad [\alpha] \cup [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$$

induziert nach [50.25](#) und [50.26](#) die Poincaré-Dualität

$$H_c^k(E) \xrightarrow{\cong} H^m(E)^*, \quad [\beta] \mapsto ([\alpha] \mapsto \int_E \alpha \wedge \beta).$$

Da $0 : M \hookrightarrow E$ ein Deformationsretrakt mit Retraktion p ist, ist $H^m(M) \cong H^m(E)$, vermöge $[\alpha] \mapsto [p^*(\alpha)]$ und somit

$$H_c^k(E) \cong H^m(E)^* \cong H^m(M)^*$$

vermöge

$$[\beta] \mapsto ([\alpha] \mapsto \int_E \alpha \wedge \beta) \mapsto ([\gamma] \mapsto [p^*(\gamma)] \mapsto \int_E p^*(\gamma) \wedge \beta).$$

Es ist $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^* \cong H^m(M)^*$, vermöge $1 \mapsto \int_M (\cdot : H^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, [\gamma] \mapsto \int_M \gamma)$. Somit existiert eine eindeutige Klasse $U(p) = [\tau] \in H_c^k(E)$, die sogenannte THOM-KLASSE des k -Ebenenbündels p , mit

$$\int_E p^*(\gamma) \wedge \tau = \int_M \gamma \text{ für alle } [\gamma] \in H^m(M).$$

Die EULER-KLASSE $\chi(p) \in H^k(M)$ des k -Ebenenbündels p ist dann als

$$\chi(p) := 0^*(U(p)) = s^*(U(p))$$

definiert, wobei $0 : M \hookrightarrow E$ der 0-Schnitt bzw. s ein beliebiger (klarerweise dazu homotoper) Schnitt von p ist.

Falls $p : E \rightarrow M$ einen nirgends verschwindenden Schnitt s besitzt, so ist $\chi(p) = (K \cdot s)^*(U(p)) = 0$, wobei K so groß gewählt wurde, daß $\text{Bild}(K \cdot s) \cap \text{Trg}(\tau) = \emptyset$ für $[\tau] = U(p)$.

50.29 Proposition.

Sei M eine zusammenhängende kompakte orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei weiters $p : E \rightarrow M$ ein orientiertes k -Ebenenbündel, E_x seine Faser für $x \in M$ und $j_x : E_x \hookrightarrow E$ die Inklusion.

Dann ist die Thom-Klasse $U(p) = [\tau]$ das eindeutige Element aus $H_c^k(E)$ mit $\int_{E_x} j_x^*(\tau) = 1$ für alle $x \in M$,

Beweis. Es sei $U = [\tau] \in H_c^k(E)$ die Thom-Klasse von p . Sei weiters $\mu \in \Omega^m(M)$ mit $\int_M \mu = 1$, dann ist $\int_E p^*(\mu) \wedge \tau = \int_M \mu = 1$ nach Definition von U . Sei nun $W \cong \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge von M für welche $E|_W$ trivial ist, also o.B.d.A. $E|_W \cong W \times \mathbb{R}^k$ und $p = \text{pr}_1$ sowie $j_x : v \mapsto (x, v)$. Dann existiert ein $K > 0$ mit $\text{Trg}(\tau|_{p^{-1}(W)}) \subseteq W \times \{v : \|v\| < K\}$ und sei vorerst $\text{Trg}(\mu) \subseteq W$. Die Kontraktion von W auf $x \in W$ induziert eine glatte Homotopie $H : W \times \mathbb{R}^k \times I \rightarrow W \times \mathbb{R}^k$ mit $H_0 = \text{id}$ und $H_1 = (\text{konst}_x, \text{pr}_2) = j_x \circ \text{pr}_2$. Es gilt $\text{Trg}(H^*\tau) \subseteq H^{-1}(\text{Trg} \tau) \subseteq \{(y, v, t) : \|v\| < K\}$. Damit ist $\text{Trg}(\lambda) \subseteq \{(y, v) : \|v\| < K\}$ für $\lambda := (I_0^1 \circ \iota_\xi \circ H^*)(\tau) \in \Omega(W \times \mathbb{R}^k)$ und damit nach dem Beweis von [44.3.2](#)

$$(j_x \circ \text{pr}_2)^*\tau - \tau = (H_1)^*(\tau) - (H_0)^*(\tau) = d\lambda.$$

Somit ist (siehe Aufgabe [EX28](#))

$$\int_{W \times \mathbb{R}^k} p^*(\mu) \wedge \tau = \int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge \text{pr}_2^* j_x^* \tau - \int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \int_W \mu \cdot \int_{\mathbb{R}^k} j_x^* \tau,$$

denn $\text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \pm d(\text{pr}_1^* \mu \wedge \lambda)$ und damit $\int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \pm \int_{W \times \mathbb{R}^k} d(\text{pr}_1^* \mu \wedge \lambda) = 0$. Folglich ist $\int_{\mathbb{R}^k} j_x^* \tau$ unabhängig von $x \in W$ und wir bezeichnen diesen Wert mit $\int_{\mathbb{R}^k} j^* \tau$. Aus $\int_E p^*(\mu) \wedge \tau = 1$ und $\int_M \mu = 1$ folgt $\int_{\mathbb{R}^k} j^* \tau = 1$ nun mittels Partition der 1, d.h. U hat die gewünschte Eigenschaft.

Nun zur Eindeutigkeit: Wegen $H_c^k(E) \cong \mathbb{R}$ gilt $U' = cU$ für jedes andere $U' \in H_c^k(E)$ mit einem $c \in \mathbb{R}$. Hat dieses auch die geforderte Eigenschaft so folgt $j_x^* U' = j_x^*(cU) = c j_x^* U$ und somit folgt $c = 1$ wegen $\int_{E_x} j_x^* U' = 1 = \int_{E_x} j_x^* U$. $\square$

50.30 Definition. Index eines Vektorfelds in einer isolierten Nullstelle.

Sei ξ ein Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ mit isolierter Nullstelle 0. Dann ist der INDEX von ξ bei 0 definiert durch

$$\text{ind}_0(\xi) = \deg\left(r \circ \xi \circ i : S^{m-1} \hookrightarrow U \setminus \{0\} \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow S^{m-1}\right),$$

wobei $r(x) := \frac{1}{\|x\|}x$ und $i : S^{m-1} \hookrightarrow U \setminus \{0\}$ die Einbettung einer samt ihrem Inneren in $\{0\} \cup \xi^{-1}(0) \subseteq U$ enthaltenen Sphäre ist. Dieser Index ist invariant unter Diffeomorphismen: In der Tat, wenn h ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus mit $h(0) = 0$ ist, dann ist

$$H(x, t) := \begin{cases} \frac{h(tx)}{t} & \text{für } t > 0 \\ h'(0)(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

eine glatte Homotopie zwischen h und $h'(0)$ lokal um 0, und, da $GL_+(\mathbb{R}^m)$ zusammenhängend ist, ist weiters $h'(0)$ glatt homotop zu id . Somit ist $r \circ \xi \sim r \circ h^* \xi$ auf $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ nahe 0 und damit $\deg(r \circ \xi \circ i) = \deg(r \circ h^* \xi \circ i)$ für $h^* \xi := (Th)^{-1} \circ \xi \circ h$. Um das auch für nicht-orientierungserhaltende h zu bekommen genügt es speziell $h : (x^1, \dots, x^{m-1}, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^{m-1}, -x^m)$ zu betrachten. Dann ist $h^* \xi = h^{-1} \circ \xi \circ h$ und somit $r \circ h^* \xi \circ i = r \circ h^{-1} \circ \xi \circ h \circ i = h^{-1} \circ r \circ \xi \circ i \circ h$ also

$$\deg(r \circ h^* \xi \circ i) = \deg(h^{-1} \circ r \circ \xi \circ i \circ h) \stackrel{\text{50.10.1}}{=} \deg(r \circ \xi \circ i).$$

Das radiale Vektorfeld $x \mapsto x$ hat offensichtlich Index 1 bei 0. Allgemeiner hat ein lineares Vektorfeld ξ am $\mathbb{R}^m$, welches diagonalisierbar mit k negativen und $m - k$ positiven Eigenwerten ist, Index $(-1)^k$, denn bis auf lineare orientierungserhaltende Isomorphismen ist es von der Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$$

und hat eingeschränkt auf S^{m-1} Abbildungsgrad $(-1)^k$ (e_m ist regulärer Wert von $\xi \circ i = r \circ \xi \circ i$ mit einzigen Urbild e_m und $\det(T_{e_m} \xi|_{S^{m-1}}) = (-1)^k$).

Für ein Vektorfeld ξ auf einer Mannigfaltigkeit mit isolierter Nullstelle x definieren wir den INDEX $\text{ind}_x \xi$ als $\text{ind}_0 \tilde{\xi}$ für eine Kartendarstellung $\tilde{\xi}$ von ξ zentriert bei x .

50.31 Proposition.

Sei M eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $[\mu] \in H_c^m(M)$ mit $\int_M \mu = 1$. Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit nur isolierten Nullstellen. Dann ist

$$\chi(\pi_M : TM \rightarrow M) = \left(\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi \right) \cdot [\mu] \in H^m(M).$$

Beweis. Sei $[\tau] \in H_c^k(TM)$ die Thom-Klasse von $p = \pi_M : TM \rightarrow M$. Wegen $\chi(\pi_M) := \xi^*([\tau])$ müssen wir $\int_M \xi^*(\tau) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi$ zeigen. Sei $\xi^{-1}(0) =: \{x_1, \dots, x_k\}$ und U_i zu einem abgeschlossenen Ball diffeomorphe Kartenumgebungen von x_i , also $TM|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^m$ trivial. Somit existiert ein $K > 0$ (o.B.d.A. $K = 1$) mit $\text{Trg}(\tau|_{U_i}) \subseteq \{(x, v) : \|v\| < K\}$ für alle i . Durch eine Homothetie können wir erreichen, daß $\|\xi_x\| \geq 1$ für all $x \notin \bigcup_i U_i$ gilt, d.h. $\text{Trg}(\xi^* \tau) \subseteq$

$\xi^{-1}(\text{Trg } \tau) \subseteq \bigcup_{i=1}^k u(U_i)$. Damit ist

$$\int_M \xi^*(\tau) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \xi^*(\tau)$$

und es genügt $\int_{U_i} \xi^*(\tau) = \text{ind}_{x_i} \xi$ zu zeigen. Der Einfachheit halber lassen wir den Index i im Rest des Beweises weg. Im Beweis von [50.29](#) haben wir $\text{pr}_2^* j_x^* \tau - \tau = d\lambda$ für ein $\lambda \in \Omega(U \times \mathbb{R}^m)$ mit $\text{Trg}(\lambda) \subseteq \{(y, v) : \|v\| < 1\}$ gezeigt. Für alle $y \in \partial U$ gilt $\|\xi_y\| \geq 1$ und somit $\lambda(\xi_y) = 0$, also ist

$$\int_U \xi^*(\tau) = \int_U \xi^* \text{pr}_2^* j_x^* \tau - \int_U \xi^* d\lambda = \int_U \xi^* \text{pr}_2^* j_x^* \tau - \int_{\partial U} \xi^* \lambda = \int_U \xi^* \text{pr}_2^* j_x^* \tau.$$

Wegen dem Poincaré-Lemma [44.5.6](#) ist $j_x^* \tau = d\rho$ für ein $\rho \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$. Für $y \in U \setminus \{x\}$ sei $\bar{\xi}(y) := \frac{1}{|\xi(y)|} \xi(y)$. Dann ist $\bar{\xi}|_{\partial U}$ glatt homotop zu $\xi|_{\partial U}$ und somit

$$\begin{aligned} \int_U \xi^* \text{pr}_2^* j_x^* \tau &= \int_U \xi^* \text{pr}_2^* d\rho = \int_{\partial U} \xi^* \text{pr}_2^* \rho = \int_{\partial U} \bar{\xi}^* \text{pr}_2^* \rho = \int_{\iota(S^{m-1})} (\text{pr}_2 \circ \bar{\xi})^* \rho \\ &= \int_{S^{m-1}} (\text{pr}_2 \circ \bar{\xi} \circ \iota)^* \rho = \deg(r \circ \xi \circ \iota) \cdot \int_{S^{m-1}} \rho = \text{ind}_x \xi \cdot 1, \end{aligned}$$

denn mit $D := \{v \in \mathbb{R}^m : \|v\| \leq 1\}$ ist

$$\int_{S^{m-1}} \rho = \int_{\partial D} \rho = \int_D d\rho = \int_D j_x^* \tau = \int_{\mathbb{R}^m} j_x^* \tau \stackrel{\text{50.29}}{=} 1. \quad \square$$

50.32 Proposition.

Sei M eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit nur isolierten Nullstellen. Dann ist

$$\chi(M) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \int_M \chi(\pi_M).$$

Beweis. Für $\mu \in \Omega^m(M)$ mit $\int_M \mu = 1$ gilt nach [50.31](#) für jedes Vektorfeld ξ

$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi \cdot [\mu] = \chi(\pi_M)$$

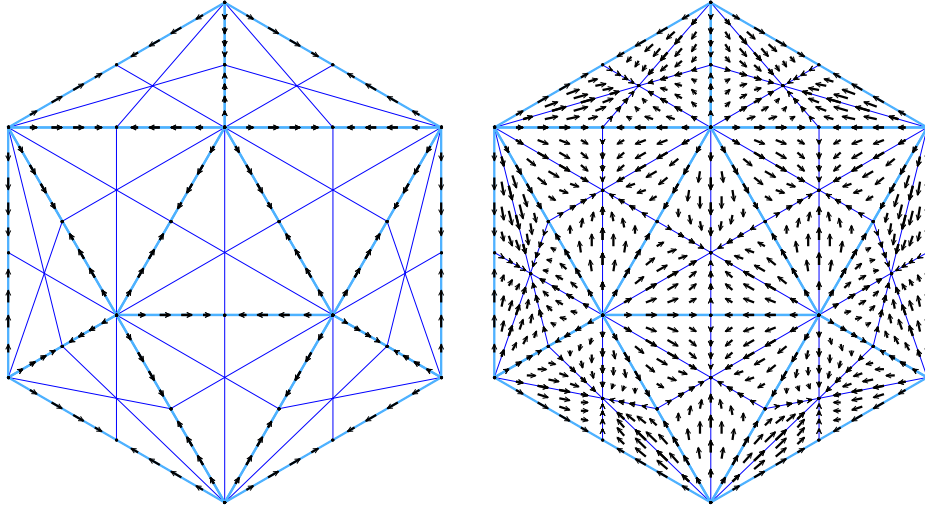
und somit

$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \int_M \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \cdot \mu = \int_M \chi(\pi_M).$$

Es genügt also eine Vektorfeld ξ zu finden mit

$$\chi(M) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi.$$

Wir verwenden dazu eine endliche Triangulierung und wie im Beweis von [50.26](#) auf jedem Seitensimplex einen “inneren” Punkt. Nach [50.28](#) ist $\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_k$, wenn α_k die Anzahl der k -Simplexe bezeichnet. Das Vektorfeld mit genau diesen Punkten als Nullstellen wählen wir nun rekursiv auf den k -Simplex so, daß es die gewählten inneren Punkte als Senken hat.



Der Index so eines Vektorfelds ξ ist $(-1)^k$ in diesen inneren Punkten der k -Simplexes nach dem in [50.30](#) Gesagten und somit ist

$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_k = \chi(M). \quad \square$$

50.37 Zeitabhängige Vektorfelder.

Sei ξ ein zeitabhängiges Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M , d.h. eine Abbildung $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ mit $\pi_M \circ \xi = \text{pr}_2$. Für $t \in M$ bezeichnen wir mit ξ_t das Vektorfeld $x \mapsto \xi(t, x)$ auf M . Durch

$$\tilde{\xi} : \mathbb{R} \times M \rightarrow T(\mathbb{R} \times M) \cong T\mathbb{R} \times TM, \quad (t, x) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}, \xi(t, x) \right)$$

ist dann ein (zeitunabhängiges) Vektorfeld auf $\mathbb{R} \times M$ gegeben, welches nach [72, 28.3](#) einen lokalen Fluß $\text{Fl}^{\tilde{\xi}}$ besitzt, d.h.

$$\text{Fl}^{\tilde{\xi}}(t, x; 0) = (t, x) \text{ und } \frac{\partial}{\partial s} \text{Fl}^{\tilde{\xi}}(t, x; s) = \tilde{\xi}(\text{Fl}^{\tilde{\xi}}(t, x; s)).$$

Insbesondere ist $(\text{pr}_1 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(t, x; 0) = t$ und $\frac{\partial}{\partial s} (\text{pr}_1 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(t, x; s) = 1$, also

$$(\text{pr}_1 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(t, x; s) = t + s.$$

Sei $\text{Fl}^{\xi}(x, s) := (\text{pr}_2 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(0, x; s)$. Dann ist $\text{Fl}^{\xi}(x, 0) = x$ und

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{Fl}^{\xi}(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} (\text{pr}_2 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(0, x; s) = \xi(\text{Fl}^{\tilde{\xi}}(0, x; s)) = \xi(0 + s, \text{Fl}^{\xi}(x, s)),$$

also $s \mapsto \text{Fl}^{\xi}(x, s)$ die Integralkurve des zeitabhängigen Vektorfelds ξ die bei x startet. Wir setzen wieder $\text{Fl}_t^{\xi}(x) := \text{Fl}^{\xi}(x, t)$. Beachte jedoch, daß Fl^{ξ} trotz der benutzten Bezeichnung NICHT die Flußeigenschaft $\text{Fl}_{t+s}^{\xi} = \text{Fl}_t^{\xi} \circ \text{Fl}_s^{\xi}$ besitzt.

Der Einfachheit halber setzen wir nun M als kompakt voraus. Dann ist Fl^{ξ} global definiert. Sei nun $\omega \in \Omega^k(M)$ dann ist $t \mapsto (\text{Fl}_t^{\xi})^* \omega$ eine glatte Kurve in (den lokalkonvex Vektorraum) $\Omega^k(M)$, oder äquivalent für jedes $x \in M$ ist $t \mapsto ((\text{Fl}_t^{\xi})^* \omega)(x)$ eine glatte Kurve in den endlich dimensional Vektorraum $\Lambda^k T_x M^* \cong L_{\text{alt}}^k(T_x M; \mathbb{R})$.

Beh.: $\frac{\partial}{\partial t}(\text{Fl}_t^\xi)^*(\omega) = (\text{Fl}_t^\xi)^*(\mathcal{L}_{\xi_t}\omega)$

Der Kürze halber setzen wir $\varphi_t := \text{Fl}_t^\xi$. Für $x \in M$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left(\varphi_{t+s} \circ (\varphi_t)^{-1} \right)(x) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \varphi_{t+s} \left((\varphi_t)^{-1}(x) \right) = \xi_{t+0} \left(\varphi_t \left((\varphi_t)^{-1}x \right) \right) \\ &= \xi_t(x) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Fl}_s^{\xi_t}(x) \end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\text{Fl}_t^\xi)^*(\omega) &= \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t)^*(\omega) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\varphi_{t+s})^*(\omega) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\varphi_t)^* \left((\varphi_{t+s} \circ (\varphi_t)^{-1})^*(\omega) \right) \\ &= (\varphi_t)^* \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\varphi_{t+s} \circ (\varphi_t)^{-1})^*(\omega) \right) = (\text{Fl}_t^\xi)^* \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s^{\xi_t})^*(\omega) \right) \\ &= (\text{Fl}_t^\xi)^*(\mathcal{L}_{\xi_t}\omega). \end{aligned}$$

50.38 Darboux's Theorem.

Es seien ω_0 und ω_1 symplektische Formen auf einer Mannigfaltigkeit M und $x \in M$ mit $\omega_0(x) = \omega_1(x)$. Dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus f von M bei x mit $f^*(\omega_1) = \omega_0$ lokal um x .

Beweis. Wir betrachten die Gerade $t \mapsto \omega_t := \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) \in Z^2(M)$. Es genügt eine Kurve $t \mapsto \varphi_t \in \text{Diff}(M)$ zu finden mit $(\varphi_t)^*(\omega_t) = \omega_0$. Für das zugehörige zeitabhängige Vektorfeld $\xi_t(x) := \xi(t, x) := \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x)$ wäre $\text{Fl}_t^\xi = \varphi_t$ und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \omega_0 = \frac{\partial}{\partial t} \left((\varphi_t)^*(\omega_t) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t)^* \right) (\omega_t) + (\varphi_t)^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \omega_t \right) \\ &\stackrel{\text{50.37}}{=} (\varphi_t)^* \left(\mathcal{L}_{\xi_t} \omega_t + \omega_1 - \omega_0 \right). \end{aligned}$$

Da φ_t lokale Diffeomorphismen sind, ist dies (wegen $d\omega_t = 0$) äquivalent zu $di_{\xi_t} \omega_t = \mathcal{L}_{\xi_t} \omega_t = \omega_0 - \omega_1$.

Wegen $d(\omega_0 - \omega_1) = 0$ existiert lokal ein λ mit $d\lambda = \omega_0 - \omega_1$ und, da ω_t lokal um x (wegen $\omega_0(x) = \omega_1(x)$) nicht degeneriert ist, ein eindeutiges lokales zeitabhängiges Vektorfeld $t \mapsto \xi_t$ mit $i_{\xi_t} \omega_t = \lambda$. Wenn wir $\varphi_t := \text{Fl}_t^\xi$ setzen, so ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((\varphi_t)^*(\omega_t) \right) = (\varphi_t)^* \left(di_{\xi_t} \omega_t + \omega_1 - \omega_0 \right) = (\varphi_t)^* (d\lambda + \omega_1 - \omega_0) = 0,$$

also $(\varphi_t)^*(\omega_t) = \omega_0$ für alle t und insbesondere $\varphi_1^*(\omega_1) = \omega_0$. $\square$

50.39 Folgerung.

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann existieren lokale Koordinaten $(q^1, \dots, p^1, \dots)$ auf M mit $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$ lokal.

Beweis. In [72, 14.9] haben wir gezeigt, daß lokale Koordinaten $\psi^{-1} = (q^1, \dots, p^1, \dots)$ auf M existieren s.d. $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$, i.e. $\psi^*(\omega) = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i} \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$, in einem Punkt gilt. Nach 50.38 existiert weiters ein lokaler Diffeomorphismus φ des $\mathbb{R}^{2n}$ mit $\varphi^*(\psi^*(\omega)) = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i}$ lokal um diesen Punkt. In den neuen Koordinaten $(q^1, \dots, p^1, \dots) := \psi \circ \varphi$ ist somit $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$ lokal. $\square$

Damit können wir die letzte Aussage über die Beschreibung der Hamilton'schen Vektorfelder aus [45.8](#) präzise machen. Für Riemann-Mannigfaltigkeiten (M, g) erinnere man sich dazu an

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathfrak{X}_g(M) & \twoheadrightarrow & H^1(M) & \longrightarrow 0 \\
 & & \nearrow & \text{grad} & \searrow & & \\
 & C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(M) & & & \\
 & \parallel & & \downarrow \cong & & & \\
 H^0(M) & \xrightarrow{\quad} & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) \\
 \uparrow & & \uparrow & \searrow d & \nearrow & & \\
 0 \longrightarrow & Z^0(M) & \xrightarrow{\quad} & Z^1(M) & \twoheadrightarrow & H^1(M) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

mit exakten oberen und unteren Rand. Dabei ist $\sharp\xi = i_\xi g$ für jedes Vektorfeld ξ und $\mathfrak{X}_g(M) := \{\xi \in \mathfrak{X}(M) : di_\xi g = 0\}$.

50.40 Proposition.

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann existiert folgende exakte Sequenz von Lie-Algebren:

$$0 \rightarrow H^0(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{X}_\omega(M) \rightarrow H^1(M) \rightarrow 0,$$

wobei $\mathfrak{X}_\omega(M) := \{\xi \in \mathfrak{X}(M) : \mathcal{L}_\xi \omega = 0\}$ die Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{X}(M)$ der lokal Hamilton'schen Vektorfelder ist, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit der Poisson-Klammer und $H^0(M)$ und $H^1(M)$ Abel'sche Lie-Algebren sind.

Beweis. Die Abbildung $H^0(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist die Inklusion der lokal konstanten Funktionen. Die Abbildung $C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ordnet jeder Funktion f das zugehörige Hamilton'sche Vektorfeld X_f mit $i_{X_f} \omega = df$ zu, siehe [45.8](#) und hat wegen $\mathcal{L}_{X_f} \omega = di_{X_f} \omega + i_{X_f} d\omega = d^2 f + i_{X_f} 0 = 0$ Werte in $\mathfrak{X}_\omega(M)$. Die Abbildung $\mathfrak{X}_\omega(M) \rightarrow H^1(M)$ ist durch $\xi \mapsto [i_\xi \omega]$ gegeben und wegen $di_\xi \omega = \mathcal{L}_\xi \omega - i_\xi d\omega = 0$ wohldefiniert.

Wir zeigen zuerst die Exaktheit als lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen:

Bei $H^0(M)$ ist das offensichtlich und auch bei $C^\infty(M, \mathbb{R})$, denn $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist genau dann in $H^0(M)$, wenn es lokal konstant, also $df = 0$ ist, und das ist wegen $df = i_{X_f} \omega$ und der nicht-Degeneriertheit von ω mit $X_f = 0$ äquivalent.

Exaktheit bei $\mathfrak{X}_\omega(M)$ gilt, denn $[i_\xi \omega] = 0 \Leftrightarrow \exists f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : i_\xi \omega = df$, i.e. $\xi = X_f$.

