

# Lie Gruppen

Andreas Kriegl

email:[andreas.kriegl@univie.ac.at](mailto:andreas.kriegl@univie.ac.at)

250047, WS 2010/2011, Mo.–Mi. 11<sup>00</sup>-11<sup>45</sup>, D 1.03 im UZA 4

---

Einige Tippfehler wurden mir dankenswerter Weise von Markus Steenbock mitgeteilt,  
Wien, im Februar 2009.

Ein sehr umfangreiche Fehlersammlung verdanke ich Claudio Musmarra.  
Wien, im Februar 2011.

Neben Tippfehlern hat mich Rudolf Zeidler auf Fehler in der Formulierung von [6.24](#) und dem Beweis in [6.29](#) aufmerksam gemacht.  
Wien, im Mai 2011.

---

## Inhaltsverzeichnis

|  |     |
|--|-----|
| 1. Beispiele von Lie-Gruppen                 | 1   |
| 2. Lokale versus globale Struktur            | 37  |
| 3. Infinitesimale Struktur                   | 42  |
| 4. Infinitesimale versus lokale Struktur     | 46  |
| 5. Untergruppen                              | 57  |
| 6. Homogene Räume und Gruppenwirkungen       | 60  |
| 7. Auflösbare Lie-Gruppen und Lie-Algebren   | 85  |
| 8. Halbeinfache Lie-Gruppen und Lie-Algebren | 102 |
| 9. Weiterführendes                           | 114 |
| A. Appendix über Gruppenerweiterungen        | 118 |
| Literaturverzeichnis                         | 129 |
| Index  | 131 |

## 1. Beispiele von Lie-Gruppen

### 1.1 Die $GL(m)$ als erstes Beispiel.

Dazu vorerst ein wenig Notation. Sei  $E$  ein euklidischer Raum, also nach Wahl eines Ursprungs ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum versehen mit einem skalaren Produkt  $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Wahl einer (orthonormalen) Basis  $(e_i)_{i=1}^m$  können wir  $E$  mit dem  $\mathbb{R}^m$  identifizieren (und das skalare Produkt von  $x = (x^i)_{i=1}^m$  und  $y = (y^i)_{i=1}^m$  ist dann durch  $\langle x | y \rangle := \sum_{i=1}^m x^i y^i$ ) gegeben. Mit  $L(E)$  bezeichnen wir den Vektorraum aller linearen Abbildungen von  $E$  nach  $E$  und allgemeiner mit  $L(E, F)$  den Vektorraum aller linearen Abbildungen von  $E$  in einen zweiten euklidischen Raum  $F$ . Wir schreiben auch  $L(m, n) := L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  und  $L(m) := L(\mathbb{R}^m)$ . Der Vektorraum  $L(m, n)$  ist bekanntlich  $m \cdot n$ -dimensional.

Die Teilmenge der invertierbaren linearen Abbildungen in  $L(E)$  bezeichnet man mit

$$GL(E) := \{T \in L(E) : T \text{ ist invertierbar}\} = \{T \in L(E) : \det(T) \neq 0\}.$$

Offensichtlich ist  $GL(E)$  eine Gruppe bezüglich der Kompositionsabbildung  $\mu := \circ : L(E) \times L(E) \rightarrow L(E)$ , die sogenannte ALLGEMEINE LINEARE GRUPPE (engl. general linear group; daher die Abkürzung). Da  $\det : L(E) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, ist  $GL(E) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  offen in  $L(E)$ , und wir können somit auch Analysis auf ihr treiben. Da die Kompositionsabbildung bilinear ist, ist sie auch glatt (d.h.  $C^\infty$ ). Aus der Koordinatenbeschreibung der Inversion  $\nu : T \mapsto T^{-1}$  können wir auch auf deren Glattheit schließen. Dies geht aber auch einfacher: Es ist  $\nu$  durch die implizite Gleichung  $\mu(T, \nu(T)) = 1$  für  $T \in GL(E)$  eindeutig bestimmt, also nach dem impliziten Funktionensatz ebenfalls glatt, falls die partielle Ableitung  $\partial_2 \mu$  von  $\mu$  nach der zweiten Variable an jeder Stelle  $(T, T^{-1})$  invertierbar ist. Da  $\mu$  in dieser Variable linear ist, ist  $\partial_2 \mu(T, S) = \mu(T, \cdot) : R \mapsto T \circ R$  und somit ein Isomorphismus.

Zusammenfassend ist also  $GL(E)$  eine endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit, eine Gruppe, und die Gruppen-Operationen  $\mu : GL(E) \times GL(E) \rightarrow GL(E)$  und  $\nu : GL(E) \rightarrow GL(E)$  sind glatt, kurz gesagt  $GL(E)$  ist eine LIE-GRUPPE.

### 1.2 Elementares über die $GL(E)$ .

Offensichtlich ist  $GL(E) = GL_+(E) \sqcup GL_-(E)$  eine Zerlegung in die disjunkten offenen Teilmengen  $GL_\pm(E) := \{T \in GL(E) : \pm \det(T) > 0\}$ . Dabei ist  $GL_+(E)$  eine Untergruppe (in der Tat die Zusammenhangskomponente der 1, wie wir später sehen werden) und die links-Multiplikation mit einem Element  $T_0 \in GL_-(E)$  liefert einen Diffeomorphismus  $GL_+(E) \rightarrow GL_-(E)$ .

Es liegt  $GL(E)$  dicht in  $L(E)$ , denn sei  $T \in L(E)$  und sei  $0 < s < |\lambda|$  für alle Eigenwerte  $\lambda \neq 0$  von  $T$ . Dann ist  $T_s := T - s1$  invertierbar und  $T_s \rightarrow T$  für  $s \searrow 0$ .

Da die Determinante multilinear in den Spalten (oder auch polynomial in den Koeffizienten) ist, folgt ihre Glattheit. Die Richtungsableitung an der Stelle  $A$  in Richtung  $B$  ist:

$$\begin{aligned} \det'(A)(B) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(A + tB) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(A \cdot (1 + tA^{-1}B)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(tA) \cdot \det\left(\frac{1}{t} + A^{-1}B\right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} t^n \det(A) \cdot \left( \frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} \operatorname{spur}(A^{-1}B) + \dots + \det(A^{-1}B) \right) \\ &= \det(A) \operatorname{spur}(A^{-1}B). \end{aligned}$$

### 1.3 Die Exponentialabbildung $\exp : L(E) \rightarrow GL(E)$ .

Bekanntlich können wir durch Logarithmieren aus multiplikativen Ausdrücken additive machen. Dabei ist die Logarithmusfunktion die Inverse der Exponentialfunktion  $\exp : t \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . In der multiplikativen Gruppe  $GL(E) \subseteq L(E)$  suchen wir nun ein Pendant  $\exp : L(E) \rightarrow GL_+(E) \subseteq GL(E)$ . Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$  konvergiert für jede Element  $T$  einer Banach-Algebra also auch für  $T \in L(E)$  und spielt auch eine wesentliche Rolle beim Lösen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen, denn  $c : t \mapsto \exp(tT) \cdot x$  ist die Lösungskurve der Differentialgleichung  $c' = T \circ c$  mit Anfangswert  $c(0) = x$ .

Beachte allerdings, daß im allgemeinen  $\exp(X+Y) = \exp(X) \circ \exp(Y)$  nicht gilt, es sei denn  $X$  und  $Y$  kommutieren miteinander, d.h.  $X \circ Y = Y \circ X$  gilt. Insbesondere ist  $t \mapsto \exp(tT)$  eine 1-Parameter Untergruppe von  $G(E)$  (d.h. ein Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow GL(E)$ ). In diesen Zusammenhang ist natürlich interessant das Zentrum  $Z(GL(E)) := \{T : T \circ S = S \circ T \forall S \in GL(E)\}$  zu bestimmen. Dieses besteht genau aus  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , denn sei  $T$  im Zentrum, also  $T \circ S = S \circ T$  für alle  $S \in GL(E)$  und wegen der Dichtheit sogar für alle  $S \in L(E)$ . Setzt man nun  $S(z) := \langle x|z \rangle y$  für fixe  $x, y \in E$ , so erhält man  $0 = (T \circ S - S \circ T)(z) = \langle x|z \rangle T(y) - \langle x|T(z) \rangle y$ , also muß  $T(y)$  linear abhängig von  $y$  sein (setze  $z := x \neq 0$ ), d.h.  $T(y) = \lambda_y y$  für  $\lambda_y \in \mathbb{R}$  und somit  $\langle x|z \rangle \lambda_y = \langle x, \lambda_z z \rangle$  und insbesondere  $\lambda_y = \lambda_z$  für  $x = z \neq 0$ .

Weiters ist  $\exp(S \circ T \circ S^{-1}) = S \circ \exp(T) \circ S^{-1}$ , d.h.  $\exp$  vertauscht mit Konjugieren und ebenso mit Transponieren:  $\exp(T)^t = \exp(T^t)$ .

Es gilt  $\det(\exp(T)) = e^{\text{spur } T}$  (siehe Proseminar).

Zwar ist  $\exp'(0) = \text{id}$  und somit  $\exp$  ein lokaler Diffeomorphismus  $L(E) \rightarrow GL(E) \subseteq L(E)$  und wir haben lokal eine Umkehrfunktion  $\log$ . Global jedoch ist  $\exp$  nicht injektiv (für  $\dim E > 1$ ), denn für  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  ist

$$\exp \begin{pmatrix} 2\pi i k_1 & 0 \\ 0 & 2\pi i k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i k_1} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i k_2} \end{pmatrix} = 1 \text{ bzw. } \exp \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix} = 1$$

denn

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix}$$

und auch nicht surjektiv, denn das Spektrum von  $\exp(A)$  (für Matrizen in Jordan'scher Normalform) liegt entweder in  $\mathbb{R}_+$  oder besteht aus konjugiert komplexen Zahlen, also liegt folgende Matrix nicht im Bild von  $\exp$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_+(\mathbb{R}^2).$$

Wir wollen nun aus  $GL(E)$  weitere Beispiele gewinnen, dazu benötigen wir Konstruktionen aus der Gruppentheorie und dabei insbesondere Gruppenerweiterungen, siehe Appendix [A](#).

### 1.4 $Ax + b$ -Gruppen

Sei  $E = F \oplus F'$  eine Zerlegung eines endlich dimensionalen Vektorraums  $E$  in lineare Teilräume  $F$  und  $F'$ . Es seien  $p$  und  $p'$  die Projektionen auf  $F$  und  $F'$  mit Kern  $F'$  und  $F$ . Jedes  $T \in GL(E)$  hat bezüglich dieser Zerlegung folgende Darstellung

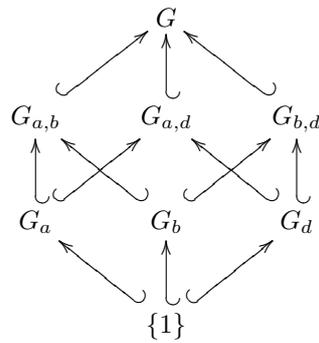
$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

wobei  $A = p \circ T|_F \in L(F, F)$ ,  $D = p' \circ T|_{F'} \in L(F', F')$ ,  $B = p \circ T|_{F'} \in L(F', F)$  und  $C = p' \circ T|_F \in L(F, F')$ . Also läßt  $T$  den Teilraum  $F$  invariant (d.h.  $T(F) \subseteq F$ ) genau dann, wenn  $C = 0$  ist, d.h.

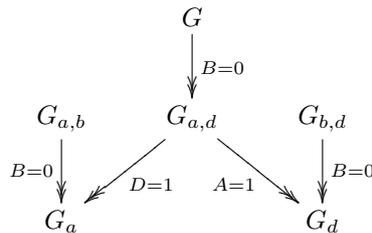
$$T \in \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL(F), D \in GL(F'), B \in L(F', F) \right\}.$$

Wir haben folgende Untergruppen der Gruppe  $G := GL_F(E) := \{T \in GL(E) : T(F) \subseteq F\}$ :

$$\begin{aligned} G_b &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in L(F', F) \right\} \cong (L(F', F), +) \\ G_d &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : D \in GL(F') \right\} \cong GL(F') \\ G_a &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(F) \right\} \cong GL(F) \\ G_{a,d} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL(F), D \in GL(F') \right\} \cong GL(F) \times GL(F') \\ G_{b,d} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : D \in GL(F'), B \in L(F', F) \right\} \\ G_{a,b} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(F), B \in L(F', F) \right\} \end{aligned}$$



Dual haben wir die folgenden Gruppen-Epimorphismen, die jeweils durch Ersetzen der entsprechenden Eintragungen durch die neutralen Elemente 1 bzw. 0 gegeben sind



Dies liefert folgende kurze exakte Sequenzen (siehe Appendix [A.1](#)) von Gruppen

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G_{a,d} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_{b,d} \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G_a \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_{a,b} \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G_d \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G_{b,d} \twoheadrightarrow G_d \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G_{a,b} \twoheadrightarrow G_a \longrightarrow 1,$$

Die natürlichen Inklusionen der rechtsstehenden Gruppen liefern Schnitte zu den Projektionen. Und somit erhalten wir semidirekte Produkte

$$G \cong G_b \times G_{a,d} \cong L(F', F) \times (GL(F) \times GL(F'))$$

$$G \cong G_{b,d} \times G_a \cong G_{b,d} \times GL(F)$$

$$G \cong G_{a,b} \times G_d \cong G_{a,b} \times GL(F')$$

$$G_{b,d} \cong G_b \times G_d \cong L(F', F) \times GL(F')$$

$$G_{a,b} \cong G_b \times G_a \cong L(F', F) \times GL(F),$$

Wegen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} AA' & AB' + BD' \\ 0 & DD' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} AA'A^{-1} & (A(B' - A'A^{-1}B) + BD')D^{-1} \\ 0 & DD'D^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lassen sich die entsprechenden Wirkungen leicht angeben.

Wenn wir als  $E = F \times \mathbb{R}$  wählen, dann heißt die Gruppe  $G_{a,b}$  jener  $T \in GL_F(E)$  die auf  $\{0\} \times \mathbb{R}$  als Identität wirken auch die  $Ax + b$ -Gruppe, denn sie ist gerade die Gruppe der affinen Abbildungen. Der affinen Abbildung  $x \mapsto Ax + b$  wird dabei die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Man beachte, daß dies als Mannigfaltigkeit  $F \times GL(F)$  ist, aber die Multiplikation komplizierter, nämlich die des semidirekten Produkts  $F \rtimes GL(F)$  ist.

### 1.5 Flaggen

Es sei  $\mathcal{F} : \{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = E$  eine aufsteigende Folge von Teilräumen (eine sogenannte Flagge). Dann ist  $GL_{\mathcal{F}}(E) := \{T \in GL(E) : T(F_j) \subseteq F_j\}$  eine Lie-Gruppe, denn sei  $F'_j := F_{j-1}^\perp \cap F_j \cong F_j/F_{j-1}$ , so ist  $T \in GL_{\mathcal{F}}(E)$  genau dann, wenn es bezüglich der Zerlegung

$$E = F'_1 \oplus \dots \oplus F'_n$$

die Form

$$\begin{pmatrix} T_{1,1} & \dots & T_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & T_{n,n} \end{pmatrix}$$

hat mit  $T_{j,j} \in GL(F'_j)$  und  $T_{j,l} \in L(F'_l, F'_j)$  für  $j < l$ . Dies ist das prototypische Beispiel einer auflösbaren Lie-Gruppe falls  $\dim F_k = k$  für alle  $k$ .

Eine Gruppe heißt AUFLÖSBAR, falls sie durch endlich viele Erweiterungen aus Abelschen Gruppen gewonnen werden kann.

### 1.6 Nilpotente Gruppen

Wir können noch die Untergruppe jener Abbildungen betrachten, die auf  $F'_j = F_j/F_{j-1}$  als Identität wirken, d.h. in der Diagonale lauter Identitäten haben. Das ist ein prototypisches Beispiel einer nilpotenten Gruppe, wenn  $\dim F_k = k$  für alle  $k$ .

Eine Gruppe heißt NILPOTENT, falls es durch endlich viele zentrale Erweiterungen aus den Abelschen Gruppen gewonnen werden kann.

Ein Spezialfall ist die HEISENBERGGRUPPE, die wir zuerst in anderer Form beschreiben als

$$H := E \oplus \mathbb{R}, \text{ mit } (x, t) \cdot (y, s) := (x + y, t + s + b(x, y)),$$

wobei  $b$  eine symplektische Form (d.h.  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  is bilinear, schief-symmetrisch und nicht degeneriert, siehe [1.14](#)) ist. Es ist  $(x, t)^{-1} = (-x, -t)$ . Wieder ist  $H$  als Menge das Produkt der beiden (abelschen) Gruppen  $E$  und  $\mathbb{R}$ . Diesmal ist es nicht ein semidirektes Produkt, sondern eine zentrale Erweiterung  $1 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow 1$ , die durch den Zykel  $b$  gegeben ist. Man kann  $H$  aber auch als Matrizen­gruppe beschreiben, wenn wir o.B.d.A.  $E := F \oplus F$  setzen und  $b(x_1, y_1; x_2, y_2) := \langle x_1, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle$  wählen (wir werden in [1.14](#) zeigen, daß jede symplektische Form von dieser Gestalt ist) und  $F \cong F^*$  via  $x \mapsto \langle x, - \rangle$  verwenden.

$$\begin{aligned} H &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^* & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x^* \in F^*, y \in F, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(\mathbb{R} \times F \times \mathbb{R}) \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^* & y^* & t \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x \in F, x^* := \langle x, - \rangle \\ y \in F, y^* := \langle y, - \rangle \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \subseteq Sp(\mathbb{R} \times F \times F \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Der zweite Isomorphismus ist durch

$$(x, y, t) \mapsto T(x, y, t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & y^* & t \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{cases} x^* := \langle x, - \rangle \\ y^* := \langle y, - \rangle \end{cases}$$

gegeben. Er hat Werte in  $Sp(\mathbb{R} \times F \times F \times \mathbb{R})$  bezüglich der symplektischen Form  $b(t_1, x_1, y_1, s_1; t_2, x_2, y_2, s_2) = t_1 s_2 - t_2 s_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1$ , denn diese ist durch die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und es gilt  $T(x, y, t)^t J T(x, y, t) = J$  wie man leicht nachrechnet.

Der erste Isomorphismus ist durch

$$(x, y, t) \mapsto T(x^*, y, t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & (t + x^*(y))/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben (Rechnung!). Nachdem wir nun einige ‐aufl6sbare‐ Gruppen kennengelernt haben, wollen wir uns den ‐halbeinfachen‐ zuwenden.

### 1.7 Spezielle lineare Gruppe.

Diese ist definiert durch

$$SL(n) := \{T \in L(n, n) : \det(T) = 1\} \subseteq GL(n).$$

Also ist sie durch die Gleichung  $\det(T) = 1$ , bzw.  $f(T) = 0$  gegeben, wobei  $f : L(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $f(T) := \det(T) - 1$  ist. Wir behaupten, daß diese Gleichung regul6r ist, d.h. die Ableitung der Determinantenfunktion surjektiv ist. Da die Determinante multilinear in den Spalten (oder auch polynomial in den Koeffizienten) ist, folgt ihre Glattheit. Die Richtungsableitung von  $\det$  an der Stelle  $A$  in Richtung  $B$  ist nach [1.2](#):

$$\det'(A)(B) = \det(A) \operatorname{spur}(A^{-1}B).$$

Dies zeigt die Surjektivit6t von  $\det'(A)$  und damit auch die Regularit6t von  $\det$ . Ohne die gesamte Ableitung  $\det'(A) : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  zu berechnen, kann man kürzer auch so vorgehen:

$$\det'(A)(A) = \left. \frac{d}{dt} \det((1+t)A) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \underbrace{\det((1+t)A)}_{(1+t)^n \det A} \right|_{t=0} = n(1+t)^{n-1} \Big|_{t=0} \det A = n \det A.$$

Folglich ist  $\det'(A)$  surjektiv und  $SL(\mathbb{R}^n)$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n^2 - 1$ .