Exaktheit bei $H^1(M)$ gilt, denn sei $[\alpha] \in H^1(M)$ (also $d\alpha = 0$). Dann existiert ein $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ mit $i_\xi \omega = \alpha$. Es ist $\xi \in \mathfrak{X}_\omega(M)$, denn $\mathcal{L}_\xi \omega = di_\xi \omega + i_\xi d\omega = d\alpha + 0 = 0$.

Offensichtlich ist jeder Vektorraum (also insbesondere $H^0(M)$ und $H^1(M)$) mit der Lie-Klammer $[\cdot, \cdot] := 0$ eine Lie-Algebra.

Es ist $\mathfrak{X}_\omega(M)$ eine Teil-Lie-Algebra von $\mathfrak{X}(M)$, denn für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_\omega(M)$ ist $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]} \omega =$

$$\stackrel{\text{42.7}}{=} [\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta] \omega = \mathcal{L}_\xi 0 - \mathcal{L}_\eta 0 = 0.$$

Die POISSON-KLAMMER auf $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist definiert durch $\{f, g\} := \omega(X_g, X_f) = i_{X_f} i_{X_g} \omega = i_{X_f} dg = \mathcal{L}_{X_f} g$. Es vertauscht $f \mapsto X_f$ die Klammern, denn

$$\begin{aligned} i_{X_{\{f, g\}}} \omega &= d(\{f, g\}) = d(\mathcal{L}_{X_f} g) = \mathcal{L}_{X_f} dg = \mathcal{L}_{X_f} i_{X_g} \omega - i_{X_f} \underbrace{\mathcal{L}_{X_g} \omega}_{=0} \\ &= [\mathcal{L}_{X_f}, i_{X_g}] \omega \stackrel{42.7}{=} i_{[X_f, X_g]} \omega \end{aligned}$$

also ist $X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$. Die Poisson-Klammer macht $C^\infty(M, \mathbb{R})$ zu einer Lie-Algebra, denn

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \omega(X_g, X_f) = -\omega(X_f, X_g) = -\{g, f\} \\ \{\{f, g\}, h\} &= \mathcal{L}_{X_{\{f, g\}}} h = \mathcal{L}_{[X_f, X_g]} h = [\mathcal{L}_{X_f}, \mathcal{L}_{X_g}] h \\ &= (\mathcal{L}_{X_f} \mathcal{L}_{X_g} - \mathcal{L}_{X_g} \mathcal{L}_{X_f}) h = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}. \end{aligned}$$

Die Inklusion $H^0(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus, denn $\{f, g\} = i_{X_f} dg = 0$ falls $g \in H^0(M)$.

Schließlich ist $\xi \mapsto [i_\xi \omega]$ auch ein Lie-Algebra-Homomorphismus, denn für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_\omega(M)$ ist

$$i_{[\xi, \eta]} \omega \stackrel{42.7}{=} [\mathcal{L}_\xi, i_\eta] \omega = (\mathcal{L}_\xi i_\eta - i_\eta \mathcal{L}_\xi) \omega = \mathcal{L}_\xi i_\eta \omega = i_\xi \underbrace{di_\eta \omega}_{=0} + di_\xi i_\eta \omega,$$

also $[i_{[\xi, \eta]} \omega] = 0$. □

50.41 Proposition.

Es seien $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^m(M)$ zwei nirgends verschwindende Differentialformen auf einer kompakten orientierbaren Mannigfaltigkeit M mit $\int_M \omega_0 = \int_M \omega_1$. Dann existiert ein (Orientierungs-erhaltender) Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$ mit $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$.

Beweis. Wie im Beweis von 50.38 betrachten wir $\omega_t := \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Wegen $\int_M \omega_0 = \int_M \omega_1$ ist $[\omega_0 - \omega_1] = 0$, also existiert ein $\lambda \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $d\lambda = \omega_0 - \omega_1$. Da ω_t nirgends verschwindet existiert ein eindeutiges zeitabhängiges Vektorfeld $t \mapsto \xi_t$ mit $i_{\xi_t} \omega_t = \lambda$ und somit gilt für $\varphi_t := \text{Fl}_t^\xi$ die gewünschte Beziehung $(\varphi_t)^*(\omega_t) = \omega_0$ wie im Beweis von 50.38. □

Als Folgerung erhalten wir die nicht-lineare Version von $GL_+(m)/SL(m) \cong \mathbb{R}^+$:

50.42 Folgerung.

Es sei M eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\omega_0 \in \text{Vol}(M) := \{\omega \in \Omega^m(M) : \int_M \omega = 1 \text{ und } \omega \text{ verschwindet nirgends}\}$. Weiters sei $\text{Diff}_+(M)$ die Gruppe der Orientierungs-erhaltenden Diffeomorphismen von M und $\text{Diff}_{\omega_0}(M)$ die Untergruppe der ω_0 -erhaltenden Diffeomorphismen. Dann induziert die Abbildung $\gamma: f \mapsto f^*(\omega_0)$ eine Bijektion zwischen dem durch die Linkswirkung der Untergruppe gegebene Orbitraum $\text{Diff}_+(M)/\text{Diff}_{\omega_0}(M)$ mit $\text{Vol}(M)$.

Es kann gezeigt werden (siehe [73, 43.7]), daß dies ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Wegen 50.41 ist γ surjektiv. Weiters ist

$$\gamma(f) = \gamma(g) \Leftrightarrow f^*(\omega_0) = g^*(\omega_0) \Leftrightarrow \omega_0 = (g \circ f^{-1})^*(\omega_0) \Leftrightarrow \varphi := g \circ f^{-1} \in \text{Diff}_{\omega_0}(M),$$

also induziert γ eine Bijektion $\text{Diff}_+(M)/\text{Diff}_{\omega_0}(M) \rightarrow \text{Vol}(M)$. □

19. Topologisches über Mannigfaltigkeiten

19.5 Lemma (Topologie von Hausdorff Mannigfaltigkeiten).

Sei M eine Hausdorff C^∞ -Mannigfaltigkeit, dann gilt:

1. M ist lokalkompakt (d.h. $\forall x \in M \exists U_x$, sodaß $\overline{U_x}$ kompakt ist; anders gesagt: es gibt relativ-kompakte Umgebungen).
2. Die C^∞ -Funktionen $M \rightarrow \mathbb{R}$ trennen Punkte. Sie trennen sogar Punkte von abgeschlossenen Mengen (d.h. für $x \notin A$, wo A abgeschlossen ist, existiert ein glattes $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sodaß $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$ für alle $y \in A$). Insbesondere ist M also vollständig regulär.

Beweis. (1) Sei $x \in M$ und φ eine Karte um x mit $\text{Dom } \varphi \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. O.B.d.A. gelte $\varphi(0) = x$. Sei $W_x \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Kugel um 0, wobei $\overline{W_x} \subseteq \text{Dom } \varphi$ kompakt ist. Dann ist $\varphi(W_x)$ eine offene Umgebung von x , und $\varphi(\overline{W_x})$ ist kompakt in M , da φ stetig ist. Also ist $\overline{\varphi(W_x)} = \varphi(\overline{W_x})$ und somit kompakt.

(2) Sei $x \notin A$ und A abgeschlossen, dann existiert eine relativ-kompakte Umgebung W_x von x , deren Abschluß ganz in einer Karte φ liegt. Somit ist

$$\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(W_x) \subseteq \varphi^{-1}(\overline{W_x})$$

wobei $\varphi^{-1}(W_x)$ offen und $\varphi^{-1}(\overline{W_x})$ kompakt sind. Da $\varphi^{-1}(x) \notin \varphi^{-1}(A)$ ist, gibt es ein r , sodaß

$$\begin{aligned} \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\} &\subseteq \varphi^{-1}(W_x) \text{ und} \\ \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\} \cap \varphi^{-1}(A) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Aus Satz [72, 18.7] wissen wir, daß es eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodaß

$$f(\varphi^{-1}(x)) = 1 \text{ und } \text{Trg } f \subseteq \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\}.$$

Setzen wir nun $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} f(\varphi^{-1}(z)) & \text{falls } z \in \text{Bild } \varphi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $g(x) = 1$ und $A \subseteq (M \setminus \text{Trg } g)$, also $g = 0$ auf A . Da f und φ beide glatt sind und $g|_{M \setminus \overline{W_x}} = 0$ ist, ist auch g glatt. Das war die Behauptung. $\square$

18.3 Definition (Parakompaktheit)

Ein topologischer Raum X heißt PARAKOMPAKT, falls es für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{V}$ gibt. D.h. $\mathcal{V}$ ist eine offene Überdeckung von X mit den Eigenschaften:

1. Für alle $V \in \mathcal{V}$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$ ("Verfeinerung").
2. Für alle $x \in X$ gibt es ein U_x , sodaß höchstens für endlich viele $V \in \mathcal{V}$ gilt: $U_x \cap V \neq \emptyset$ (d.h. ist lokal-endlich).

Eine große Klasse von Beispielen für parakompakte Räume liefert uns das

19.6 Satz (Parakompakte Mannigfaltigkeiten).

Sei M eine Hausdorff C^∞ -Mannigfaltigkeit, so sind äquivalent:

1. M besitzt C^∞ -Partitionen der Eins.

2. M ist METRISIERBAR, d.h. es existiert eine Metrik, welche die Topologie erzeugt.
3. M ist parakompakt, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine lokal-endliche offene Verfeinerung die M überdeckt.
4. Jede Zusammenhangskomponente ist σ -KOMPAKT, d.h. sie ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen.
5. Jede Zusammenhangskomponente ist LINDELÖF, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine abzählbare Teilüberdeckung.

Bemerkung (andere topologische Eigenschaften).

Es besitzt nicht jede (zusammenhängende) Hausdorff C^∞ -Mannigfaltigkeit die oben genannten Eigenschaften wie z.B. der folgende “lange Halbstrahl” zeigt: Sei Ω die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen (also die kleinste überabzählbare Ordinalzahl),

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, 2\omega, \dots, \omega^2, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}.$$

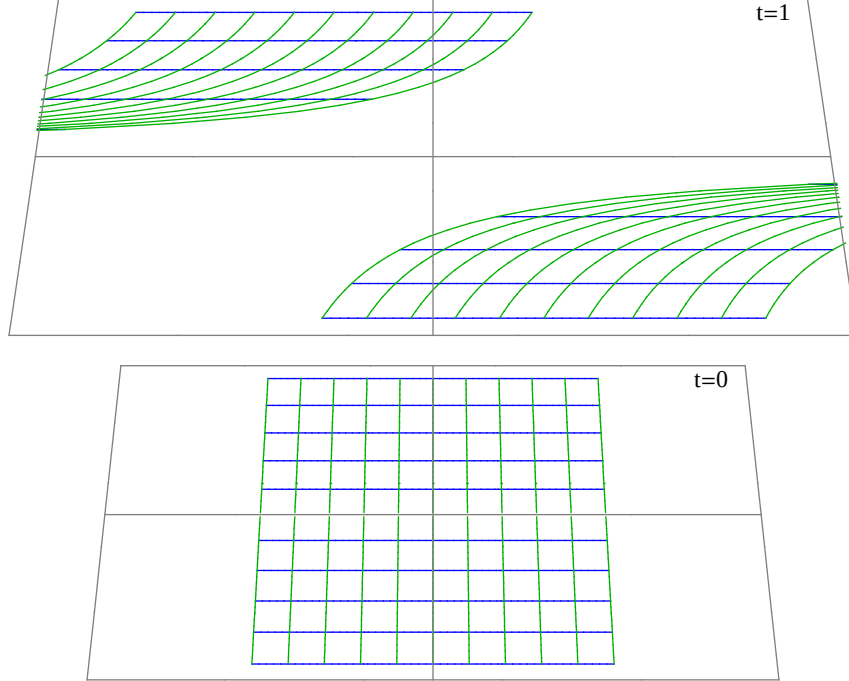
Betrachtet man $\Omega \times [0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$, versehen mit der lexikographischen Ordnung, d.h. $((\alpha, t) \leq (\beta, s)) \Leftrightarrow (\alpha < \beta \text{ oder } (\alpha = \beta \text{ und } t \leq s))$. Diese “Linie” kann mit der Ordnungstopologie zu einer C^∞ -Mannigfaltigkeit gemacht werden, die zwar Hausdorff, aber nicht parakompakt ist, siehe [102, Vol.I, Appendix A]

Für metrische Räume sind bekanntlich die Eigenschaften Lindelöf, separabel und das 2. Abzählbarkeitsaxiom (d.h. Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie) äquivalent (siehe [63, 3.3.1]).

Oft wird bei Mannigfaltigkeiten schwächer nur Separabilität vorausgesetzt (z.B. [5] und [80]), allerdings wurde in [14] durch Modifikation der Fläche von Prüfer gezeigt, daß es nicht-metrisierbare separable analytische Flächen gibt: Die modifizierte Fläche S von Prüfer ist der Quotient von $\bigsqcup_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 / \sim$, wobei

$$(x, y; t) \sim (x', y'; t') :\Leftrightarrow y = y' \text{ und } \begin{cases} x = x' & \text{falls } t = t' \\ xy + t = x'y' + t' & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Dies ist eine separable ($\mathbb{Q}^2$ liegt dicht) Hausdorff'sche analytische Fläche, die das 2. Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt, denn $\bigsqcup_{\mathbb{R}} \{(0,0)\}$ ist überabzählbar und diskret.



Andererseits wird bisweilen (z.B. [113], [59] und [12]) stärker das zweite Abzählbarkeitsaxiom für die ganze Mannigfaltigkeit vorausgesetzt. Dies impliziert aber, daß nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten vorliegen und somit z.B. Satz [68, 30.11] falsch wird, wie die Blätterung des Torus mit irrationalen Anstieg zeigt.

Beweis des Satzes 19.6. (1 $\Rightarrow$ 2) Mittels C^∞ -Partitionen der 1 können wir lokale Riemann-Metriken zu einer globalen Riemann-Metrik verkleben. Nach [72, 32.3] liefert diese eine die Topologie erzeugende Metrik d auf den Zusammenhangskomponenten von M . Durch

$$\tilde{d}(x, y) := \begin{cases} \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} & \text{für } x \text{ und } y \text{ in der gleichen Zusammenhangskomponente} \\ 1 & \text{für } x \text{ und } y \text{ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten} \end{cases}$$

ist dann eine die Topologie erzeugende Metrik auf ganz M definiert.

(2 $\Rightarrow$ 3) Sei $\mathcal{W}$ eine offene Überdeckung. Mittels Auswahlaxiom (siehe [63, 1.3.9]) versehen wir $\mathcal{W}$ mit einer Wohlordnung $\prec$. Für $W \in \mathcal{W}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $W_n := \bigcup_{x \in M_{W,n}} U_{1/2^n}(x)$ wobei $U_r(x)$ den offenen Ball um x mit Radius r bezeichnet und

$$M_{W,n} := \left\{ \begin{array}{ll} (i) & \forall V \prec W : x \notin V \\ x \in X : & (ii) \quad \forall j < n \forall V \in \mathcal{W} : x \notin V_j \\ & (iii) \quad U_{3/2^n}(x) \subseteq W \end{array} \right\}$$

Dann ist $\{W_n : W \in \mathcal{W}, n \in \mathbb{N}\}$ eine lokal-endliche Verfeinerung von $\mathcal{W}$:

Verfeinerung: $W_n \subseteq W$, da $U_{1/2^n}(x) \subseteq U_{3/2^n}(x) \subseteq W$ für $x \in M_{W,n}$.

Überdeckung: Sei $x \in X$, $V := \min\{W \in \mathcal{W} : x \in W\}$, $\exists n \in \mathbb{N} : U_{3/2^n}(x) \subseteq V \Rightarrow$ entweder (ii) und somit $x \in M_{V,n} \subseteq V_n$ oder $x \in W_j$ für ein $j < n$ und ein $W \in \mathcal{W}$.

Lokal-endlich: Sei $x \in X$ und $V := \min\{W \in \mathcal{W} : \exists n : x \in W_n\}$, d.h. $\exists n : x \in V_n$ und somit $\exists j : U_{2/2^j}(x) \subseteq V_n$.

Beh.: $i \geq n + j \Rightarrow \forall W \in \mathcal{W} : U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i = \emptyset$.

Wegen $i > n$ ist $\forall y \in M_{W,i} : y \notin V_n$ nach (ii) und somit $d(y, x) \geq 2/2^j$ wegen $U_{2/2^j}(x) \subseteq V_n$. Aus $n + j \geq j$ und $i \geq j$ folgt somit

$$U_{1/2^{n+j}}(x) \cap U_{1/2^i}(y) \subseteq U_{1/2^j}(x) \cap U_{1/2^j}(y) = \emptyset, \text{ also } U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i = \emptyset.$$

Beh.: $i < n + j \Rightarrow U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i \neq \emptyset$ für höchstens ein $W \in \mathcal{W}$.

Sei $p \in W_i$ und $p' \in W'_i$ für $W, W' \in \mathcal{W}$, o.B.d.A. $W \prec W'$; d.h. $\exists y \in M_{W,i} : p \in U_{1/2^i}(y)$ und somit $U_{3/2^i}(y) \subseteq W$ nach (iii) und $\exists y' \in M_{W',i} : p' \in U_{1/2^i}(y')$ und somit $y' \notin W$ nach (i). $\Rightarrow d(y, y') \geq 3/2^i \Rightarrow d(p, p') \geq d(y', y) - d(p, y) - d(p', y') > 1/2^i \geq 2/2^{n+j}$ im Widerspruch zu $p, p' \in U_{1/2^{n+j}}(x)$.

Folglich wird $U_{1/2^{n+j}}(x)$ nur von endlich vielen W_j getroffen.

(3 $\Rightarrow$ 4) Sei M_0 eine Zusammenhangskomponente von M . Es existiert eine Überdeckung mit relativ-kompakten Mengen (vgl. Lemma 19.5). Diese kann, da M_0 parakompakt ist, als lokal-endlich angenommen werden. Sei $\mathcal{U}$ so eine Überdeckung, dann gilt sogar:

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\} \text{ ist endlich für jedes } W \in \mathcal{U},$$

denn zu jedem $x \in \overline{W}$ existiert ein V_x , sodaß V_x nur endlich viele $U \in \mathcal{U}$ trifft. Da $\overline{W}$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ von $\overline{W}$. Sei $U \in \mathcal{U}$ mit $U \cap W \neq \emptyset$. Somit existiert ein i , sodaß $U \cap V_{x_i} \neq \emptyset$. Für die endlich vielen i tritt dieser Fall jeweils nur für endlich viele $U \in \mathcal{U}$ ein, also ist auch

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich.

Wir wählen nun ein $W_1 \in \mathcal{U}$. Sei W_2 die Vereinigung über jene endlich vielen $U \in \mathcal{U}$, deren Schnitt mit $W_1 \neq \emptyset$ ist.

Induktiv sei nun W_n die Vereinigung über jene $U \in \mathcal{U}$, deren Schnitt mit $W_{n-1} \neq \emptyset$ ist. Jedes W_i ist Vereinigung endlich vieler relativ-kompakter Mengen, also selbst relativ-kompakt. Ist $W := \bigcup_n W_n$, so ist W offen. Wir wollen zeigen, daß $W = M_0$. Dafür genügt es zu zeigen, daß $M_0 \setminus W$ offen ist. Sei also $x \notin W$, dann existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Klarerweise gilt $U \cap W = \emptyset$, sonst gäbe es ein n , sodaß $U \cap W_n \neq \emptyset$, also $x \in U \subseteq W_{n+1} \subseteq W$. Dies ist ein Widerspruch.

Nun ist also $M_0 = W \cup (M_0 \setminus W)$, und sowohl W als auch $M_0 \setminus W$ sind beide offen. Da M_0 zusammenhängend ist, muß W oder $M_0 \setminus W$ leer sein. Aber $W \neq \emptyset$, also $M_0 \setminus W = \emptyset$, und somit ist $M_0 = W$. Die Gleichung $M_0 = \bigcup_n \overline{W_n}$ zeigt die σ -Kompaktheit von M_0 .

(4 $\Rightarrow$ 5) Sei X eine Zusammenhangskomponente, also $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ mit kompakten K_n . Jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X besitzt somit eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{U}_n$ von K_n . Und somit ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ eine abzählbare Teilüberdeckung von X , d.h. X ist Lindelöf.

(5 $\Rightarrow$ 1) In [72, 18.2] wurde ein Beweis für die Existenz von C^∞ -Partitionen der Eins gegeben, der als Voraussetzung Lindelöf und die Existenz von C^∞ -Funktionen mit beliebig kleinen Trägern verwendet. Letzteres ist wegen 19.5.2 ebenfalls gegeben.

Dies ist eigentlich ein Satz über lokalkompakte Hausdorff-Räume (wenn man C^∞ -Partitionen durch stetige Partitionen in [1] ersetzt). Allerdings kann man den Beweis von (1 $\Rightarrow$ 2) in dieser Allgemeinheit so nicht führen, sondern (4 $\Rightarrow$ 5) folgt unmittelbar aus den Metrisierungssatz [63, 3.3.10] von Nagata und Smirnov und (1 $\Rightarrow$ 3) gilt offensichtlich: Sei nämlich $\mathcal{U}$ offene Überdeckung und $\mathcal{F}$ zugehörige Partition der Eins. Dann existiert für jedes $x \in M$ eine Umgebung U_x sodaß $I := \{f \in \mathcal{F} : \text{Trg } f \cap U_x \neq \emptyset\}$ endlich ist (dies entspricht der 2. Bedingung für eine Partition der Eins). Somit ist $(\{x : f(x) > 0\})_{f \in \mathcal{F}}$ eine lokalendliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$. $\square$

Zum Abschluß dieses Exkurses in die Topologie noch einige Bemerkungen zur Dimensionstheorie (Für detailliertere Ausführungen siehe [26]):

19.7 Definition (Überdeckungsdimension)

Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum. Man sagt die ÜBERDECKUNGSDIMENSION von X ist höchstens n (kurz: $\text{UD-dim } X \leq n$), falls es zu jeder offenen Überdeckung von X eine offene Verfeinerung der Ordnung $n + 1$ gibt. ($\mathcal{U}$ heißt VON ORDNUNG $n + 1$, wenn der Durchschnitt über $n + 2$ verschiedene Mengen aus $\mathcal{U}$ immer leer ist.) Per Definition ist $\text{UD-dim } X = n \Leftrightarrow \text{UD-dim } X \leq n$, aber nicht $\text{UD-dim } X \leq n - 1$.

19.8 Satz (Eigenschaften der Überdeckungsdimension).

Es gilt:

1. $\text{UD-dim } [0, 1]^n = n$.
2. Wenn A abgeschlossen in X ist, dann gilt

$$\text{UD-dim } A \leq \text{UD-dim } X.$$

3. Für eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X gilt:

$$\text{UD-dim } X \leq \sup\{\text{UD-dim } A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Ohne Beweis, siehe [26, S.295,268,278]

19.9 Folgerung.

Für jede m -dimensionale, parakompakte, Hausdorff Mannigfaltigkeit M ist $\text{UD-dim } M = m$.

Beweis. M besitzt eine offene Überdeckung durch Mengen $\varphi((0, 1)^m)$, wobei φ eine Karte für M ist welche auf einer Umgebung von $[0, 1]^m$ definiert ist. Da M parakompakt ist, existiert eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{U}$. Sei $\mathcal{U}^- := \{\bar{V} : V \in \mathcal{U}\}$, so ist $\mathcal{U}^-$ eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung. $\varphi^{-1}(\bar{V}) \subseteq [0, 1]^m$. Da φ Homöomorphismus ist und somit die UD-dim bewahrt, gilt unter Verwendung von [19.8]:

$$\text{UD-dim } \bar{V} = \text{UD-dim } \varphi^{-1}(\bar{V}) \stackrel{(2)}{\leq} \text{UD-dim } [0, 1]^m \stackrel{(1)}{=} m,$$

$$\text{UD-dim } M \stackrel{(3)}{\leq} \sup\{\text{UD-dim } \bar{V} : \bar{V} \in \mathcal{V}\},$$

also $\text{UD-dim } M \leq m$. Umgekehrt gilt: Ist $\varphi : [0, 1]^m \rightarrow M$ Karte, so ist $\varphi([0, 1]^m)$ abgeschlossen in M , also ist nach [19.8]:

$$\text{UD-dim } M \stackrel{(2)}{\geq} \text{UD-dim } \varphi([0, 1]^m) = \text{UD-dim } [0, 1]^m \stackrel{(1)}{=} m.$$

Zusammen folgt die Behauptung: $\text{UD-dim } M = m$. □

19.10 Folgerung.

Sei M eine parakompakte und zusammenhängende Hausdorff-Mannigfaltigkeit. Sei $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von M , dann existiert ein $p \leq \dim(M) + 1$ und eine Verfeinerung von $\mathcal{O}$ folgender Gestalt:

$$\mathcal{V} = \{V_i^n : i \leq p, n \in \mathbb{N}\},$$

sodaß $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset, \forall n \neq m$.

Beweis. Nach [19.9] ist die Überdeckungsdimension von M gleich $\dim M$, also existiert zur offenen Überdeckung $\mathcal{O}$ eine Verfeinerung $\mathcal{O}'$ der Ordnung $p \leq \text{UD-dim } M + 1$. Da M parakompakt ist, existiert eine lokal endliche Verfeinerung $\mathcal{O}''$ und da M nach [19.6] Lindelöf ist, können wir annehmen, daß diese Überdeckung $\mathcal{O}''$ abzählbar ist. O.B.d.A. ist also $\mathcal{O}$ eine abzählbare lokal endliche Überdeckung der Ordnung p .

Wir zeigen nun mittels Induktion nach p , daß jede solche Überdeckung eine Verfeinerung der gewünschten Form besitzt.

Dazu schrumpfen wir die Mengen in $\mathcal{O}$ zu einer kleineren Überdeckung $\mathcal{U}$. Das soll heißen, wir konstruieren für jedes $O \in \mathcal{O}$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\bar{U} \subseteq O$ derart, daß die U noch immer eine Überdeckung bilden.

Dies kann induktiv geschehen: Sei $\mathcal{O} := \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zwischen $M \setminus \bigcup_{n \geq 2} O_n$ und O_1 (erstere ist abgeschlossen, zweitere offen) schalten wir U_1 und $\bar{U}_1$ und erhalten eine Überdeckung $\{U_1\} \cup \{O_n : n > 1\}$. (Dies kann geschehen, da nach [72, 18.7] eine C^∞ -Funktion f existiert mit Träger in $\bar{O}_1$, die auf $M \setminus \bigcup_{n \geq 1} O_n$ identisch 1 ist. Nun erhält man U_1 etwa durch $U_1 := \{x : f(x) > 1/2\}$.) Im zweiten Schritt finden wir genauso ein U_2 zwischen $M \setminus U_1 \cup \bigcup_{n \geq 2} O_n$ und O_2 ; und so weiter.

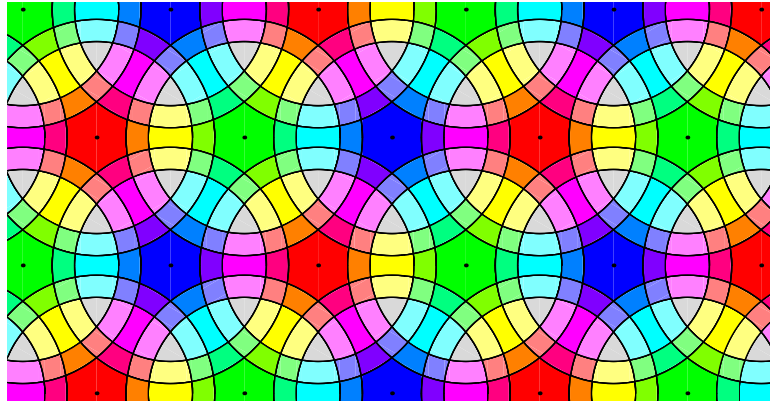
Nun betrachten wir die beiden Familien:

$\mathcal{V}_p :=$ die Menge der Durchschnitte von je p der $O \in \mathcal{O}$,

$\mathcal{A}_p :=$ die Menge der Durchschnitte von je p der $\bar{U}$ für $U \in \mathcal{U}$

und bezeichnen ihre Vereinigungen mit $V_p := \bigcup \mathcal{V}_p$ und $A_p := \bigcup \mathcal{A}_p$.

Im folgenden Bild sind die großen Scheiben die Mengen in $\mathcal{O}$, die kleinen Scheiben jene in $\mathcal{U}$, die dunklen (rot/grün/blau färbigen) “6-Ecke” sind die Punkte die in genau einem $O \in \mathcal{O}$ liegen, die Punkte in den nächst helleren Streifen liegen in genau 2 der O ’s, die größeren “3-Ecke” liegen in genau 3 der O ’s (sind also die Elemente von $\mathcal{V}_p$) und die weißen kleinen “Dreiecke” sind die Elemente von $\mathcal{A}_p$.



Es ist $\mathcal{V}_p$ eine Familie offener disjunkter Mengen, denn angenommen zwei verschiedene Mitglieder von $\mathcal{V}_p$ hätten nichtleeren Durchschnitt, so hätten zumindest $p+1$ der $O \in \mathcal{O}$ nichtleeren Durchschnitt, und das ist ein Widerspruch. Folglich ist $V_p \subseteq M$ offen.

Die Familie $\mathcal{A}_p$ besteht aus abgeschlossenen Mengen und ist lokal endlich, da die entsprechenden Elemente von $\mathcal{V}_p$ disjunkt sind. Somit ist A_p als lokal endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen und es gilt $A_p \subseteq V_p$.

Wir behaupten nun, daß $\mathcal{U}$ eine abzählbare lokal endliche Überdeckung von $M \setminus A_p$ der Ordnung kleiner als p ist.

Angenommen, es gibt p Mengen in $\mathcal{U}$, deren Durchschnitt – eingeschränkt auf $M \setminus$

A_p – nicht-leer ist, so ist ebendieser Durchschnitt auch im Durchschnitt der nicht eingeschränkten Abschlüsse enthalten und liegt also nach Konstruktion in A_p . Das ist ein Widerspruch.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert also eine Verfeinerung der Gestalt $\{V_i^n : i < p, n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{U}$, welche $M \setminus A_p$ überdeckt und sodaß $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset \forall i < p \forall n \neq m$.

Zusammen mit der disjunkten Familie $\mathcal{V}_p =: \{V_p^n : n \in \mathbb{N}\}$ bilden diese Mengen dann die gewünschte Verfeinerung von $\mathcal{O}$. $\square$

19.11 Folgerung (Endlicher Atlas).

Jede zusammenhängende, parakompakte, m -dimensionale, glatte Hausdorff Mannigfaltigkeit von Dimension m besitzt einen Atlas mit höchstens $m + 1$ Karten.

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung einer solchen Mannigfaltigkeit M mit Bildern $\varphi(U)$ von Karten $\varphi : U \rightarrow M$ mit offenen U im $\mathbb{R}^m$. O.B.d.A. sei $\mathcal{O}$ abzählbar (M ist Lindelöf), d.h.

$$\mathcal{O} = \{\varphi_i(U_i) : i \in \mathbb{N}\},$$

wobei wir die U_i als disjunkt annehmen können. Es gibt nach 19.10 eine Verfeinerung der Gestalt:

$$\{O_i^n : i \leq p, n \in \mathbb{N}\}$$

mit $m \neq n : O_i^n \cap O_i^m = \emptyset$, wobei $p \leq \dim M + 1$. Zu O_i^n gibt es ein diffeomorphes $U_i^n \subseteq \mathbb{R}^m$, mittels einer gewissen Karte φ_i^n . Wir definieren nun

$$\varphi_i : \begin{cases} \bigcup_n U_i^n \rightarrow \bigcup_n O_i^n \\ x \mapsto \varphi_i^n(x) \in O_i^n \text{ für } x \in U_i^n. \end{cases}$$

So sind die φ_i Diffeomorphismen, deren Bilder M überdecken, d.h.: $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq p\}$ ist ein C^∞ -Atlas. $\square$

Als einfache Folgerung werden wir in [72, 21.13] zeigen, daß jede solche Mannigfaltigkeit bis auf einen Diffeomorphismus als Teilmannigfaltigkeit eines $\mathbb{R}^n$ realisiert werden kann.

VIII. Riemann-Geometrie

62. Kovariante Ableitung

Wir rufen uns Einiges aus der Differentialgeometrie 1 in Erinnerung: In [72, 32.2] haben wir Riemann-Mannigfaltigkeiten definiert und [72, 32.3] die zugehörige Metrik im Sinne der Topologie beschrieben. In [72, 33.2] haben wir den Satz von Nash zitiert, der besagt, daß wir uns auf konkrete Mannigfaltigkeiten beschränken können. In [72, 33.3] haben wir die Existenz von Riemann-Metriken auf jeder Mannigfaltigkeit gezeigt. In [72, 57.1] haben wir Geodäten als kritische Punkte der Bogenlänge definiert und in [72, 58.3] für Hyperflächen die sie charakterisierende Differentialgleichung mittels Christoffelsymbole aus [72, 58.2] in Koordinaten beschrieben. Diese hat uns in [72, 58.4] die Exponentialabbildung geliefert, siehe [72, 58.5] für Beispiele. In [72, 62.1] haben wir die kovariante Ableitung auf Hyperflächen zu studieren begonnen und ihre wesentlichen Eigenschaften in [72, 62.4] hergeleitet. Wir wollen nun die Existenz der kovarianten Ableitung auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten nachgeweisen.

62.5 Satz (Levi-Civita Ableitung).

Sei M eine (abstrakte) Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau eine Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, welche die Eigenschaften (1)-(5) aus [72, 62.4] erfüllt, wobei das innere Produkt in (5) durch die Riemann-Metrik zu ersetzen ist. Diese Abbildung heißt KOVARIANTE ABLEITUNG, oder auch LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG, siehe [26.12].

(Koordinatenfreie) Beweis. Wegen (5) gilt:

$$\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) = g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) + g(\xi_2, \nabla_{\xi_1} \xi_3) \quad (+)$$

$$\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) = g(\nabla_{\xi_2} \xi_3, \xi_1) + g(\xi_3, \nabla_{\xi_2} \xi_1) \quad (+)$$

$$\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) = g(\nabla_{\xi_3} \xi_1, \xi_2) + g(\xi_1, \nabla_{\xi_3} \xi_2) \quad (-).$$

Daraus folgt durch Addieren der ersten beiden und Subtrahieren der 3.ten Gleichung unter Verwendung von (4):

$$\begin{aligned} \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) &= \\ &= g(\nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_3) + g(\nabla_{\xi_1} \xi_3 - \nabla_{\xi_3} \xi_1, \xi_2) + g(\nabla_{\xi_2} \xi_3 - \nabla_{\xi_3} \xi_2, \xi_1) \\ &\stackrel{(4)}{=} g\left(2\nabla_{\xi_1} \xi_2 - [\xi_1, \xi_2], \xi_3\right) - g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) + g([\xi_2, \xi_3], \xi_1). \end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) &= \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite linear in ξ_3 ist, ist $\nabla_{\xi_1} \xi_2$ durch diese implizite Gleichung wohldefiniert, und da sie auch bilinear in (ξ_1, ξ_2) ist, hat das so definierte ∇ die Eigenschaft (1).

Nun zur Eigenschaft (2):

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{f\xi_1}\xi_2, \xi_3) &= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, f\xi_1) - \xi_3 g(f\xi_1, \xi_2) \\
&\quad + g([f\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], f\xi_1) + g([\xi_3, f\xi_1], \xi_2) \\
&= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + f\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) + \xi_2(f)g(\xi_3, \xi_1) \\
&\quad - f\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) - \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) \\
&\quad + g\left(f[\xi_1, \xi_2] - \xi_2(f)\xi_1, \xi_3\right) - f g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) \\
&\quad + g\left(f[\xi_3, \xi_1] + \xi_3(f)\xi_1, \xi_2\right) \\
&= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + f\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) + \xi_2(f)g(\xi_3, \xi_1) \\
&\quad - f\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) - \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) \\
&\quad + f g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - \xi_2(f)g(\xi_1, \xi_3) - f g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) \\
&\quad + f g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) + \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) \\
&= f\left(\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2)\right. \\
&\quad \left.+ g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2)\right) \\
&= 2f g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3).
\end{aligned}$$

Eine sehr ähnliche Rechnung zeigt die Eigenschaft (3).

Weiter zu Eigenschaft (4):

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{\xi_1}\xi_2 - \nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_3) &= \\
&= \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\
&\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \\
&\quad - \xi_2 g(\xi_1, \xi_3) - \xi_1 g(\xi_3, \xi_2) + \xi_3 g(\xi_2, \xi_1) \\
&\quad - g([\xi_2, \xi_1], \xi_3) + g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) - g([\xi_3, \xi_2], \xi_1) \\
&= 2g([\xi_1, \xi_2], \xi_3).
\end{aligned}$$

Schlußendlich Eigenschaft (5):

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3) + 2g(\xi_2, \nabla_{\xi_1}\xi_3) &= \\
&= \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\
&\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \\
&\quad + \xi_1 g(\xi_3, \xi_2) + \xi_3 g(\xi_2, \xi_1) - \xi_2 g(\xi_1, \xi_3) \\
&\quad + g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) - g([\xi_3, \xi_2], \xi_1) + g([\xi_2, \xi_1], \xi_3) \\
&= 2\xi_1 g(\xi_2, \xi_3). \quad \square
\end{aligned}$$

Koordinatenbeweis. Es ist zu zeigen, daß der lokale Ausdruck für ∇ aus [72, 62.1] unabhängig von den gewählten Koordinaten ist.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^i} &:= \varphi_i \\
\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} &= \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial}{\partial u^j} \\
g_{i,j} &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
\bar{g}_{i,j} &= \left\langle \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} g_{i,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j,k} &:= \frac{1}{2} \left(\partial_i(g_{j,k}) + \partial_j(g_{i,k}) - \partial_k(g_{i,j}) \right) \\
\frac{\partial \bar{g}_{\bar{j},\bar{k}}}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left(\sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} \right) \\
&= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \right) \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left(\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \right) g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} (g_{j,k}) \right) \\
&= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} \right) \\
\bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} (g_{\bar{j},\bar{k}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} (g_{\bar{i},\bar{k}}) - \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} (g_{\bar{i},\bar{j}}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} \right)}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} \right)}_{(3)} \right. \\
&\quad + \sum_{i,k} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{j}} \partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{i,k} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{j}} \partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{i,k} \right)}_{(4)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j} \right)}_{(3)} \\
&\quad \left. - \sum_{j,i} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{k}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} g_{j,i} \right)}_{(4)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{k}} \partial \bar{u}^{\bar{i}}} g_{j,i} \right)}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \sum_k \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k} \right)}_{(3)} \right) \\
&= \sum_{j,k} \underbrace{\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k}}_{(1)} + \sum_{i,j,k} \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k} \right)}_{(3)} \\
&= \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \Gamma_{i,j,k} \\
\delta_i^j &= \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \\
\delta_k^i &=: \sum_j g^{i,j} g_{j,k} \\
\bar{g}^{\bar{i},\bar{j}} &= \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} g^{i,j}, \text{ denn} \\
\sum_{\bar{j}} \bar{g}^{\bar{i},\bar{j}} \bar{g}_{\bar{j},\bar{k}} &= \sum_{\bar{j}} \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} g^{i,j} \sum_{l,k} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{l,k} \\
&= \sum_{i,k} \sum_{j,l} \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} g^{i,j} g_{l,k}}_{\delta_j^l} \underbrace{\frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}}_{\delta_k^i} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta_{\bar{k}}^{\bar{i}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j}^k &:= \sum_l \Gamma_{i,j,l} g^{l,k} \\
\bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j}}^{\bar{l}} &= \sum_{\bar{k}} \bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} g^{\bar{k},\bar{l}} \\
&= \sum_{\bar{k}} \left(\sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \Gamma_{i,j,k} \right) \sum_{p,q} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} g^{p,q} \\
&= \sum_{j,q} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} \underbrace{\sum_{k,p} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} g_{j,k} g^{p,q}}_{= \delta_j^q} \\
&\quad + \sum_{i,j,q} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} \underbrace{\sum_{p,k} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} \Gamma_{i,j,k} g^{p,q}}_{= \Gamma_{i,j}^q} \\
&= \sum_{i,j,l} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \Gamma_{i,j}^l + \sum_l \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \\
\delta_j^i &= \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j} \Rightarrow \\
0 &= \frac{\partial}{\partial u^k} \delta_j^i \\
&= \sum_{\bar{i}} \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \right) \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j} + \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \right) \\
&= \sum_{\bar{i},\bar{k}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \right) \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j} + \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \\
&= \sum_{\bar{i},\bar{k}} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^k} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j} + \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \Rightarrow \\
\bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j}}^{\bar{k}} &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}
\end{aligned}$$

Sei nun eine Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ gegeben in lokalen Koordinaten durch

$$c(t) = \varphi(u^1(t), \dots, u^m(t)) = \bar{\varphi}(\bar{u}^1(t), \dots, \bar{u}^m(t))$$

und $w : \mathbb{R} \rightarrow TM$ ein Vektorfeld längs c . In lokalen Koordinaten ist

$$w(t) = \sum_i w^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{\bar{i}} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} = \sum_{\bar{i},i} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$w^i(t) = \sum_{\bar{i}} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}.$$

Die Normalprojektion der Ableitung von w auf den Tangentialraums ist in den lokalen Koordinaten $(u^1, \dots, u^m)$ durch

$$\sum_i \left(\frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

gegeben bzw. in den Koordinaten $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^m)$ durch

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{i}} \left(\frac{d\bar{w}^{\bar{i}}(t)}{dt} + \sum_{\bar{j}, \bar{k}} \Gamma_{\bar{j}, \bar{k}}^{\bar{i}}(u(t)) \bar{w}^{\bar{j}}(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} = \\ &= \sum_{\bar{i}} \left(\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) w^i(t) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\bar{j}, \bar{k}} \left(\sum_{j,k,i} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \sum_l \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l} w^l(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \\ &= \sum_{\bar{i}} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i \partial u^j}(u(t)) \frac{du^j(t)}{dt} w^i(t) + \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) \frac{dw^i(t)}{dt} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\bar{j}, \bar{k}} \left(\sum_{j,k,i} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \sum_l \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l} w^l(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \\ &= \sum_{\bar{i}} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{du^j}{dt} w^i + \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) \frac{dw^i(t)}{dt} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k,i} \sum_{l,j} \Gamma_{j,k}^i \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l}}_{\delta_l^j} w^l \underbrace{\sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}}{dt}}_{\frac{du^k}{dt}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \right. \\ & \quad \left. - \sum_k \underbrace{\sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}}{dt}}_{\frac{du^k}{dt}} \sum_{j,l} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l}}_{\delta_l^j} w^l \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \\ &= \sum_i \left(\frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \end{aligned}$$

also ist dieser Ausdruck auch für eine abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeit wohldefiniert. Wir nennen diesen Ausdruck die kovariante Ableitung ∇w eines Vektorfelds w längs einer Kurve c , d.h.

$$\nabla w(t) := \sum_i \left(\frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{u(t)}.$$

Für Vektorfelder X und Y auf M können wir nun ein Vektorfeld $\nabla_X Y$ durch

$$(\nabla_X Y)_x := \nabla(Y \circ c)$$

definieren, wobei c die Integralkurve von X durch x ist. Es ist somit $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ eine wohldefinierte bilineare Abbildung die in Koordinaten gegeben ist durch

$$\nabla_X Y = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Y^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i}. \quad \square$$

62.6 Lokale Formeln für ∇

Wählen wir für ξ_1 , ξ_2 und ξ_3 Basisvektorfelder $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$, $g_j := \frac{\partial}{\partial u^j}$ und $g_k := \frac{\partial}{\partial u^k}$, so erhalten wir eine lokale Formel für ∇ :

$$2g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = \frac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{k,i} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j} + 0 =: 2\Gamma_{i,j,k}$$

Das ist gerade die Formel für die Christoffelsymbole der 1.ten Art.

Bezeichnen wir die Koeffizienten von $\nabla_{g_i} g_j$ bezüglich der Basis (g_l) mit $\Gamma_{i,j}^l$, also

$$\nabla_{g_i} g_j =: \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k,$$

so erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,k} := g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = g \left(\sum_l \Gamma_{i,j}^l g_l, g_k \right) = \sum_l \Gamma_{i,j}^l g_{l,k}.$$

D.h. die $\Gamma_{i,j}^l$ sind die Christoffel-Symbole der 2.ten Art und $\Gamma_{i,j,k}$ jene der 1.ten Art (siehe [72, 58.2]).

Man beachte noch, daß aus der Symmetrie von $g_{i,j}$ folgende Umkehrformel für die partiellen Ableitungen der Koeffizienten der Riemann-Metrik folgt:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} = \Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i,k,j}.$$

Wegen Eigenschaft [72, 62.4.2] ist $\nabla_X Y$ tensoriell in X , d.h. $(\nabla_X Y)(p)$ hängt nur von X_p und Y ab: Sei nämlich vorerst $X = 0$ lokal um p und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(p) = 1$ und $f \cdot X = 0$, dann ist $0 = (\nabla_{fX} Y)(p) \stackrel{(2)}{=} f(p) \cdot (\nabla_X Y)(p) = (\nabla_X Y)(p)$ und ist nur $X_p = 0$ vorausgesetzt so ist somit ebenfalls

$$(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{\sum_i X(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i}} Y)(p) \stackrel{(2)}{=} \sum_i X_p(u^i) \cdot (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y)(p) = 0.$$

Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Kurve mit $c'(0) = X_p$. Dann ist also $(\nabla_{c'(0)} Y)(p)$ wohldefiniert und in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned} (\nabla_{c'(0)} Y)(p) &= \nabla_{\sum_j \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \left(\sum_i Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \right) (p) \\ &\stackrel{(2),(3)}{=} \sum_{j,i} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p + Y^i(p) \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \frac{\partial}{\partial u^i}(p) \right) \\ &= \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) Y^i(p) \Gamma_{j,i}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck macht aber sogar Sinn, wenn Y nur ein Vektorfeld längs c ist, d.h. $Y(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und $p = c(t)$ ist, denn auf Grund der Kettenregel ist dann

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{c(t)} Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) = \frac{dY^i}{dt}(t)$$

und somit

$$(\nabla_{c'(t)} Y)(t) = \sum_i \left(\frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) Y^k(t) \Gamma_{j,k}^i|_{c(t)} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{c(t)}.$$

62.7 Bemerkung

Wenn wir die entsprechenden Differentialgleichungen (siehe [72, 62.1])

- $0 = \nabla_{c'} X$ für parallele Vektorfelder X längs Kurven c und
- $0 = \nabla_{c'} c'$ für Geodäten c

in lokalen Koordinaten mittels [62.6] aufschreiben, so lauten diese (vgl. mit [72, 61.4] und [72, 58.3])

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dX^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) X^k(t) \Gamma_{j,k}^i|_{c(t)} \quad \forall i \\ 0 &= \frac{d^2(u^i \circ c)}{dt^2}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) \frac{d(u^k \circ c)}{dt}(t) \Gamma_{j,k}^i|_{c(t)} \quad \forall i. \end{aligned}$$

Deren Lösungen – die Exponentialabbildung $\exp : TM \rightarrow M$ und der Paralleltransport $\text{ptp} : C^\infty(\mathbb{R}, M) \times_M TM \rightarrow TM$ – existieren somit auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten und besitzen die entsprechenden Eigenschaften (siehe [72, 61.5] und [72, 58.4]). Daß Geodäten auch auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten genau die Lösungen der entsprechenden Variationsprobleme sind, werden wir in [67.1.1] und [67.2] zeigen.

62.8 Lemma.

Die Abbildung $(\pi, \exp) : TM \rightarrow M \times M$ ist ein Diffeomorphismus einer Umgebung U des Nullschnitts $M \subseteq TM$ auf eine Umgebung der Diagonale $\{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times M$.

Beweis. Man beachte zuerst, daß der Tangentialraum von TM in einem Punkt 0_x des Nullschnitts gerade $T_x M \oplus T_x M$ ist: Dabei ist der erste Faktor durch die Tangentialvektoren an Kurven in $M \subseteq TM$ gegeben und der zweite durch Geschwindigkeitsvektoren von Kurven im Vektorraum $T_x M \subseteq TM$. Diese beiden Teilräume haben trivialen Durchschnitt (denn für die letztgenannten Kurven c ist $\pi \circ c$ konstant), und ergeben zusammen die richtige Dimension $\dim(TM) = 2 \dim(M)$.

Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen von $(\pi, \exp)$. Auf dem Nullschnitt ist $(\pi, \exp) : TM \supset M \rightarrow M \times M$ gerade die Diagonal-Abbildung $x \mapsto (x, x)$ und auf der Faser $T_x M$ ist $(\pi, \exp) : TM \supset T_x M \rightarrow M \times M$ die Abbildung $(\text{konst}_x, \exp_x)$. Also sieht die Tangentialabbildung von $(\pi, \exp)$ in 0_x wie folgt aus:

$$T_{0_x}(\pi, \exp) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \text{id} & T_0 \exp_x \end{pmatrix} : T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M \times T_x M.$$

Wegen $T_0 \exp_x = \text{id}_{T_x M}$ ist also $(\pi, \exp)$ ein lokaler Diffeomorphismus für Punkte nahe dem Nullschnitt.

Wir wählen für jedes $x \in M$ eine offene Umgebung U_x von 0_x in TM so, daß $(\pi, \exp) : U_x \rightarrow (\pi, \exp)(U_x)$ ein Diffeomorphismus ist, und die Fasern $U_x \cap T_y M$

Kugeln um 0_y sind. Die Vereinigung $U := \bigcup_{x \in M} U_x$ ist dann eine offene Umgebung des Nullschnitts in TM . Und $(\pi, \exp) : U \rightarrow V := (\pi, \exp)(U)$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Bleibt nur noch die Injektivität zu zeigen: Falls zwei Tangentialvektoren verschiedene Fußpunkte besitzen, so können wir sie mittels der ersten Komponente $\pi : TM \rightarrow M$ trennen, und falls sie den gleichen Fußpunkt $x \in M$ haben, so trennt sie die zweite Komponente $\exp_x$, da sie in einer der Kugeln $U_y \cap T_x M$ enthalten sind. $\square$

In [72, 60.2] haben wir eine Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) als geodätisch vollständig bezeichnet, wenn jede Geodäte unendliche Länge hat, oder äquivalent, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Der folgende Satz liefert nun den Zusammenhang mit der Vollständigkeit im Sinne der Metrik, wie wir ihm im Satz [72, 33.2] von Nash verwendet haben.

62.10 Satz von Hopf-Rinow.

Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind folgende Aussagen äquivalent

1. M ist geodätisch vollständig.
2. M ist als metrischer Raum vollständig, d.h. Cauchyfolgen konvergieren.
3. Jede in der Metrik beschränkte und abgeschlossene Menge ist kompakt.