### 1.8 Bemerkungen zur $SL(E)$ .

Die kurze exakte Sequenz  $SL(E) \hookrightarrow GL_+(E) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}_+, \cdot)$  splittet via dem Gruppen-Homomorphismus  $s : \mathbb{R}_+ \rightarrow GL_+(E)$ ,  $t \mapsto \sqrt[n]{t} \cdot 1$  dessen Bild mit ganz  $SL(E)$  kommutiert. Nach [A.2](#) ist somit  $GL_+(E) \cong SL(E) \times \mathbb{R}_+$  als Lie-Gruppen verm6ge  $(T, t) \mapsto \sqrt[n]{t} T$ .

### 1.9 Orthogonale Gruppe.

Sie ist definiert durch (siehe auch [Kri07, 1.2](#)):

$$O(n) := \{T \in GL(n, n) : T^t \circ T = \operatorname{id}\} = \{T \in GL(n, n) : \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y\}.$$

So wie in Beispiel [1.7](#) wollen wir nun zeigen, daß die Ableitung für die quadratische – daher auch glatte – Funktion  $f : GL(n) \rightarrow L_{\operatorname{sym}}(n, n)$  mit  $f(T) := T^t \circ T = \operatorname{komp}(T^t, T)$  surjektiv ist. Zu diesem Zweck, berechnen wir zuerst die Ableitung:

$$f'(T) \cdot S = \operatorname{komp}(S^t, T) + \operatorname{komp}(T^t, S) = S^t \circ T + T^t \circ S.$$

Die Dimension von  $L_{\operatorname{sym}}(n, n)$  ist offensichtlich  $\frac{(n+1)n}{2}$ . Für ein  $R \in L_{\operatorname{sym}}(n, n)$  existiert ein  $S \in L(n, n)$  mit  $S^t \circ T + T^t \circ S = R$ , denn  $(S^t \circ T) + (S^t \circ T)^t = R$  für  $S^t \circ T = \frac{1}{2}R$ , d.h.  $S = (S^t)^t = (\frac{1}{2}R \circ T^{-1})^t = (T^t)^{-1} \frac{1}{2}R$ . Folglich ist  $f'$  surjektiv, und somit  $O(n)$  eine Teilmannigfaltigkeit von  $L(n, n)$  der Dimension  $\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

Beachte, daß  $\det(T) = \pm 1$  aus  $1 = \det(1) = \det(T^t T) = \det(T)^2$  für  $T \in O(n)$  folgt. Somit ist  $O(n) \cong SO(n) \times \mathbb{Z}_2$ , wobei  $SO(n) := O(n) \cap SL(n) = O(n) \cap GL_+(n)$  eine offene Untergruppe von  $O(n)$  ist.

### Gramm-Schmidt Orthonormalisierung:

Wir wollen nun den Quotienten  $GL(n)/O(n)$  beschreiben. Beachte dazu, daß  $O(n)$

kein Normalteiler ist. Nach [A.11](#) wäre es wünschenswert eine ‘‘Projektion’’ von  $GL(n)$  auf  $O(n)$  zu finden. Das Gramm-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren (angewandt auf die Spalten der Matrizen aus  $GL(n)$ ) liefert uns das Gewünschte: Sei  $(e_j)$  die standard-Orthonormalbasis. Und  $f_j := T(e_j) = \sum_k e_k T_j^k$  für ein  $T \in GL(n)$ . Wir wenden nun das Orthonormalisierungsverfahren auf  $f_j$  an und erhalten eine Orthonormalbasis  $f'_j$  mit  $f'_k = \sum_{j \leq k} f_j D_k^j$  mit  $D_k^j > 0$  und  $D_k^j = 0$  für  $j > k$ . Es sei  $S$  die orthogonale Abbildung  $S(e_j) = f'_j = \sum_k e_k S_j^k$ . D.h.  $S = D \circ T$ , wobei  $D$  die Abbildung ist, die  $f_j$  auf  $f'_j$  abbildet. Also gilt

$$\sum_k e_k S_j^k = S(e_j) = f'_j = \sum_i f_i D_j^i = \sum_i \sum_k e_k T_i^k D_j^i = \sum_k e_k \sum_i T_i^k D_j^i$$

Somit ist  $S_j^k = \sum_i T_i^k D_j^i$ , bzw.  $[T] = [S][D]^{-1}$ , wobei  $[S] \in O(n)$  und  $[D]$  eine obere Dreiecksmatrix mit nur positiven Eigenwerten ist. Beachte, daß  $D$  und damit auch  $S$  glatt von  $T$  abhängt.

Diese Darstellung ist eindeutig, da der Durchschnitt dieser beiden Gruppen gerade  $\{1\}$  ist.

Wir haben somit gezeigt:

#### Iwasawa-Zerlegung für $GL(n)$ .

Es ist  $\circ : O(n) \times D_+(n) \rightarrow GL(n)$  ein Diffeomorphismus, wobei  $D_+(n) \subseteq GL_+(n)$  die auflösbare Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit nur positiven Eigenwerten ist. Folglich haben wir im Sinne von [A.11](#) die Sequenz

$$O(n) \hookrightarrow GL(n) \twoheadrightarrow D_+(n),$$

wobei wir hier linke  $O(n)$ -Nebenklassen betrachtet haben, und ein Schnitt durch die Inklusion  $D_+(n) \hookrightarrow GL(n)$  gegeben ist.

Da  $T \mapsto T^{-1}$  ein Gruppen-Antiisomorphismus ist, ist  $D_+(n)$  auch isomorph zu den rechten Nebenklassen.

Beachte, daß  $K := O(n)$  eine kompakte Gruppe ist, denn für  $T \in O(n)$  ist  $1 = \|T^t T\| = \|T\|^2$  (also  $O(n) \subseteq L(n)$  beschränkt und abgeschlossen). Die Untergruppe  $D$  können wir auch weiter zerlegen in  $D = A \cdot N$ , wobei  $A$  die Abelsche Gruppe der Diagonal-Matrizen mit positiven Eigenwerten und  $N$  die nilpotente Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit 1 als Diagonaleintragungen ist. Somit ist  $D \cong N \times A$ . Insgesamt haben wir  $G := GL(n)$  in  $G = K \cdot A \cdot N$  zerlegt.

Beachte weiters, daß dies auch Zerlegungen  $GL_+(n) = SO(n) \cdot D_+(n)$  und  $SL(n) = SO(n) \cdot (SL(n) \cap D_+(n))$  liefert.

Das Verfahren funktioniert genauso für  $SU(n) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(n)$  und  $Q(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n)$ .

Es ist  $D_+(n) \cong (\mathbb{R}_+)^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  als Mannigfaltigkeit und somit kontrahierbar, d.h.  $O(n)$  ist ein Deformationsretrakt von  $GL(n)$  und es genügt somit für viele topologische Fragen (insbesondere homotopietheoretischer Natur) die Untergruppe  $O(n)$  (bzw.  $SO(n)$ ) zu studieren.

**$SO(n)$ .** Diese Gruppe wirkt offensichtlich auf  $\mathbb{R}^n$ . Der Orbit durch einen Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist  $\{x \in \mathbb{R}^n : b(x, x) = b(x_0, x_0)\} \cong S^{n-1}$ . In der Tat können wir (für  $n \geq 2$ ) sowohl  $x$  als auch  $x_0$  zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis ergänzen (ergänze zu irgendeiner Basis und wende das Gramm-Schmidt Verfahren an), und der Basiswechsel gehört dann zu  $SO(n)$ . Insbesondere wirkt also  $SO(n)$  transitiv auf  $S^{n-1}$  und die Fixgruppe bzgl.  $1 = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$  ist isomorph zu  $SO(n-1)$  (denn  $T$  läßt dann auch  $1^\perp = \mathbb{R}^{n-1}$  invariant), d.h. wir haben nach [A.11](#) die Sequenz:

$$SO(n-1) \hookrightarrow SO(n) \twoheadrightarrow S^{n-1}.$$

**1.10 Folgerung.**

$SO(n)$  und  $GL_+(n)$  sind zusammenhängend und sind somit die Zusammenhangskomponenten von 1 in  $O(n)$  bzw.  $GL(n)$ . Das Zentrum von  $SO(n)$  ist  $\{\pm 1\}$  falls  $n > 2$  gerade ist und  $\{1\}$  falls  $n$  ungerade ist.

**Beweis.** Sei  $H$  eine zusammenhängende Untergruppe von  $G$  und  $G/H$  auch zusammenhängend. Dann ist auch  $G$  zusammenhängend, denn sei  $G = U \cup V$  mit nicht-leeren offenen  $U$  und  $V$ . Somit ist  $G/H = \pi(U) \cup \pi(V)$  mit nicht-leeren offenen  $\pi(U)$  und  $\pi(V)$  (denn  $\pi^{-1}(\pi(U)) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$ ) und damit  $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$ . Sei  $\pi(g) = gH$  im Durchschnitt. Dann ist der zusammenhängende Raum  $gH \cong H$  Vereinigung der nicht-leeren  $gH = \pi^{-1}(\pi(g)) \subseteq UH \Rightarrow gH \cap U \neq \emptyset$  offenen Mengen  $gH \cap U$  und  $gH \cap V$ , also  $\emptyset \neq gH \cap U \cap gH \cap V \subseteq U \cap V$ , was zu zeigen war.

Mittels Induktion folgt nun aus der Sequenz  $SO(n-1) \hookrightarrow SO(n) \rightarrow S^{n-1}$  daß  $SO(n)$  zusammenhängend ist und für  $GL_+(n)$  dann aus der Iwasawa-Zerlegung.

Ein direkter Beweis, daß  $SO(n)$  wegzusammenhängend ist geht wie folgt: Es läßt sich  $T \in SO(n) \subseteq L_{\mathbb{C}}(n)$  diagonalisieren mit Eigenwerten von Betrag 1. Da die nicht-reellen Eigenwerte paarweise konjugiert zueinander sind, können wir eine Basis so finden, daß  $T$  Blockgestalt mit Blöcken  $(\pm 1)$  mit gerader Anzahl von  $-1$ 'ern oder  $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$  hat und somit offensichtlich in die Identität deformiert werden kann.

Zum Zentrum: Jeder lineare Teilraum  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  der Kodimension 2 ist Fixpunktmenge  $\text{Fix}(T) := \{x : Tx = x\}$  eines  $T \in SO(n)$  (ergänze die Identität auf  $F$  durch eine Drehung auf der orthogonalen Ebene  $F^\perp$ , siehe auch [1.15](#)). Sei  $S$  im Zentrum  $Z(SO(n))$  und  $Tx = x$ . Dann ist  $S(x) = S(T(x)) = T(S(x))$ , also  $S(x)$  ein Fixpunkt von  $T$ , d.h.  $S(\text{Fix}(T)) \subseteq \text{Fix}(T)$ . Da jede Gerade  $\ell$  durch 0 Durchschnitt aller Ebenen der Kodimension 2 ist (für  $n > 2$ ), die  $\ell$  enthalten, ist  $S(\ell) \subseteq \ell$ , also jedes  $x \neq 0$  ein Eigenvektor, und somit sind alle Eigenwerte von  $S$  gleich und folglich  $S = \pm 1$ , wegen  $\det(S) = 1$ .  $\square$

**1.11 Polarzerlegung.**

Wir wollen nun einen zweiten Schnitt und damit eine weitere Beschreibung des Quotientenraums der Sequenz

$$O(n) \hookrightarrow GL(n) \twoheadrightarrow GL(n)/O(n)$$

geben. Wir haben  $O(n)$  in [1.9](#) als  $f^{-1}(\text{id})$  definiert, wobei  $f : L(n) \rightarrow S(n) := L_{\text{sym}}(n, n) = \{T : T^t = T\}$  durch  $f(T) := T^t T$  gegeben war. Für  $T \in GL(n)$  hat  $f$  Werte in der offenen Teilmenge  $S_+(n) := \{T \in S(n) : T \text{ ist positiv definit}\}$  von  $S(n)$ , denn  $\langle T^t T x, x \rangle = \langle T x, T x \rangle = \|T x\|^2 > 0$  für alle  $x \neq 0$ . Es ist  $f$  konstant auf linken  $O(n)$ -Nebenklassen, denn aus  $RT = T_1$  mit  $R \in O(n)$  folgt  $f(T_1) = T^t R^t R T = T^t T = f(T)$ . Die Nebenklassen sind genau die Niveauflächen, denn sei umgekehrt  $f(T_1) = f(T)$ , dann ist  $T_1 = RT$  mit  $R := T_1 T^{-1}$  und  $R^t R = (T^{-1})^t T_1^t T_1 T^{-1} = (T^{-1})^t f(T_1) T^{-1} = (T^{-1})^t f(T) T^{-1} = (T^{-1})^t T^t T T^{-1} = 1$ , also  $R \in O(n)$  und damit  $O(n) \cdot T_1 = O(n) \cdot T$ .

Ist die Inklusion  $S_+(n) \hookrightarrow GL_+(n)$  ein Rechtsinverses zu  $f$ ? Für letzteres müßte  $T^t T = T^2$  ident zu  $T$  für alle  $T \in S_+(n)$  sein, was offensichtlich nicht der Fall ist. Allerdings können wir mittels Spektraltheorie aus  $T^t T$  die eindeutig bestimmte Wurzel  $S \in S_+(n)$  mit  $S^2 = T^t T$  ziehen, und für  $T \in S_+(n)$  ist diese gerade  $T$ .

Behauptung:  $T \mapsto T^2, S_+(n) \rightarrow S_+(n)$  ist ein Diffeomorphismus.

Glattheit ist klar. Surjektivität folgt aus der Spektraltheorie, denn  $T$  ist nach Voraussetzung orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert ein  $R \in O(n)$  s.d.

$\Lambda := RTR^{-1}$  eine Diagonalmatrix mit notwendigerweise ausschließlich positiven Eigenwerten  $\lambda_i$  ist. Sei  $\sqrt{\Lambda}$  die Diagonalmatrix mit Eigenwerten  $\sqrt{\lambda_i}$ . Dann ist  $\sqrt{T} := R^{-1}\sqrt{\Lambda}R \in S_+(n)$  und  $\sqrt{T}^2 = R^{-1}\sqrt{\Lambda}RR^{-1}\sqrt{\Lambda}R = R^{-1}\Lambda R = T$ .

Injektivität: Sei  $S^2 = T$  für ein  $S \in S_+(n)$ . Somit kommutiert  $T$  mit  $S$  und damit sind  $S$ ,  $T$  und nach Konstruktion auch  $\sqrt{T}$  mit einem gemeinsamen  $R$  diagonalisierbar. Wegen  $S^2 = T = \sqrt{T}^2$  müssen  $S$  und  $\sqrt{T}$  die gleiche Diagonalmatrix haben, also ident sein.

Diffeomorphismus: Es genügt die Injektivität der Ableitung  $S \mapsto ST + TS$  an der Stelle  $T \in S_+(n)$  auf  $S(n)$  zu zeigen. Sei also  $TS + ST = 0$ . Konjugieren mit  $R$  liefert  $\Lambda RSR^{-1} + RSR^{-1}\Lambda = 0$ , woraus durch Koeffizientenvergleich für die Matrix  $RSR^{-1} = (s_{i,j})_{i,j}$  die Gleichungen  $(\lambda_i + \lambda_j)s_{i,j} = 0$ , also  $RSR^{-1} = 0$  und damit auch  $S = 0$  folgt.

### Cartan-Zerlegung für die $GL(E)$ .

Es ist  $\circ : O(n) \times S_+(n) \rightarrow GL(n)$ ,  $(T, S) \mapsto T \circ S$  ein Diffeomorphismus, wobei  $S_+(n)$  die Menge der positiv definiten symmetrischen Matrizen bezeichnet. Es ist also  $GL(n)/O(n) \cong S_+(n)$  und ein Schnitt von  $O(n) \hookrightarrow GL(n) \twoheadrightarrow S_+(n)$  durch die Inklusion  $S_+(n) \subseteq GL(n)$  gegeben. Weiters induziert die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus  $\exp : S(n) := \{T \in L(E) : T^t = T\} \rightarrow S_+(n)$ .

**Beweis.** Nach Obigem ist die Inklusion  $S_+(n) \hookrightarrow GL(n)$  ein Schnitt der glatten Abbildung  $T \mapsto \sqrt{T^t T}$ ,  $GL(n) \xrightarrow{f} S_+(n) \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} S_+(n)$ . Diese hat wie  $f : T \mapsto T^t T$  genau die linken  $O(n)$ -Nebenklassen als Niveauflächen. Nach dem in [A.11](#) gezeigten, ist  $R := T\sqrt{T^t T}^{-1} \in O(n)$  und somit  $\circ : O(n) \times S_+(n) \rightarrow GL(n)$ ,  $(R, S) \mapsto R \circ S$  ein Diffeomorphismus mit Inverser  $T \mapsto (T \cdot \sqrt{T^t T}^{-1}, \sqrt{T^t T})$ .

Die Einschränkung der Exponentialabbildung auf  $S(n)$  ist surjektiv: Sei dazu  $S \in S_+(n)$ . Dann existiert ein  $R \in O(n)$ , s.d.  $\Lambda := RSR^{-1}$  eine Diagonalmatrix mit ausschließlich positiven Eigenwerten  $\lambda_i$  ist. Sei  $T := R^{-1} \log(\Lambda) R$ , wobei  $\log(\Lambda)$  die Diagonalmatrix mit Eigenwerten  $\log(\lambda_i)$  ist. Dann ist  $T$  symmetrisch und  $\exp(T) = R^{-1} \Lambda R = S$ .

Die Einschränkung ist auch injektiv: Sei  $\exp(T_1) = \exp(T_2)$  für symmetrische  $T_1$  und  $T_2$ . Wieder sind  $\Lambda_i := R_i T_i R_i^{-1}$  diagonal-Matrizen für gewisse  $R_i \in O(n)$  mit  $R_i^{-1} \exp(\Lambda_i) R_i = \exp(T_i)$  unabhängig von  $i$ . Es genügt zu zeigen, daß  $T_1$  und  $T_2$  miteinander kommutieren, da sie dann vermöge einem  $R_1 = R_2$  gleichzeitig diagonalisierbar sind und somit  $\exp(\Lambda_1) = \exp(\Lambda_2)$ , also  $\Lambda_1 = \Lambda_2$  und schließlich  $T_1 = T_2$  gilt. Dazu wählen wir ein Polynom  $p$  mit  $p(e^\lambda) = \lambda$  für alle Eigenwerte der  $\Lambda_i$ . Dann ist  $p(\exp T_i) = R_i^{-1} p(\exp(\Lambda_i)) R_i = R_i^{-1} \Lambda_i R_i = T_i$  und folglich  $T_2 T_1 = p(\exp T_2) T_1 = p(\exp T_1) T_1 = T_1 p(\exp T_1) = T_1 T_2$ .