Weiters folgt aus diesen äquivalenten Aussagen

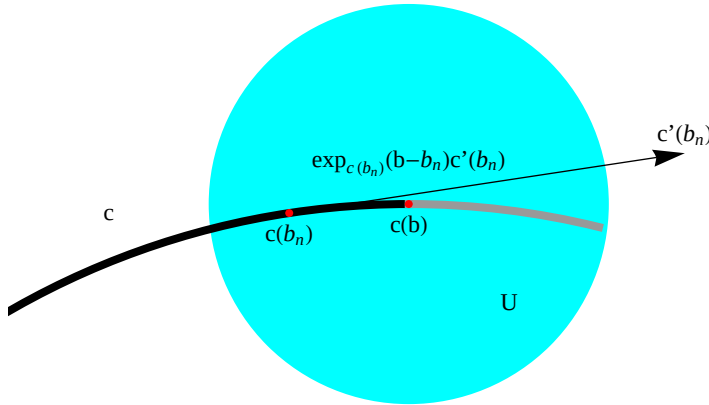
4. Je zwei Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente lassen sich durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden.

Beweis. ($3 \Rightarrow 2$) Dies ist ein allgemeiner Satz aus der Topologie, den nach dem Satz von Cantor (siehe [63, 3.1.4]) genügt es das Prinzip der Intervallschachtelung zu beweisen: Seien also $A_n \neq \emptyset$ abgeschlossen und monoton fallend (d.h. $A_n \supseteq A_{n+1}$) mit $d(A_n) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A_n\} \rightarrow 0$. Nach Voraussetzung [3] ist somit A_n kompakt (falls $d(A_n) < \infty$) und somit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

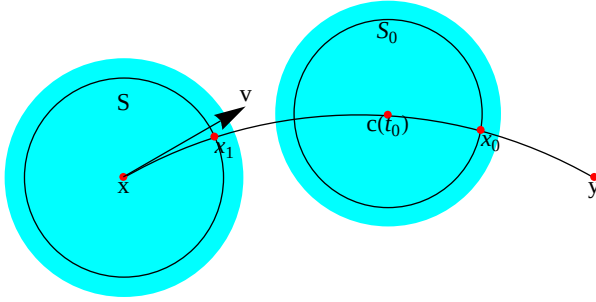
($2 \Rightarrow 1$) Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $]a, b[$ ihr maximaler Definitionsbereich. Sei z.B. $b < +\infty$, und betrachten wir eine Folge $b_n \nearrow b$, dann ist $c(b_n)$ eine Cauchyfolge, denn

$$d(c(t_1), c(t_2)) \leq L(c|_{[t_1, t_2]}) = |t_2 - t_1|.$$

Nach (2) existiert also $\lim_{n \rightarrow \infty} c(b_n) =: c(b)$. Aus [62.8] wissen wir, daß eine Umgebung U von $c(b)$ existiert und ein $\rho > 0$, sodaß $\exp_x$ für alle $x \in U$ und alle Vektoren der Länge kleiner als ρ definiert ist. Wählen wir nun n so groß, daß $b - b_n < \rho$ und $c(b_n) \in U$. Dann ist die Geodäte mit Anfangsrichtung $c'(b_n)$ für $|t| < \rho$ definiert, also c über b hinaus, ein Widerspruch.



(1 $\Rightarrow$ 4) Es sei $r := d(x, y) > 0$. Wir wählen ein $0 < \rho < r$, so daß $\exp_x : B_\rho(0) := \{v : g_x(v, v) < \rho^2\} \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei $0 < \rho_1 < \rho$ und $S := \exp_x(\partial B_{\rho_1}(0))$. Da S kompakt ist, existiert ein $x_1 \in S$ mit $d(x_1, y)$ minimal. Sei $v \in T_x M$ mit $|v| = 1$ und $x_1 := \exp_x(\rho_1 v)$. Wir behaupten, daß $\exp_x(rv) = y$, also $c(t) := \exp_x(tv)$ eine Geodäte von x nach y mit minimaler Länge r ist.



Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann betrachten wir das Infimum t_0 jener $t \in [\rho_1, r]$, für welche die Gleichung $d(c(t), y) = r - t$ nicht gilt. Offensichtlich stimmt diese Gleichung für $t = \rho_1$, denn da jede Kurve von x nach y die Menge S trifft, gilt:

$$r = d(x, y) = \min_{s \in S} (d(x, s) + d(s, y)) = \rho_1 + d(x_1, y) = \rho_1 + d(c(\rho_1), y).$$

Da die Bedingung abgeschlossen ist, gilt für t_0 die Gleichung. Insbesondere ist also $t_0 < r$. Sei S_0 eine geodätische Sphäre um $c(t_0)$ mit Radius $\rho_0 < r - t_0$, sei weiters x_0 ein Punkt auf S_0 mit minimalem Abstand von y , und sei c_0 die radiale Geodäte der Länge ρ_0 von $c(t_0)$ nach x_0 . Dann gilt wie zuvor:

$$d(c(t_0), y) = \min_{s \in S_0} (d(c(t_0), s) + d(s, y)) = \rho_0 + d(x_0, y)$$

und somit $d(x_0, y) = d(c(t_0), y) - \rho_0 = (r - t_0) - \rho_0$. Weiters ist

$$d(x, x_0) \geq d(x, y) - d(x_0, y) = r - (r - t_0) + \rho_0 = t_0 + \rho_0,$$

und die Kurve $c|_{[0, t_0]}$ gefolgt von c_0 hat die Länge $t_0 + \rho_0$ somit gilt $d(x, x_0) = t_0 + \rho_0$, also diese gestückelte Kurve eine (minimale) Geodäte die $c|_{[0, t_0]}$ verlängert und folglich mit c übereinstimmt. Somit gilt die gewünschte Gleichung auch noch für $t_0 + \rho_0$ für alle kleinen ρ_0 . Dies ist ein Widerspruch.

(1 $\Rightarrow$ 3) Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen und beschränkt, i.e.

$$\sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\} =: r < \infty.$$

Nach (4) ist $A \subseteq \exp_x\{B_r(0)\} =: B$ für $x \in A$, und B ist als stetiges Bild der kompakten Menge $B_r(0)$ kompakt, also auch A . $\square$

62.11 Satz.

Sei (M, g) eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit, und sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein bezüglich g beschränktes Vektorfeld. Dann ist ξ vollständig, d.h. hat einen globalen Fluß.

Beweis. Sei $|\xi(x)|_g \leq R$ für alle $x \in M$ und sei c eine Lösungskurve von ξ , dann gilt:

$$L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b |c'(t)|_g dt = \int_a^b |\xi(c(t))|_g dt \leq |b-a| R$$

Also bleibt c auf endlichen Intervallen innerhalb einer beschränkten, und wegen der Vollständigkeit innerhalb einer kompakten Menge. Dies ist ein Widerspruch zu [72, 28.3]. $\square$

62.12 Satz von Nomitsu-Ozeki.

Zu jeder Riemann-Metrik gibt es immer eine konform äquivalente, die geodätisch vollständig ist.

Beweis. Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit und d die assoziierte Metrik zu g . Sei wieder $B_r(x) := \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$. Dann setzen wir

$$r(x) := \sup\{\rho > 0 : B_\rho(x) \text{ ist kompakt}\} \in (0, +\infty].$$

Aus der Dreiecksungleichung für d folgt $B_\rho(x_2) \subseteq B_{\rho+d(x_1, x_2)}(x_1)$ und somit $|r(x_1) - r(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$, also ist r stetig. Falls $r(x) = +\infty$ für ein x , so auch für alle anderen $x \in M$, und damit ist jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt, also M nach [62.10] vollständig. Wir dürfen folglich annehmen, daß $r : M \rightarrow \mathbb{R}$. Nun wählen wir mittels Partition der 1 eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) > \frac{1}{r(x)}$ für alle $x \in M$ und betrachten die konform äquivalente Metrik $\tilde{g} := f^2 g$.

Bleibt zu zeigen, daß $\tilde{g}$ vollständig ist. Dafür genügt es die Inklusion $B_{1/3}^{\tilde{g}}(x) \subseteq B_{r(x)/2}^g(x)$ für alle x zu beweisen, denn dann hat auf Grund des Beweises von (2 $\Rightarrow$ 1) in [62.10] jede (bei x startende) Geodäte mindestens Länge $\frac{1}{3}$, und somit durch Aneinanderstückeln unendliche Länge. D.h. $\tilde{g}$ ist vollständig.

Sei also $y \notin B_{r(x)/2}^g(x)$ und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve von x nach y , dann ist $L^g(c) = \int_a^b |c'(t)|_g dt \geq d(x, y) > \frac{r(x)}{2}$ und

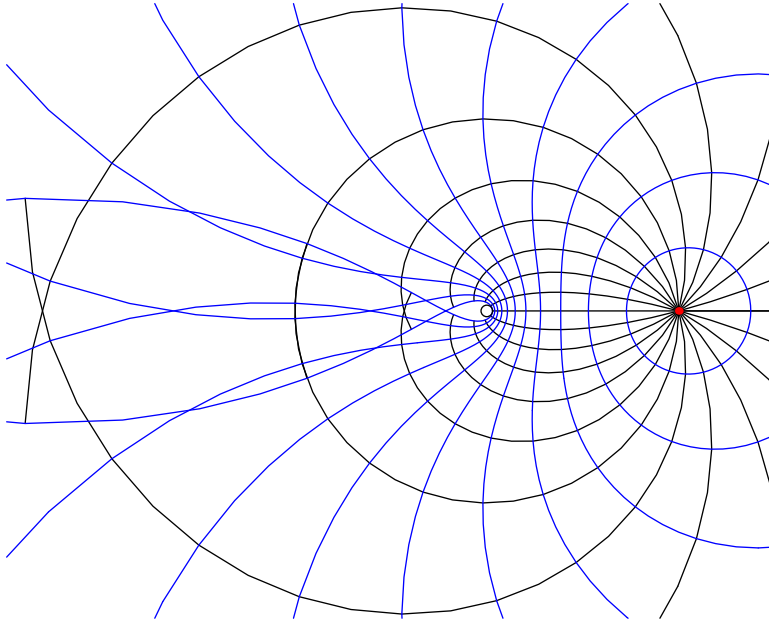
$$\begin{aligned} L^{\tilde{g}}(c) &= \int_a^b |c'(t)|_{\tilde{g}} dt = \int_a^b f(c(t)) |c'(t)|_g dt = \quad (\text{nach dem Zwischenwertsatz}) \\ &= f(c(\tau)) \int_a^b |c'(t)|_g dt = f(c(\tau)) L^g(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))}. \end{aligned}$$

Wegen $|r(x) - r(c(\tau))| \leq d(x, c(\tau)) \leq L^g(c)$ gilt $r(c(\tau)) \leq r(x) + L^g(c)$ und somit

$$L^{\tilde{g}}(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))} \geq \frac{L^g(c)}{r(x) + L^g(c)} > \frac{L^g(c)}{2L^g(c) + L^g(c)} = \frac{1}{3} \quad \square$$

62.12a Beispiel.

Es sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist M mit der euklidischen Metrik g nicht vollständig (betrachte antipodale Punkte). Die Exponentialabbildung in einem Punkt (z.B. $(1, 0)$) in der konform äquivalenten vollständigen Metrik $\tilde{g} := fg$ mit $f(x, y) := 1/(x^2 + y^2)$ sieht dann wie folgt aus:

**62.13 Lemma (Divergenz via kovarianter Ableitung).**

Sei ξ ein Vektorfeld auf der orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M so gilt:

$$\operatorname{div} \xi = \operatorname{spur}(\eta \mapsto \nabla_{\eta} \xi).$$

Beweis. Für die Divergenz aus [43.2](#), die wir aus der äußeren Ableitung durch Anwendung des Hodge-Stern-Operators gewonnen haben, und die wir auch mittels Lie-Ableitung der Volumsform beschrieben haben, gilt nach [43.2](#) folgende lokale Formel:

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{G} \xi^i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\xi^i \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial u^i} G + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right).$$

Für $\nabla \xi$ haben wir die lokale Formel:

$$\begin{aligned} \nabla_{g_i} \xi &\stackrel{[72, 62.4.3]}{=} \sum_{j=1}^m \left(\xi^j \nabla_{g_i} g_j + \frac{\partial}{\partial u^i} (\xi^j) g_j \right) \stackrel{62.6}{=} \sum_{j=1}^m \left(\xi^j \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k + \frac{\partial}{\partial u^i} (\xi^j) g_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^j + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^j \right) g_j. \end{aligned}$$

Für die Spur von $\eta \mapsto \nabla_{\eta} \xi$ erhalten wir also

$$\operatorname{spur}(\eta \mapsto \nabla_{\eta} \xi) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^i + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right).$$

Wegen $G = \det((g_{i,j})_{i,j})$ und $\det'(A)(B) = \det(A) \cdot \operatorname{spur}(A^{-1}B)$ gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial u^k} G &= \frac{1}{2G} G \operatorname{spur}((g^{i,j}) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j} \right)) \\ &\stackrel{62.6}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g^{j,i} (\Gamma_{k,i,j} + \Gamma_{k,j,i}) \stackrel{62.6}{=} \sum_{i=1}^m \Gamma_{k,i}^i = \sum_{i=1}^m \Gamma_{i,k}^i. \quad \square \end{aligned}$$

64. Riemann-, Schnitt-, Ricci- und Skalarkrümmung

Seien 2 Vektorfelder ξ und η im $\mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt für die übliche Ableitung des Vektorfelds ξ in Richtung η , die wir hier auch mit $D_\eta \xi : x \mapsto \xi'(x)(\eta(x))$ bezeichnen wollen:

$$[D_\xi, D_\eta] := D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi = D_{[\xi, \eta]},$$

denn

$$\begin{aligned} (D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi) \left((\zeta^i)_{i=1}^m \right) &= (\xi(\eta(\zeta^i)) - \eta(\xi(\zeta^i)))_{i=1}^m = [\xi, \eta](\zeta^i)_{i=1}^m \\ &= D_{[\xi, \eta]}((\zeta^i)_{i=1}^m) \end{aligned}$$

64.1 Satz (Godazzi-Mainardi-Gleichung).

Sei M eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ und seien ξ, η, ζ Vektorfelder im $\mathbb{R}^n$, welche längs M tangential an M sind. Dann gilt:

1. GAUSS-GLEICHUNG: $[\nabla_\xi, \nabla_\eta]\zeta - \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta = \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi - \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta$,
2. GODAZZI-MAINARDI-GLEICHUNG: $\nabla_\xi L\eta - \nabla_\eta L\xi = L[\xi, \eta]$.

Beweis. Wegen $\langle \zeta, \nu \rangle = 0$ ist

$$\nabla_\eta \zeta = D_\eta \zeta - \langle D_\eta \zeta, \nu \rangle \nu = D_\eta \zeta + \langle \zeta, D_\eta \nu \rangle \nu = D_\eta \zeta + \langle \zeta, L\eta \rangle \nu$$

(vgl. mit [72, 62.2]) und somit wegen der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} 0 &= D_\xi D_\eta \zeta - D_\eta D_\xi \zeta - D_{[\xi, \eta]}\zeta \\ &= D_\xi \left(\nabla_\eta \zeta - \langle L\eta, \zeta \rangle \nu \right) - D_\eta \left(\nabla_\xi \zeta - \langle L\xi, \zeta \rangle \nu \right) - D_{[\xi, \eta]}\zeta \\ &= D_\xi \nabla_\eta \zeta - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L\eta, \zeta \rangle D_\xi \nu \\ &\quad - D_\eta \nabla_\xi \zeta + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L\xi, \zeta \rangle D_\eta \nu \\ &\quad - D_{[\xi, \eta]}\zeta \\ &= \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \langle L\xi, \nabla_\eta \zeta \rangle \nu - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi \\ &\quad - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta + \langle L\eta, \nabla_\xi \zeta \rangle \nu + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta \\ &\quad - \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \nu. \end{aligned}$$

Der Tangentialanteil hiervon ist die Gauß-Gleichung:

$$0 = \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi + \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta$$

Und der Normalanteil ist die Godazzi-Mainardi-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= -\langle \nabla_\eta \zeta, L\xi \rangle - \xi \langle L\eta, \zeta \rangle + \langle \nabla_\xi \zeta, L\eta \rangle + \eta \langle L\xi, \zeta \rangle + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \\ &= \left\langle -\nabla_\xi(L\eta) + \nabla_\eta(L\xi) + L[\xi, \eta], \zeta \right\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

64.2 Definition (Riemann-Krümmung)

Die RIEMANN-KRÜMMUNG $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ einer Riemann-Mannigfaltigkeit ist definiert durch die linke Seite der Gauß-Gleichung [64.1.1]:

$$R(\xi, \eta) := [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}.$$

Die Motivation hierfür ist, daß für Riemann'sche Flächen die rechte Seite der Gauß-Gleichung [64.1.1] auf $\zeta := \eta$ angewandt und ins innere Produkt mit ξ genommen für orthonormale Vektoren ξ und η gerade die Gaußkrümmung liefert:

$$\left\langle \langle L\eta, \eta \rangle L\xi - \langle L\xi, \eta \rangle L\eta, \xi \right\rangle = \langle L\eta, \eta \rangle \langle L\xi, \xi \rangle - \langle L\xi, \eta \rangle \langle L\eta, \xi \rangle = \det(L) = K.$$

64.3 Lemma (Die Riemann-Krümmung ist ein Tensorfeld).

Die Riemann-Krümmung ist ein 3-fach ko- und 1-fach kontravariantes Tensorfeld auf M , d.h. $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$.

(Koordinatenfreier) Beweis. Dazu muß man nur zeigen, daß die Abbildung $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto R(\xi, \eta)(\zeta)$ in allen Variablen $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen ist, vgl. mit dem Beweis von [31.10](#).

$$\begin{aligned}
R(f\xi, \eta) &= [\nabla_{f\xi}, \nabla_\eta] - \nabla_{[f\xi, \eta]} \stackrel{[72, 29.2]}{=} [f\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{f[\xi, \eta] - \eta(f)\xi} \\
&= (f\nabla_\xi)\nabla_\eta - \nabla_\eta(f\nabla_\xi) - f\nabla_{[\xi, \eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\
&\stackrel{[72, 62.4.3]}{=} f\nabla_\xi\nabla_\eta - f\nabla_\eta\nabla_\xi - \eta(f)\nabla_\xi - f\nabla_{[\xi, \eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\
&= f([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}) + 0 = fR(\xi, \eta). \\
R(\xi, \eta)(f\zeta) &= ([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]})(f\zeta) \\
&\stackrel{[72, 62.4.3]}{=} \nabla_\xi(f\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\zeta) - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta) \\
&\quad - f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - [\xi, \eta](f)\zeta \\
&\stackrel{[72, 62.4.3]}{=} f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \xi(f)\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta + \xi(\eta(f))\zeta \\
&\quad - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - \xi(f)\nabla_\eta\zeta - \eta(\xi(f))\zeta \\
&\quad - f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - \xi(\eta(f))\zeta + \eta(\xi(f))\zeta \\
&= f(\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi, \eta]})\zeta = fR(\xi, \eta)(\zeta). \quad \square
\end{aligned}$$

Koordinatenbeweis.

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \\
&\stackrel{[62.5]}{=} \nabla_X \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&\quad - \nabla_Y \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&\quad - \nabla_{\sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}} Z \\
&\stackrel{[72, 62.4.3]}{=} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \nabla_X \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + X \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \nabla_Y \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - Y \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{[72, 62.4.2]}} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_i \left(\sum_k X \left(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X(Y^k) \right. \\
& + \sum_{j,k} X(\Gamma_{j,k}^i) Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i X(Z^j) Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X(Y^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k Y \left(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y(X^k) \right. \\
& + \sum_{j,k} Y(\Gamma_{j,k}^i) Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Y(Z^j) X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y(X^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left(Z^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
& \underline{\underline{62.6}} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_i \left(\sum_k \sum_p X^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \right. \\
& + \sum_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p X^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} Y^k \\
& + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \sum_p Y^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \right. \\
& + \sum_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} X^k \\
& + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left(Z^l \sum_p \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&- \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k \underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma_{k,j}^p}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{k,i}^p}{\partial u^j} + \sum_l \left(\Gamma_{k,j}^l \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{l,j}^p \right) \right)}_{=: R_{i,j,k}^p} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \quad \square
\end{aligned}$$

64.4 Bemerkung

In lokalen Koordinaten haben wir

$$\begin{aligned}
(1) \quad R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k}^l du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^l} \\
\text{mit } R_{i,j,k}^l &= du^l \left(R \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l)
\end{aligned}$$

Beziehungsweise für $R(\xi, \eta, \zeta, \chi) := \langle R(\xi, \eta) \zeta, \chi \rangle$

$$\begin{aligned}
(2) \quad R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k,l} du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes du^l \\
\text{mit } R_{i,j,k,l} &= \langle R \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \mid \frac{\partial}{\partial u^l} \rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p}).
\end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^m R_{i,j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} &= R \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} := \left(\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \right] - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right]} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&\stackrel{\boxed{62.6}}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left(\sum_{l=1}^m \Gamma_{j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \left(\sum_{l=1}^m \Gamma_{i,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) + 0 \\
&\stackrel{\boxed{72, 62.4.3}}{=} \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{j,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{i,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\stackrel{\boxed{62.6}}{=} \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{j,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{i,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l}^p) + \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l \right) \frac{\partial}{\partial u^l}.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert also:

$$R_{i,j,k}^l = \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l).$$

Nun berechnen wir

$$R_{i,j,k,l} := \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \left\langle \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^p) g_{p,l} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p g_{p,l} \right) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^i} (g_{p,l}) \\ &\stackrel{\boxed{62.6}}{=} \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p (\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p}). \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} R_{i,j,k,l} &= \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\ &= \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^p) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^p) + \sum_{q=1}^m (\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q}^p - \Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q}^p) \right) g_{p,l} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \underbrace{(\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p})}_{(1)} - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k,l}) + \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,k}^p \underbrace{(\Gamma_{j,p,l} + \Gamma_{j,l,p})}_{(3)} \\ &\quad + \sum_{q=1}^m (\Gamma_{j,k}^q \underbrace{\Gamma_{i,q,l}}_{(1)} - \Gamma_{i,k}^q \underbrace{\Gamma_{j,q,l}}_{(3)}) \\ &\stackrel{\boxed{62.6}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{j,k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,i} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{i,k} \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{i,k}^p \underbrace{\Gamma_{j,l,p}}_{(4)} - \Gamma_{j,k}^p \underbrace{\Gamma_{i,l,p}}_{(2)}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p}). \quad \square \end{aligned}$$

64.5 Lemma (Symmetrie der Riemann-Krümmung).

Die Riemann-Krümmung erfüllt folgende Identitäten:

1. $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$
2. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$
3. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$
4. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
5. $(\nabla_Z R)(X, Y, W) + (\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) = 0.$

Die Gleichungen 4 und 5 heißen 1.te und 2.te BIANCHI IDENTITÄT.

Beweis.

1 ist klar wegen der Definition $R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$.

2 ist äquivalent zu $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ für alle X, Y, Z . Es ist:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= \underbrace{\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle}_{X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle} - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= X \left(\frac{1}{2} Y(\langle Z, Z \rangle) \right) - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle - Y \left(\frac{1}{2} X(\langle Z, Z \rangle) \right) + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle - 0 - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle = 0 \end{aligned}$$

4 Nach [72, 62.4] gilt $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$ und durch Anwenden von ∇_X erhalten wir:

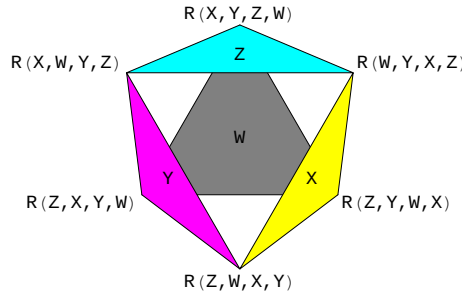
$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y, Z]} X = \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X = [X, [Y, Z]]$$

Der zyklische Ausdruck läßt sich nun wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \\ &= \underbrace{\nabla_X \nabla_Y Z}_{(1)} - \underbrace{\nabla_Y \nabla_X Z}_{(2)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]} Z}_{(3)} \\ &\quad + \underbrace{\nabla_Y \nabla_Z X}_{(2)} - \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y X}_{(3)} - \underbrace{\nabla_{[Y, Z]} X}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\nabla_Z \nabla_X Y}_{(3)} - \underbrace{\nabla_X \nabla_Z Y}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[Z, X]} Y}_{(2)} \\ &= \underbrace{[X, [Y, Z]]}_{(1)} + \underbrace{[Y, [Z, X]]}_{(2)} + \underbrace{[Z, [X, Y]]}_{(3)} \\ &= 0 \quad (\text{wegen der Jacobi-Identität}). \end{aligned}$$

3 folgt rein algebraisch aus **1**, **2** und **4**:

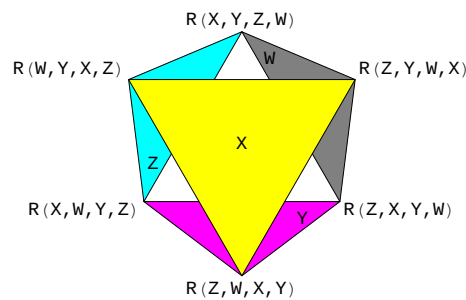
Man setzt $R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle$. Nun betrachtet man einen Oktaeder und bezeichne 4 der Seitenflächen (die sich nur in Ecken schneiden) mit X, Y, Z, W .



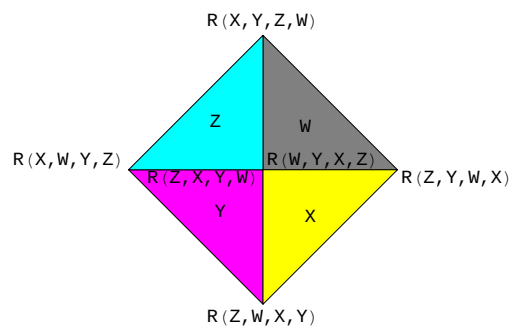


Die Ecken des Oktaeders, welche z.B. der Schnitt der Flächen X und Y ist, wird mit $R(Z, W, X, Y)$ bezeichnet, da von dieser Ecke aus betrachtet die Flächen X , Z , Y , W aufeinander folgen. Wegen [1](#) und [2](#) ist es egal, von welcher der beiden angrenzenden Flächen X oder Y aus man zu zählen beginnt.