Die Einschränkung ist ein Diffeomorphismus: Für  $S \in S_+(n)$  wählen wir ein  $s \geq \|S\|$ . Dann gilt  $\|s - S\| < s$ , denn  $s - S \in S(n)$  und somit  $\|s - S\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(s - S) = s - \sigma(S)\} < s$ , da  $\mu \in \sigma(S) \Rightarrow 0 < \mu \leq \|S\| \leq s$ . Da  $\log(1 - x) := -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$  für  $|x| < 1$  konvergiert, ist  $S \mapsto \log(\frac{1}{s}S) := \log(1 - \frac{1}{s}(s - S))$  eine lokal für  $\|S\| < s$  definierte glatte Funktion mit  $\exp(\log(\frac{1}{s}S)) = \frac{1}{s}S$ , also  $S = \exp(\log(s) + \log(\frac{1}{s}S))$ . Damit ist die Inverse von  $\exp$  lokal glatt, und somit  $\exp$  ein Diffeomorphismus.  $\square$

Vergleiche dies mit der Polarzerlegung  $z = \frac{z}{|z|} \cdot |z|$  für komplexe Zahlen aufgefaßt als Drehstreckungen am  $\mathbb{R}^2$ .

Der Vorteil der Iwasawa-Zerlegung besteht darin, daß  $D = AN$  eine auflösbare Untergruppe von  $G$  ist, jener der Cartan-Zerlegung ist, daß  $S_+(n)$  invariant unter Konjugation mit  $K = O(n)$  ist.

### 1.12 Gruppen invarianter Automorphismen, $O_b$

Wir wollen nun die orthogonale Gruppe verallgemeinern, indem wir eine beliebige Bilinearform  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem euklidischen Raum  $E$  betrachten. Mit

$$O_b(E) := \{T \in GL(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y \in E\}$$

bezeichnen wir die Gruppe aller invertierbaren linearen Abbildungen, die die Bilinearform  $b$  invariant lassen. Bekanntlich stehen die Bilinearformen  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  in bijektiver Beziehung zu den linearen Abbildungen  $B : E \rightarrow E$ , vermöge

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle = \langle x, B^t y \rangle :$$

Denn  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  können wir genauso gut als Abbildung  $\check{b} : E \rightarrow L(E, \mathbb{R}) =: E^*$  auffassen, welche durch  $x \mapsto (y \mapsto b(x, y))$  gegeben ist. Das skalare Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  entspricht dabei einer Abbildung  $\iota : E \rightarrow E^*$ , welche ein Isomorphismus ist, denn  $\text{Ker}(\iota) = \{x : \langle x, y \rangle = 0 \forall y\} = \{0\}$ , und da  $\dim(E) = \dim(E^*)$ , ist  $\iota$  bijektiv. Die Zusammensetzung  $B := \iota^{-1} \circ \check{b} : E \rightarrow E^* \rightarrow E$  ist dann die gesuchte lineare Abbildung, denn

$$b(x, y) = \check{b}(x)(y) = (\iota \circ B)(x)(y) = \iota(B(x))(y) = \langle Bx, y \rangle.$$

Die Gleichung  $b(x, y) = b(Tx, Ty)$  ist somit mit  $\langle Bx, y \rangle = \langle BTx, Ty \rangle = \langle T^t BTx, y \rangle$  äquivalent, und damit ist

$$O_b(E) = \{T \in GL(E) : T^t BT = B\}.$$

Wir sollten also zeigen, daß dies eine reguläre Gleichung ist. Für die Ableitung der Funktion  $f : GL(E) \rightarrow L(E)$ , welche durch  $f(T) = T^t BT - B$  definiert ist, erhalten wir  $f'(T)(S) = S^t BT + T^t BS$ . Wie bei  $O(E)$  können wir nicht erwarten, daß sie surjektiv nach  $L(E, E)$  ist, sondern wir brauchen einen linearen Teilraum  $F \subseteq L(E, E)$  in welchem  $f$  Werte hat und auf welchen  $f'(T)$  surjektiv ist.

Wenn  $B$  (schief)symmetrisch ist, dann gilt das gleiche auch für  $f(T)$  und wir sollten also für  $F$  den Teilraum  $L_{\pm}(E, E)$  der (schief)symmetrischen linearen Abbildungen verwenden. Dieser hat als Dimension  $n(n+1)/2$  (bzw.  $n(n-1)/2$ ), wenn  $n$  die Dimension von  $E$  ist. Wenn  $U \in F$  ist und  $T$  die Identität ist, so ist  $U = f'(T)(S) = S^t B + BS$  dann nach  $S$  auflösbar, wenn wir ein  $S$  mit  $BS = \frac{1}{2}U$  in  $S$  finden können, denn dann ist auch  $S^t B = \pm(BS)^t = \pm\frac{1}{2}U^t = \frac{1}{2}U$ . Falls  $B$  invertierbar ist, so ist  $S := \frac{1}{2}B^{-1}U$  die Lösung. Falls  $T \in GL(E)$  beliebig ist, dann hat die Gleichung  $U = f'(T)(S) = S^t BT + T^t BS$  die Lösung  $S = \frac{1}{2}B^{-1}(T^{-1})^t U$ , denn dann gilt  $T^t BS = \frac{1}{2}U$  und  $S^t BT = \frac{1}{2}U^t T^{-1}(B^{-1})^t BT = \pm\frac{1}{2}U^t = \frac{1}{2}U$ . Falls also  $B$  injektiv ist, oder äquivalent  $b$  nicht degeneriert ist, d.h.  $x = 0 \Leftarrow \forall y : b(x, y) = 0$ , dann ist  $O_b(E)$  eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim O_b(E) := \begin{cases} n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 & \text{falls } b \text{ symmetrisch ist} \\ n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 & \text{falls } b \text{ schief-symmetrisch ist.} \end{cases}$$

Man beachte, daß für invertierbares  $B$  und  $T \in O_b(E)$  automatisch  $\det(T) = \pm 1$  gilt, denn  $0 \neq \det(B) = \det(T^t BT) = \det(T)^2 \det(B)$ .

### 1.13 Der symmetrische Fall, $O(n, k)$

Im symmetrischen Fall können wir nach dem Spektralsatz (Hauptachsentransformation) eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren  $e_j$  mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  für  $B$  finden. Es ist dann

$$B(x) = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j$$

und somit

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle \langle y, e_j \rangle$$

Da  $\text{Ker}(B) = \{0\}$  vorausgesetzt ist, müssen alle Eigenwerte  $\lambda_j \neq 0$  sein, und somit sieht  $b$  in der Orthogonalbasis  $f_j := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} e_j$  wie folgt aus

$$b(x, y) = \sum_{\lambda_j > 0} x^j y^j - \sum_{\lambda_j < 0} x^j y^j,$$

wobei  $x^j := \langle x, f_j \rangle$  die Koordinaten von  $x$  bezüglich der Basis  $(f_j)$  bezeichnet.

Man nennt so ein  $b$  auch PSEUDOEUKLIDISCHES PRODUKT. Solche sind für die Relativitätstheorie von Bedeutung. Beachte, daß es Vektoren  $x \neq 0$  gibt, welche Norm  $b(x, x) = 0$  haben und auch solche mit negativer Norm. Man nennt die mit verschwindender Norm LICHTARTIG, d.h.  $\sum_{j > k} (x^j)^2 = \sum_{j \leq k} (x^j)^2$  (dies beschreibt einen "Kegel"), und die mit positiver Norm RAUMARTIG und die mit negativer Norm ZEITARTIG. Betrachte z.B. die Form

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Dann sind die Vektoren im Inneren des Doppelkegels mit der  $x_3$ -Achse die zeitar-tigen, die im Äußeren die raumartigen und die am Doppelkegel die lichtartigen.

Die Gruppe  $O_b(E)$  hängt also bis auf Isomorphie nur von der Signatur, d.h. der Anzahl  $k$  der negativen der  $n$  Eigenwerte von  $b$ , ab und wird daher auch mit  $O(n, k)$  (und z.T. auch mit  $O(n - k, k)$ ) bezeichnet, wobei  $n = \dim(E)$  ist. Man beachte, daß  $O(n, k) = O(n, n - k)$  ist (ersetze dazu  $b$  durch  $-b$ ). Die offene Untergruppe  $SL(n) \cap O(n, k)$  wird mit  $SO(n, k)$  bezeichnet. Die  $O(4, 1)$  wird (in der Physik, insbesondere in der speziellen Relativitätstheorie) auch als die LORENTZGRUPPE bezeichnet.

### 1.14 Der schiefssymmetrische Fall, $Sp(2n)$

Im schiefssymmetrischen Fall können wir eine Normalform wie folgt finden: Sei dazu  $b$  eine nichtdegenerierte schiefssymmetrische Bilinearform, eine sogenannte SYMPLEKTISCHE FORM. Diese sind für die klassischen Mechanik von Bedeutung (siehe Abschnitt [Kri07, 45]). Für eine Teilmenge  $A \subseteq E$  bezeichnen wir mit

$$A^\perp := \{x \in E : x \perp y \forall y \in A\}$$

das ORTHOGONALE KOMPLEMENT. Wobei  $x \perp y$  heißt, daß  $b(x, y) = 0$  ist. Da  $b$  schiefssymmetrisch ist, ist  $x \perp x$  für alle  $x$ . Für jeden Teilraum  $F$  gilt  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$  (in der Tat:  $i^* \circ \check{b} : E \rightarrow E^* \rightarrow F^*$  ist surjektiv, wobei  $i : F \rightarrow E$  die Inklusion bezeichnet, denn  $\check{b} : E \rightarrow E^*$  ist nach Voraussetzung bijektiv, und  $i^* : E^* \rightarrow F^*$  ist klarerweise surjektiv (wähle ein linksinverses  $p$  zu  $i$ , dann gilt  $i^* \circ p^* = \text{id}$ ) und somit ist  $\dim E = \dim(\text{Ker}) + \dim(\text{Bild}) = \dim(F^\perp) + \dim(F)$ ). Beachte für lineare Teilräume  $A$  und  $B$  die Gleichungen  $A^{\perp\perp} = A$  ( $\Leftarrow A \subseteq A^{\perp\perp}$  und Dimensionsgründen), sowie  $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$  (trivial) und schließlich  $A^\perp + B^\perp = (A^\perp + B^\perp)^{\perp\perp} = (A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp})^\perp = (A \cap B)^\perp$ .

Eine Teilmenge  $A \subseteq E$  heißt ISOTROP, falls  $A \subseteq A^\perp$ , d.h.  $b|_{A \times A} = 0$ . Es sei  $F$  so eine maximale isotrope Teilmenge. Für solche gilt  $F = F^\perp$ , denn andernfalls können wir ein  $y \in F^\perp \setminus F$  zu  $F$  hinzufügen und erhalten eine größere isotrope Teilmenge  $F \cup \{y\}$ . Wegen der Bilinearität von  $b$  ist  $A^\perp$  ein linearer Teilraum für jede Teilmenge  $A \subseteq E$  und somit auch  $F = F^\perp$ , ein sogenannter LAGRANGE TEILRAUM. Für solche ist folglich  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp = 2 \dim F$ , also folgt aus der Existenz von Lagrange Teilräumen, daß  $E$  geradedimensional sein muß.

Wir wählen nun einen Lagrange Teilraum  $F$  und dazu einen komplementären Lagrange Teilraum  $F'$ . Das ist möglich, denn wenn für einen isotropen Teilraum  $G$  mit  $G \cap F = \{0\}$  noch  $G + F \subset E$  gilt, dann ist  $G^\perp + F = G^\perp + F^\perp = (G \cap F)^\perp = \{0\}^\perp = E \supset G + F$  und somit können wir ein  $y \in G^\perp \setminus (G + F)$  finden, für welches somit  $(\mathbb{R}y + G) \cap F = \{0\}$ , also  $G_1 := \mathbb{R}y + G$  ein größerer isotroper Teilraum ist. Es sei  $i' : F' \hookrightarrow E$  die Inklusion. Dann ist  $i^* \circ \check{b} \circ i' : F' \hookrightarrow E \xrightarrow{\cong} E^* \rightarrow F^*$  injektiv, denn der Kern von  $i^* \circ \check{b}$  ist  $F^\perp = F$  und  $F \cap F' = \{0\}$ , und somit aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Wir behaupten, daß der induzierte Isomorphismus  $E \cong F' \times F \cong F^* \times F$  die symplektische Form  $b$  in die Form  $(y_1^*, y_1; y_2^*, y_2) \mapsto y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$  übersetzt. Sei also  $x_j = y'_j + y_j$  mit  $y_j \in F$  und  $y'_j \in F'$ . Da  $F$  und  $F'$  isotrop sind, ist dann  $b(x_1, x_2) = b(y'_1, y_2) + b(y_1, y'_2) = b(y'_1, y_2) - b(y'_2, y_1)$ . Mit  $y_j^* := (i^* \circ \check{b} \circ i')(y'_j)$  ist  $b(y'_1, y_2) = b(i' y'_1, i' y_2) = \check{b}(i' y'_1)(i' y_2) = (i^* \circ \check{b} \circ i')(y'_1)(y_2) = y_1^*(y_2)$  und somit ist  $b(x_1, x_2) = y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$ .

Wählen wir nun in  $F$  eine Basis  $(e_j)_{k < j \leq 2k}$  (mit  $2k = n := \dim E$ ) und in  $F^*$  die duale Basis  $(e^j)_{j > k}$ . Mit  $(e_j := e'_{k+j})_{j \leq k}$  bezeichnen wir die entsprechende Basis in  $F'$ , also  $i^* \circ \check{b} \circ i' : e_j \mapsto e^{k+j}$ . Dann ist  $(e_j)_{j \leq 2k=n}$  eine Basis von  $E$ , die jener von  $F^* \times F$  entspricht, und weiters ist  $y^*(y) = \sum_{j > k} y_j y^j$ , wobei  $y_j$  die Koordinaten von  $y^* \in F^*$  bzgl.  $e^j$  und  $y^j$  jene von  $y \in F$  bzgl.  $e_j$  bezeichnet. Also ist die STANDARD SYMPLEKTISCHE FORM AM  $\mathbb{R}^{2k}$

$$b(x_1, x_2) = \sum_{j \leq k} x_1^j x_2^{j+k} - x_1^{j+k} x_2^j = \langle Jx_1, x_2 \rangle, \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_k \\ \text{id}_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Gruppe wird mit  $Sp(2k)$  bezeichnet, und heißt REELLE SYMPLEKTISCHE GRUPPE. Da  $Sp(n)$  für ungerades  $n$  nicht existiert, wird  $Sp(2k)$  in der Literatur bisweilen auch als  $Sp(k)$  bezeichnet!

### 1.15 Spiegelungen

Wir wollen nun spezielle Abbildungen  $T \in O_b(E)$  für symmetrische und schiefssymmetrische  $b$  beschreiben, und zwar solche, die eine Hyperebene als Fixpunktmenge  $\{x \in E : Tx = x\}$  besitzen. Sei  $F$  diese Hyperebene und  $0 \neq y \in F^\perp$ , d.h.  $F = \{y\}^\perp$ . Sei  $y' \notin F$  mit  $b(y', y) = 1$  (möglich, da  $b(y', y) = 0 \Rightarrow y' \in \{y\}^\perp = F$ ), dann läßt sich jedes  $x \in E$  als  $x = b(x, y)y' + (x - b(x, y)y')$  schreiben, und  $b(x - b(x, y)y', y) = 0$ , d.h.  $x - b(x, y)y' \in F$ . Das gesuchte  $T$  muß also folgende Gestalt haben:

$$T(x) = b(x, y)T(y') + (x - b(x, y)y') = x + b(x, y)(T(y') - y') =: x + b(x, y)y''.$$

Damit  $T$  die Form  $b$  erhält, muß

$$\begin{aligned} b(x_1, x_2) &= b(T(x_1), T(x_2)) = b(x_1 + b(x_1, y)y'', x_2 + b(x_2, y)y'') = \\ &= b(x_1, x_2) + b(x_1, y)b(y'', x_2) + b(x_2, y)b(x_1, y'') + b(x_1, y)b(x_2, y)b(y'', y'') \end{aligned}$$

gelten, d.h.  $b(x_1, y)b(y'', x_2) + b(x_2, y)b(x_1, y'') + b(x_1, y)b(x_2, y)b(y'', y'') = 0$ . Wenn wir  $x_2 = y'$  setzen und  $x_1 \perp y$  wählen, dann folgt  $b(x_1, y'') = 0$ , also ist  $y'' \in$

$\{y\}^{\perp\perp} = \mathbb{R}y$ . Sei also  $y'' = \lambda y$  (mit  $\lambda \neq 0$ , da  $T$  nicht die Identität sein kann). Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda b(x_1, y)b(y, x_2) + \lambda b(x_2, y)b(x_1, y) + b(x_1, y)b(x_2, y)\lambda^2 b(y, y) \\ &= \lambda b(x_1, y)b(x_2, y)(\pm 1 + 1 + \lambda b(y, y)) \end{aligned}$$

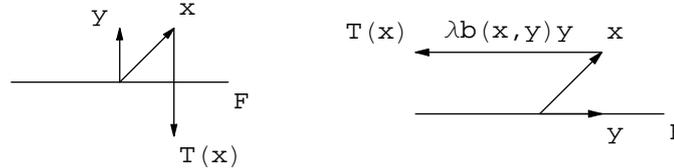
für alle  $x_1$  und  $x_2$  genau dann, wenn  $1 + \lambda b(y, y) = \mp 1$  (wähle dazu  $x_1 = x_2 := y'$ ).

Im symmetrischen Fall ist dies äquivalent zu  $\lambda b(y, y) = -2$  (also  $b(y, y) \neq 0$  und  $\lambda := -\frac{2}{b(y, y)}$ ) ist und im schiefssymmetrischen ist es immer erfüllt.

Die  $T \in O_b(E)$  mit einer Hyperebene  $F = \{y\}^\perp$  als Fixpunktmenge sind also genau

$$T(x) := \begin{cases} x - 2\frac{b(x, y)}{b(y, y)}y & \text{mit } b(y, y) \neq 0 \text{ im symmetrischen Fall,} \\ x + \lambda b(x, y)y & \text{mit } 0 \neq \lambda \in \mathbb{R} \text{ im schiefssymmetrischen Fall.} \end{cases}$$

Diese  $T$  heißen auch SPIEGELUNGEN, in Analogie zum Fall, wo  $b$  eine euklidische Metrik ist.



Im symplektischen Fall ist jede Spiegelung orientierungserhaltend, denn  $T(y') = y' + \lambda y$  liegt auf der gleichen Seite von  $F$  wie  $y'$  und somit ist  $\begin{pmatrix} \text{id} & \lambda y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Komponentendarstellung von  $T$  bzgl. der Zerlegung  $E = F \oplus \mathbb{K}y' \cong F \times \mathbb{K}$ , und im symmetrischen Fall orientierungsvertauschend, denn  $T(y) = y - 2y = -y$  und somit ist  $\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  die Komponentendarstellung von  $T$  bzgl. der Zerlegung  $E = F \oplus \mathbb{K}y \cong F \times \mathbb{K}$  (beachte  $y \notin F$ , da  $b(y, y) \neq 0$  und  $y \in F^\perp$ ).

**Transitivität der Spiegelungen:** Es läßt sich für  $x \neq x'$  mit  $b(x, x) = b(x', x')$  genau dann eine Spiegelung  $T$  finden mit  $Tx = x'$ , wenn  $b(x, x') \neq b(x, x)$  ist, denn  $x' = x + \lambda b(x, y)y$  gilt genau dann, wenn  $y = \mu(x' - x)$  mit  $1 = \lambda\mu^2 b(x, x' - x) = \lambda\mu^2(b(x, x') - b(x, x))$  gilt. Diese Abbildung  $T$  läßt offensichtlich  $(x' - x)^\perp$  fix. Im symmetrischen Fall ist dann  $\lambda b(y, y) = \lambda\mu^2 b(x' - x, x' - x) = -2$ . Beachte, daß für positiv definites  $b$  wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz die Situation  $b(x, x') = b(x, x)$  nicht eintreten kann. Im symplektischen Fall ist andererseits  $b(x, x) = 0 = b(x', x')$  immer erfüllt.

**Proposition.**

Für jede (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Bilinearform  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  wird  $O_b(E)$  von den Spiegelungen erzeugt.

Man kann zeigen, daß im symmetrischen Fall  $n = \dim E$  viele Spiegelungen genügen und im symplektischen sind mindestens  $n + 1$  notwendig (siehe [Die60, Sur les Groups Classique, Hermann, Paris 1967]).

**Beweis.** Im symmetrischen Fall wählen wir eine Orthonormalbasis von  $E$  (d.h.  $b(e_i, e_j) = 0$  und  $b(e_i, e_i) = \pm 1$ ). Die Bilder  $e'_i := T(e_i)$  sind dann ebenfalls eine Orthonormalbasis. Wir zeigen nun mit Induktion, daß  $T$  bis auf Zusammensetzung mit Spiegelungen die Menge  $\{e_1, \dots, e_k\}$  fix läßt:

In der Tat, wenn  $T$  nach Induktionsannahme die Menge  $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  fix läßt, und  $b(e_k, e'_k) \neq b(e_k, e_k)$  ist, dann bildet die Spiegelung  $S$  am orthogonalen Komplement zu  $e'_k - e_k$  den Vektor  $e_k$  auf  $e'_k$  ab und läßt  $(e'_k - e_k)^\perp \supseteq (e'_k)^\perp \cap$

$(e_k)^\perp \supseteq \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  fix, also läßt  $S^{-1}T$  sogar  $\{e_1, \dots, e_k\}$  fix. Ist andererseits  $b(e_k, e'_k) = b(e_k, e_k)$ , dann spiegeln wir zuerst am orthogonalen Komplement zu  $e_k$  (mit  $b(e_k, e_k) = \pm 1 \neq 0$ ) und danach an jenem zu  $e'_k + e_k$  (mit  $b(e_k + e'_k, e_k + e'_k) = 2(b(e_k, e_k) + b(e_k, e'_k)) = 4b(e_k, e_k) \neq 0$ ). Diese Spiegelungen lassen  $(e_k)^\perp \cap (e_k + e'_k)^\perp \supseteq \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  invariant und ihre Zusammensetzung bildet  $e_k$  auf  $-e_k$  und weiter auf  $e'_k$  ab, also läßt  $T$  bis auf diese Spiegelungen  $\{e_1, \dots, e_k\}$  invariant.

Im symplektischen Fall beweisen wir die Aussage mittels Induktion nach  $j := n - \dim F$ , wo  $F := \{x : Tx = x\}$ . Für  $j = 0$  ist  $T = \text{id}$ . Sei also  $j > 0$ . Für jedes  $y \in E$  ist  $b(y, x) = b(Ty, Tx) = b(Ty, x)$  für alle  $x \in F$ , d.h.  $Ty - y \in F^\perp$ .

Falls  $b(Ty, y) \neq 0$  für ein  $y \in E$  ist ( $\Rightarrow y \notin F$ ), dann existiert eine Spiegelung, welche  $y$  auf  $Ty$  abbildet und die  $(Ty - y)^\perp \supseteq F$  fix läßt. Bis auf diese Spiegelung läßt also  $T$  auch  $F \oplus \mathbb{R}y$  fix.

Andernfalls ist  $b(Ty, y) = 0$  für alle  $y$ . Sei vorerst  $F \cap F^\perp \neq \{0\}$ . Dann wählen wir ein  $0 \neq x \in F \cap F^\perp$  und ein  $y \in E$  mit  $b(y, x) = 1$  (geht wie in der Beschreibung von Spiegelungen). Es gilt dann  $y \notin F$ , da  $x \in F^\perp$ . Weiters ist  $b(Ty, x) = b(Ty, Tx) = b(y, x) = 1$  und somit existieren Spiegelungen die  $y$  auf  $x + y$ , bzw.  $Ty$  auf  $x + y$  abbilden (denn  $b(y, x + y) = b(y, x) \neq 0$  und  $b(Ty, x + y) = b(Ty, x) \neq 0$ ), und  $(x + y - y)^\perp \cap (x + y - Ty)^\perp \supseteq F$  (wegen  $x, Ty - y \in F^\perp$ ) fix lassen. Also läßt  $T$  bis auf diese Spiegelungen  $F \oplus \mathbb{R}y$  fix, und wir können die Induktionsannahme anwenden.

Ist  $F = \{0\}$ , dann existiert zu  $y \neq 0$  ein  $x \in F^\perp = E$  mit  $b(x, y) = 1 = b(x, Ty)$ , denn ergänze  $(e_1 := y, e_2 := Ty)$  zu einer Basis eines Lagrange Teilraums (beachte, daß der von  $\{y, Ty\}$  erzeugte Teilraum isotrop ist) und setze  $x := e^1 + e^2$  in Termen der dualen Basis  $(e^i)_{i=1}^k$ . Nun verfähre wie gerade zuvor.

Ist schließlich  $F \neq \{0\}$  und  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , dann ist  $E = F \oplus F^\perp$  und  $b$  induziert auf  $F^\perp$  eine symplektische Form, denn für  $y' \in F^\perp$  mit  $b(y', y) = 0 \forall y \in F^\perp$  gilt  $y' \in (F^\perp)^\perp = F$  und somit  $y' = 0$ . Weiters läßt  $T \in O_b(E)$  den Raum  $F^\perp$  invariant, denn  $b(Ty', y) = b(Ty', Ty) = b(y', y) = 0$  für alle  $y \in F$  und  $y' \in F^\perp$ . Da  $T|_{F^\perp}$  nur 0 als Fixpunkt hat, folgt aus dem vorigen Fall, daß  $T|_{F^\perp}$  eine Zusammensetzung von Spiegelungen längs Vektoren in  $F^\perp$  ist. Solche Spiegelungen lassen aber  $F = F^{\perp\perp}$  fix und somit ist  $T$  auf ganz  $E$  die Zusammensetzung dieser Spiegelungen.  $\square$

### Folgerung.

Es gilt  $Sp(2k) \subseteq SL(2k)$ .

**Beweis.** Nach [1.14](#) ist  $\begin{pmatrix} \text{id} & \lambda y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Komponentendarstellung einer Spiegelung und hat somit Determinante 1.  $\square$

## 1.16 Der degenerierte Fall

Falls  $b$  degeneriert ist, d.h.  $B$  einen nicht trivialen Kern  $K$  besitzt, dann können wir  $\tilde{E} := E/K$  betrachten. Falls  $b$  (schief)symmetrisch ist, so ist  $\text{Ker } B^t = \text{Ker } B$ , und somit induziert  $b$  eine nichtdegenerierte (schief)symmetrische Form  $\tilde{b} : \tilde{E} \times \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jedes  $T \in O_b(E)$  erhält diesen Kern, denn  $BT = (T^{-1})^t B$  impliziert, daß  $BT(K) = 0$  ist. Es ist also  $T \in O_b(E)$ , genau dann wenn  $T(K) \subseteq K$  und  $\tilde{T} \in O_{\tilde{b}}(\tilde{E})$ , wobei  $\tilde{T}$  definiert ist durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} K & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{p} & \tilde{E} \\ T|_K \downarrow & & T \downarrow & & \downarrow \tilde{T} \\ K & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{p} & \tilde{E} \end{array}$$

Wir verwenden nun den Isomorphismus  $E \cong K \oplus \tilde{E}$ , welcher durch  $(1 - sp, p)$  mit der Inversen  $(k, \tilde{x}) \mapsto k + s(\tilde{x})$  gegeben ist (denn  $p(1 - sp) = 0$ ), wobei  $p : E \rightarrow \tilde{E}$  die kanonische Projektion ist und  $s : \tilde{E} \rightarrow E$  ein lineares Rechtsinverses dazu. Dann können wir  $T \in O_b(K \times \tilde{E})$  wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} T|_K & Ts - s\tilde{T} \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix}$$

mit  $T|_K \in GL(K)$  und  $\tilde{T} \in O_{\tilde{b}}(\tilde{E})$ . Als Mannigfaltigkeiten ist also  $O_b(E) \simeq GL(K) \times O_{\tilde{b}}(\tilde{E}) \times L(\tilde{E}, K)$ , wobei der Isomorphismus gegeben ist durch  $T \mapsto (T|_K, \tilde{T} := pTs, (1 - sp)Ts = Ts - s\tilde{T})$ . Aus [A.3](#) und [1.4](#) folgt, daß als Gruppe:

$$O_b(E) \simeq (GL(K) \times O_{\tilde{b}}(\tilde{E})) \rtimes L(\tilde{E}, K)$$

### 1.17 Der unsymmetrische Fall

Falls schließlich  $b$  weder symmetrisch noch schief-symmetrisch ist, so zerlegen wir  $b$  in den symmetrischen und den schief-symmetrischen Teil  $b = b_+ + b_-$ , wobei  $b_{\pm}(x, y) = (b(x, y) \pm b(y, x))/2$  ist. Dem entspricht übrigens gerade die Zerlegung von  $B = B_+ + B_-$ , wobei  $B_{\pm} = (B \pm B^t)/2$  ist. Dann ist  $O_b(E) = O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E)$ . Allerdings wissen wir nicht, ob dieser Durchschnitt von Mannigfaltigkeiten wieder eine ist. Für Lie-Gruppen kann man dies aber allgemein zeigen (abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind ebenso Lie-Gruppen, siehe [5.5](#)).

### 1.18 Die Gruppen $U(n, k)$

Betrachten wir den Spezialfall, wo  $b_-(x, y) = b_+(Ix, y)$  vermöge einer Abbildung  $I$ , die eine  $b_+$ -Isometrie ist. Wenn  $(\cdot)^t$  transponieren bzgl.  $b_+$  bezeichnet so gilt  $I^t I = 1$  (da  $I$  eine  $b_+$ -Isometrie ist) und  $I^t = -I$  (da  $b_-$  schief-symmetrisch und  $b_+$  symmetrisch ist). Also ist  $I^2 = -1$  und wir können folglich  $E$  vermöge  $(r + is)x := rx + sIx$  für  $r, s \in \mathbb{R}$  zu einem komplexen Vektorraum machen. Man beachte, daß  $I$  auch eine  $b_-$ -Isometrie ist, denn  $b_-(Ix, Iy) = b_+(I^2x, Iy) = b_+(Ix, y) = b_-(x, y)$ . Wir fassen die beiden Gleichungen  $b_{\pm}(Tx, Ty) = b_{\pm}(x, y)$  in  $\mathbb{R}$  zu einer Gleichung  $b(Tx, Ty) = b(x, y)$  in  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  zusammen, d.h.  $b(x, y) := b_+(x, y) + ib_-(x, y)$ . Dann ist  $b$  reell-bilinear, konjugiert symmetrisch, denn  $b(y, x) = b_+(y, x) + ib_-(y, x) = b_+(x, y) - ib_-(x, y) = \overline{b(x, y)}$ , und sogar  $\mathbb{C}$ -linear im zweiten Faktor, denn

$$\begin{aligned} b(x, iy) &= b_+(x, iy) + ib_-(x, iy) = \\ &= b_+(iy, x) + ib_+(ix, iy) = ib_+(x, y) - b_-(x, y) = ib(x, y). \end{aligned}$$

Also ist  $b$  eine HERMITISCHE FORM, die klarerweise ebenfalls nicht degeneriert ist wenn dies für  $b_+$  gilt.

Ist umgekehrt  $b$  eine beliebige hermitesche nicht degenerierte Form auf einem komplexen Vektorraum  $E$ , dann ist ihr Realteil  $b_+$  eine symmetrische nicht degenerierte Form und ihr Imaginärteil eine symplektische Form  $b_-$  und es gilt  $b_-(x, y) = b_+(ix, y)$ : In der Tat ist

$$\begin{aligned} b_+(x, y) &= (b(x, y) + \overline{b(x, y)})/2 = (b(x, y) + b(y, x))/2 \in \mathbb{R} \\ b_-(x, y) &= (b(x, y) - \overline{b(x, y)})/(2i) = (b(x, y) - b(y, x))/(2i) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und somit ist  $b_{\pm}$  (schief-)symmetrisch und es gilt  $b_+(x, iy) + ib_-(x, iy) = b(x, iy) = ib(x, y) = ib_+(x, y) - b_-(x, y)$ , d.h.  $b_+(x, iy) = -b_-(x, y)$  oder äquivalent  $b_-(x, y) = -b_-(y, x) = b_+(y, ix) = b_+(ix, y)$ . Somit ergibt sich auch aus der nicht-Degeneriertheit von  $b$  jene von  $b_{\pm}$ . Schließlich ist  $i$  eine  $b_+$ -Isometrie, denn  $b_+(ix, iy) = (b(ix, iy) +$

$$\overline{b(ix, iy)}/2 = (-i^2 b(x, y) + \overline{-i^2 b(x, y)})/2 = (b(x, y) + \overline{b(x, y)})/2 = b_+(x, y).$$

In dieser Situation ist

$$O_{b_+ + b_-}(E) = O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E) = O_{b_\pm}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = U_b(E) \subseteq L_{\mathbb{C}}(E),$$

wobei

$$U_b(E) := \{T \in GL(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y \in E\}$$

$$L_{\mathbb{C}}(E) := \{T \in L(E) : T \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}\} = \{T \in L(E) : T \circ I = I \circ T\}$$

und wir die Bezeichnung  $U$  (für unitär) verwendet haben, da  $b$  nun  $\mathbb{C}$ -wertig ist: Offensichtlich ist  $O_{b_+} \cap O_{b_-} = U_b$ . Es ist  $U_b \subseteq L_{\mathbb{C}}(E)$ , denn für  $T \in O_{b_+} \cap O_{b_-}$  gilt  $b_+(Tix, Ty) = b_+(ix, y) = b_-(x, y) = b_-(Tx, Ty) = b_+(iT x, Ty)$  und somit ist  $T(ix) = iT(x)$  für alle  $x$ , d.h.  $T \in L_{\mathbb{C}}(E)$ . Umgekehrt ist  $O_{b_\pm} \cap L_{\mathbb{C}}(E) \subseteq O_{b_\mp}$ , denn  $b_\mp(Tx, Ty) = \pm b_\pm(iT x, Ty) = \pm b_\pm(Tix, Ty) = \pm b_\pm(ix, y) = b_\mp(x, y)$ .

Man beachte noch, daß schieferhermitesche Formen nichts anderes als  $ib$  für eine hermitesche Form  $b$  sind, also nichts Neues liefern.

Sei nun  $E$  ein komplexer Vektorraum mit komplexer Basis  $(e_i)_{i \leq n}$ , d.h. jedes  $z \in E$  läßt sich eindeutig als  $z = \sum_{j=1}^n z^j e_j$  mit Koeffizienten  $z^j \in \mathbb{C}$  schreiben. Es sei  $z^j =: x^j + ix^{n+j}$  die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann ist  $z = \sum_{j=1}^{2n} x^j e_j$ , wobei  $e_{n+j} := ie_j$  für alle  $1 \leq j \leq n$  ist. Also hat  $E$  als reeller Vektorraum die Basis  $(e_j)_{j=1}^{2n}$ . Man beachte, daß zuerst alle Realteile und erst danach die Imaginärteile kommen, d.h. die durch die Basen gegebenen Isomorphismen  $E \cong \mathbb{C}^n$  und  $E \cong \mathbb{R}^{2n}$  induzieren nicht den vielleicht erwarteten Isomorphismus  $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}^2)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ , sondern ist noch mit dem Umordnungs-Isomorphismus  $(\mathbb{R}^2)^n \cong (\mathbb{R}^n)^2$  zusammengesetzt. Die Multiplikation mit  $i$  am  $\mathbb{R}^{2n}$  ist also durch die Matrix

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, und wir identifizieren  $L_{\mathbb{C}}(n)$  mit  $\{T \in L(2n) : T \circ I = I \circ T\}$ .

Wenn  $T \in L_{\mathbb{C}}(E)$  bezüglich der komplexen Basis  $(e_j)_{j \leq n}$  die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} + ib_{1,1} & \dots & a_{1,n} + ib_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + ib_{n,1} & \dots & a_{n,n} + ib_{n,n} \end{pmatrix} = A + iB$$

hat, dann hat  $T$  bezüglich der reellen Basis  $(e_1, \dots, e_n; ie_1, \dots, ie_n)$  die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & -b_{1,1} & \dots & -b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & -b_{n,1} & \dots & -b_{n,n} \\ b_{1,1} & \dots & b_{1,n} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

denn  $(A + iB)(e_i) = A e_i + B i e_i$  und  $(A + iB)(i e_i) = -B e_i + A i e_i$ .

Sei nun  $b$  die STANDARD HERMITESCHE FORM am  $\mathbb{C}^n$ , d.h.

$$b(z, w) = \sum_{j=1}^n \bar{z}^j w^j.$$

Die Gruppe  $U_b(E)$  wird dann auch als UNITÄRE GRUPPE  $U(n)$  bezeichnet. Wenn wir wie zuvor  $z^j = x^j + ix^{n+j}$  und  $w^j = y^j + iy^{n+j}$  setzen, dann ergibt sich

$$b(z, w) = \sum_{j=1}^n (x^j y^j + x^{n+j} y^{n+j}) + i \sum_{j=1}^n (x^j y^{n+j} - x^{n+j} y^j).$$

Also ist der Realteil von  $b$  gerade die positiv definite symmetrische Standardform, der Imaginärteil gerade die symplektische Standardform und

$$U(n) = O(2n) \cap Sp(2n) = O(2n) \cap L_{\mathbb{C}}(n) = Sp(2n) \cap L_{\mathbb{C}}(n).$$

Wenn  $b$  die STANDARD HERMITISCHE FORM MIT SIGNATUR  $k > 0$  am  $\mathbb{C}^n$  bezeichnet, d.h.

$$b(z, w) = \sum_{j>k}^n \bar{z}^j w^j - \sum_{j\leq k} \bar{z}^j w^j,$$

dann wird die Gruppe  $U_b(E)$  mit  $U(n, k)$  bezeichnet, und eine analoge Rechnung zeigt, daß Realteil und Imaginärteil von  $b$  folgende Matrixbeschreibungen  $B_{\pm}$  haben

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } 1_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & & & \\ \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist

$$U(n, k) = "O(2n, 2k)" \cap "Sp(2n)" = "O(2n, 2k)" \cap L_{\mathbb{C}}(n) = "Sp(2n)" \cap L_{\mathbb{C}}(n),$$

wobei die Gruppen unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinatenvertauschungen durch die Standardformen beschrieben werden.

Wie für reelle Vektorräume, läßt sich natürlich auch für komplexe Vektorräume zeigen, daß die Gruppen  $U(n, k)$  Teilmannigfaltigkeiten von  $L_{\mathbb{C}}(E)$  sind.