Nun beachte man, daß die Summen der Ecken der Dreiecke X , Y , Z , W wegen [4](#) Null sind, denn bei der Drehung um eine Achse durch den Mittelpunkt eines Dreiecks werden sowohl dessen Ecken als auch die übrigen 3 Dreiecke zyklisch permutiert.



Zählt man diese Summen für die Dreiecke Z und W zusammen und zieht jene für X und Y ab, so erhält man, daß das Doppelte von der Differenz aus der Ecke $W \cap Z$ und der Ecke $X \cap Y$ Null ist, d.h. [3](#) gilt.



In Detail bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
(+)& \quad \underbrace{R(X, Y, Z, W)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, Z, X, W)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, X, Y, W)}_{(3)} = 0 \\
(-)& \quad \underbrace{R(W, X, Y, Z)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Y, W, Z)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, W, X, Z)}_{(5)} = 0 \\
(-)& \quad \underbrace{R(Z, W, X, Y)}_{(6)} + \underbrace{R(W, X, Z, Y)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Z, W, Y)}_{(3)} = 0 \\
(+)& \quad \underbrace{R(Y, Z, W, X)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, W, Y, X)}_{(6)} + \underbrace{R(W, Y, Z, X)}_{(5)} = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{2R(X, Y, Z, W)}_{(1)} - \underbrace{2R(Z, W, X, Y)}_{(6)} = 0
\end{aligned}$$

5 Um diesem Punkt überhaupt Sinn zu geben, muß man ∇_Z auf Tensorfelder ausdehnen. Das geht mittels Produkt-Regel, i.e.

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z R)(X, Y, W) &:= \\
&= \nabla_Z (R(X, Y)W) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X, Y)\nabla_Z W \\
&= \nabla_Z (R(X, Y)W) + R(Y, \nabla_Z X)W - R(X, \nabla_Y Z - [Y, Z])W - R(X, Y)\nabla_Z W.
\end{aligned}$$

Mit $\sum_{\text{zykl.}}$ bezeichnen wir die zyklische Summe bezüglich der Variablen X, Y und Z . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{zykl.}} (\nabla_Z R)(X, Y, W) &= \\
&= - \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z (R(X, Y)W) + \sum_{\text{zykl.}} R(X, [Y, Z])W - \sum_{\text{zykl.}} R(X, Y)\nabla_Z W \\
&= \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}}_{(4)} \right) W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}]}_{(4)} W - \underbrace{\nabla_{[X, [Y, Z]]}}_{(3)} W \right) \\
&\quad - \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z}_{(2)} W - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}\nabla_Z}_{(4)} W \right) \\
&= - \underbrace{\nabla_{\sum_{\text{zykl.}} [X, [Y, Z]]}}_{(3)} W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{\nabla_Z [\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} W - \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z}_{(2)} W \right) + \underbrace{0}_{(4)} \\
&= 0 + \left(\sum_{\text{zykl.}} [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]] \right) W \\
&= 0 \quad \text{wegen der Jacobi-Identität.} \quad \square
\end{aligned}$$

64.6 Folgerung (Polarisierungsformel).*Für die Riemannkrümmung gilt:*

$$\begin{aligned}
4! R(X, Y, Z, W) &= \\
&= -R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) + R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \\
&\quad + R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) - R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \\
&\quad + R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \\
&\quad - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y)
\end{aligned}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
(6) \quad R(X, Y+Z, Y+Z, X) - R(X, Y-Z, Y-Z, X) &= \\
&= 2 \left(R(X, Y, Z, X) + R(X, Z, Y, X) \right) \\
&\quad \underline{\underline{\underline{64.5.1}, 64.5.2}}} 2 \left(R(X, Y, Z, X) + R(Z, X, X, Y) \right) \\
&\quad \underline{\underline{\underline{64.5.3}}}} 4 R(X, Y, Z, X)
\end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned}
(7) \quad R(X+W, Y, Z, X+W) - R(X-W, Y, Z, X-W) &= \\
&= 2 \left(R(X, Y, Z, W) + R(W, Y, Z, X) \right)
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
(8) \quad R(Y, Z, X, W) &= \\
&\quad \underline{\underline{\underline{64.5.1}, 64.5.2}}} R(Z, Y, W, X) \\
&\quad \underline{\underline{\underline{7}}}} -R(X, Y, W, Z) + \frac{1}{2} \left(R(Z+X, Y, W, Z+X) - R(Z-X, Y, W, Z-X) \right) \\
&\quad \underline{\underline{\underline{64.5.2}, 6}}} R(X, Y, Z, W) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left(R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) - R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \right. \\
&\quad \left. - R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) + R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \right) \\
(9) \quad R(Z, X, Y, W) &= \\
&\quad \underline{\underline{\underline{64.5.2}}}} -R(Z, X, W, Y) \\
&\quad \underline{\underline{\underline{7}}}} R(Y, X, W, Z) - \frac{1}{2} \left(R(Z+Y, X, W, Z+Y) - R(Z-Y, X, W, Z-Y) \right) \\
&\quad \underline{\underline{\underline{64.5.1}, 64.5.2}, 6}}} R(X, Y, Z, W) \\
&\quad - \frac{1}{8} \left(R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \right. \\
&\quad \left. - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
0 & \stackrel{\text{64.5.4}}{=} R(X, Y, Z, W) + \overbrace{R(Y, Z, X, W)}^{\text{8}} + \overbrace{R(Z, X, Y, W)}^{\text{9}} \\
& = R(X, Y, Z, W) \\
& \quad + R(X, Y, Z, W) \\
& \quad + \frac{1}{8} \left(R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) - R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \right. \\
& \quad \quad \left. - R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) + R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \right) \\
& \quad + R(X, Y, Z, W) \\
& \quad - \frac{1}{8} \left(R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \right. \\
& \quad \quad \left. - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \right)
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
4! R(X, Y, Z, W) & = \\
& = -R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) + R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \\
& \quad + R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) - R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \\
& \quad + R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \\
& \quad - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \quad \square
\end{aligned}$$

64.7 Definition.

Wir wollen nun die Ausdrücke der Form $R(X, Y, Y, X)$ in der Polarisierungsformel [64.6](#) weiter untersuchen. Sei dazu

$$\begin{aligned}
X' & = aX + bY \\
Y' & = cX + dY
\end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wegen der Schiefsymmetrie [64.5.1](#) und [64.5.2](#) ist

$$R(X', Y', Y', X') = \det(A) R(X, Y, Y, X) = \det(A)^2 R(X, Y, Y, X).$$

Das gleiche Transformationsverhalten hat auch $|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2$, da dies das Quadrat der Fläche des von X und Y erzeugten Parallelogramms ist, siehe dazu [72](#), [53.4](#). Folglich ist der Ausdruck

$$K(F) := \frac{R(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems des von X und Y erzeugten 2-dimensionalen Teilraums $F := \langle \{X, Y\} \rangle$ von $T_p M$. Diese Zahl heißt die **SCHNITTKRÜMMUNG** von F . Die Polarisierungsformel [64.6](#) zeigt, daß die Riemannkrümmung sich aus der Schnittkrümmung berechnen läßt.

64.8 Satz (Gauß-Krümmung versus Schnitt-Krümmung).

Für jede Riemann-Fläche M ist die Gaußkrümmung ident mit der Schnittkrümmung (des ganzen 2-dimensionalen Tangentialraums).

Beweis.

Für Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$ haben wir das in [64.2](#) gezeigt. Für abstrakte Riemann-Flächen M seien (u^1, u^2) lokale Koordinaten auf M . Dann ist

$$\begin{aligned}
 D^2 \cdot K(T_x M) &= D^2 \cdot \frac{R\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^1}\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial u^1}\right|^2 \left|\frac{\partial}{\partial u^1}\right|^2 - \left|\left\langle \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right\rangle\right|^2} = R_{1,2,2,1} \\
 &\stackrel{\text{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\
 &\quad + g^{1,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,1}) + g^{1,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,1}) \\
 &\quad + g^{2,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,2}) + g^{2,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,2}) \\
 &\stackrel{[72, 58.1], 62.6}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\
 &\quad + \frac{G}{D^2} (E_2 E_2 - (2F_2 - G_1) E_1) - \frac{F}{D^2} (G_1 E_2 - G_2 E_1) \\
 &\quad - \frac{F}{D^2} (E_2 G_1 - (2F_2 - G_1)(2F_1 - E_2)) + \frac{E}{D^2} (G_1^2 - G_2(2F_1 - E_2)) \\
 &= \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\
 &\quad + \frac{F}{4D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\
 &\quad + \frac{G}{4D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\
 &\stackrel{[72, 53.7]}{=} D^2 K
 \end{aligned}$$

Oder etwas anders gerechnet:

$$\begin{aligned}
 R_{i,j,k,l} &\stackrel{\text{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
 &\quad + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p}) \\
 R_{1,2,2,1} &\stackrel{\text{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\
 &\quad + (\Gamma_{1,2}^1 \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2}^1 \Gamma_{1,1,1}) + (\Gamma_{1,2}^2 \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2}^2 \Gamma_{1,1,2}) \\
 &\stackrel{[72, 58.1], 62.6}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\
 &\quad + \frac{E_2 G - G_1 F}{2D^2} \cdot \frac{E_2}{2} - \frac{2F_2 G - G_1 G - G_2 F}{2D^2} \cdot \frac{E_1}{2} \\
 &\quad + \frac{-E_2 F + G_1 E}{2D^2} \cdot \frac{G_1}{2} - \frac{-2F_2 F + G_1 F + G_2 E}{2D^2} \cdot \frac{2F_1 - E_2}{2} \\
 &= \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\
 &\quad + \frac{F}{D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\
 &\quad + \frac{G}{D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\
 &\stackrel{[72, 53.7]}{=} D^2 K. \quad \square
 \end{aligned}$$

64.9 Definition (Normalkoordinaten)

Unter RIEMANN'SCHEN NORMALKOORDINATEN versteht man die Parametrisierung

$$\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p \left(\sum_{i=1}^m u^i X_i \right)$$

für eine Orthonormalbasis $(X_1, \dots, X_m)$ von $T_p M$.

64.10 Lemma (Christoffelsymbole in Normalkoordinaten).

In Riemannschen Normalkoordinaten verschwinden alle Christoffelsymbole bei p .

Beweis. Offensichtlich gilt

$$g_{i,j}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle(p) = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Die radialen Geodäten $t \mapsto \exp_p(tX)$ erfüllen die Geodäten-Gleichung

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

Für $u(t) := tX_j$ gilt wegen $u^k(t) = \delta_j^k t$ somit $\Gamma_{j,j}^k(p) = 0$. Für $u(t) := t(X_i + X_j)$ folgt analog $\Gamma_{i,i}^k + \Gamma_{i,j}^k + \Gamma_{j,i}^k + \Gamma_{j,j}^k = 0$ und da $\Gamma_{i,j}^k$ symmetrisch in (i, j) ist, ist $\Gamma_{i,j}^k(p) = 0$ für alle i, j, k . $\square$

64.11 Lemma.

Sei M eine Riemann-Mannigfaltigkeit und $F < T_x M$ ein 2-dimensionaler Teilraum. Dann ist die Schnittkrümmung $K(F)$ genau die Gauß-Krümmung der lokal durch $\exp(F)$ gegebenen Fläche.

Beweis. Wegen [64.8](#) genügt es zu zeigen, daß die Riemann-Krümmung R_N der Fläche $N := \exp(F)$ mit der Riemann-Krümmung R_M auf M übereinstimmt, wobei N durch $(t, s) \mapsto \exp_p(tX_1 + sX_2)$ parametrisiert wird und die von M induzierte Metrik trägt.

Dazu wählt man Riemann-Normalkoordinaten $\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^m u^i X_i)$ für eine Orthonormalbasis $(X_1, \dots, X_m)$ des Tangentialraums $T_p M$. Bezüglich dieser verschwinden nach [64.10](#) alle Christoffelsymbole bei p . Da die Koeffizientenfunktionen $g_{i,j}$ mit $i, j \leq 2$ für M und N übereinstimmen, gilt das auch für

$$R_{i,j,k,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{j,l} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{i,l} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} \right) + 0. \quad \square$$

64.12 Satz (Ungekrümmte Räume).

Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind äquivalent:

1. $R = 0$.
2. M ist lokal isometrisch zum Euklidischen Raum.
3. Der Paralleltransport (siehe [\[72, 61\]](#)) ist lokal wegunabhängig.

Der Punkt (3) ist global nicht allgemein gültig wie das Möbiusband mit flacher Metrik zeigt.

Beweis. (1 $\Rightarrow$ 3) Indem wir eine Karte verwenden, können wir annehmen, daß M eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^m$ ist, allerdings mit einer allgemeinen Riemann-Metrik g . Wir müssen zu gegebenem Anfangswert X_0 ein Vektorfeld X finden, welches längs jeder Kurve parallel ist. Dazu genügt es, daß $\nabla_{\partial_i} X = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ ist. Zuerst finden wir ein längs der u^1 -Achse paralleles Vektorfeld $u^1 \mapsto X(u^1, 0, \dots, 0)$. Zu jedem u^1 finden wir längs der Kurve $u^2 \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$

ein paralleles Vektorfeld $u^2 \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ mit Anfangswert $X(u^1, 0, \dots, 0)$. Und somit erhalten wir ein Vektorfeld $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ längs der 2-Fläche $\psi : (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$. Dieses erfüllt: $\nabla_{\partial_2} X = 0$ längs ψ und $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$. Es gilt $\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} X - \nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = R(\partial_1, \partial_2)X = 0$, da $[\partial_s, \partial_t] = 0$ ist. Somit ist $\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = 0$, d.h. $\nabla_{\partial_1} X$ ist parallel längs $u^2 \mapsto \psi(u^1, u^2)$. Aus $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$ folgt $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs ψ . Es ist also X parallel längs aller Kurven in der 2-Fläche ψ .

Nun kann man obigen Prozeß iterative fortsetzen, um das gewünschte parallele Vektorfeld X zu erhalten. Dies zeigt, daß der Paralleltransport wegunabhängig ist.

(3 $\Rightarrow$ 2) Wählt man als Anfangswert die Vektoren einer Orthonormal-Basis von $T_0 \mathbb{R}^m$, so erhält man parallele Vektorfelder X_i , welche punktweise eine Basis bilden. Für diese gilt $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0$. Diese können integriert werden, um eine Karte φ zu erhalten, welche $\varphi_i = X_i$ erfüllt, siehe [72, 29.12]. In dieser Karte hat die Riemann-Metrik dann aber Koeffizienten $\delta_{i,j}$ nach [72, 61.5.1], d.h. φ ist eine lokale Isometrie zwischen dem flachen $\mathbb{R}^m$ und M .

(2 $\Rightarrow$ 1) Da die kovariante Ableitung und somit die Riemann-Krümmung eine intrinsische Größe ist, also nur von der Riemann-Metrik abhängt, genügt es R für den Euklidischen Raum zu berechnen, dort ist aber $R = 0$ wegen der Vorbemerkung zu [64.1]. $\square$

64.13 Definition (Spuren der Riemann-Krümmung)

Unter der RICCI-KRÜMMUNG einer Riemann-Mannigfaltigkeit versteht man

$$\text{Ricci}(X, Y) := \text{spur}\left(Z \mapsto R(Z, X)(Y)\right) = -\text{spur}\left(Z \mapsto R(X, Z)(Y)\right).$$

In lokalen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ricci}\left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \underbrace{du^k \left(R\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \frac{\partial}{\partial u^j} \right)}_{R_{k,i,j}^k} \\ &\stackrel{[64.4.1]}{=} \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k - \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{k,j}^i + \sum_p (\Gamma_{i,j}^p \Gamma_{k,p}^i - \Gamma_{k,j}^p \Gamma_{i,p}^k) \right) \end{aligned}$$

Beachte, daß Ricci : $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch ist, denn

$$\begin{aligned} \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \sum_k R_{k,i,j}^k \stackrel{[64.4.2]}{=} \sum_{k,l} R_{k,i,j,l} g^{l,k} \stackrel{[64.5.3]}{=} \sum_{k,l} R_{j,l,k,i} g^{l,k} \\ &\stackrel{[64.5.1], [64.5.2]}{=} \sum_{l,k} R_{l,j,i,k} g^{k,l} = \sum_l R_{l,j,i}^l = \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \end{aligned}$$

Eine (Pseudo-)Riemann-Mannigfaltigkeit heißt RICCI-FLACH falls $\text{Ricci} = 0$.

Sie heißt EINSTEIN-MANNIGFALTIGKEIT falls Ricci proportional zur Metrik ist.

Unter der SKALARKRÜMMUNG versteht man $S := \text{spur}_g(\xi \mapsto (\text{Ricci}(\xi, -))^b)$, also die Spur der Abbildung

$$T_x M \xrightarrow{\text{Ricci}_x^\vee} (T_x M)^* \xrightarrow[\cong]{\sim} T_x M.$$

In Koordinaten ist das somit

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j} \text{Ricci} \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) g^{i,j} \\ &= \sum_{i,j} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{k,j}^k - \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k + \sum_p (\Gamma_{k,j}^p \Gamma_{i,p}^k - \Gamma_{i,j}^p \Gamma_{k,p}^k) \right) g^{i,j}. \end{aligned}$$

Beachte, daß dies wegen der Symmetrieeigenschaften [64.6](#) alle nicht trivialen Spuren sind, welche man aus der Riemannkrümmung bilden kann.

Der völlig spurfreie Teil der Riemann-Krümmung wird (für $m \geq 3$) als WEYL KRÜMMUNGSTENSOR

$$\begin{aligned} W &:= R - \underbrace{\frac{1}{m-2} \left(\text{Ricci} - \frac{S}{2(m-1)} g \right)}_{\text{Schouten Tensor}} \bullet g \\ &= R - \frac{1}{m-2} \left(\text{Ricci} - \frac{S}{m} g \right) \bullet g - \frac{S}{2m(m-1)} g \bullet g \end{aligned}$$

bezeichnet. Dabei ist $k \bullet h$ das KULKARNI-NOMIZU PRODUKT zweier symmetrischer 2-fach kovarianter Tensoren k und h , nämlich

$$\begin{aligned} (k \bullet h)(v_1, v_2, v_3, v_4) &:= k(v_1, v_3) h(v_2, v_4) + k(v_2, v_4) h(v_1, v_3) \\ &\quad - k(v_1, v_4) h(v_2, v_3) - k(v_2, v_3) h(v_1, v_4) \end{aligned}$$

64.7a Proposition.

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit hat genau dann konstante Schnittkrümmung auf $G(2, T_p M)$, wenn für alle $X, Y, Z \in T_p M$ gilt:

$$R(X, Y)Z = K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

Beweis. ($\Leftarrow$) Sei $R(X, Y)Z = K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$ mit einer Konstanten $K \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} K(\langle \{X, Y\} \rangle) &:= \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \\ &= \frac{g(K \cdot (g(Y, Y)X - g(X, Y)Y), X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = K \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Sei K die konstante Schnittkrümmung. Der Ausdruck

$$g(K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), W) = K \cdot (g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W))$$

hat die Eigenschaften [64.5.1](#)–[64.5.4](#) und stimmt für $Z = Y$ und $W = X$ mit $g(R(X, Y)Y, X)$ überein. Wegen [64.6](#) (wo wir nur diese Eigenschaften) verwendet haben stimmt er überhaupt mit $g(R(X, Y)Z, W)$ überein. $\square$

64.14 Folgerung.

Eine m -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit habe konstante Schnittkrümmung K . Dann gilt für die Ricci- und die Skalarkrümmung:

$$\begin{aligned} \text{Ricci}(X, Y) &= K \cdot (m-1) \cdot g(X, Y) \\ S &= K \cdot (m-1) \cdot m \end{aligned}$$

Insbesondere liegt eine Einstein-Mannigfaltigkeit vor, also $\text{Ricci} = \frac{S}{m} g$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \text{Ricci}(X, Y) &= \text{spur} \left(Z \mapsto R(Z, X)Y \right) \\
 &\stackrel{\boxed{64.7a}}{=} \text{spur} \left(Z \mapsto K \cdot (g(X, Y)Z - g(Z, Y)X) \right) \\
 &= K \cdot (m \cdot g(X, Y) - g(X, Y)) = K \cdot (m - 1) \cdot g(X, Y) \\
 \text{und } S &= \text{spur} \left(X \mapsto (\text{Ricci}(X, \cdot))^b \right) = \text{spur} \left(X \mapsto (K \cdot (m - 1) \cdot g(X, \cdot))^b \right) \\
 &= \text{spur} \left(X \mapsto K \cdot (m - 1) \cdot X \right) = K \cdot (m - 1) \cdot m. \quad \square
 \end{aligned}$$

66. Die Begleitbeinmethode von Cartan

66.1 Definition.

Es sei (M, g) eine m -dimensionale (PSEUDO-)RIEMANN-MANIGFALTIGKEIT, d.h. g ist eine (nicht notwendig positiv) definite Metrik auf der Mannigfaltigkeit M . Ein **LOKALES m -BEIN** (m -FRAME) auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ ist ein m -Tupel von Vektorfeldern s_i auf U die punktweise (d.h. für jedes $x \in U$) eine Basis von $T_x M$ bilden. Es heißt $s = (s_1, \dots, s_m)$ **ORTHONORMAL-BEIN** falls $(s_i(x))_i$ eine orthonormal-Basis von $T_x M$ für jedes $x \in U$ ist, d.h. $g(s_i, s_j) = \pm \delta_{i,j}$.

Lokal existieren orthonormal-Beine, denn die symmetrische definite bilinear-Form g_x auf $T_x M$ läßt sich in einer Basis $(e_1, \dots, e_m)$ als

$$g_x \left(\sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j \right) = \sum_{i \leq p} v^i w^i - \sum_{i > p} v^i w^i$$

schreiben, siehe [72, 14.8]. Und indem wir die e_i zu lokal linear unabhängigen Vektorfeldern erweitern und auf diese Gram-Schmidt anwenden erhalten wir einen orthonormal-Rahmen.

Falls s und s' zwei m -Beine auf U sind, so ist $s'_i = \sum_{j=1}^m s_j \cdot h_i^j$ (kurz: $s' = s \cdot h$) für ein eindeutig bestimmtes $h = (h_i^j)_{i,j=1,\dots,m} \in C^\infty(U, GL(m))$.

Sei $s = (s_1, \dots, s_m)$ ein m -Bein auf U und ∇ die Levi-Civita-Ableitung. Dann existieren eindeutig bestimmte $\omega_i^j \in \Omega^1(U)$ mit

$$\nabla_\xi s_i = \sum_j s_j \cdot \omega_i^j(\xi), \text{ kurz: } \nabla_\xi s = s \cdot \omega(\xi) \text{ bzw. } \nabla s = s \cdot \omega$$

wobei $\omega = (\omega_i^j)_{i,j=1,\dots,m} \in \Omega^1(U, L(m, m))$ **ZUSAMMENHANGSMATRIX VON ∇ bzgl. s** heißt.