### 1.19 Komplex lineare Abbildungen, $GL_{\mathbb{C}}$ , $SL_{\mathbb{C}}$

Sei nun  $E$  ein komplexer  $n$ -dimensionaler Vektorraum. Wie im reellen Fall können wir auch folgende Untergruppen des komplexen Vektorraums  $L_{\mathbb{C}}(E)$  betrachten:

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T \text{ ist invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) \\ SL_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : \det_{\mathbb{C}}(T) = 1\} \\ SU_b(E) &:= \{T \in SL_{\mathbb{C}}(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y\} = U_b(E) \cap SL_{\mathbb{C}}(E) \\ SU(n) &:= U(n) \cap SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \\ SU(n, k) &:= U(n, k) \cap SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\det_{\mathbb{C}}$  die komplexe Determinante und  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  eine zumindest reell-bilineare Form mit Werten in  $\mathbb{C}$ .

Es sei  $\mathbb{C}_*$  die Gruppe  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  bezüglich der Multiplikation. Die Abbildung  $\mathbb{C}_* \times SL_{\mathbb{C}}(n) \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(n)$ ,  $(t, T) \mapsto tT$  ist offensichtlich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, denn  $\det_{\mathbb{C}}(tT) = t^n \det_{\mathbb{C}}(T)$ , mit Kern  $\{(\frac{1}{t}, t \cdot 1) : t^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n$ . Man

kann zeigen, daß daraus leicht folgt, daß dies eine Überlagerungsabbildung ist. Andererseits ist  $GL_{\mathbb{C}}(n) = SL_{\mathbb{C}}(n) \times \mathbb{C}_*$  ein semidirektes Produkt, da die kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow SL_{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}_* \rightarrow 1$$

via folgendem Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{C}_* \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(n)$  splittet:

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.20 Komplexe Gruppen, $O_{\mathbb{C}}$ , $Sp_{\mathbb{C}}$

Ist nun  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -bilineare (schief-)symmetrische, nicht degenerierte Form, dann wollen wir  $U_b(E)$  analog zum Fall einer hermiteschen Form als Durchschnitt reeller Gruppen beschreiben. Dazu zerlegen wir  $b$  in Real- und Imaginärteil, d.h.  $b(x, y) = b_+(x, y) + ib_-(x, y)$ , wobei

$$b_+(x, y) = (b(x, y) + \overline{b(x, y)})/2 \in \mathbb{R}$$

$$b_-(x, y) = (b(x, y) - \overline{b(x, y)})/(2i) \in \mathbb{R}$$

Dann sind der Realteil  $b_+$  und der Imaginärteil  $b_-$  zwei reell bilineare (schief-)symmetrische reell-wertige Formen, und es gilt  $-b_-(x, y) + ib_+(x, y) = ib(x, y) = b(x, iy) = b_+(x, iy) + ib_-(x, iy)$ , d.h.  $b_-(x, y) = -b_+(x, iy)$ . Weiters gilt

$$b_+(ix, iy) = -b_-(ix, y) = \mp b_-(y, ix) = \pm b_+(y, i^2x) = -b_+(x, y).$$

Eine  $\mathbb{R}$ -lineare Bijektion, die sowohl  $b_+$  als auch  $b_-$  erhält ist  $\mathbb{C}$ -linear, denn

$$b_+(Tx, Tiy) = b_+(x, iy) = -b_-(x, y) = -b_-(Tx, Ty) = b_+(Tx, iTy) \Rightarrow Tiy = iTy;$$

und umgekehrt erhält jede Abbildung  $T$  die  $b$  erhält, auch den Real- und Imaginärteil, d.h.

$$O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E) = O_{b_{\pm}}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = U_b(E) \subseteq L_{\mathbb{C}}(E).$$

Ist insbesondere  $b$  die standard  $\mathbb{C}$ -bilineare symmetrische Form am  $\mathbb{C}^n$ , welche durch  $b(z, w) := \sum_{i=1}^n z^i w^i$  gegeben ist, dann wird  $U_b(E)$  mit  $O_{\mathbb{C}}(n)$  bezeichnet. Beachte, daß das Analogon zu  $O(n, k)$  für  $0 < k < n$  uninteressant, da isomorph zu  $O_{\mathbb{C}}(n)$ , ist. Real- und Imaginärteil haben wegen

$$b(z, w) = \sum_j (x^j y^j - x^{n+j} y^{n+j}) + i \sum_j (x^j y^{n+j} + x^{n+j} y^j)$$

folgende Darstellung

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie haben beide Signatur  $n$ , denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot B_- \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B_+$$

und somit ist

$$O_{\mathbb{C}}(n) = "O(2n, n)" \cap "O(2n, n)" = "O(2n, n)" \cap L_{\mathbb{C}}(n),$$

wobei die Gruppen unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinaten-Vertauschungen und Drehungen durch Standardformen beschrieben werden.

Ist schließlich  $b$  die standard  $\mathbb{C}$ -bilineare alternierende Form am  $\mathbb{C}^{2m}$ , welche durch

$$b(z, w) := \sum_{i=1}^m (z^i w^{m+i} - z^{m+i} w^i)$$

gegeben ist, dann wird  $U_b(E)$  mit  $Sp_{\mathbb{C}}(2m)$  bezeichnet. Real- und Imaginärteil haben wegen

$$\begin{aligned} b(z, w) = \sum_j (x^j y^{m+j} - x^{2m+j} y^{3m+j} - x^{m+j} y^j + x^{3m+j} y^{2m+j}) \\ + i \sum_j (x^j y^{3m+j} + x^{2m+j} y^{m+j} - x^{m+j} y^{2m+j} - x^{3m+j} y^j) \end{aligned}$$

folgende Darstellung

$$B_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$Sp_{\mathbb{C}}(2m) = "Sp(4m)" \cap L_{\mathbb{C}}(2m),$$

wobei die Gruppe unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinaten Vertauschungen – welche durch (0)(123) und (0)(132) geben sind – durch die Standardform beschrieben wird.

Beachte noch, daß

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{C}}(E) &\subseteq GL^+(E) := \{T \in GL(E) : \det(T) > 0\} \\ O_{\mathbb{C}}(n) &\subseteq SL(2n) \\ Sp_{\mathbb{C}}(2n) &\subseteq SL_{\mathbb{C}}(2n), \end{aligned}$$

denn  $\det(T) = |\det_{\mathbb{C}}(T)|^2 \geq 0$  und  $T \in O_{\mathbb{C}}(n) \Rightarrow T^t T = 1$ , d.h.  $\det_{\mathbb{C}}(T)^2 = 1$ , also  $\det(T) = |\pm 1|^2 = 1$ . Da  $Sp_{\mathbb{C}}(2n)$  nach [1.15](#) von den Spiegelungen erzeugt wird, und diese positive komplexe Determinante haben, gilt auch die letzte Inklusion. Wieder hat  $O_{\mathbb{C}}(n)$  zwei Zusammenhangskomponenten ( $\det_{\mathbb{C}} = \pm 1$ ), wobei  $SO_{\mathbb{C}}(n) := SL_{\mathbb{C}}(n) \cap O_{\mathbb{C}}(n)$  jene der Identität ist, wohingegen  $Sp_{\mathbb{C}}(2n)$  und  $SL_{\mathbb{C}}(n)$  zusammenhängend sind.

## 1.21 Quaternionisch lineare Abbildungen

Man kann analoges auch für den Schiefkörper der Quaternionen machen. Als Vektorraum können wir ihn mit  $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$  identifizieren. Die Multiplikation läßt sich zum Beispiel für  $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$  so einführen:

$$(t, x) \cdot (s, y) := (ts - \langle x, y \rangle, ty + sx + x \times y).$$

Wir können eine Konjugation durch

$$(t, x)^* := \overline{(t, x)} := (t, -x)$$

definieren. Es gilt  $\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$ , weiters  $\bar{q} \cdot q = |q|^2 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$  und somit ist  $1/q = \bar{q}/|q|^2$ . Es gelten dann alle Körper-Axiome bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation (siehe Aufgabe [\[Kri07, 72.65\]](#) auch für andere Beschreibungen). Wenn wir die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  mit  $i, j, k$  bezeichnen, dann ist  $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$  eine Einheit und es gilt  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ;  $ij = k = -ji$ ,  $jk = i = -kj$ ,  $ki = j = -ik$ . Damit Matrizen mit quaternionischen Eintragungen quaternionisch linear (von links) auf Vektoren

wirken, müssen wir quaternionische **rechts**-Vektorräume  $E$  betrachten. Mit  $L_{\mathbb{H}}(E)$  bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller  $T : E \rightarrow E$ , welche  $\mathbb{H}$ -linear sind. D.h.

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(E) &= \{T \in L(E) : T(xi) = (Tx)i, T(xj) = (Tx)j, T(xk) = (Tx)k\} \\ &= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T(xj) = (Tx)j\}, \end{aligned}$$

wobei die komplexe Struktur auf  $E$  durch  $\mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq \mathbb{H}$  gegeben ist. Wir erhalten dann die Gruppen

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{H}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : T \text{ ist invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E) \\ SL_{\mathbb{H}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \det_{\mathbb{R}}(T) = 1\} = SL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E) \end{aligned}$$

Es sei  $(e_l)_{l=1}^n$  eine Basis des quaternionischen Rechtsvektorraums  $E$ , d.h. jedes  $q \in E$  hat eine Darstellung

$$q = \sum_{l=1}^n e_l q^l \text{ mit eindeutig bestimmten } q^l \in \mathbb{H}$$

und wenn wir  $q^l =: z^l + jz^{n+l}$  mit  $z^l, z^{n+l} \in \mathbb{C}$  darstellen, erhalten wir  $q = \sum_{l=1}^n e_l z^l + (e_l j) z^{n+l} = \sum_{l=1}^{2n} e_l z^l$ , wobei wir  $e_{n+l} := e_l j$  gesetzt haben. D.h.  $(e_j)_{j=1}^{2n}$  ist eine Basis von  $E$  als komplexer Vektorraum. Man beachte, daß  $qj$  als quaternionische Koordinaten natürlich  $q^l j$  hat, aber als komplexe Koordinaten

$$qj = \sum_{l=1}^n e_l (z^l + jz^{n+l})j = \sum_{l=1}^n e_l (j\bar{z}^l + j^2 \bar{z}^{n+l}) = \sum_{l=1}^n e_l (-\bar{z}^{n+l}) + \sum_{l=1}^n (e_l j) \bar{z}^l,$$

wegen  $zj = j\bar{z}$  für  $z \in \mathbb{C}$ , d.h. die Koeffizienten von  $qj$  bzgl. der komplexen Basis  $(e_j)_{j=1}^{2n}$  sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ \vdots \\ \bar{z}^{2n} \end{pmatrix}.$$

Sei nun  $A + Bj$  die Matrixdarstellung von  $T \in L_{\mathbb{H}}(E)$  bezüglich der Basis  $(e_l)_{l=1}^n$  mit komplexen Matrizen  $A$  und  $B$ , d.h.  $T(e_l) = \sum_m e_m T_l^m = \sum_m e_m (A_l^m + B_l^m j)$  und somit

$$\begin{aligned} T(q) &= T\left(\sum_l e_l q^l\right) = \sum_l T(e_l) q^l = \sum_l \sum_m e_m T_l^m q^l = \sum_m e_m \sum_l T_l^m q^l \\ &= \sum_m e_m \sum_l (A_l^m + B_l^m j) \cdot (z^l + jz^{n+l}) \\ &= \sum_m \left( e_m \sum_l (A_l^m z^l - B_l^m z^{n+l}) + e_m j \sum_l (\bar{B}_l^m z^l + \bar{A}_l^m z^{n+l}) \right). \end{aligned}$$

Also hat  $T$  bezüglich der komplexen Basis  $(e_1, \dots, e_n, e_1 j, \dots, e_n j)$  folgende Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun die komplexe Basis zur reellen Basis

$$(e_1, \dots, e_n; e_1 j, \dots, e_n j; e_1 i, \dots, e_n i; e_1 j i, \dots, e_n j i)$$

ergänzen, dann hat  $T$  nach dem in [1.18](#) Gezeigten folgende Matrixdarstellung, wobei wir  $A$  und  $B$  in Real- und Imaginärteil zerlegen, d.h.  $A = A_1 + iA_2$  und

$B = B_1 + iB_2$ :

$$\begin{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} & -\Im \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \\ \Im \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} & \Re \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 & -A_2 & B_2 \\ B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ A_2 & -B_2 & A_1 & -B_1 \\ -B_2 & -A_2 & B_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir diese Basis noch auf die natürlichere Form

$$(e_1, \dots, e_n; e_1i, \dots, e_ni; e_1j, \dots, e_nj; e_1k, \dots, e_nk)$$

bringen, dann hat  $T$  folgende Darstellung

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 & -B_1 & -B_2 \\ A_2 & A_1 & -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 & A_1 & -A_2 \\ B_2 & -B_1 & A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \text{ mittels Konjugation mit } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir werden  $L_{\mathbb{H}}(n)$  somit als Teilraum von  $L_{\mathbb{C}}(2n)$  bzw.  $L(4n)$  mit den so beschriebenen quaternionischen Strukturen auf  $\mathbb{C}^{2n}$  bzw.  $\mathbb{R}^{4n}$  auffassen.

Da  $\mathbb{H}$  ein schief-Körper ist, geht nun aber so manches schief. So gibt die übliche Formel für die Determinante nichts vernünftiges, da sie nicht  $\mathbb{H}$ -linear in den Spalten ist. Wir behaupten als nächstes, daß die komplexe Determinante auf  $L_{\mathbb{H}}(E)$  positiv ist, und somit  $\det_{\mathbb{C}}(T) = |\det_{\mathbb{C}}(T)| = +\sqrt{\det_{\mathbb{R}}(T)}$  für  $T \in L_{\mathbb{H}}(E)$  gilt. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} &= \det_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} A_1 + iA_2 & -B_1 - iB_2 \\ B_1 - iB_2 & A_1 - iA_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + i^2 \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ -B_2 & -A_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + i \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} - i \det \begin{pmatrix} A_1 & -B_2 \\ -B_1 & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + i \left( \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} - (-1)^2 \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} \right) \\ &= |\det_{\mathbb{C}}(A_1 + iB_1)|^2 + |\det_{\mathbb{C}}(A_2 + iB_2)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{H}}(E) &\subseteq GL_{\mathbb{C}}^+(E) := \{T \in GL_{\mathbb{C}}(E) : \det_{\mathbb{C}}(T) > 0\} \\ GL_{\mathbb{H}}(E) &\cong \mathbb{R}^+ \times SL_{\mathbb{H}}(E) \\ SL_{\mathbb{H}}(E) &= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \det_{\mathbb{C}}(T) = 1\} \subseteq SL_{\mathbb{C}}(E), \end{aligned}$$

wobei der Isomorphismus durch  $T \mapsto (\det(T)^{1/n}, \det(T)^{-1/n} \cdot T)$  wie im reellen Fall (siehe [1.8](#)) gegeben ist.

## 1.22 Quaternionische Formen, $Q(n, k)$ , $Q_-(n)$

Sei schließlich  $q : E \times E \rightarrow \mathbb{H}$  eine Funktion die quaternionisch linear in der zweiten Variable und konjugiert (schief)symmetrisch nicht degeneriert ist. Es ist also  $q(x, y\lambda) = q(x, y)\lambda$  für  $\lambda \in \mathbb{H}$ ,  $q(y, x) = \pm q(x, y)$  und damit  $q(x\lambda, y) = \pm q(y, x\lambda) = \pm q(y, x)\lambda = \bar{\lambda}q(x, y)$ . Dann bezeichnen wir mit

$$Q_q(E) := \{T \in GL_{\mathbb{H}}(E) : q(Tx, Ty) = q(x, y) \forall x, y \in E\}.$$

Wie zuvor zeigt man, daß dies eine Mannigfaltigkeit ist. Wir setzen  $s(x, y) := \Re q(x, y) := \frac{q(x, y) + \overline{q(x, y)}}{2} = \frac{q(x, y) \pm q(y, x)}{2}$ . Dann ist  $s$  (schief)symmetrisch (wegen der 2. Darstellung),  $\mathbb{R}$ -wertig (wegen der 1. Darstellung) und  $\mathbb{R}$ -linear. Für alle  $\lambda \in S^3 \subseteq \mathbb{H}$  gilt

$$s(x\lambda, y\lambda) = \frac{\bar{\lambda}q(x, y)\lambda \pm \bar{\lambda}q(y, x)\lambda}{2} = \bar{\lambda}s(x, y)\lambda = \bar{\lambda}\lambda s(x, y) = s(x, y),$$

da  $s(x, y) \in \mathbb{R}$  mit allen Quaternionen vertauscht.

Es gilt  $q(x, y) = s(x, y) + i s(xi, y) + j s(xj, y) + k s(xk, y)$ , denn

$$\begin{aligned} s(x, y) + i s(xi, y) + j s(xj, y) + k s(xk, y) &= \\ &= \frac{1}{2} \left( (q(x, y) + i q(xi, y) + j q(xj, y) + k q(xk, y)) \right. \\ &\quad \left. \pm (q(y, x) + i q(y, xi) + j q(y, xj) + k q(y, xk)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 4q(x, y) \pm (q(y, x) + i q(y, x) i + j q(y, x) j + k q(y, x) k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 4q(x, y) \mp 2\overline{q(y, x)} \right) \\ &= q(x, y), \end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Zeile  $q(y, x) =: a + ib + jc + kd$  setzen, und dann alles ausmultiplizieren.

Man beachte auch, daß für  $\lambda \in \{i, j, k\}$  die Form  $(x, y) \mapsto s(x\lambda, y)$   $\mathbb{R}$ -bilinear ist und  $s(y\lambda, x) = \pm s(x, y\lambda) = \mp s(x\lambda^2, y\lambda) = \mp s(x\lambda, y)$  erfüllt, d.h. ebenfalls (schief)symmetrisch ist.