66.2 Lemma.

Es sei $\eta = \sum_j s_j \eta^j$ ein Vektorfeld auf U . Dann ist

$$\nabla \eta = \sum_k s_k \cdot \left(\sum_j \omega_j^k \cdot \eta^j + d\eta^k \right) = s \cdot \omega \cdot \eta + s \cdot d\eta.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \nabla_\xi \eta &= \nabla_\xi \left(\sum_j s_j \eta^j \right) \stackrel{[72, 62.4.3]}{=} \sum_j \left(\nabla_\xi s_j \cdot \eta^j + s_j \cdot \xi(\eta^j) \right) \\
 &\stackrel{\boxed{66.1}}{=} \sum_j \left(\sum_k s_k \cdot \omega_j^k(\xi) \cdot \eta^j + s_j \cdot d\eta^j(\xi) \right) = \sum_k s_k \cdot \left(\sum_j \omega_j^k \cdot \eta^j + d\eta^k \right)(\xi) \quad \square
 \end{aligned}$$

66.3 Lemma.

Es seien s und $s' = s \cdot h$ zwei m -Beine und ω und ω' die zugehörigen Zusammenhangsformen, dann gilt:

$$h \cdot \omega' = dh + \omega \cdot h.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} s \cdot h \cdot \omega' &= s' \cdot \omega' = \nabla s' = \nabla(s \cdot h) \stackrel{[72, 62.4.3]}{=} s \cdot dh + \nabla s \cdot h = s \cdot dh + s \cdot \omega \cdot h \\ &\Rightarrow h \cdot \omega' = dh + \omega \cdot h. \quad \square \end{aligned}$$

66.4 Lemma.

Es sei s ein orthonormal-Bein, ω die zugehörige Zusammenhangsform und $\varepsilon_i := g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$, dann gilt:

$$\varepsilon_i \omega_k^i + \varepsilon_k \omega_i^k = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \delta_{i,j} &= g(s_i, s_j) \Rightarrow 0 = dg(s_i, s_j) \stackrel{[72, 62.4.5]}{=} g(\nabla s_i, s_j) + g(s_i, \nabla s_j) \\ &= g\left(\sum_k s_k \cdot \omega_i^k, s_j\right) + g\left(s_i, \sum_k s_k \cdot \omega_j^k\right) \\ &= \sum_k \omega_i^k g(s_k, s_j) + \sum_k \omega_j^k g(s_i, s_k) = \varepsilon_j \omega_i^j + \varepsilon_i \omega_j^i. \quad \square \end{aligned}$$

66.5 Lemma.

Es sei s ein orthonormal-Bein und ω die zugehörige Zusammenhangsform. Wir setzen $R(\xi, \eta)s := (R(\xi, \eta)s_i)_{i=1, \dots, m}$. Dann gilt:

$$R(\xi, \eta)s = s \cdot (d\omega + \omega \wedge \omega)(\xi, \eta),$$

wobei

$$\omega \wedge \omega := \left(\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k \right)_{i,j} \in \Omega^2(U, L(m, m)).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta)s &= \nabla_\xi \nabla_\eta s - \nabla_\eta \nabla_\xi s - \nabla_{[\xi, \eta]} s \\ &= \nabla_\xi (s \cdot \omega(\eta)) - \nabla_\eta (s \cdot \omega(\xi)) - s \cdot \omega([\xi, \eta]) \\ &= s \cdot d(\omega(\eta))(\xi) + \nabla_\xi s \cdot \omega(\eta) - s \cdot d(\omega(\xi))(\eta) - \nabla_\eta s \cdot \omega(\xi) - s \cdot \omega([\xi, \eta]) \\ &= s \cdot \left(d(\omega(\eta))(\xi) - d(\omega(\xi))(\eta) - \omega([\xi, \eta]) \right) + s \cdot \left(\omega(\xi) \cdot \omega(\eta) - \omega(\eta) \cdot \omega(\xi) \right) \\ &\stackrel{[42.7]}{=} s \cdot (d\omega + \omega \wedge \omega)(\xi, \eta). \quad \square \end{aligned}$$

66.6 Definition.

Man bezeichnet mit $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(U, L(m, m))$ die KRÜMMUNGSMATRIX BZGL. s . Es gilt somit die 1. STRUKTURGLEICHUNG VON CARTAN

$$R(\xi, \eta)s_i = \sum_k s_k \cdot \Omega_i^k(\xi, \eta), \text{ kurz: } R(s) = s \cdot \Omega.$$

66.7 Lemma.

Es seien s und $s' = s \cdot h$ zwei m -Beine und Ω und Ω' die zugehörigen Krümmungsmatrizen, dann gilt:

$$h \cdot \Omega' = \Omega \cdot h.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} s \cdot h \cdot \Omega' &= s' \cdot \Omega' = R(s') = R(s \cdot h) \stackrel{\text{R ist tensoriell}}{=} R(s) \cdot h = s \cdot \Omega \cdot h \\ &\Rightarrow h \cdot \Omega' = \Omega \cdot h. \quad \square \end{aligned}$$

66.8 Lemma.

Es sei s ein orthonormal-Bein und $\varepsilon_i = g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$ dann gilt $\varepsilon_i \Omega_i^j + \varepsilon_j \Omega_j^i = 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \Omega_j^i &\stackrel{66.5}{=} \varepsilon_i d\omega_j^i + \sum_k \varepsilon_i \omega_k^i \wedge \omega_j^k \stackrel{66.4}{=} -\varepsilon_j d\omega_i^j - \sum_k \varepsilon_k \omega_i^k \wedge \omega_j^k \\ &= -\varepsilon_j d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \varepsilon_k \omega_j^k = -\varepsilon_j \left(d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_j^k \right) \\ &= -\varepsilon_j \left(d\omega_i^j + \sum_k \omega_k^j \wedge \omega_i^k \right) \stackrel{66.5}{=} -\varepsilon_j \Omega_i^j. \quad \square \end{aligned}$$

66.9 Definition.

Es sei $s = (s_i)_{i=1,\dots,m}$ ein m -Bein. Das dazu duale m -KOBELIN $r = (r^j)_{j=1,\dots,m} \in \Omega^1(U, L(m, m))$ ist gegeben durch $r^j(x)(s_i(x)) := \delta_i^j$.

66.10 Lemma.

Es sei s ein m -Bein, r das zugehörige m -Kobelin und ω die Zusammenhangsmatrix. Dann gilt die 2. STRUKTURGLEICHUNG VON CARTAN:

$$dr^k + \sum_j \omega_j^k \wedge r^j = 0, \text{ kurz: } dr + \omega \wedge r = 0.$$

Beweis. Es sei η eine Vektorfeld auf U . Dann ist $\eta = \sum_i s_i \cdot r^i(\eta)$.

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &= \nabla_\xi \left(\sum_j s_j \cdot r^j(\eta) \right) \stackrel{[72, 62.4.3]}{=} \sum_j \left(\nabla_\xi s_j \cdot r^j(\eta) + s_j \cdot \xi(r^j(\eta)) \right) \\ &= \sum_{j,k} s_k \cdot \omega_j^k(\xi) \cdot r^j(\eta) + \sum_k s_k \cdot \xi(r^k(\eta)). \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{[72, 62.4.4]}{=} \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi, \eta] \\ &= \sum_{j,k} s_k \cdot \underbrace{\left(\omega_j^k(\xi) \cdot r^j(\eta) - \omega_j^k(\eta) \cdot r^j(\xi) \right)}_{(\omega_j^k \wedge r^j)(\xi, \eta)} + \sum_k s_k \cdot \underbrace{\left(\xi(r^k(\eta)) - \eta(r^k(\xi)) - r^k([\xi, \eta]) \right)}_{dr^k(\xi, \eta)} \\ &= \sum_k s_k \cdot \left(\sum_j \omega_j^k \wedge r^j + dr^k \right)(\xi, \eta) \quad \square \end{aligned}$$

66.11 Cartan's Lemma.

Es seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig in einem Vektorraum E und $w_1, \dots, w_n \in E$. Dann ist $\sum_i v_i \wedge w_i = 0$ genau dann, wenn $w_i = \sum_j a_{i,j} v_j$ mit einer symmetrischen Matrix $(a_{i,j})_{i,j}$.

Beweis. Wir ergänzen v_i zu einer Basis $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m)$ und somit ist $w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j + \sum_{k=n+1}^m b_{i,k} v_k$, also

$$\sum_{i \leq n} v_i \wedge w_i = \sum_{i < j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i}) v_i \wedge v_j + \sum_{i \leq n < k} b_{i,k} v_i \wedge v_k.$$

Da $(v_i \wedge v_j)_{i < j}$ eine Basis von $\Lambda^2(E)$ ist, ist dies genau dann 0, wenn $b_{i,k} = 0$ und $a_{i,j} = a_{j,i}$. $\square$

66.11a Lemma.

Für orthonormale Rahmen ist die Zusammenhangsmatrix ω durch die 2. Strukturgleichung [66.10](#) von Cartan eindeutig festgelegt.

Beweis. Es sei r der Korahmen eines orthonormal-Rahmens s . Aus $dr + \omega \wedge r = 0 = dr + \omega' \wedge r$ folgt somit für $\sigma := \omega' - \omega$, daß $\sigma \wedge r = 0$, also $\sigma_k^i = \sum_j a_{j,k}^i \cdot r^j$ nach [66.11](#) mit symmetrischen a^i . Wegen $\varepsilon_j \omega_j^i = -\varepsilon_i \omega_i^j$ (mit $\varepsilon_i := g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$) nach [66.4](#) und analog für ω' gilt gleiches auch für σ . Wenn wir $b_{j,k}^i := \varepsilon_i a_{j,k}^i$ setzen, so ist

$$0 = \varepsilon_j \sigma_j^i + \varepsilon_i \sigma_i^j = \sum_k (\varepsilon_j a_{k,i}^j + \varepsilon_i a_{k,j}^i) \cdot r^k = \sum_k (b_{k,i}^j + b_{k,j}^i) \cdot r^k,$$

also $b_{k,i}^j = -b_{k,j}^i$ und $b_{j,k}^i = \varepsilon_i a_{j,k}^i = \varepsilon_i a_{k,j}^i = b_{k,j}^i$ und somit

$$b_{j,k}^i = b_{k,j}^i = -b_{k,i}^j = -b_{i,k}^j = b_{i,j}^k = b_{j,i}^k = -b_{j,k}^i$$

also $b_{j,k}^i = 0$, d.h. $\sigma = 0$, also $\omega' = \omega$. $\square$

66.6a Bemerkung.

Es sei $(s_i)_i$ ein orthonormal-Bein und $(r^i)_i$ das zugehörige Kobein. Dann erhalten wir für die Riemann-Krümmungen R , die Ricci-Krümmung Ricci und die Skalar-Krümmung S nach [64.13](#) folgende Darstellungen

$$R_{i,j,k}^l := r^l \left(R(s_i, s_j) s_k \right) \stackrel{\text{66.6}}{=} r^l \left(\sum_p s_p \Omega_k^p(s_i, s_j) \right) = \Omega_k^l(s_i, s_j)$$

$$R_{i,j,k,l} := g \left(R(s_i, s_j) s_k, s_l \right) \stackrel{\text{66.6}}{=} g \left(\sum_p s_p \Omega_k^p(s_i, s_j), s_l \right) = \varepsilon_l \Omega_k^l(s_i, s_j)$$

$$R = \sum_{i,j,k,l} \underbrace{r^l \left(R(s_i, s_j) s_k \right)}_{=: R_{i,j,k}^l} r^i \otimes r^j \otimes r^k \otimes s_l = \sum_{i,j,k,l} \Omega_k^l(s_i, s_j) r^i \otimes r^j \otimes r^k \otimes s_l$$

$$\text{Ricci} = \sum_{i,j} \underbrace{\text{spur} \left(Z \mapsto R(Z, s_i)(s_j) \right)}_{\sum_k r^k (R(s_k, s_i) s_j)} r^i \otimes r^j = \sum_{i,j} \underbrace{\sum_k \Omega_j^k(s_k, s_i)}_{=: \text{Ricci}_{i,j}} r^i \otimes r^j$$

$$S = \sum_i \text{Ricci}_{i,i} = \sum_{i,k} \Omega_i^k(s_k, s_i)$$

66.6b Proposition.

Es sei (s_i) eine orthonormal-Bein. Dann ist

$$\text{Ricci}_{i,i} = \text{Ricci}(s_i, s_i) = g(s_i, s_i) \cdot \sum_{j \neq i} K(\langle \{s_i, s_j\} \rangle)$$

Für $\dim = 3$ läßt sich damit auch umgekehrt aus der Ricci-Krümmung die Schnitt-Krümmung bestimmen, denn das Gleichungssystem:

$$\sum_{j \neq i} K(\langle \{s_i, s_j\} \rangle) = \varepsilon_i \text{Ricci}_{i,i} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}$$

hat eindeutig bestimmte Lösungen $K(\langle \{s_i, s_j\} \rangle)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Ricci}(s_i, s_i) &= \text{spur} \left(Z \mapsto R(Z, s_i) s_i \right) = \sum_j r^j \left(R(s_j, s_i) s_i \right) \\ &= \sum_j g(s_j, s_j) \cdot g \left(R(s_j, s_i) s_i, s_j \right) \\ &= 0 + \sum_{\substack{j \neq i \\ = \varepsilon_i \in \{\pm 1\}}} \underbrace{g(s_j, s_j)}_{=0} \cdot K(\langle \{s_j, s_i\} \rangle) \cdot \left(g(s_i, s_i) g(s_j, s_j) - \underbrace{g(s_j, s_i)^2}_{=0} \right) \\ &= g(s_i, s_i) \cdot \sum_{j \neq i} K(\langle \{s_i, s_j\} \rangle) \end{aligned}$$

□

66.12 Beispiele.

1. Die 2-Sphäre S^2 .

Sei $f : (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow S^2$ die Parametrisierung nach Kugelkoordinaten, d.h. $f(\varphi, \vartheta) := (\cos(\vartheta) \cos(\varphi), \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \sin(\vartheta))$. Es ist

$$\begin{aligned} df^1 &= -\cos(\vartheta) \sin(\varphi) d\varphi - \sin(\vartheta) \cos(\varphi) d\vartheta \\ df^2 &= \cos(\vartheta) \cos(\varphi) d\varphi - \sin(\vartheta) \sin(\varphi) d\vartheta \\ df^3 &= \cos(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

und folglich ist die Metrik in den Koordinaten (φ, ϑ) gegeben durch

$$f^* \left(\sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i \right) = \sum_i df^i \otimes df^i = \cos(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi + d\vartheta \otimes d\vartheta$$

Somit ist $s_1 := \frac{\partial}{\partial \vartheta}$, $s_2 := \frac{1}{\cos(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ein orthonormal-Bein mit zugehörigem orthonormalen Kobain $r^1 := d\vartheta$, $r^2 := \cos(\vartheta) d\varphi$.

Für dieses ist $dr^1 = 0$ und $dr^2 = -\sin(\vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi$.

Die Zusammenhangsmatrix ω erhalten wir wegen [66.11a](#) aus der 2. Strukturgleichung [66.10](#) von Cartan:

$$\omega_1^1 = 0 = \omega_2^2, \quad \omega_1^2 = -\omega_2^1 \quad \text{wegen [66.4](#),$$

$$0 \stackrel{\text{66.10}}{=} dr^1 + \omega_1^1 \wedge r^1 + \omega_2^1 \wedge r^2 = 0 + 0 + \omega_2^1 \wedge r^2$$

$$\Rightarrow \omega_2^1 = a(\varphi, \vartheta) r^2$$

$$0 = dr^2 + \omega_1^2 \wedge r^1 + \omega_2^2 \wedge r^2 = -\tan(\vartheta) r^1 \wedge r^2 - a(\varphi, \vartheta) r^2 \wedge r^1 + 0$$

$$\Rightarrow a(\varphi, \vartheta) = \tan(\vartheta)$$

$$\Rightarrow -\omega_1^2 = \omega_2^1 = \tan(\vartheta) r^2 = \sin(\vartheta) d\varphi$$

Für die Krümmungsmatrix $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\Omega_1^1 &= \Omega_2^2 = 0 \\ -\Omega_1^2 &= \Omega_2^1 = d\omega_2^1 + \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 + \omega_2^1 \wedge \omega_2^2 = d(\sin(\vartheta)d\varphi) + 0 + 0 \\ &= \cos(\vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi = r^1 \wedge r^2.\end{aligned}$$

Aus der 1. Strukturgleichung [66.6](#) von Cartan ergibt sich die Schnittkrümmung (siehe [66.6a](#)) als

$$\begin{aligned}K(T_p S^2) &= g(R(s_1, s_2)s_2, s_1) \\ &\stackrel{66.6}{=} g\left(\sum_k s_k \Omega_2^k(s_1, s_2), s_1\right) = \Omega_2^1(s_1, s_2) = 1.\end{aligned}$$

2. Die Poincaré'sche Halbebene.

Die Metrik auf $H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ist gegeben durch $g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$. Ein orthonormales Kobain ist $r^1 := \frac{1}{y}dy$ und $r^2 := \frac{1}{y}dx$ mit Differential $dr^1 = 0$, $dr^2 = -\frac{1}{y^2}dx \wedge dy = r^1 \wedge r^2$. Die zweite Strukturgleichung von Cartan liefert

$$\omega_1^1 = 0 = \omega_2^2, \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2 = \frac{1}{y}dx = r^2$$

und folglich

$$\Omega_1^1 = 0 = \Omega_2^2, \quad \Omega_2^1 = -\Omega_1^2 = \frac{1}{y^2}dx \wedge dy = r^2 \wedge r^1$$

Die Schnittkrümmung ist somit

$$K(T_p H^+) = \Omega_2^1(s_1, s_2) = -1.$$

3. Die 3-Sphäre S^3 .

Verallgemeinerte Kugelkoordinaten sind

$$f(\varphi, \vartheta, \tau) = (\cos \tau \cos \vartheta \cos \varphi, \cos \tau \cos \vartheta \sin \varphi, \cos \tau \sin \vartheta, \sin \tau).$$

Die Metrik ist

$$g = \cos(\tau)^2 \cos(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi + \cos(\tau)^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + d\tau \otimes d\tau$$

Ein orthonormaler Korahmen ist

$$r^1 := d\tau, \quad r^2 := \cos(\tau) d\vartheta, \quad r^3 := \cos(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi$$

Für die Zusammenhangsmatrix erhalten wir

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\tau) d\vartheta & -\sin(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi \\ \sin(\tau) d\vartheta & 0 & -\sin(\vartheta) d\varphi \\ \sin(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi & \sin(\vartheta) d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\tan(\tau) r^2 & -\tan(\tau) r^3 \\ \tan(\tau) r^2 & 0 & -\frac{\tan(\vartheta)}{\cos(\tau)} r^3 \\ \tan(\tau) r^3 & \frac{\tan(\vartheta)}{\cos(\tau)} r^3 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und für die Krümmungsmatrix

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & \cos \tau d\vartheta \wedge d\tau & \cos \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\tau \\ -\cos \tau d\vartheta \wedge d\tau & 0 & \cos^2 \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta \\ -\cos \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\tau & -\cos^2 \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & r^2 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^1 \\ r^1 \wedge r^2 & 0 & r^3 \wedge r^2 \\ r^1 \wedge r^3 & r^2 \wedge r^3 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} R_{i,j,k}^l &= \Omega_k^l(s_i, s_j) = (r^k \wedge r^l)(s_i, s_j) \\ &= \delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k = g(g(s_j, s_k)s_i - g(s_i, s_k)s_j, s_l) \end{aligned}$$

und somit wegen [64.7a](#) die Schnittkrümmung K konstant 1 und wegen [64.14](#) weiters $\text{Ricci}(X, Y) = K \cdot (m-1) \cdot g(X, Y) = 2g(X, Y)$ und schließlich die Skalkrümmung $S = K \cdot (m-1) \cdot m = 6$.

4. Der hyperbolische Raum.

Der HYPERBOLISCHE RAUM ist $H^+ := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^1 > 0\}$ mit der Metrik

$$g = \frac{1}{(x^1)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3)$$

Ein orthonormaler Korahmen ist

$$r^1 := \frac{1}{x^1} dx^3, \quad r^2 := \frac{1}{x^1} dx^2, \quad r^3 := \frac{1}{x^1} dx^1$$

Für die Zusammenhangsmatrix erhalten wir

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{x^1} dx^3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^1} dx^2 \\ -\frac{1}{x^1} dx^3 & -\frac{1}{x^1} dx^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^1 \\ 0 & 0 & r^2 \\ -r^1 & -r^2 & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Krümmungsmatrix

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(x^1)^2} dx^2 \wedge dx^3 & -\frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^3 \\ \frac{1}{(x^1)^2} dx^2 \wedge dx^3 & 0 & -\frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^2 \\ \frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^3 & \frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & r^1 \wedge r^2 & r^1 \wedge r^3 \\ r^2 \wedge r^1 & 0 & r^2 \wedge r^3 \\ r^3 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie zuvor ergibt sich nun daraus, daß die Schnittkrümmung konstant -1 ist und für die Ricci-Krümmung $\text{Ricci} = -2g$.

5. Raumformen.

RAUMFORMEN sind Riemann-Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung. Eine gemeinsame Form der Metrik ist

$$g = \frac{1}{1 - \kappa\rho^2} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 \cdot (d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2(\vartheta) d\varphi \otimes d\varphi)$$

wobei $\rho > 0$, $\kappa\rho^2 < 1$, $|\vartheta| < \pi/2$ und $|\varphi| < \pi$ ist. Für den Korahmen

$$r^1 := \rho d\vartheta, \quad r^2 := \sin(\vartheta)\rho d\varphi, \quad r^3 := \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho$$

ist die Zusammenhangsmatrix

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} 0 & \cos(\vartheta) d\varphi & -\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\vartheta \\ -\cos(\vartheta) d\varphi & 0 & -\sin(\vartheta)\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\varphi \\ \sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\vartheta & \sin(\vartheta)\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cot(\vartheta)}{\rho} r^2 & -\frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^1 \\ -\frac{\cot(\vartheta)}{\rho} r^2 & 0 & -\frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^2 \\ \frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^1 & \frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Krümmungsmatrix

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \sin(\vartheta) \rho^2 d\vartheta \wedge d\varphi & \frac{\kappa \rho}{\sqrt{1-\kappa \rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta \\ \kappa \sin(\vartheta) \rho^2 d\vartheta \wedge d\varphi & 0 & \frac{\kappa \sin(\vartheta) \rho}{\sqrt{1-\kappa \rho^2}} d\rho \wedge d\varphi \\ -\frac{\kappa \rho}{\sqrt{1-\kappa \rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta & -\frac{\kappa \sin(\vartheta) \rho}{\sqrt{1-\kappa \rho^2}} d\rho \wedge d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \kappa \cdot \begin{pmatrix} 0 & r^2 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^1 \\ r^1 \wedge r^2 & 0 & r^3 \wedge r^2 \\ r^1 \wedge r^3 & r^2 \wedge r^3 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir zuvor ist somit die Schnittkrümmung (konstant) κ , die Ricci-Krümmung $\text{Ricci} = 2\kappa g$ und die Skalarkrümmung $S = 6\kappa$.

Ähnlich zu [72, 60.3] zeigen man, daß jede einfach-zusammenhängende vollständige m -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung K isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}^m$ mit der flachen Metrik im Fall $K = 0$, zu $S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ im Fall $K = 1$ und zum hyperbolischen Raum $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{m-1}$ im Fall $K = -1$ ist.

6. Die Schwarzschild-Metrik.

Die allgemeine Relativitätstheorie wird durch eine LORENTZ-MANNIGFALTIGKEIT (d.h. eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit LORENTZ-METRIK, i.e. mit Signatur $(-, +, +, +)$ (oder äquivalent $(+, -, -, -)$) beschrieben für welche die EINSTEIN'SCHE FELDGLEICHUNG

$$\text{Ricci} - \frac{1}{2} S g = T$$

gilt, wobei g eine LORENTZ-METRIK, S die Skalarkrümmung und T der ENERGIE-IMPULS-TENSOR ist, welcher durch die Masseverteilung beschrieben wird. Für eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit vorgegeben Energie-Impuls-Tensor ist dies eine partielle Differentialgleichung für die Metrik. Im Spezialfall $T = 0$ spricht man von der VAKUUM-GLEICHUNG. Selbst für die Vakuumgleichung sind nur wenige lokale Lösungen bekannt. Eine ist die SCHWARZSCHILD-METRIK, die sich im Rotations-symmetrischen Zeit-unabhängigen Fall ergibt:

$$g = -h(\rho) dt \otimes dt + \frac{1}{h(\rho)} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + \rho^2 \sin(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

mit $h(\rho) := 1 - \frac{2M}{\rho}$ für $\rho > 2M$. Dabei nennt man $\rho := 2M$ den SCHWARZSCHILD-RADIUS. Diese Metrik kann im äußeren von langsam rotierenden isolierten Sternen oder bei schwarzen Löchern verwendet werden. Ein orthonormaler Korahmen für diese Metrik ist somit

$$r^1 := \rho d\vartheta, \quad r^2 := \rho \sin(\vartheta) d\varphi, \quad r^3 := \frac{1}{\sqrt{h(\rho)}} d\rho, \quad r^4 := \sqrt{h(\rho)} dt$$

Für die Zusammenhangsmatrix ergibt sich:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\cos(\vartheta) d\varphi & \sqrt{h} d\vartheta & 0 \\ \cos(\vartheta) d\varphi & 0 & \sqrt{h} \sin(\vartheta) d\varphi & 0 \\ -\sqrt{h} d\vartheta & -\sqrt{h} \sin(\vartheta) d\varphi & 0 & -\frac{M}{\rho^2} dt \\ 0 & 0 & \frac{M}{\rho^2} dt & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Krümmungsmatrix

$$\Omega = M \begin{pmatrix} 0 & \frac{2 \sin \vartheta}{\rho} d\vartheta \wedge d\varphi & \frac{1}{\sqrt{h}\rho^2} d\rho \wedge d\vartheta & \frac{\sqrt{h}}{\rho^2} dt \wedge d\vartheta \\ -\frac{2 \sin \vartheta}{\rho} d\vartheta \wedge d\varphi & 0 & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{h}\rho^2} d\rho \wedge d\varphi & \frac{\sqrt{h} \sin \vartheta}{\rho^2} dt \wedge d\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{h}\rho^2} d\rho \wedge d\vartheta & -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{h}\rho^2} d\rho \wedge d\varphi & 0 & -\frac{2}{\rho^3} dt \wedge d\rho \\ -\frac{\sqrt{h}}{\rho^2} dt \wedge d\vartheta & -\frac{\sqrt{h} \sin \vartheta}{\rho^2} dt \wedge d\varphi & \frac{2}{\rho^3} dt \wedge d\rho & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{M}{\rho^3} \begin{pmatrix} 0 & 2r^1 \wedge r^2 & -r^1 \wedge r^3 & -r^1 \wedge r^4 \\ 2r^2 \wedge r^1 & 0 & -r^2 \wedge r^3 & -r^2 \wedge r^4 \\ -r^3 \wedge r^1 & -r^3 \wedge r^2 & 0 & 2r^3 \wedge r^4 \\ -r^4 \wedge r^1 & -r^4 \wedge r^2 & 2r^4 \wedge r^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten der Riemann-Metrik im assoziierten orthonormal-Bein $(s_k)_k$ sind nach [66.6a](#)

$$R_{k,l,j}^i = \Omega_j^i(s_k, s_l).$$

Aus der Gestalt von Ω folgt $R_{k,l,j}^i = 0$ für $j \notin \{k, l\}$ oder $i \notin \{k, l\}$ und somit ist $R_{m,l,j}^m = 0$ für $j \neq l$. Ein Blick auf die Spalten von Ω liefert $\sum_m R_{m,j,j}^m = \pm \frac{M}{\rho^3} (2 - 1 - 1) = 0$, also ist die Schwarzschild-Metrik Ricci-flach nach [66.6a](#), d.h. Ricci = 0.

7. Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik(en).