Umgekehrt sei  $s : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  (schief-)symmetrisch und  $\mathbb{R}$ -bilinear und es existieren  $s$ -Isometrien  $I$  und  $J$  mit  $I^2 = -1 = J^2$  und  $IJ + JI = 0$  (Achtung: Die Multiplikation von rechts mit  $\lambda \in \{i, j, k\}$  ist nicht  $\mathbb{H}$ -linear sondern nur eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $I$ , bzw.  $J$  und  $K : x \mapsto xk = xij = J(I(x)) = JI(x)$ ). Dann können wir  $E$  zu einem quaternionischen Rechtsvektorraum machen durch

$$\begin{aligned} x \cdot (a + ib + jc + kd) &:= xa + I(x)b + J(x)c + JI(x)d \\ \text{und } q(x, y) &:= s(x, y) + i s(Ix, y) + j s(Jx, y) + k s(JIx, y) \end{aligned}$$

definiert eine konjugiert (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Form die  $\mathbb{H}$ -linear in der zweiten Variable ist. Offensichtlich ist jedes invertierbare  $T$ , welches  $q$  und damit auch  $s$ ,  $s(I-, -)$ ,  $s(J-, -)$ ,  $s(JI-, -)$  invariant läßt, automatisch  $\mathbb{H}$ -linear, denn  $s(ITx, Ty) = s(Ix, y) = s(TIx, Ty)$  und somit  $ITx = TIx$  und analog für  $J$ . Es gilt also

$$Q_q(E) = O_s(E) \cap GL_{\mathbb{H}}(E).$$

Falls nun  $q$  eine Standardform ist, d.h. eine der folgenden Formen:

$$\begin{aligned} q(z, w) &= \sum_{l=1}^n \bar{z}^l w^l \\ q(z, w) &= \sum_{l>k} \bar{z}^l w^l - \sum_{l\leq k} \bar{z}^l w^l \\ q(z, w) &= \sum_{l=1}^n \bar{z}^l i w^l \end{aligned}$$

dann werden (wir) die entsprechenden QUATERNIONISCHEN GRUPPEN mit

$$\begin{aligned} Q(n) &= U_{\mathbb{H}}(n) \\ Q(n, k) &= U_{\mathbb{H}}(n, k) \\ Q_-(n) &= U_{\alpha}(n) = Sp_{\mathbb{H}}(n) \end{aligned}$$

bezeichnen. Bezüglich der reellen Basis  $(e_1, \dots; e_1 i, \dots; e_1 j, \dots; e_1 k, \dots)$  und der entsprechenden reellen Koordinaten

$$\begin{aligned} (x^1, \dots; x^{n+1}, \dots, x^{2n+1}, \dots; x^{3n+1}, \dots) &\text{ für } z \text{ und} \\ (y^1, \dots; y^{n+1}, \dots, y^{2n+1}, \dots; y^{3n+1}, \dots) &\text{ für } w, \end{aligned}$$

wobei  $z^l = x^l + ix^{n+l} + jx^{2n+l} + kx^{3n+l}$  und  $w^l = y^l + iy^{n+l} + jy^{2n+l} + ky^{3n+l}$ , erhalten wir für  $s$ :

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \sum_l \left( x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l} \right) \\ s(x, y) &= \sum_{l>k} \left( x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l} \right) \\ &\quad - \sum_{l\leq k} \left( x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l} \right) \\ s(x, y) &= \sum_l \left( -x^l y^{n+l} + x^{n+l} y^l - x^{2n+l} y^{3n+l} + x^{3n+l} y^{2n+l} \right) \end{aligned}$$

D.h. die Matrizendarstellungen sind

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_k \end{pmatrix} \text{ mit } 1_k \text{ wie zuvor;} \\ &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \text{ mit } J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} Q(n) &= O(4n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \\ Q(n, k) &= "O(4n, 4k)" \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \\ Q_-(n) &= "Sp(4n)" \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \end{aligned}$$

Wir können aber auch je zwei Komponenten zusammenfassen. Wie wir bereits bei der  $U(n)$  in [1.18](#) gezeigt haben, ist  $h(x, y) := s(x, y) + i s(xi, y)$  eine (schief)hermitesche Form und  $j s(xj, y) + k s(xk, y) = j (s(xj, y) + i s(xji, y)) = j h(xj, y)$ , wobei  $(x, y) \mapsto h(xj, y)$  (symmetrisch) schiefsymmetrisch und somit komplex bilinear ist, denn  $h(yj, x) = s(yj, x) + i s(yji, x) = \pm s(xj, y) \pm i s(xji, y) = \pm h(xj, y)$ . Also hat  $q$  eine Zerlegung  $q(x, y) = h(x, y) + j h(xj, y)$  in (schief)hermiteschen und (symmetrischen) schiefsymmetrischen  $\mathbb{C}$ -bilinearen Teil.

Führt man das wieder für die Standardformen durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
q(z, w) &= \sum_l (\bar{z}^l - \bar{z}^{n+l}j)(w^l + jw^{n+l}) \\
&= \sum_l (\bar{z}^l w^l + \bar{z}^{n+l} w^{n+l}) + j \sum_l (z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) \\
q(z, w) &= \sum_{l>k} (\bar{z}^l - \bar{z}^{n+l}j)(w^l + jw^{n+l}) - \sum_{l\leq k} (\bar{z}^l - \bar{z}^{n+l}j)(w^l + jw^{n+l}) \\
&= \sum_{l>k} (\bar{z}^l w^l + \bar{z}^{n+l} w^{n+l}) - \sum_{l\leq k} (\bar{z}^l w^l + \bar{z}^{n+l} w^{n+l}) \\
&\quad + j \sum_{l>k} (z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) - j \sum_{l\leq k} (z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) \\
q(z, w) &= \sum_l (\bar{z}^l - \bar{z}^{n+l}j)i(w^l + jw^{n+l}) \\
&= \sum_l (\bar{z}^l i w^l + \bar{z}^{n+l}(-j)i w^l - \bar{z}^{n+l}(-j)ij w^{n+l} - \bar{z}^l i j w^{n+l}) \\
&= \sum_l i(\bar{z}^l w^l - \bar{z}^{n+l} w^{n+l}) - j i \sum_l (z^{n+l} w^l + z^l w^{n+l})
\end{aligned}$$

und somit

$$Q(n) = U(2n) \cap Sp_{\mathbb{C}}(2n) = U(2n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) = Sp_{\mathbb{C}}(2n) \cap L_{\mathbb{H}}(n)$$

$$\begin{aligned}
Q(n, k) &= "U(2n, 2k)" \cap "Sp_{\mathbb{C}}(2n)" \\
&= "U(2n, 2k)" \cap L_{\mathbb{H}}(n) = "Sp_{\mathbb{C}}(2n)" \cap L_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_-(n) &= U(2n, n) \cap "O_{\mathbb{C}}(2n)" \\
&= U(2n, n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) = "O_{\mathbb{C}}(2n)" \cap L_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}$$

**Warnung:**  $Q(n)$  wird in der Literatur öfters auch als  $Sp(n)$  bezeichnet. Dies ist nicht die hier definierte  $Sp(n)$ , welche deshalb dort als  $Sp_{\mathbb{R}}(n)$  bzw.  $Sp(n, \mathbb{R})$  bezeichnet wird!

### 1.23 Übersicht

| Gruppe                             | $\dim_{\mathbb{R}}$ | kompakt | komplex | stichwortartige Beschreibung                  |
|------------------------------------|---------------------|---------|---------|---|
| $GL(n)$                            | $n^2$               | –       | –       | $\det_{\mathbb{R}} \neq 0$                    |
| $SL(n)$                            | $n^2 - 1$           | –       | –       | $\det_{\mathbb{R}} = 1$                       |
| $O(n)$                             | $n(n-1)/2$          | +       | –       | sym,lin,pos-def                               |
| $O(n,k)$                           | $n(n-1)/2$          | –       | –       | sym,lin,def                                   |
| $Sp(n)$ <sup>1)</sup>              | $n(n+1)/2$          | –       | –       | alt,lin,def                                   |
| $GL_{\mathbb{C}}(n)$               | $2n^2$              | –       | +       | $\mathbb{C}$ -lin, $\det_{\mathbb{C}} \neq 0$ |
| $SL_{\mathbb{C}}(n)$               | $2n^2 - 2$          | –       | +       | $\mathbb{C}$ -lin, $\det_{\mathbb{C}} = 1$    |
| $O_{\mathbb{C}}(n)$                | $n(n-1)$            | –       | +       | sym, $\mathbb{C}$ -lin,def                    |
| $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ <sup>1)</sup> | $n(n+1)$            | –       | +       | alt, $\mathbb{C}$ -lin,def                    |
| $U(n)$                             | $n^2$               | +       | –       | konj-sym,pos-def                              |
| $U(n,k)$                           | $n^2$               | –       | –       | konj-sym,def                                  |
| $SU(n)$                            | $n^2 - 1$           | +       | –       | konj-sym,pos-def, $\det_{\mathbb{C}} = 1$     |
| $SU(n,k)$                          | $n^2 - 1$           | –       | –       | konj-sym,def, $\det_{\mathbb{C}} = 1$         |
| $GL_{\mathbb{H}}(n)$               | $4n^2$              | –       | –       | $\mathbb{H}$ -lin, $\det_{\mathbb{R}} \neq 0$ |
| $SL_{\mathbb{H}}(n)$               | $4n^2 - 1$          | –       | –       | $\mathbb{H}$ -lin, $\det_{\mathbb{R}} = 1$    |
| $Q(n)$                             | $n(2n+1)$           | +       | –       | konj-sym, $\mathbb{H}$ -lin,pos-def           |
| $Q(n,k)$                           | $n(2n+1)$           | –       | –       | konj-sym, $\mathbb{H}$ -lin,def               |
| $Q_-(n)$                           | $n(2n-1)$           | –       | –       | schief-konj-sym, $\mathbb{H}$ -lin,def        |

<sup>1)</sup> In diesen Fällen ist  $n = 2m$  gerade.

1.24 Niedere Dimensionen

| Gruppe               | $\dim_{\mathbb{R}}$ | $n = 1$ | $n = 2$                            | $n = 3$                     |
|----------------------|---------------------|---------|------------------------------------|-----------------------------|
| $SL(n)$              | $n^2 - 1$           | {1}     | $\simeq S^1 \times \mathbb{C}$     | dim = 8                     |
| $SO(n)$              | $n(n-1)/2$          | {1}     | $\cong S^1$                        | $\cong PSU(2)$              |
| $SO(n,1)$            | $n(n-1)/2$          | –       | $\cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $\cong PSL(2)$              |
| $Sp(n)$              | $n(n+1)/2$          | –       | $= SL(2)$                          | –                           |
| $SL_{\mathbb{C}}(n)$ | $2n^2 - 2$          | {1}     | $\simeq S^3 \times \mathbb{R}^3$   | dim = 16                    |
| $SO_{\mathbb{C}}(n)$ | $n(n-1)$            | {1}     | $\cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$ | $\cong PSL_{\mathbb{C}}(2)$ |
| $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ | $n(n+1)$            | –       | $= SL_{\mathbb{C}}(2)$             | –                           |
| $SU(n)$              | $n^2 - 1$           | {1}     | $\cong S^3$                        | dim = 8                     |
| $SU(n,1)$            | $n^2 - 1$           | –       | $\cong SL(2)$                      | dim = 8                     |
| $SL_{\mathbb{H}}(n)$ | $4n^2 - 1$          | $= S^3$ | dim = 15                           | dim = 35                    |
| $Q(n)$               | $n(2n+1)$           | $= S^3$ | dim = 10                           | dim = 21                    |
| $Q(n,1)$             | $n(2n+1)$           | –       | dim = 10                           | dim = 21                    |
| $Q_-(n)$             | $n(2n-1)$           | $= S^1$ | $P(SL(2) \times SU(2))$            | dim = 15                    |

**dim = 0:**

$$SL(1) = SO(1) = \{1\} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad SL_{\mathbb{C}}(1) = SO_{\mathbb{C}}(1) = SU(1) = \{1\} \subseteq \mathbb{C}.$$

**dim = 1:**

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}z = 1\} = S^1 \subseteq \mathbb{C}.$$

$Q_-(1) = S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ , denn  $\bar{z}iw = q(z, w) = q(\lambda z, \lambda w) = \bar{\lambda}zi\lambda w = \bar{z}\lambda i\lambda w$ , genau dann, wenn  $i = \lambda i\lambda$ , oder äquivalent wenn  $|\lambda| = 1$  und  $\lambda i = i\lambda$ , i.e.  $\lambda = a + ib$  mit  $a^2 + b^2 = 1$ .

Die definierende Gleichung der im folgenden gesuchten Untergruppen von  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  ist neben  $\det_{\mathbb{C}} = 1$  durch  $b(Tx, Ty) = b(x, y)$  gegeben. Dafür genügt es  $(x, y) :=$

$(e_1, e_1), (x, y) := (e_1, e_2)$  und  $(x, y) := (e_2, e_2)$  einzusetzen, oder wenn  $b(x, y) = \langle Bx, y \rangle$  ist, die Matrixgleichung  $T^*BT = B$  zu lösen. Da  $T \in SL_{\mathbb{C}}(2)$  liegt, ist  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  invertierbar mit inverser Matrix  $T^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . Also läßt sich die Matrixgleichung auch als  $BT = (T^*)^{-1}B$  schreiben, und liefert uns im Folgenden die nötigen Bedingungen an die Koeffizienten  $a, b, c$  und  $d$ .

Die Elemente der Abelsch'en unter den folgenden Gruppen  $G$  werden wir gemeinsam diagonalisieren. D.h. für jedes  $T \in G$  werden wir die Eigenwerte  $\lambda_{\pm}^T$  und zugehörige (von  $T$  unabhängige) Eigenvektoren  $e_{\pm}$  bestimmen. Wenn  $\Lambda^T$  die Diagonalmatrix mit Eintragungen  $\lambda_+^T$  und  $\lambda_-^T$  ist, und  $U$  die Matrix mit Spalten  $e_+$  und  $e_-$  ist, d.h.  $U(e_1) = e_+$  und  $U(e_2) = e_-$ , dann ist  $T \cdot U = U \cdot \Lambda^T$ , d.h.  $U^{-1} \cdot T \cdot U = \Lambda^T$ . Die Konjugation mit  $U$  bildet also die Gruppe  $G$  isomorph auf eine Gruppe von Diagonalmatrizen in  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  ab.

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} : \lambda \in S^1 \right\} \cong S^1,$$

$$\text{denn } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & a^2 + c^2 = 1 & (b(e_1, e_1) = 1) \\ (2) & b^2 + d^2 = 1 & (b(e_2, e_2) = 1) \\ (3) & ab + cd = 0 & (b(e_1, e_2) = 0) \\ (4) & ad - bc = 1 & (\det = 1) \end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} d \cdot (3) - b \cdot (4) &: -b = c(d^2 + b^2) = c, \\ b \cdot (3) + d \cdot (4) &: d = a(b^2 + d^2) = a \end{aligned}$$

und somit  $a^2 + b^2 = 1$ . Kürzer folgt das alles auch aus der Matrixgleichung  $BT = (T^t)^{-1}B$ , mit  $B = \text{id}$ .

Die Eigenwerte von  $T$  sind  $\lambda_{\pm} = a \pm ib$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $e_{\pm} = (1, \pm i)$ . Also bildet die Konjugation mit  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$  die Gruppe  $SO(2)$  isomorph auf die Diagonalmatrizen mit konjugiert komplexen Eintragungen vom Betrag 1 ab.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}$$

$$SO(2, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Analog wie bei der  $SO(2)$  folgt die erste Gleichung aus der Matrixgleichung mit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Der erste Isomorphismus ist dann analog durch Konjugation mit der Matrix  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  der Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_{\pm} := a \pm b$  gegeben. Konjugieren mit  $U$  liefert

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$$

mit  $(a + b)(a - b) = 1$ .

**dim = 2:**

$$GL_{\mathbb{C}}(1) = \mathbb{C}_*.$$

$$SO_{\mathbb{C}}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}_* \right\} \cong \mathbb{C}_*,$$

denn wie für  $SO(2)$  erhalten wir die Gleichheit aus der Matrixgleichung und den Isomorphismus durch Konjugation mit  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

und  $(a+ib)(a-ib) = 1$ .

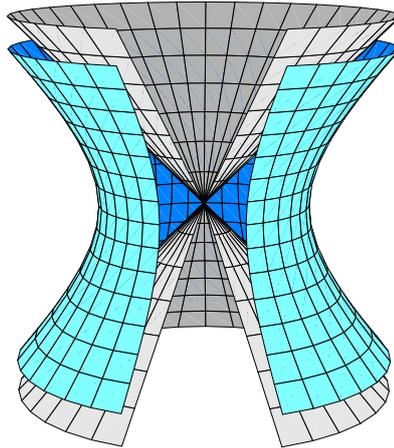
**dim = 3:**

$$SL(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\},$$

wobei der Isomorphismus durch Konjugation mit  $U := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$  gegeben ist, siehe [Kri07, 34.5] und [Kri07, 72.62], denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 - i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ -\alpha_2 - \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{a+d}{2}, \alpha_2 = \frac{b-c}{2}, \beta_1 = \frac{a-d}{2}, \beta_2 = -\frac{b+c}{2} \end{aligned}$$

Beachte daß die Quadrik  $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$  vermöge  $(a, b) \mapsto (\frac{a}{|a|}, b) = (\frac{a}{\sqrt{1+|b|^2}}, b)$  diffeomorph zum "Zylinder"  $S^1 \times \mathbb{C}$  ist. Allerdings sieht die induzierte Gruppenstruktur auf  $S^1 \times \mathbb{C}$  sehr kompliziert aus.



Der Tangentialraum der speziellen linearen Gruppe  $SL(2)$  bei  $\text{id}$  ist

$$\{T \in L(2) : \text{Spur}(T) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : d = -a \right\},$$

Die Exponentialabbildung  $\exp : L(2) = T_{\text{id}}GL(2) \rightarrow GL(2)$  bildet  $T_{\text{id}}SL(2)$  nach  $SL(2)$  ab, denn  $\det(\exp(T)) = e^{\text{Spur}(T)}$  und ist ein lokaler Diffeomorphismus bei 0.

Für spurfreie  $T$  gilt

$$T^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = -\det(T) \cdot \text{id}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \exp(T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\det T)^k}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\det T)^k}{(2k+1)!} \cdot T \\ &= \cosh(\sqrt{-\det T}) + \frac{\sinh(\sqrt{-\det T})}{\sqrt{-\det T}} T \\ &= \cos(\sqrt{\det T}) + \frac{\sin(\sqrt{\det T})}{\sqrt{\det T}} T. \end{aligned}$$

Man beachte, daß keiner der beiden Faktoren  $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  und  $\frac{\sinh x}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$  von der Auswahl des Vorzeichens von  $x := \sqrt{-\det T}$  abhängt.

Ist  $\det T$  reell (was z.B. für die Untergruppe  $SL(2) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(2)$  der Fall ist), dann gilt:

Ist  $\det T = 0$ , so ist  $t \mapsto \exp(tT) = 1 + tT$  eine Gerade.

Ist  $\Delta^2 := \det T > 0$ , so parametrisiert  $t \mapsto \exp(tT) = \cos(t\Delta) + \sin(t\Delta) \frac{1}{\Delta} T$  eine Ellipse mit Achsen  $\text{id}$  und  $\frac{1}{\Delta} T$ . Insbesondere ist also  $\exp$  nicht injektiv.

Ist  $-\Delta^2 := \det T < 0$ , so parametrisiert  $t \mapsto \exp(tT) = \cosh(t\Delta) + \sinh(t\Delta) \frac{1}{\Delta} T$  eine Hyperbel mit Achsen  $\text{id}$  und  $\frac{1}{\Delta} T$ . Die Einparametergruppen durch  $\text{id}$  sind somit (enthalten in den) Schnitten der von  $\text{id}$  und  $T$  erzeugten Ebene mit dem "Hyperboloid"  $SL(2) \subseteq L(2)$ . Daraus läßt sich auch erkennen, daß  $\exp$  nicht surjektiv ist,

$Sp(2) = SL(2)$ ,

$$\begin{aligned} \text{denn } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cb - ad \\ ad - bc & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow ad - bc = 1 \end{aligned}$$

$$SU(2, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \cong SL(2),$$

denn die Gleichheit folgt analog wie bei der  $SO(2, 1)$  mit  $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  und dem hermite'schen Produkt. Der Isomorphismus ist durch Konjugation mit  $U := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$  geben, siehe [Kri07, 34.5] und [Kri07, 72.62], denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 - i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ -\alpha_2 - \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha_1 &= \frac{a+d}{2}, \alpha_2 = \frac{b-c}{2}, \beta_1 = \frac{a-d}{2}, \beta_2 = -\frac{b+c}{2} \end{aligned}$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

wobei die Gleichung wieder wie für die  $SO(2)$  folgt und der Isomorphismus durch die Darstellung der Quaternionen  $\mathbb{H}$  als Matrizen in  $GL_{\mathbb{C}}(2)$  gegeben ist.