Die FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER-METRIK beschreibt ein isotropes (d.h. ohne ausgezeichneten Richtungen) homogenes Universum und ist gegeben durch

$$g = dt \otimes dt - h(t)^2 \left(\frac{1}{1 - \kappa \rho^2} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 \cdot (d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2(\vartheta) d\varphi \otimes d\varphi) \right)$$

mit orthonormalen Kobein

$$r^1 := dt, \quad r^2 := h(t)\rho d\vartheta, \quad r^3 := h(t)\rho \sin(\vartheta) d\varphi, \quad r^4 := \frac{h(t)}{\sqrt{1 - \kappa \rho^2}} d\rho$$

Zusammenhangsmatrix

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & h'\rho d\vartheta & h'\rho \sin \vartheta d\varphi & \frac{h'}{\sqrt{1 - \kappa \rho^2}} d\rho \\ -h'\rho d\vartheta & 0 & \cos \vartheta d\varphi & -\sqrt{1 - \kappa \rho^2} d\vartheta \\ -h'\rho \sin \vartheta d\varphi & -\cos \vartheta d\varphi & 0 & -\sin \vartheta \sqrt{1 - \kappa \rho^2} d\varphi \\ -\frac{h'}{\sqrt{1 - \kappa \rho^2}} d\rho & \sqrt{1 - \kappa \rho^2} d\vartheta \sin \vartheta \sqrt{1 - \kappa \rho^2} d\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{h'(t)}{h(t)} r^2 & \frac{h'(t)}{h(t)} r^3 & \frac{h'(t)}{h(t)} r^4 \\ -\frac{h'(t)}{h(t)} r^2 & 0 & \frac{\cot(\vartheta)}{h(t)\rho} r^3 & -\frac{\sqrt{1 - \kappa \rho^2}}{h(t)\rho} r^2 \\ -\frac{h'(t)}{h(t)} r^3 & -\frac{\cot(\vartheta)}{h(t)\rho} r^3 & 0 & -\frac{\sqrt{1 - \kappa \rho^2}}{h(t)\rho} r^3 \\ -\frac{h'(t)}{h(t)} r^4 & \frac{\sqrt{1 - \kappa \rho^2}}{h(t)\rho} r^2 & \frac{\sqrt{1 - \kappa \rho^2}}{h(t)\rho} r^3 & 0 \end{pmatrix}$$

und Krümmungsmatrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^2 & \frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^3 & \frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^4 \\ -\frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^2 & 0 & \frac{h'(t)^2 - \kappa}{h(t)^2} r^2 \wedge r^3 & -\frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^2 \wedge r^4 \\ \frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^3 & -\frac{h'(t)^2 - \kappa}{h(t)^2} r^2 \wedge r^3 & 0 & -\frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^3 \wedge r^4 \\ -\frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^4 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^2 \wedge r^4 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^3 \wedge r^4 & 0 \end{pmatrix}$$

Die nicht-verschwindenden Koeffizienten des Riemann'schen Krümmungstensors sind (bis auf Symmetrien)

$$R_{122}^1 = R_{133}^1 = R_{144}^1 = -\frac{h''(t)}{h(t)},$$

$$R_{233}^2 = R_{244}^2 = R_{344}^3 = \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2},$$

die Ricci-Krümmung ist

$$\text{Ricci} = \begin{pmatrix} -\frac{3h''}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} \end{pmatrix}$$

und die Skalarkrümmung

$$S = \frac{6(\kappa - h'(t)^2)}{h(t)^2} - \frac{6h''(t)}{h(t)}$$

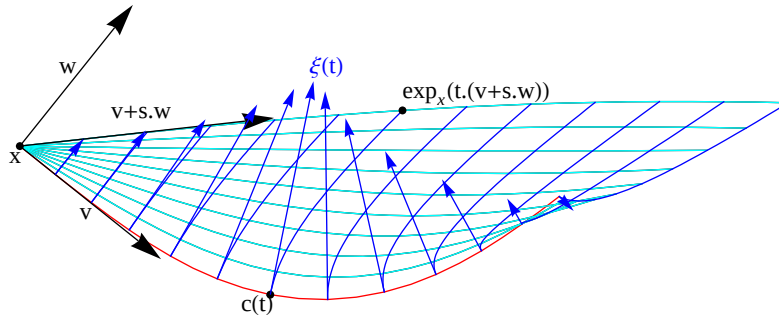
63. Jacobi-Felder

63.1 Bemerkung

Sei $c : [0, a] \rightarrow M$ eine Geodäte in einer Riemannschen Fläche. Diese läßt sich als radiale Geodäten der Form $c(t) = \exp_x(tv)$ schreiben, wobei $x := c(0)$ und $v := c'(0)$. Wir wollen benachbarte radiale Geodäten diskutieren. Nach [62.8](#) gibt es eine Umgebung um $[0, a] \times \{v\} \subset \mathbb{R} \times T_x M$, auf welcher $\exp$ wohldefiniert ist. Damit existieren auf dem Intervall $[0, a]$ die radialen Geodäten, welche bei x in eine Richtung nahe v starten. Betrachten wir nun die Variation $(t, w) \mapsto \exp_x(t(v+w))$ von c für $w \perp v$. Für fixes w definiert die Richtungsableitung

$$\xi(t) := \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \exp_x(t(v+sw)) = (T_{tv} \exp_x)(tw)$$

an der Stelle $(t, 0) \in [0, a] \times T_x M$ in Richtung $(0, w)$ ein Vektorfeld ξ längs c .



Wir wollen nun zeigen, daß das Vektorfeld ξ die sogenannte Jacobi-Gleichung

$$\nabla^2 \xi(t) + K(c(t)) \xi(t) = 0$$

erfüllt.

Da

$$\varphi : (r, \vartheta) \mapsto \exp_x \left(r(\cos(\vartheta)v + \sin(\vartheta)w) \right) \text{ für } |w| = 1 = |v|$$

geodätische Parallelkoordinaten sind, also $E = 1$, $F = 0$, $G > 0$ erfüllen, gilt die Jacobi-Gleichung $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G}$ aus [72, 53.9].

$$\begin{aligned} \text{Für } \xi(t) &:= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \exp_x(t(v + sw)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0} \exp_x(t \cos(\vartheta)v + t \sin(\vartheta)w) = \partial_2 \varphi(t, 0) \\ \text{ist } |\xi(t)|^2 &= |\partial_2 \varphi(t, 0)|^2 = G(t, 0). \end{aligned}$$

Das Vektorfeld ξ steht normal auf c' , da die radialen Geodäten die geodätischen Sphären (wegen $F = 0$) orthogonal schneiden, also läßt sich $\xi(t)$ als $\lambda(t)\nu(t)$ schreiben, wobei ν ein Einheitsnormalenfeld zu c' in TM und $\lambda = |\xi| = \sqrt{G}$ ist. Folglich gilt $\lambda'' + (K \circ c)\lambda = \lambda'' - \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} \lambda = 0$. Da c eine Geodäte ist, ist c' ein paralleles Vektorfeld (siehe [72, 61.1]) längs c und ebenso ν . Also gilt für die kovariante Ableitung von ξ :

$$\begin{aligned} \nabla \xi &= \nabla(\lambda \nu) = \lambda \nabla \nu + \lambda' \nu = \lambda' \nu \\ \Rightarrow \nabla^2 \xi &= \nabla(\lambda' \nu) = \lambda' \nabla \nu + \lambda'' \nu = \lambda'' \nu \\ \Rightarrow \nabla^2 \xi + K \xi &= \lambda'' \nu + K \lambda \nu = (\lambda'' + K \lambda) \nu = 0 \end{aligned}$$

63.2 Definition (Jacobi-Felder).

Wir nennen ein Vektorfeld ξ längs einer Geodäte c in einer Riemann'schen Fläche ein JACOBI-FELD falls es die JACOBI-GLEICHUNG

$$\nabla^2 \xi + (K \circ c) \xi = 0$$

erfüllt und orthonormal auf die Geodäte steht.

63.3 Lemma.

Die Jacobi-Felder ξ längs einer Geodäte c mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ sind genau jene Vektorfelder, welche sich als $\xi(t) := (T_{c'(0)} \exp_{c(0)})(tw)$ mit $w \in c'(0)^\perp \subset T_{c(0)}M$ schreiben lassen.

Beweis. Wir haben gerade gezeigt, daß so darstellbare Vektorfelder Jacobi-Felder sind. Berechnen wir nun noch deren Anfangswerte. Klarerweise ist

$$\xi(0) = (T_{0c'(0)} \exp_{c(0)})(0w) = 0.$$

Bezüglich der Koordinaten $(u^1, u^2) \mapsto \exp_x(u^1 v + u^2 w)$ gilt $u^1(t) = t$, $u^2(t) = 0$, $\xi^1(t) = 0$ und $\xi^2(t) = t$. Nach [72, 62.1] ist

$$\begin{aligned} \nabla \xi(0) &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{d\xi^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \xi^i \frac{du^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{2,1}^k \cdot t \cdot 1 \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial u^2} = w. \end{aligned}$$

Da die lineare Differentialgleichung 2.ter Ordnung $\lambda'' + (K \circ c)\lambda = 0$ aber zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung hat, muß diese obige Gestalt besitzen. $\square$

Sei nun M eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit und c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte in M . Wir haben [72, 58.7] gesehen, daß Kurven die in geodätischen Parallelkoordinaten nahe an c liegen, keine kürzere Bogenlänge haben können. Wir untersuchen nun die Frage, wann wir geodätische Polarkoordinaten um $c(0)$ finden können, welche bis zu $c(t)$ reichen. Dazu folgende

63.4 Definition (Konjugierte Punkte)

Es sei $c(t) = \exp_{c(0)}(tc'(0))$ eine Geodäte in M . Ein Punkt $c(t)$ heißt KONJUGIERT zu $c(0)$ falls das Differential $T_{c'(0)}(\exp_{c(0)})$ der Exponentialabbildung bei $tc'(0) \in T_{c(0)}M$ kein Isomorphismus von $T_{c(0)}M = T_{c'(0)}T_{c(0)}M$ nach $T_{c(t)}M$ ist.

63.5 Satz (Konjugierte Punkte).

Für eine Geodäte c in einer vollständigen Riemannschen Fläche sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $c(t)$ ist konjugiert zu $c(0)$ längs c .
2. Es existiert ein Jacobi-Vektorfeld $\xi \neq 0$ längs c mit

$$\xi(t) = 0 = \xi(0).$$

Beweis. Es sei $x := c(0)$ und $v := c'(0)$. Nach 63.3 ist das Jacobi-Feld mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ und $\nabla \xi(0) =: w \perp v$ durch

$$\xi : t \mapsto (T_{tv} \exp_x)(tw)$$

gegeben. Also ist $\xi(t) = 0$ genau dann, wenn tw im Kern von $T_{tv} \exp_x$ liegt. Nun brauchen wir nur noch zu beachten, daß $(T_{tv} \exp_x)(v) = c'(t) \neq 0$ und $(T_{tv} \exp_x)(w) \perp c'(t)$ für alle $w \perp v$ gilt. Also ist der Kern von $T_{tv} \exp_x$ die Menge $\{tw : \xi \text{ ist ein Jacobi-Feld längs } c \text{ mit } \xi(t) = 0 \text{ und } \nabla \xi(0) = w\}$. Da $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ eine Abbildung zwischen gleichdimensionalen Räumen ist, ist die Aussage $\text{Ker}(T_{tv} \exp_x) = 0$ damit äquivalent, daß $T_{tv} \exp_x$ ein Isomorphismus ist. $\square$

63.6 Folgerung.

Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Falls c im Inneren eines Parameterintervalls $[t_1, t_2]$ keine konjugierte Punkte enthält, so gilt $L(c) \leq L(c_1)$ für jede nahe c gelegene Kurve c_1 .

Es gilt auch die Umkehrung, siehe 67.4.

Beweis. Wie im Beweis von 63.3 betrachten wir eine Abbildung φ nach geodätischen Polarkoordinaten um $c(0)$. Wegen 63.5 ist diese Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus in jedem Punkt von $]t_1, t_2[\times \{0\}$. Also haben wir, abgesehen von den Randpunkten, geodätische Parallelkoordinaten längs c . Nach 72, 58.7 ist dann die Länge jeder nahe c gelegenen Kurve mindestens so groß wie jene von c . $\square$

63.7a Lemma. Vergleichssatz von Sturm.

Es sei u (resp. v) Lösung der Differentialgleichung $u''(t) + a(t)u(t) = 0$ (resp. $v''(t) + b(t)v(t) = 0$) mit Anfangswert $u(0) = 0 = v(0)$ und $u'(0) = 1 = v'(0)$. Weiters sei $a \geq b$ (bzw. $\forall t : a(t) > b(t)$). Sei $t_u := \min\{t > 0 : u(t) = 0\}$ und $t_v := \min\{t > 0 : v(t) = 0\}$. Dann ist $t_u \leq t_v$ und für $0 < t_0 < t_1 < t_u$ ist $u(t_1)v(t_0) \leq v(t_1)u(t_0)$ (bzw. $<$) und $u(t_1) \leq v(t_1)$ (bzw. $<$).

Beweis. Nach Voraussetzung ist $u(t) > 0$ für alle $0 < t < t_u$ (wegen $u'(0) = 1$) und $v(t) > 0$ für alle $0 < t < t_v$. Weiters ist $v'(t_v) < 0$ andernfalls wäre $v = 0$ lokal um t_v . Es sei $a(t) \geq b(t)$ für alle t . Wäre $t_u > t_v$ so wäre

$$0 = \int_0^{t_v} u(v'' + b \cdot v) - v(u'' + a \cdot u) = \underbrace{(u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^{t_v}}_{=u(t_v)v'(t_v) < 0} + \underbrace{\int_0^{t_v} (b - a) \cdot v \cdot u}_{\leq 0},$$

ein Widerspruch.

Sei nun $0 < t < t_u (\leq t_v)$. Dann ist

$$0 = \int_0^t u(v'' + b \cdot v) - v(u'' + a \cdot u) = (u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^t + \underbrace{\int_0^t (b - a) \cdot v \cdot u}_{\leq 0} \leq (u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^t$$

und somit $(\log \circ v)'(t) \geq (\log \circ u)'(t)$, also $\log \circ \frac{v}{u}$ monoton wachsend und somit $v(t_1)u(t_0) \geq u(t_1)v(t_0)$ für alle $0 < t_0 \leq t_1 < t_u$. Wegen $\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{v(t_0)}{u(t_0)} = \frac{v'(0)}{u'(0)} = 1$ folgt $v(t_1) \geq u(t_1)$.

Den Fall $a(t) > b(t)$ für alle t behandelt man ganz analog. $\square$

63.7 Folgerung.

Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte.

- Falls $K(c(t)) \leq K_1$ für alle t gilt, so liegt in jedem offenen Intervall der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$ kein konjugierter Punkt.
- Falls $K_0 \leq K(c(t))$ für alle t gilt, so liegt hingegen in jedem abgeschlossenen Intervall der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ ein konjugierter Punkt.

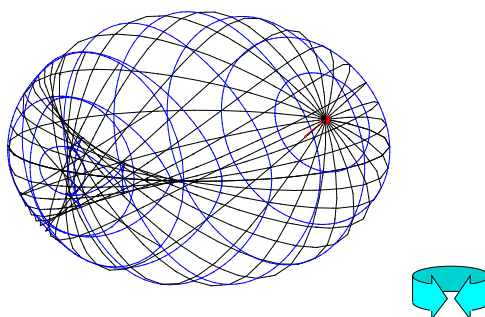
Hierbei und im folgenden sei $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}} = +\infty$ für $K_1 \leq 0$.

Beweis. Aus $b(t) := K(c(t)) \leq K_1 =: a(t)$ folgt mittels [63.7a](#) für die Lösung $\xi(t) = v(t)\nu(t)$ der Jacobi-Gleichung (siehe [63.1](#)) und jene von $u''(t) + K_1 u(t) = 0$ (also $u(t) = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \sin(t\sqrt{K_1})$) die Beziehung $u(t_1) \leq v(t_1)$ und somit $v(t) = 0 \Rightarrow t\sqrt{K} \geq \pi$.

Die zweite Aussage zeigt man ganz analog. $\square$

63.8 Theorem von Bonnet.

Ist M eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Fläche und $K(x) \geq K_0 > 0$ für alle $x \in M$, so ist der geodätischen Abstand je zweier Punkte höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$. Insbesondere ist M kompakt.



Beweis. Nach [62.10.4](#) existiert zu je zwei Punkten eine Geodäte minimaler Länge. Falls diese Länge größer als $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ ist, so enthält sie nach [63.7](#) konjugierte Punkte, und nach der Umkehrung von [63.6](#) die wir in [67.4](#) zeigen werden ist diese Geodäte dann nicht die kürzeste Verbindung, ein Widerspruch. Damit sind ihre Endpunkte also höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ entfernt. Insbesondere ist der Durchmesser

$$d(M) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{K_0}},$$

und somit ist M nach [62.10](#) M kompakt. $\square$

63.9b Lemma.

Es sei $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ und $\rho_1 < \rho := \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$. Sei weiters $c : [0, \rho_1] \rightarrow M$ eine Bogenlängen-parametrisierte Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(\rho_1)$. Sei $v : [s_0, s_1] \rightarrow B_\rho(0) \subseteq T_x M$ eine Kurve mit $\exp_x(v(s_0)) = x$ und $\exp_x(v(s_1)) = y$. Dann ist $L(\exp_x \circ v) \geq L(c)$.

Beweis. Wegen $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ ist $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus nach [63.7] und [63.4]. Somit ist $(\exp_x)^*(g)$ eine Riemann-Metrik auf $B_\rho(0)$ und $\exp_x$ bzgl. dieser eine lokale Isometrie. Die Polarkoordinaten auf $B_\rho(0)$ induzieren somit geodätische Polarkoordinaten (siehe [72, 58.5]) auf $B_\rho(0)$ bzgl. der Metrik $(\exp_x)^*(g)$ und somit folgt das Resultat aus [72, 58.7]. $\square$

63.9a Proposition.

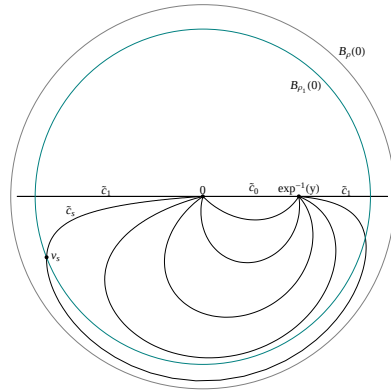
Seien $(c_s)_s$ eine glatte Homotopie relativ $\{0, 1\}$ zwischen zwei verschiedene Geodäten von x nach y mit $L(c_0) \leq L(c_1)$. Falls $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ so existiert ein $0 \leq s_0 \leq 1$ mit $L(c_{s_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0)$

Beachte, daß dies für $K_1 \leq 0$ (und somit $2\pi/\sqrt{K_1} := +\infty$) besagt, daß verschiedene Geodäten von x nach y nicht homotop sein können.

Beweis. Es sei $\rho := \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$. Wegen [63.7] und [63.4] ist $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus und somit auf jedem kleineren offenen Ball eine Überlagerung (da die Fasern endlich sind). O.B.d.A. ist $L(c_0) < \rho$ (andernfalls ist $L(c_0) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0)$).

Falls $c_s(t) \in \exp_x(B_\rho(0))$ für alle s und t , so existiert somit ein Lift $(t, s) \mapsto \tilde{c}_s(t)$. Da aber der Lift der Geodäte c_1 eine Gerade durch 0 sein muß ist das wegen $c_0 \neq c_1$ unmöglich. Somit kommt die Homotopie den Rand von $\exp_x(B_\rho(0))$ beliebig nahe, d.h. für jedes $\rho_1 < \rho$ existiert ein $s \in [0, 1]$ s.d. der Lift $\tilde{c}_s : [0, 1] \rightarrow B_\rho(0)$ existiert und einen Punkt v_s im Abstand ρ_1 von 0 enthält. Nach [63.9b] hat dann das Bild der geschlossenen Kurve gebildet aus $\tilde{\gamma}_s$ gefolgt von der umgekehrt durchlaufenen Gerade $\tilde{c}_0$ Länge $\geq 2\rho_1$ (denn die beiden Teile von 0 nach v_s haben Länge $\geq \rho_1$), also $L(c_s) \geq 2\rho_1 - L(c_0)$.

Da ρ_1 beliebig nahe an ρ war, folgt aus der Stetigkeit von $s \mapsto L(c_s)$, die Existenz eines s_0 mit $L(c_{s_0}) \geq 2\rho - L(c_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0)$. $\square$

**63.9 Theorem [43].**

Die Exponential-Abbildung jeder vollständigen zusammenhängenden Riemann-Fläche mit $K \leq 0$ ist für jedes $x \in M$ eine Überlagerung $\exp_x : T_x M \rightarrow M$. Ist also M zusätzlich einfachzusammenhängend, so ist $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und zu je zwei Punkten gibt es genau eine minimale verbindende Geodäte.

Beweis für einfach-zusammenhängendes M . Wegen [63.7] existieren für $K \leq 0$ keine konjugierten Punkte und somit ist $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ überall ein lokaler Diffeomorphismus. Nach dem Satz [62.10] von Hopf-Rinow ist $\exp_x$ surjektiv. Nun zur Injektivität. Sei $\exp_x(v_0) = \exp_x(v_1) =: p \in M$. Dann sind $c_i(t) := \exp_x(t v_i)$ Geodäten die x mit p verbinden. Da M einfach-zusammenhängend ist, sind diese homotop. Wegen [63.9a] sind sie somit ident, also $v_0 = v_1$.

Nach [72, 58.7] ist die radiale verbindende Geodäte von minimaler Länge. $\square$

67. Nochmals Jacobi-Felder

63.10 Jacobi-Felder auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Da für die Beschreibung von Jacobi-Feldern nur $\exp_x(t(v+sw))$ für $v, w \in T_x M$ und $t, s \in \mathbb{R}$ benötigt wurde, läßt sich diese auf allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen, wobei die Gaußkrümmung $K(c(t))$ wegen [64.11] durch die Schnittkrümmung $K(\langle \xi(t), c'(t) \rangle)$ (siehe [64.7]) und $K(c(t))\xi(t)$ durch $R(\xi(t), c'(t))c'(t)$ zu ersetzen ist. Die JACOBI-GLEICHUNG sieht also dann wie folgt aus:

$$\nabla^2 \xi + R(\xi, c')c' = 0,$$

Die Lösungen der Jacobi-Gleichung heißen wieder JACOBI-FELDER und diese sind genau die Richtungsableitung von 1-Parameter-Variationen der Geodäte c durch Geodäten. Die Darstellung für Jacobi-Felder ξ mit $\xi(0) = 0$ via der Ableitung von $\exp_{c(0)}$ gilt genau wie im 2-Dimensionalen. Der Nullstellen dieser Jacobi-Felder beschreiben wieder KONJUGIERTE PUNKTE. Ebenso gilt dann [63.6] und [63.8] nach [90] und [63.9] nach [16], wobei K durch die Schnittkrümmung zu ersetzen ist. Für Beweise dieser Resultate siehe z.B. [80, 27.15, 27.16, 27.18].

67.1 Proposition. Variation der Energie.

Es sei $(c_s)_s$ eine glatte Variation mit fixen Endpunkten einer Kurve $c_0 : [a, b] \rightarrow M$, also $(s, t) \mapsto c_s(t)$ glatt von $\mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow M$ mit $s \mapsto c_s(t)$ konstant für $t \in \{a, b\}$. Sei $Y_s(t) := \frac{\partial}{\partial s} c_s(t) \in T_{c_s(t)} M$ und die Energie

$$E(c_s) := \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{c}_s, \dot{c}_s) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{c_s(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} c_s(t), \frac{\partial}{\partial t} c_s(t) \right) dt.$$

Dann ist

$$(1) \quad \left. \frac{d}{ds} E(c_s) \right|_{s=0} = - \int_a^b g(\nabla_{\dot{c}_0} \dot{c}_0, Y_0)$$

und, falls c_0 eine Geodäte ist, so ist $\left. \frac{d}{ds} E(c_s) \right|_{s=0} = 0$ und

$$(2) \quad \left. \left(\frac{d}{ds} \right)^2 E(c_s) \right|_{s=0} = \int_a^b \left(|\nabla_{\dot{c}_0} Y_0|_g^2 - \underbrace{K(\langle \dot{c}_0, Y_0 \rangle) \cdot (|Y_0|_g^2 - g(\dot{c}_0, Y_0))}_{=R(Y_0, \dot{c}_0, \dot{c}_0, Y_0)} \right) dt$$

Beweis.