$Q(1) = S^3$ , denn  $T \in Q(1)$  genau dann, wenn  $T \in GL_{\mathbb{H}}(1) = \mathbb{H}$  mit  $\bar{T}T = 1$ , und

$$\begin{aligned} \overline{(a + ib + jc + kd)} \cdot (a + ib + jc + kd) &= (a - ib - jc - kd) \cdot (a + ib + jc + kd) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + i0 + j0 + k0. \end{aligned}$$

$SL_{\mathbb{H}}(1) = S^3$ , denn nach [1.21](#) ist

$$\det_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & -(b_1 + ib_2) \\ b_1 - ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$$

und somit ist  $\det_{\mathbb{C}}(q) = \|q\|^2$  für jede Quaternion  $q$ .

$SO(3) \cong PSU(2) \cong PS^3$ , wobei  $PG := G/Z(G)$  für jede Gruppe  $G$  und  $Z(G) := \{g \in G : \forall h \in G : g \cdot h = h \cdot g\}$  das Zentrum von  $G$  bezeichnet. Jede Einheitsquaternion  $q = a + ib + jc + kd$  wirkt orthogonal auf  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  durch Konjugation und läßt die Zerlegung  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  invariant, denn  $q^{-1} \cdot 1 \cdot q = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \cdot q = 1$  und

$$\begin{aligned} |q^{-1} \cdot p \cdot q|^2 &= \overline{(q^{-1} \cdot p \cdot q)} \cdot (q^{-1} \cdot p \cdot q) = \bar{q} \cdot \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot q^{-1} \cdot p \cdot q \\ &= q^{-1} \cdot |p|^2 \cdot q = |p|^2 \end{aligned}$$

also wirkt sie als Drehung am  $\mathbb{R}^3 \cong \{0\} \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{H}$ . Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{H} \supseteq S^3 \rightarrow O(3)$  ist offensichtlich  $Z(S^3) = Z(\mathbb{H}) \cap S^3 = \{\pm 1\}$ . Damit ist  $S^3 \twoheadrightarrow PS^3 := S^3/Z(S^3)$  eine (Gruppen-)Überlagerung (siehe [6.2](#)) und folglich  $PS^3$  eine kompakte zusammenhängende 3-dimensionale Lie-Gruppe die somit in  $O(3)$  offen eingebettet ist und damit mit der Zusammenhangskomponente  $SO(3)$  der  $O(3)$  übereinstimmt, d.h.  $SO(3) \cong S^3/Z(S^3) = PS^3$ .

Geometrisch haben wir das in [\[Kri07, 1.3\]](#) auch so gesehen: Eine Drehung ist durch Drehachse und Drehwinkel festgelegt, also durch einen Vektor  $u \in \mathbb{D}^3$  welcher der Drehung mit der Achse  $u/|u| \in S^2$  und dem Drehwinkel  $\pi|u| \in [-\pi, \pi]/\sim \cong S^1$  entspricht. Also erhalten wir eine 2-blättrige Überlagerung  $S^3 \rightarrow S^3/\sim = \mathbb{D}^3/\sim \cong SO(3)$  auch aus folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^2 \times [-1, 1] & \xrightarrow{\text{id} \times e^{i\pi}} & S^2 \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^3 & \twoheadrightarrow & \mathbb{D}^3/\sim \twoheadrightarrow SO(3), \end{array}$$

wobei die linke vertikale Abbildung durch  $(x, t) \mapsto tx$ , die rechte durch  $(v, \varphi) \mapsto$  "Drehung um  $v$  mit Winkel  $\varphi$ " gegeben sind und  $\sim$  die von  $v \sim -v$  für  $v \in S^2$  erzeugte Äquivalenzrelation ist, siehe dazu auch [\[Kri07, 24.40\]](#). Allerdings erhalten wir so nicht die Homomorphie-Eigenschaft von  $S^3 \rightarrow SO(3)$ .

Beachte, daß das Zentrum  $Z(SU(2))$  von  $SU(2)$  durch  $\{\pm \text{id}\}$  gegeben ist und somit  $PSU(2) := SU(2)/Z(SU(2)) \cong S^3/\mathbb{Z}_2 = PS^3$  ist.

$SO^+(3, 1) \cong PSL(2)$  wird analog wie für  $SO(3) \cong PS^3$  gezeigt. Für Details dazu siehe ebenso [Kri07, 24.40]. Beachte, daß das Zentrum  $Z(SL(2))$  von  $SL(2)$  durch  $\{\pm \text{id}\}$  gegeben ist.

**1.25 Die  $SL_{\mathbb{C}}(2)$ .**

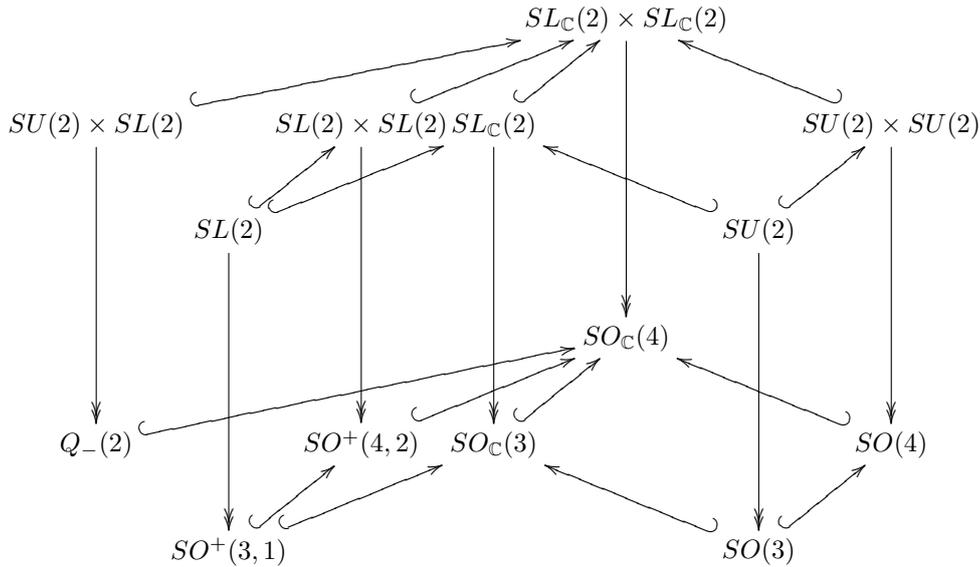
Wegen der Iwasawazerlegung aus [1.9] ist als Mannigfaltigkeiten

$$SL_{\mathbb{C}}(n) \simeq SU(n) \times (D_{+, \mathbb{C}}(n) \cap SL_{\mathbb{C}}(n)) \simeq SU(n) \times \mathbb{R}_+^{(n-1)} \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2},$$

und für  $n = 2$  ist  $SL_{\mathbb{C}}(2) \cong SU(2) \times \mathbb{R}^{1+2 \cdot 1} \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$ . Genau wie  $Sp(2) = SL(2)$  in [1.24] folgt  $Sp_{\mathbb{C}}(2) = SL_{\mathbb{C}}(2)$ :

$$\begin{aligned} Sp_{\mathbb{C}}(2) &= \{T \in GL_{\mathbb{C}}(2) : b(Tz, Tw) = b(z, w)\} \text{ mit } b(z, w) := z^1 w^2 - z^2 w^1 = \\ &= \{T \in GL_{\mathbb{C}}(2) : T^t J T = J\} \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir wollen nun die folgenden Überlagerungen, die im Zusammenhang mit der  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  auftauchen beschreiben:



**Die Überlagerung  $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow SO_{\mathbb{C}}(4)$**

Die Wirkung von  $\rho : GL_{\mathbb{C}}(2) \times GL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow L_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}(2))$  durch  $(T, S) \mapsto (R \rightarrow TRS^{-1})$  eingeschränkt auf  $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2)$  erhält die quadratische Form  $\det_{\mathbb{C}} : L_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow \mathbb{C}$  und somit auch die zugehörige nicht degenerierte symmetrische  $\mathbb{C}$ -Bilinearform  $b : L_{\mathbb{C}}(2) \times L_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $b(T, S) := \text{Trace}(T \cdot S^{ad})$ . Es ist  $SO_b(L_{\mathbb{C}}(2)) \cong SO_{\mathbb{C}}(4)$ . Der Kern des Gruppen-Homomorphismuses

$$\rho : SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow SO_b(L_{\mathbb{C}}(2)) \subseteq GL(L_{\mathbb{C}}(2))$$

ist  $\{(T, S) : TR = RS \ \forall R \in L_{\mathbb{C}}(2)\} = \{(T, T) : T \in SL_{\mathbb{C}}(2) \cap Z(L_{\mathbb{C}}(2))\} = \{(\lambda \text{id}, \lambda \text{id}) : \lambda^2 = 1\} = \{(\pm \text{id}, \pm \text{id})\}$ . Die Ableitung von  $\rho : SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow L(L_{\mathbb{C}}(2))$  bei  $(\text{id}, \text{id})$  ist

$$\rho'(\text{id}, \text{id})(T, S) : R \mapsto TR - RS$$

und hat Kern  $\{(T, S) : \text{Spur}(T) = 0 = \text{Spur}(S), TR = RS \ \forall R\} = \{(0, 0)\}$ . Aus Dimensionsgründen ist somit  $\rho$  ein lokaler Diffeomorphismus mit offenem Bild

in  $SO_b(L_{\mathbb{C}}(2))$  und da  $SO_{\mathbb{C}}(4)$  zusammenhängend ist (siehe [1.26](#)), ist  $\rho$  eine Überlagerungsabbildung.

**Die Überlagerung**  $SL_{\mathbb{C}}(2) = Sp_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow SO_{\mathbb{C}}(3) \cong SO^+(4, 1)$

Die Wirkung  $\rho$  eingeschränkt auf die Diagonale  $SL_{\mathbb{C}}(2) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2)$  läßt die Identität  $\text{id} \in L_{\mathbb{C}}(2)$  invariant und somit auch das orthogonale Komplement der spurfreien Matrizen  $\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\} \cong \mathbb{C}^3$ .

Die Wirkung  $\rho_1 : SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow L_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}(2))$ ,  $(T, S) \mapsto (R \mapsto TRS^*)$  läßt ebenfalls  $\det_{\mathbb{C}}$  und somit auch  $b$  invariant. Eingeschränkt auf die Diagonale  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  läßt sie den reellen Teilraum der hermite'schen und der anti-hermite'schen Matrizen invariant. Folgende Matrizen bilden eine Orthonormalbasis von  $\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : T^* = T\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit hat die Bilinearform  $b$  darauf Signatur 3 und folglich ist

$$SO_b(\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : T^* = T\}) \cong SO^+(4, 3) = SO^+(4, 1).$$

**Die Überlagerung**  $SL(2) \times SL(2) \rightarrow SO^+(4, 2)$

Da das Bild der Wirkung  $\rho$  in  $L_{\mathbb{C}}$  liegt, und die Einschränkung auf die Untergruppe  $SL(2) \times SL(2)$  den Real- und den Imaginärteil invariant läßt, ist  $\rho$  eine Komplexifizierung dieser Einschränkung. Die Form  $b$  ist reellwertig auf  $L(2)$  und hat Signatur 2. Also ist  $SO_b(L(2)) \cong SO^+(4, 2)$ .

**Die Überlagerung**  $Sp(2) = SL(2) \cong SU(2, 1) \rightarrow SO^+(3, 1)$

Die Einschränkung der Wirkung auf die Diagonale  $SL(2)$  läßt ebenfalls den Realteil invariant. Folgende Matrizen bilden eine Orthonormalbasis von  $\{T \in L(2) : \text{Spur}(T) = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit hat die darauf reellwertige Form  $b$  Signatur 2. Also ist

$$SO_b(\{T \in L(2) : \text{spur}(T) = 0\}) = SO^+(3, 2) \cong SO^+(3, 1).$$

**Die Überlagerung**  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$

Der Raum  $\mathbb{H}$  der Quaternionen ist ein Teilraum von  $L_{\mathbb{C}}(2)$  und wird von  $SU(2) \times SU(2)$  (wegen  $S^3 \cong SU(2) \subseteq \mathbb{H}$ ) invariant gelassen. Die Bilinearform  $b$  ist positiv definit auf  $\mathbb{H}$  und somit ist  $SO_b(\mathbb{H}) \cong SO(4)$ .

**Die Überlagerung**  $SU(2) \cong S^3 = SL_{\mathbb{H}}(1) = Q(1) \rightarrow SO(3)$

Die Einschränkung der Wirkung auf die Diagonale  $SU(2)$  läßt  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$  invariant und somit auch das  $b$ -orthogonale Komplement. Es ist  $SO_b(\mathbb{H}/\mathbb{R}) \cong SO(3)$ .

**Die Überlagerung**  $SL(2) \times SU(2) \rightarrow Q_-(2)$ 

Es ist  $SU(2, 1) = \{T \in SL_{\mathbb{C}}(2) : T^*JT = J\} \cong SL(2)$  und das Bild von  $SU(2, 1) \times SU(2)$  unter der Wirkung  $\rho$  läßt zusätzlich die konjugiert-symmetrische Sesquilinearform  $h : (R_1, R_2) \mapsto \text{spur}(JR_2R_1^*)$  invariant, denn

$$\begin{aligned} h(TR_1S^{-1}, TR_2S^{-1}) &= \text{spur}(JTR_2S^{-1}(TR_1S^{-1})^*) \\ &= \text{spur}(JTR_2S^{-1}(S^*)^{-1}R_1^*T^*) \\ &= \text{spur}(JTR_2(S^*S)^{-1}R_1^*T^*) \\ &= \text{spur}(T^*JTR_2R_1^*) = \text{spur}(JR_2R_1^*) \\ &= h(R_1, R_2). \end{aligned}$$

Die Matrizen

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

bilden eine  $\mathbb{C}$ -Basis bezüglich welcher  $h$  die Standardform der  $SU(4, 2)$  und  $b$  jene der " $O_{\mathbb{C}}(4)$ " in der Beschreibung von  $Q_-(2)$  in [1.22](#) ist. Und somit hat  $SU(2, 1) \times SU(2)$  Werte in  $U(4, 2) \cap "O_{\mathbb{C}}(4)" = Q_-(2)$ .

**1.26 Einige transitive Wirkungen**

Die Gruppen  $G$  der Form  $O_b(E)$ ,  $U_b(E)$  und  $Q_b(E)$  wirken per Definition auf  $E$  (durch  $T \mapsto (x \mapsto T(x))$ ) bzw. auch diagonal auf  $E \times E$  (d.h.  $T \mapsto ((x, y) \mapsto (Tx, Ty))$ ) und lassen die Niveau-Flächen  $E_c := \{x \in E : b(x, x) = c\}$  (bzw.  $(E \times E)_c := \{(x, y) : b(x, y) = c\}$ ) für jedes  $c \in \mathbb{K}$  invariant. Für festes  $x \in E_c$  bzw.  $(x, y) \in (E \times E)_c$  sei  $\rho : L(E) \supseteq G \rightarrow E_c$  bzw.  $\rho : L(E) \supseteq G \rightarrow (E \times E)_c$  die durch  $T \mapsto T(x)$  bzw.  $T \mapsto (T(x), T(y))$  gegebenen linearen Abbildungen. Wir werden zeigen, daß für alle diese Gruppen (bei geeigneter Wahl von  $c$ ) zumindest eine dieser beiden Abbildung  $\rho$  surjektiv ist, also  $G$  auf der Niveaufläche  $M = G \cdot x$  transitiv wirkt. Weiters werden wir zeigen, daß die Fixpunktgruppe  $G_x$  eines festen Punkts  $x$  in der Niveaufläche vom selben Typ aber kleinerer Dimension wie  $G$  ist. Die daraus erhaltenen Hauptfaserbündel

$$G_x \hookrightarrow G \twoheadrightarrow M$$

(siehe auch [\[Kri07, 70.6\]](#)) lassen uns dann mit Induktion unter anderem die Homotopiegruppen von  $G$  berechnen.

**$SO(n)$**  Siehe [1.9](#).

**$SU(n)$**  wirkt entsprechend auf  $\mathbb{C}^n$  mit Orbits  $\{x \in \mathbb{C}^n : h(x, x) = c\}$ , wobei  $h$  die standard Hermite'sche Form ist. Insbesondere wirkt also  $SU(n)$  transitiv auf  $S^{2n-1}$  mit Fixgruppe bzgl.  $1 = (0, \dots, 0, 1)$  isomorph zu  $SU(n-1)$ , d.h. wir haben die Sequenz:

$$SU(n-1) \hookrightarrow SU(n) \twoheadrightarrow S^{2n-1}.$$

**$Q(n)$**  wirkt schließlich auf  $\mathbb{H}^n$  mit Orbits  $\{x \in \mathbb{C}^n : q(x, x) = c\}$ , wobei  $q$  die standard Quaternionisch-Hermite'sche Form ist. Insbesondere wirkt also  $Q(n)$  transitiv auf  $S^{4n-1}$  mit Fixgruppe bzgl.  $1 = (0, \dots, 0, 1)$  isomorph zu  $Q(n-1)$ , d.h. wir haben die Sequenz:

$$Q(n-1) \hookrightarrow Q(n) \twoheadrightarrow S^{4n-1}.$$

**$SO^+(n, k)$** . Diese Gruppe wirkt für  $k < n$  transitiv auf  $\{x \in \mathbb{R}^n : b(x, x) = 1\} \cong \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$  und die Fixgruppe von  $1 = (0, \dots, 0, 1)$  ist isomorph zu  $SO^+(n-1, k)$ .

Also haben wir die Sequenz:

$$SO^+(n-1, k) \hookrightarrow SO^+(n, k) \rightarrow \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}.$$

In der Tat  $\{x \in \mathbb{R}^n : b(x, x) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} : -|x|^2 + |y|^2 = 1\} \cong \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}\}$ , wobei der Isomorphismus durch  $(x, y) \mapsto (x, \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}y)$

gegeben ist. Da  $1^\perp = \mathbb{R}^{n-1}$  ist  $G_1 = SO^+(n-1, k)$ . Schließlich folgt die Transitivität, indem wir für  $x \neq y$  mit  $b(x, x) = 1 = b(y, y)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene  $x$  in  $y$  drehen. (geht durch Zusammensetzung von zwei Spiegelungen um  $x-z$  und  $y-z$ , wobei  $z$  ein Vektor in dieser Ebene mit  $b(z, z) = 1$  und  $b(z, x) \neq 1 \neq b(z, y)$  ist).