1. Es sei $X_s(t) := \frac{\partial}{\partial t} c_s(t)$. Dann ist $X = Tc \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ und für $Y = Tc \cdot \frac{\partial}{\partial s}$ somit

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y \stackrel{[72, 62.4.4]}{=} [X, Y] = Tc \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = 0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(X, X) dt = \int_a^b g(\nabla_Y X, X) dt \\ &= \int_a^b g(\nabla_X Y, X) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(Y, X) dt - \int_a^b g(Y, \nabla_X X) dt \\ &= g(Y, X) \Big|_a^b - \int_a^b g(Y, \nabla_X X) dt \end{aligned}$$

und für $s = 0$:

$$\left. \frac{d}{ds} E(c_s) \right|_{s=0} = 0 - \int_a^b g(Y, \nabla_{\dot{c}_0} \dot{c}_0) dt.$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds}\right)^2 E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 g(X, X) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(\nabla_Y X, X) dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(\nabla_X Y, X) dt \\
&= \int_a^b \left(g(\nabla_Y \nabla_X Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_Y X) \right) dt \\
&= \int_a^b \left(g(\nabla_X \nabla_Y Y, X) + g([\nabla_Y, \nabla_X]Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \right) dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} g(\nabla_Y Y, X) - g(\nabla_Y Y, \nabla_X X) + \right. \\
&\quad \left. - R(X, Y, Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \right) dt \\
&= g(\nabla_Y Y, X) \Big|_a^b + \\
&\quad + \int_a^b \left(-g(\nabla_Y Y, \nabla_X X) - R(X, Y, Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \right) dt
\end{aligned}$$

und für Geodäten c_0 und $s = 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds}\right)^2 E(c_s) \Big|_{s=0} &= 0 + \int_a^b \left(-g(\nabla_Y Y, \underbrace{\nabla_X X}_{=0}) - R(X, Y, Y, X) + g(\nabla_X Y, \underbrace{\nabla_X Y}_{\nabla_{\dot{c}_0} Y_0}) \right) \\
&= \int_a^b \left(|\nabla_{\dot{c}_0} Y_0|^2 - R(\dot{c}_0, Y_0, Y_0, \dot{c}_0) \right)
\end{aligned}$$

und nach [64.7](#) ist

$$R(\dot{c}_0, Y_0, Y_0, \dot{c}_0) = K(\langle \{\dot{c}_0, Y_0\} \rangle) \cdot (|Y_0|_g^2 - g(\dot{c}_0, Y_0)^2)$$

□

Die Hess'sche Form von E (d.h. die symmetrische Bilinearform $E''(c_0)$) ist somit gegeben durch die sogenannte INDEXFORM

$$I(Y, Z) := \int_a^b \left(g(\nabla_{\dot{c}_0} Y, \nabla_{\dot{c}_0} Z) - R(\dot{c}_0, Y, Z, \dot{c}_0) \right)$$

für Vektorfelder Y und Z längs c_0 .**67.2 Lemma.**

Sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Dann ist c genau dann von lokal minimaler Länge wenn c von lokal minimaler Energie ist.

Beweis. Die Cauchy-Schwartz Ungleichung liefert

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \leq \left(\int_a^b 1^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |\dot{c}(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{b-a} \sqrt{2E(c)}$$

also ist $L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c)$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Es habe c_0 lokal minimale Energie. Nach [67.1](#) ist $\nabla_{\dot{c}_0} \dot{c}_0 = 0$ und nach [72](#), [57.2](#) somit c_0 proportional zur Bogenlänge parametrisiert, also $L(c_0)^2 = 2(b-a)E(c_0)$.

Sei c_s eine Variation von c_0 . O.B.d.A. sei c_s proportional zur Bogenlänge parametrisiert und somit ist

$$L(c_0)^2 = 2(b-a)E(c_0) \leq 2(b-a)E(c_s) = L(c_s)^2,$$

also c_0 auch von lokal minimaler Länge.

Sei umgekehrt c_0 von lokal minimaler Länge und o.B.d.A. nach Bogenlänge parametrisiert. Sei c_s eine Variation von c_0 dann gilt:

$$E(c_0) = \frac{L(c_0)^2}{2(b-a)} \leq \frac{L(c_s)^2}{2(b-a)} \leq E(c_s),$$

Also ist c_0 auch von lokal minimaler Energie. $\square$

67.3 Proposition.

Es sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodäte und Y eine Jacobi-Feld längs c und Z irgendein Vektorfeld längs c . Dann ist $I(Y, Z) = g(\nabla_{\dot{c}} Y, Z)|_a^b$

Beweis. Wir nehmen die Jacobi-Gleichung ins innere Produkt mit Z und integrieren sie:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(g(\nabla^2 Y, Z) + g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z) \right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} g(\nabla Y, Z) - g(\nabla Y, \nabla Z) + \underbrace{g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z)}_{R(Y, \dot{c}, \dot{c}, Z)} \right) \\ &\stackrel{\text{64.5.1, 64.5.2}}{=} g(\nabla Y, Z)|_a^b - I(Y, Z) \end{aligned}$$

$\square$

Wir beweisen nun die Umkehrung von [63.6](#):

67.4 Folgerung.

Es sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Angenommen es existiert ein konjugierter Punkt t_0 im offenen Intervall (a, b) . Dann existiert ein stückweise glattes Vektorfeld Z längs c mit $I(Z, Z) < 0$, also ist c nicht von minimaler Länge.

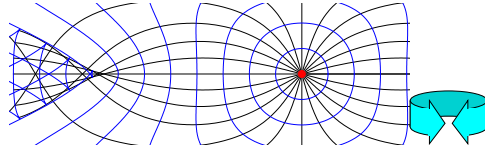
Beweis. Sei $Y \neq 0$ eine Jacobi-Feld längs c mit $Y(a) = 0 = Y(t_0)$ (und somit $\nabla Y(t_0) \neq 0$), weiters $V := \chi_{[a, t_0]} Y$ (ein stückweise glattes Vektorfeld) und W ein glattes Vektorfeld längs c mit $W(t_0) = -\nabla Y(t_0)$ und $W(a) = 0 = W(b)$. Seien I_1 und I_2 die Indexformen von $c|_{[a, t_0]}$ und $c|_{[t_0, b]}$. Dann ist

$$I(V, W) = I_1(V, W) + I_2(V, W) = I_1(Y, W) \stackrel{\text{67.3}}{=} -|\nabla Y(t_0)|_g^2 < 0$$

und somit

$$\begin{aligned} I(V + \varepsilon W, V + \varepsilon W) &= I_1(Y, Y) + 2\varepsilon I(V, W) + \varepsilon^2 I(W, W) \\ &\stackrel{\text{67.3}}{=} -2\varepsilon |\nabla Y(t_0)|_g^2 + \varepsilon^2 I(W, W) < 0 \end{aligned}$$

für alle kleinen $\varepsilon > 0$. Somit hat c nicht lokal minimale Energie nach [67.1.2](#) (bzgl. stückweise glatter Variationen, die wir durch glatte approximieren können) und damit auch nicht lokal minimale Bogenlänge nach [67.2](#). $\square$



65. Rückblick auf Krümmungen

Bei ebenen Kurven, haben wir die KRÜMMUNG als die Kraft interpretiert, die notwendig ist, um einen Massenpunkt mit konstanter skalarer Geschwindigkeit auf einer Kurve zu halten.

Bei Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$ haben wir zuerst die NORMALKRÜMMUNG einer Fläche in Richtung ξ als Krümmung der Schnittkurve mit der, von der Flächennormale und ξ aufgespannten Ebene kennengelernt. Dies ist gleichzeitig die Krümmung der Geodäte in Richtung ξ , siehe [72, 52.4]. Die kritische Punkte der Normalkrümmung sind die HAUPTKRÜMMUNGEN, und deren Produkt ist die GAUSS-KRÜMMUNG.

Bei einer allgemeinen Riemann-Mannigfaltigkeit kann die SCHNITTKRÜMMUNG als die Gauß-Krümmung jener 2-dimensionalen Fläche, welche durch die Exponentialabbildung parametrisiert wird, aufgefaßt werden. Die Riemann-Krümmung ist schließlich das zur Schnittkrümmung gehörige Tensorfeld (i.e. 4-lineare Abbildung).

Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Adams. Vector fields on spheres. *Ann. of Math.*, 75:603–632, 1962.
- [2] J.W. Alexander. An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA.*, 10:8–10, 1924.
- [3] C. Bankwitz. Über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. *Ann.of Math*, 31:129–130, 1930.
- [4] J.L.M. Barosa and A.G. Colares. *Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Springer Lecture Notes 1195, 1986.
- [5] Helga Baum. *Eichfeldtheorie*. Springer, Heidelberg, 2009. 113
- [6] A.F. Beardon. *A primer on Riemann Surfaces*. Cambridge Univ.Press, London, 1984.
- [7] M. Berger. *Geometry 1*. Springer, Berlin, 1987.
- [8] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer, New York, 1987.
- [9] S. Bernstein. Sur un théorème de Géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. *Comm.de la Soc.M. Kharkov*, 15:38–45, 1915.
- [10] Harald Biller. Characterizations of proper actions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 136(2):429–439, 2004.
- [11] O. Bonnet. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *Journ. de l'Ecole Polytechn.*, 19:1–146, 1848.
- [12] Th. Bröcker and K. Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, Heidelberg, 1973. 114
- [13] Brown. Smooth n -manifolds immerse in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$. *Contemp. Math*, 12:73–79, 1982.
- [14] Eugenio Calabi and Maxwell Rosenlicht. Complex analytic manifolds without countable base. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4:335–340, 1953. 113
- [15] Carathéodory. Über die gegenseitigen Beziehungen der Ränder bei konformen Abbildungen des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. *Math. Annal.*, 73:305–320, 1913.
- [16] E. Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris: Gauthier-Villars (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de G. Julia, 2). VI, 273 p. , 1928. 159
- [17] Catalan. *Jornal de Mathém.*, 7:203, 1842.
- [18] S.S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. AMS.*, 6:771–782, 1955.
- [19] S.S. Chern. *Complex manifolds without potential theory*. Van Nostrand, Princeton, 1967. 73
- [20] Cohen. A proof of the immersion conjecture. *Proced. Math. Acad. Soc.*, 79:3390–3392, 1982.
- [21] J.H. Conway and N.J.A. Sloane. Four-dimensional lattices with the same theta series. *Int. Math. Res. Not.*, 4:93–96, 1992. 89
- [22] M. Dehn. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69:137–168, 1910.
- [23] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab. *Minimal Surfaces I*.
- [24] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960.
- [25] Beno Eckmann. Systeme von richtungsfeldern in sphären und stetige lösungen komplexer linearer gleichungen. *Comment. Math. Helv.*, 15:1–26, 1943.
- [26] R. Engelking. *Outline of General Topology*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968. 116
- [27] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin, 1969.
- [28] C. Fefferman. The Bergman kernel of biholomorphic mappings of pseudo convex domains. *Inv. Math.*, 26:1–65, 1974.
- [29] G.M. Fischer. On the group of all homeomorphisms of a manifold. *Trans. AMS*, 97:193–212, 1960.
- [30] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Springer-Verlag, 1991.
- [31] Alexandre Gabard. A separable manifold failing to have the homotopy type of a CW-complex. *Arch. Math. (Basel)*, 90(3):267–274, 2008.
- [32] Gauß. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Regiae Sci. Gottingensis Rec.*, 6, 1828.

- [33] Gleason. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, 56:193–212, 1952.
- [34] Robert E. Gompf. Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies. *Journal of Differential Geom.* 18.2, pages 317–328, 1983.
- [35] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110:1–22, 1992. 89
- [36] C. Gordon and E. Wilson. Isospektral deformations of compact solvmanifolds. *J. Diff. Geom.*, 19:241–256, 1984. 89
- [37] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knts are determined by their complements. *J.AMS.*, 2:371, 1989.
- [38] Carolyn Gordon, David L. Webb, and Scott Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 27:134–138, 1992.
- [39] Werner Greub. *Multilinear Algebra*. Springer, 10
- [40] Werner Greub, Stephen Halperin, and Ray Vanstone. *Connections, Curvature and Cohomology I-III*. Academic Press 773, 76, New York, 1972.
- [41] W. Gröbner. *Matrizenrechnung*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966.
- [42] H.W. Guggenheimer. *Differential Geometry*. Dover Publ., New York, 1963.
- [43] J. Hadamard. Les surfaces á corbures opposées. *J.Math.Pures Appl.*, 4:27–73, 1889. 158
- [44] Haeflinger and Reeb. Variétés a une dimension et structures feuilletés de plan. *l'Enseignement Math.*, 2:107–125, 1957.
- [45] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Acad. Press, New York, 1978.
- [46] G. Herglotz. Über die Starrheit der Eiflächen. *Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg*, 15:127–129, 1943.
- [47] D. Hilbert. Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung. *Trans.AMS.*, 2:87–99, 1901.
- [48] S. Hildebrandt. Boundary behaviour of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35:47–82, 1969.
- [49] J. Hilgert and K.-H. Neeb. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [50] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, New York, 1976. 50
- [51] H. Hopf and W. Rinow. Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen. *Math. Ann.*, 116:749–766, 1938.
- [52] Chuan-Chih Hsiung. *A First Course in Differential Geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [53] I.M. James. Whitehead products and vector fields on spheres. *Proc. Cambridge*, 53:817–820, 1957.
- [54] H. Jarchow. *Locally convex spaces*. Teubner, Stuttgart, 1981. 85
- [55] Joris. Une c^∞ -application non-immersive qui possède la propriété universelle des immersions. *Archiv Math.*, 39:267–277, 1982.
- [56] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer.Math.Monthly*, 73:1–23, 1966. 88
- [57] M. Kervaire. A manifold which doesn't admit any differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 34:257–270, 1960.
- [58] Michel A. Kervaire. A manifold which doesn't admit a differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 35:1–14, 1961.
- [59] W. Klingenberg. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Springer, Heidelberg, 1973. 114
- [60] S. Kobayashi. *On conjugate and cut loci*. The Mathem. Assoc. Am., Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [61] S. Kobayashi. *Transformation groups in Differential Geometry*. Springer, Ergebnisse der Math. 70, Berlin, 1972.
- [62] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience, New York, 1969.
- [63] A. Kriegl. *Topologie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 1999. 113, 114, 115, 126
- [64] A. Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004. 9, 78
- [65] A. Kriegl. *Analysis 3*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004/05. 77, 88
- [66] A. Kriegl. *Funktionalanalysis 2*. Uni.Wien, Wien, 2005.
- [67] A. Kriegl. *Funktional Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2006.
- [68] A. Kriegl. *Differentialgeometrie*. Univ. Wien, 2007. 1, 7, 9, 10, 66, 72, 82, 96, 99, 114
- [69] A. Kriegl. *Differentialgeometrie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2007. 66
- [70] A. Kriegl. *Kategorien Theorie*. Vorlesung, Univ. Wien, 2008.
- [71] A. Kriegl. *Proseminar Lie-Gruppen*. Univ. Wien, 2008.
- [72] A. Kriegl. *Differentialgeometrie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2009. 2, 3, 5, 7, 8, 24, 30, 31, 38, 39, 49, 52, 56, 61, 63, 65, 66, 73, 74, 98, 108, 109, 112, 114, 115, 117, 118, 119, 120, 124, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 134, 136, 140, 141, 142, 143, 145, 146, 147, 152, 155, 156, 158, 159, 160, 162

KAPITEL 0. LITERATURVERZEICHNIS

- [73] Andreas Kriegl and Peter W. Michor. *The Convenient Setting of Global Analysis*. Am. Math. Soc., 1997. **70**, **111**
- [74] Lagrange. *Œuvres Vol. 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1868.
- [75] Diane J. Lane. Paracompactness in perfectly normal, locally connected, locally compact spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 80(4):693–696, 1980.
- [76] S. Lang. *Differentiable Manifolds*. Addison-Wesley, 1962.
- [77] H. Liebmann. Eine neue Eigenschaft der Kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys.*, pages 44–55, 1899.
- [78] Meusnier. Mémoire sur la curbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers*, 10:477–510, 1776.
- [79] P. Michor. *Riemannsche Differentialgeometrie*. Vorlesung, Univ. Wien, WS 1988/89.
- [80] P. W. Michor. *Topics in Differential Geometry*. AMS, Providence, Rhode Island, 2008. **113**, **159**
- [81] Peter W. Michor. A generalisation of Hamiltonian mechanics. *J. Geometry and Physics*, 2 (2):67–82, 1985.
- [82] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64:399–405, 1956.
- [83] J. Milnor. Differentiable Structures on Spheres. *Ann. of Math.*, 81:962–972, 1959.
- [84] J. Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain mf's. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51:542, 1964. **89**
- [85] Montgomery and Zippin. Small subgroups of finite dimensional groups. *Ann. of Math.*, 56:213–241, 1952.
- [86] B. Morin and J-P. Petit. Let retournement de la sphère. *CRAS.*, 287:767–770, 791–794, 879–882, 1978.
- [87] S. Mukhopadhyaya. New methods in the geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1:31–37, 1909.
- [88] Munkres. *Elementary Differential Geometry*. **101**
- [89] Munkres. Obstruction to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphism. *Ann. of Math.*, 72:521–554, 1960.
- [90] Sumner Byron Myers. Connections between differential geometry and topology. I. Simply connected surfaces. *Duke Math. J.*, 1(3):376–391, 1935. **159**
- [91] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–64, 1956.
- [92] Nomitzu and Ozeki. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. AMS.*, 12:889–891, 1961.
- [93] R. Osserman. Global Properties of minimal surfaces in e^3 and e^n . *Ann. of Math.*, 80:340–364, 1964.
- [94] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, New York, 1969.
- [95] R. Osserman. A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateaus's problem. *Ann. of Math.*, 91:550–569, 1970.
- [96] P. Painlevé. Sur la theorie de la Représentation conforme. *CRAS.*, 112:653–657, 1891.
- [97] C.D. Papakyriakopoulos. On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.*, 66:1–26, 1957.
- [98] E. Peschl. *Funktionentheorie*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1967.
- [99] Mary Ellen Rudin. Two nonmetrizable manifolds. *Topology and its Appl.*, 35:137–152, 1990.
- [100] H.F. Scherk. Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *Crellés Journal f. reine und angew. Math.*, 13:185–208, 1835.
- [101] J-P. Serre. *Complex Semi-simple Lie-Algebras*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [102] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry 1-4*. Publish or Perish, Berkeley, 1979. **10**, **113**
- [103] J. Stallings. The piecewise-linear structure of euclidean space. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58:481–488, 1962.
- [104] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. Math. (2)*, 121:1985, 169-186. **89**
- [105] Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Diffgeom.*, 25:363–430, 1987.
- [106] Jacques Tits. *Liesche Gruppen und Algebren*. Springer Hochschultext, Berlin, 1983.
- [107] Trotter. Non-invertible knots exist. *Topology*, 2:341–358, 1964.
- [108] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representation*. Springer Graduate Text, Berlin, 1984.
- [109] L. Vietoris. Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven. *Arch. Math.*, 3:304–306, 1952.
- [110] M.F. Vignéras. Variétés Riemanniennes isospektrales et non isométriques. *Ann. Math.*, 112:21–32, 1980. **89**
- [111] R. Walter. *Differentialgeometry*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1978.

- [112] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Illinois, 1971. 48, 83, 84
- [113] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, Graduate Texts in Mathematics 94, New York, 1983. 114
- [114] S. Warschawski. Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformen Abbildungen. *Math.Z.*, 35:321–456, 1932.
- [115] Weierstrass. *Monatsber. der Berlin. Akad.*, 1866.
- [116] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [117] H. Whitney. *Geometric Integration Theory*. 101
- [118] H. Whitney. The selfintersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space. *Annals of Math.*, 45:220–446, 1944.
- [119] F. Xavier. The Gauss map of a complete, non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Annals of Math.*, 113:211–214, 1981.
- [120] H. Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a Liegroup. *Osaka M.J.*, 2:14–15, 1950.
- [121] K. Zindler. Über konvexe Gebilde I. *Monatsh. Math. Phys.*, 31:87–102, 1921.

Index

- $(m+1)$ -dimensionaler Halbraum, 78
- C^∞ -Mannigfaltigkeit mit Rand, 79
- $\Omega^1(M)$, 4
- σ -kompakt, 113
 - $\operatorname{div} \xi$, 43
- k -Form am $\mathbb{R}^m$, 10
- k -Seite eines Simplex, 101
- k -te Bettizahl, 45
- k -te De-Rham Kohomologie, 44
- m -Frame, 145
- m -Kobain, 147
- (Pseudo-)Riemann-Manigfaltigkeit, 145
- Überdeckungsdimension, 116
- äußeren kovarianten Ableitung, 70
- äußere Algebra, 16
- “Hack”-Produkt, 13
- 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit, 1
- 1. Strukturgleichung von Cartan, 146
- 2-Form am $\mathbb{R}^m$, 10
- 2-Form auf einer Mannigfaltigkeit, 10
- 2. Strukturgleichung von Cartan, 147
- Abbildungsgrad, 95
- algebraische Derivation, 40
- Alternator, 13
- Bianchi Identität, 135
- Brouwerscher Fixpunktsatz, 95
- Cup-Produkt, 100
- De-Rham Kohomologie, 45
- Deformationsretrakt, 48
- Dichte, 78
- Differentialform vom Grad k , 17
- Dimensionsaxiom der Kohomologie, 45
- disjunkte Vereinigungs Axiom der Kohomologie, 45
- Divergenz eines Vektorfelds, 43
- duale Basis, 1
- duale Vektorbündel, 4
- Einhängungsoperator, 45
- Einstein’sche Feldgleichung, 152
- Einstein-Mannigfaltigkeit, 143
- Energie-Impuls-Tensor, 152
- Euler-Charakteristik, 45
- Euler-Klasse eines Vektorbündels, 105
- exakt, 45
- exakte 1-Form, 9
- Friedmann-Robertson-Walker-Metrik, 153
- Funktor, 3
- funktorielle Konstruktion, 18
- Gauß-Gleichung, 130
- glatte p - q -Tensorfelder, 19
- Godazzi-Mainardi-Gleichung, 130
- Gradientenfeld einer Funktion, 23
- graduiert antikommutativ, 33
- graduiert kommutative Algebra, 16
- graduierte Algebra, 12
- graduierte Jacobi-Identität, 33
- Green-Operator, 85
- Greensche Satz, 81
- harmonische Form, 83
- Hodge-Sternoperator, 26
- Homologie eines Kettenkomplexes, 47
- homotopieäquivalente Räume, 48
- Homotopieaxiom der Kohomologie, 45
- horizontaler Lift, 70
- hyperbolische Raum, 151
- Igelsatz, 97
- Index eines Vektorfelds, 106
- Index eines Vektorfelds in einer isolierten Nullstelle, 106
- Indexform, 160
- innerer Tangentialvektor, 80
- isospektrale Riemann-Mannigfaltigkeiten, 89
- Jacobi-Feld, 155
- Jacobi-Felder auf Riemann-Mannigfaltigkeiten, 159
- Jacobi-Gleichung, 155
- Jacobi-Gleichung für Riemann-Mannigfaltigkeiten, 159
- klassifizierende Abbildung, 73
- Kodifferentialoperator, 44
- konjugierte Punkte, 156
- konjugierte Punkte von Geodäten auf Riemann-Mannigfaltigkeiten, 159
- Konnektor, 70
- Konnexion, 70
- kontrahierbar, 48
- kontravarianter Funktor, 3
- Kotangentialbündel einer Mannigfaltigkeit, 4
- kovariante Ableitung, 70, 119
- kovariante Vektorfelder, 4
- kovarianter Funktor, 3
- Kozykel, 44
- Krümmungsmatrix bzgl. s , 146
- Kulkarni-Nomizu Produkt, 144

-
- Laplace-Beltrami-Operator, 44
 - Levi-Civita-Zusammenhang, 119
 - Lindelöf, 113
 - linear Connection, 70
 - lokales m -Bein, 145
 - Lorentz-Mannigfaltigkeit, 152
 - Lorentz-Metrik, 152

 - Mayer-Vietoris Sequenz, 45
 - metrisierbar, 113
 - Morse-Funktionen, 50

 - Ordnung $n + 1$ einer Überdeckung, 116
 - orientierbare Mannigfaltigkeit, 63
 - orientierbares Vektorbündel, 63
 - Orientierungsüberlagerung, 75
 - Orientierungsvertauschung, 94
 - orthonormal-Bein, 145

 - parakompakt, 112
 - Poincaré-Dualität, 86
 - Poincaré-Dualität für nicht kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten, 101
 - Poincaré-Lemma, 48
 - Poincaré-Polynom, 45
 - Poisson-Klammer, 111
 - Pull-back von Mannigfaltigkeiten, 65

 - Quelldichte eines Vektorfelds, 81

 - Rand des Halbraums, 78
 - Rand einer Mannigfaltigkeit, 80
 - Raum der k -linearen Abbildungen, 10
 - Raum der exakten Differentialformen, 44
 - Raum der geschlossenen Differentialformen, 44
 - Raumformen, 151
 - Ricci-flach, 143
 - Ricci-Krümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 143
 - Riemann'schen Normalkoordinaten, 142
 - Riemann-Krümmung, 130

 - Satz von Hahn-Banach, 85
 - Satz von Hopf-Rinow, 126
 - Satz von Nomitsu-Ozeki, 128
 - Satz von Stokes, 80
 - Schnittkrümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 140
 - schwache Lösung, 84
 - Schwarzschild-Metrik, 152
 - Schwarzschild-Radius, 152
 - Skalarkrümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 143
 - standard m -Simplex, 101
 - subharmonische Funktion, 82

 - Tensoralgebra, 12
 - Tensorprodukt von Formen, 11
 - Tensorprodukt von Vektorbündel, 17
 - Tensorprodukt von Vektorräumen, 11
 - Theorem von Bonnet, 157
 - Thom-Klasse eines Vektorbündels, 105
 - totale Differential einer Funktion, 1
 - transversale Abbildung zu Teilmannigfaltigkeit, 65
 - transversale Abbildungen, 65
 - transversale Teilmannigfaltigkeiten, 65
 - Triangulierung, 49, 101

 - universelle Vektorbündel, 72

 - Vakuum-Gleichung, 152
 - Vektorraum aller graduierten Derivationen, 30
 - Vektorraum der glatten p -fach kontravariant und q -fach kovarianten Tensorfelder, 19
 - Vektorraum der glatten Differentialformen vom Grad p , 19
 - vertikalen Lift, 69
 - $\text{vol}(M)$, 78
 - Volumsform, 24

 - Weyl Krümmungstensor, 144
 - Whitney-Summe von Vektorbündel, 17

 - zurückgezogene Form, 28
 - Zusammenhangsmatrix von ∇ , 145