**$SU(n, k)$  und  $Q(n, k)$ .** Hier gehen wir analog vor und erhalten

$$\begin{aligned} SU(n-1, k) &\hookrightarrow SU(n, k) \rightarrow \mathbb{R}^{2k} \times S^{2n-2k-1} \\ Q(n-1, k) &\hookrightarrow Q(n, k) \rightarrow \mathbb{R}^{4k} \times S^{4n-4k-1}. \end{aligned}$$

**$Sp(n)$**  wirkt transitiv auf  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : b(x, y) = 1\}$  und die Fixgruppe von  $(e_m, e_m)$  ist isomorph zu  $Sp(n-2)$ , wobei  $n = 2m$  ist. Also haben wir die Sequenz:

$$Sp(n-2) \hookrightarrow Sp(n) \rightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1}.$$

Daß  $Sp(n)$  transitiv auf  $M$  wirkt, können wir wie folgt sehen: Für  $b(x, y) = 1 = b(x', y')$  ergänzen wir  $x$  und  $y$  zu komplementierten Lagrange Teilräumen  $L$  und  $M$  und ebenso  $x'$  und  $y'$  zu  $L'$  und  $M'$  (siehe [1.14](#)). Wir können nun  $x$  mit Vektoren in  $y^\perp$  zu einer Basis  $(x, e_2, \dots, e_m)$  von  $L$  ergänzen und in  $M$  die via  $z \mapsto b(z, \cdot)$  duale Basis  $(y, e_{m+2}, \dots, e_{2m})$  wählen. Und ebenso erhalten wir eine zweite Basis  $(x', e'_2, \dots, e'_m; y', e'_{m+2}, \dots, e'_{2m})$  von  $E$ . Der Basiswechsel ist klarerweise der gesuchte Symplektomorphismus. Schließlich wollen wir noch  $\{(x, y) : b(x, y) = 1\}$  bestimmen. Es ist  $b(x, y) = \langle Jx, y \rangle$  und somit erhalten wir eine Kette von Diffeomorphismen:

$$\begin{aligned} M &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : b(x, y) = \langle Jx, y \rangle = 1\} \quad \text{via } J \times 1 \\ &\cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \langle x, y \rangle = 1 (\Rightarrow y \neq 0)\} \quad \text{via } (x, y) \mapsto (x + \frac{1}{|y|^2}y, y) \\ &\cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^n : \langle x, y \rangle = 0\} \quad \text{via } (x, y) \mapsto (x, \frac{1}{|y|}y, |y|) \\ &\cong \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ : \langle x, y \rangle = 0\} \quad \text{via } (x, y, t) \mapsto (y, x; \ln t) \\ &\cong TS^{n-1} \times \mathbb{R} \quad \text{via } (y, x; t) \mapsto (y, x + ty) \\ &\cong S^{n-1} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

**$SO_{\mathbb{C}}(n)$  und  $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ .** Hier erhalten wir analog

$$\begin{aligned} SO_{\mathbb{C}}(n-1) &\hookrightarrow SO_{\mathbb{C}}(n) \rightarrow \{x \in \mathbb{C}^n : b(x, x) = 1\} \cong TS^{n-1} \\ Sp_{\mathbb{C}}(n-2) &\hookrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(n) \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : b(x, y) = 1\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} M &:= \{x \in \mathbb{C}^n : b(x, x) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x|^2 - |y|^2 = 1, \langle x, y \rangle = 0\} \\ &\cong \{(x, y) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0\} \\ &\cong TS^{n-1} \end{aligned}$$

sowie

$$M := \{(z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : b(z, w) = \langle J\bar{z}, w \rangle_{\mathbb{C}} = 1\} = TS^{2n-1}$$

$Q_-(n)$  wirkt transitiv auf  $\{x \in \mathbb{H}^n : q(x, x) = i\}$  mit Fixpunktgruppe  $Q_-(n-1)$  bzgl.  $1 := (0, \dots, 0; 1)$ . Also erhalten wir eine Sequenz

$$Q_-(n-1) \hookrightarrow Q_-(n) \rightarrow TS^{2n-1}/\mathbb{R},$$

wobei  $TS^{2n-1}/\mathbb{R}$  das (ziemlich nicht-triviale) Komplement des durch Multiplikation mit  $i$  gegebenen trivialen Linienbündels des Tangentialbündels  $TS^{2n-1}$  ist, siehe [Kri07, 25.2].

In der Tat ist  $q(x, x) = -\overline{q(x, x)}$ , d.h.  $q(x, x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^3$ , bzw. in Koordinaten

$$\begin{aligned} q(x, x) &= i \left( \sum_l (x^l)^2 + (x^{n+l})^2 - (x^{2n+l})^2 - (x^{3n+l})^2 \right) \\ &\quad + 2j \left( \sum_l x^{n+l} x^{2n+l} - x^l x^{3n+l} \right) \\ &\quad + 2k \left( \sum_l x^l x^{2n+l} + x^{n+l} x^{3n+l} \right). \end{aligned}$$

Und somit ist

$$\begin{aligned} M &:= \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : q(x, x) = i\} \\ &= \{(x, y, z, u) : |x|^2 + |y|^2 = 1 + |z|^2 + |u|^2, \\ &\quad \langle (x, y), (z, u) \rangle = 0, \langle (x, y), (-u, z) \rangle = 0\} \\ &\cong \{(v, w) \in S^{2n-1} \times \mathbb{C}^n : v \perp w, v \perp iw\} =: E, \end{aligned}$$

also ist  $E$  das orthogonale Komplement des trivialen Linienbündels

$$\{(v, iv) : v \in S^{2n-1}\} \subseteq TS^{2n-1} = \{(v, w) : v \in S^{2n-1}, v \perp w\}.$$

Die Fixpunktgruppe ist offensichtlich  $Q_-(n)$ , denn  $1^\perp = \mathbb{H}^{n-1}$ . Daß  $Q_-(n)$  auf  $M$  transitiv wirkt, sehen wir wie folgt: Die Standardbasis  $e_l$  erfüllt  $q(e_j, e_k) = i \delta_{j,k}$ . Wir nennen so eine Basis eine Orthonormalbasis für  $q$ . Jeder Vektor  $f_1$  mit  $q(f_1, f_1) = i$  läßt sich zu einer Orthogonalbasis  $(f_j)$  induktiv wie folgt erweitern. Seien  $(f_j)_{j \leq k}$  bereits gewählt. Sei  $x \neq 0$  in  $\{x : q(f_j, x) = 0 \forall j \leq k\}$ . Dann ist  $x$  linear unabhängig von  $\{f_1, \dots, f_k\}$ , denn andernfalls ist  $x = \sum_{j \leq k} f_j \lambda_j$  mit  $\lambda_j \in \mathbb{H}$ , und  $0 = q(f_j, x)$  liefert induktiv  $\lambda_j = 0$ , d.h.  $x = 0$ . Da  $q$  nicht degeneriert ist, existiert ein  $x'$  mit  $q(x, x') \neq 0$ . Dann setzen wir  $x'' := x' + \sum_{j \leq k} f_j i q(f_j, x')$  und es gilt:  $q(x, x'') = q(x, x') \neq 0$  und  $q(f_j, x'') = q(f_j, x') + q(f_j, x') i^2 = 0$ . Nun ist  $q(x + x'' \lambda, x + x'' \lambda) = q(x, x) + \bar{\lambda} q(x'', x) + q(x, x'') \lambda + \bar{\lambda} q(x'', x'') \lambda$ . Wäre also  $q(x, x) = 0$  für alle  $x \in \langle f_1, \dots, f_k \rangle^\perp$ , dann wäre  $\overline{q(x, x'') \lambda} + q(x, x'') \lambda = 0$  für alle  $\lambda$  und somit  $q(x, x'') \lambda \in \{0\} \times \mathbb{R}^3$  für alle  $\lambda$  und somit  $q(x, x'') = 0$ . Da  $\lambda \mapsto (\bar{\lambda} \cdot x \cdot \lambda)$  transitiv auf  $\{0\} \times \mathbb{R}^3$  wirkt, können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $q(x, x) = i$  ist, und somit ist  $x$  das gesuchte  $f_{k+1}$ .

Zusammenfassend haben wir also die folgenden Hauptfaserbündel mit den angegebenen Dimensionen

$$\begin{array}{l}
SO^+(n-1, k) \hookrightarrow SO^+(n, k) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1} \\
\frac{(n-1)(n-2)}{2} \qquad \qquad \frac{n(n-1)}{2} \qquad \qquad n-1 \\
SU(n-1, k) \hookrightarrow SU(n, k) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{2k} \times S^{2n-2k-1} \\
n^2-2n \qquad \qquad n^2-1 \qquad \qquad 2n-1 \\
Q(n-1, k) \hookrightarrow Q(n, k) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{4k} \times S^{4n-4k-1} \\
(n-1)(2n-1) \qquad \qquad n(2n+1) \qquad \qquad 4n-1 \\
Sp(n-2) \hookrightarrow Sp(n) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \\
\frac{(n-2)(n-1)}{2} \qquad \qquad \frac{n(n+1)}{2} \qquad \qquad 2n-1 \\
SO_{\mathbb{C}}(n-1) \hookrightarrow SO_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow TS^{n-1} \\
(n-1)(n-2) \qquad \qquad n(n-1) \qquad \qquad 2n-2 \\
Sp_{\mathbb{C}}(n-2) \hookrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow TS^{2n-1} \\
(n-2)(n-1) \qquad \qquad n(n+1) \qquad \qquad 4n-2 \\
Q_-(n-1) \hookrightarrow Q_-(n) \twoheadrightarrow TS^{2n-1}/\mathbb{R} \\
(n-1)(2n-3) \qquad \qquad n(2n-1) \qquad \qquad 4n-3
\end{array}$$

### 1.27 Von den speziellen Gruppen zu den allgemeinen

Der Gruppenhomomorphismus

$$s : t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Schnitt für folgende kurze exakte Sequenzen von Gruppen

$$\begin{array}{l}
1 \longrightarrow SL(n) \hookrightarrow GL(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}_* \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow SO(n) \hookrightarrow O(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow SO(n, k) \hookrightarrow O(n, k) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow SL_{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\det_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}_* \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow SU(n) \hookrightarrow U(n) \xrightarrow{\det_{\mathbb{C}}} S^1 \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow SU(n, k) \hookrightarrow U(n, k) \xrightarrow{\det_{\mathbb{C}}} S^1 \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow SO_{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow O_{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\det_{\mathbb{C}}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1
\end{array}$$

und somit semidirekte Produkte

$$\begin{aligned}
 GL(n) &\cong SL(n) \rtimes \mathbb{R}_* \\
 O(n) &\cong SO(n) \rtimes \mathbb{Z}_2 \\
 O(n, k) &\cong SO(n, k) \rtimes \mathbb{Z}_2 \\
 GL_{\mathbb{C}}(n) &\cong SL_{\mathbb{C}}(n) \rtimes \mathbb{C}_* \\
 U(n) &\cong SU(n) \rtimes S^1 \\
 U(n, k) &\cong SU(n, k) \rtimes S^1 \\
 O_{\mathbb{C}}(n) &\cong SO_{\mathbb{C}}(n) \rtimes \mathbb{Z}_2
 \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\mu : (t, T) \mapsto tT$  liefert exakte Gruppen-Sequenzen

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}_* \times SL(2n+1) \xrightarrow{\mu} GL(2n+1) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times SL(n) \xrightarrow{\mu} GL_+(n) \longrightarrow 1 \quad (\text{vgl. mit } \boxed{1.8})$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}_* \times SL_{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\mu} GL_{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times SL_{\mathbb{H}}(n) \xrightarrow{\mu} GL_{\mathbb{H}}(n) \longrightarrow 1,$$

wobei die erste, die zweite und die letzte folglich ein Isomorphismen beschreiben. Beachte für die dritte Zeile, daß

$$tT = \text{id} \Leftrightarrow T = \frac{1}{t} \text{id} \text{ mit } 1 = \det(T) = \frac{1}{t^n}.$$

## 2. Lokale versus globale Struktur

### 2.1 Definition (Lie-Gruppe)

Eine LIE-GRUPPE  $G$  ist eine Gruppe, die zugleich  $C^\infty$ -MF ist und deren Gruppenmultiplikation  $\text{mult} : G \times G \rightarrow G$  glatt ist.

### 2.2 Bemerkungen

(1) Die durch  $L_g : h \mapsto g \cdot h$ ,  $R_g : h \mapsto h \cdot g$  und durch  $\text{mult}(g, \text{inv}(g)) := e$  definierten Abbildungen  $L_g$  (Linkstranslation),  $R_g$  (Rechtstranslation) und  $\text{inv}$  (Inversenbildung) sind Diffeomorphismen von  $G$ : Klarerweise sind sie bijektiv und haben als Umkehrabbildungen  $L_{g^{-1}}$ ,  $R_{g^{-1}}$  und  $\text{inv}$ . Die beiden ersten sowie ihre Umkehrabbildungen sind als Einschränkungen der glatten Multiplikation selbst wieder glatt. Da bei festem  $h$  die Identität

$$\text{inv}(g) = h^{-1} \cdot h \cdot \text{inv}(g) = h^{-1} \cdot \text{inv}(g \cdot h^{-1}) = \left( L_{h^{-1}} \circ \text{inv} \circ R_{h^{-1}} \right)(g)$$

gilt, genügt es, die Differenzierbarkeit von  $\text{inv}$  beim neutralen Element  $e$  nachzuweisen. O.B.d.A. rechnen wir lokal im  $\mathbb{R}^n$ . Dort ist  $\text{inv}$  die Lösung der impliziten Gleichung  $\text{mult}(g, \text{inv}(g)) = e$ . Wegen  $\text{mult}(e, g) = g$  ist die zweite partielle Ableitung von  $\text{mult}$  bei  $e$  die Identität und nach dem Satz über implizite Funktionen ist  $\text{inv}$  in einer Umgebung von  $e$  glatt.

(2) Jede Lie-Gruppe  $G$  ist automatisch Hausdorff:

Sei  $a \neq b$ , also  $\text{mult}(a, \text{inv}(b)) \in G \setminus \{e\}$ . Da  $G$  als Mannigfaltigkeit  $T_1$  ist gibt es Umgebungen  $U$  von  $a$  und  $V$  von  $b$  mit  $e \notin \text{mult}(U, \text{inv}(V))$ , also ist  $U \cap V = \emptyset$  und damit  $G$  Hausdorff.

(3) Die Zusammenhangskomponente  $G_0$  von  $e$  ist ein Normalteiler von  $G$ :

Die Bilder von  $G_0$  unter  $L_g$  (bzw.  $R_g$ ) sind zusammenhängend. Da  $e \in G_0$ , gilt für  $g \in G_0$  auch  $g \in L_g G_0$  und also  $L_g G_0 \subseteq G_0$ . Das gleiche Argument, angewandt auf die inneren Automorphismen  $g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1}$ , liefert die Normalteiler-Eigenschaft.

(4) Jede Lie-Gruppe  $G$  ist auch parakompakt:

Sei  $G_g$  die Zusammenhangskomponente um  $g$ , dann sieht man wegen der Stetigkeit der Linkstranslation leicht ein, daß  $G_g = G_0 \cdot g$ . Sei  $U$  eine zusammenhängende, relativ kompakte Umgebung von  $e$ , ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $U = U^{-1}$  (ersetze  $U$  durch  $U \cap U^{-1}$ ). Dann ist  $H := \bigcup_n U^n$  eine offene zusammenhängende Untergruppe von  $G$ . Die Teilmenge  $H$  ist auch abgeschlossen, denn die offene Vereinigung der Nebenklassen  $gH$  mit  $g \notin H$  ist das Komplement von  $H$ . Also muß  $H$  die Komponente  $G_0$  umfassen, somit ist die Zusammenhangskomponente  $G_0$   $\sigma$ -kompakt und damit auch parakompakt, siehe [Kri07, 18.4]. Jede andere Komponente ist von der Gestalt  $g \cdot G_0$ , also ebenfalls parakompakt und damit auch  $G$ .

(5) Von [MZ52] und [Gle52] wurde das 5. Hilbert-Problem 1952 positiv beantwortet: Jede lokalkompakte, lokal zusammenhängende, endlich-dimensionalenale topologische Gruppe läßt sich auf eindeutige Weise zu einer Lie-Gruppe machen.

### 2.3 Definition (Lie-Gruppenhomomorphismus)

Seien  $H$  und  $G$  zwei Lie-Gruppen. Eine Abbildung  $f : H \rightarrow G$  heißt LIE(GRUPPEN)-HOMOMORPHISMUS, falls  $f$  glatter Gruppen-Homomorphismus ist. Ein lokal definiertes  $f$  heißt LOKALER LIE(GRUPPEN)-HOMOMORPHISMUS, falls es im

Definitionsbereich  $\text{Dom}(f)$  (einer offenen Umgebung von  $e$ ) multiplikativ ist, d.h.  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$  für alle  $x, y \in \text{Dom}(f)$  mit  $x \cdot y \in \text{Dom}(f)$ . Wegen  $e^2 = e$  ist dann  $f(e) = f(e)^2$  also  $f(e) = e$  und weiters  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$  für  $x \in \text{Dom}(f) \cap (\text{Dom}(f))^{-1}$ .

#### 2.4 Lemma.

Seien  $H$  und  $G$  Lie-Gruppen und  $H$  zusammenhängend. Stimmen zwei Lie-Homomorphismen von  $H$  nach  $G$  lokal überein, so sind sie gleich.

**Beweis.** Durch die Umgebung, auf der die Homomorphismen übereinstimmen, wird  $H$  als Gruppe erzeugt. Da Lie-Homomorphismen insbesondere Gruppen-Homomorphismen sind, stimmen sie überall überein.  $\square$

#### 2.5 Lemma (Fortsetzen von Homomorphismen).

Seien  $H$  und  $G$  wie oben, zusätzlich sei  $H$  einfach zusammenhängend. Dann läßt sich jeder lokale Lie-Homomorphismus  $f : H \supseteq \text{Dom}(f) \rightarrow G$  zu einem Lie-Homomorphismus  $\tilde{f}$  auf ganz  $H$  fortsetzen.

**Beweis.** Wir werden den lokalen Lie-Homomorphismus  $f$  längs Kurven fortsetzen, die von  $e$  ausgehen. Sei  $U = U^{-1}$  eine Umgebung, sodaß  $U^2 \subseteq \text{Dom}(f)$ ; zu jeder Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow H$  gibt es nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue (siehe [Kri04, 5.1.5]) zur Überdeckung durch die Mengen  $U_s := \{t : c(t)^{-1} \cdot c(s) \in U\}$  mit  $s \in [0, 1]$  ein  $\delta > 0$ , s.d. jede Menge  $A \subseteq [0, 1]$  mit Durchmesser kleiner als  $\delta$  in einer dieser Mengen enthalten ist, also wenn eine Folge  $(0 = t_0 < \dots < t_n = 1)$  so gewählt ist, daß  $|t_{i+1} - t_i| < \delta$  gilt, dann ist mit  $c(t)^{-1} \cdot c(t') = c(t)^{-1} \cdot c(s) \cdot c(s)^{-1} \cdot c(t') \in U \cdot U^{-1} \subseteq \text{Dom}(f)$  für alle  $t, t' \in [t_i, t_{i+1}]$ . Wir definieren

$$\tilde{f}(c) := f\left(c(0)^{-1} \cdot c(t_1)\right) \cdot \dots \cdot f\left(c(t_{n-1})^{-1} \cdot c(1)\right).$$

Seien  $c$  und  $d$  zwei Kurven mit gleichen Endpunkten und mit  $c(t) \in d(t) \cdot U$ . Sei  $0 = r_0 < \dots < r_k = 1$  und  $0 = s_0 < \dots < s_l = 1$  so gewählt, daß  $c(t)^{-1} \cdot c(t') \in U$  für  $t, t' \in [r_i, r_{i+1}]$  und  $d(t)^{-1} \cdot d(t') \in U$  für  $t, t' \in [s_i, s_{i+1}]$ . Sei  $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$  die gemeinsame Verfeinerung, dann gilt  $\tilde{f}(c) = \tilde{f}(d)$ , denn mit  $u_i := d(t_i)^{-1} \cdot c(t_i) \in U$  gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(c) &:= f\left(c(0)^{-1}c(r_1)\right) \cdot \dots \cdot f\left(c(r_{k-1})^{-1}c(1)\right) \\ &= f\left(c(0)^{-1}c(t_1)\right) \cdot \dots \cdot f\left(c(t_{n-1})^{-1}c(1)\right) \\ &= f\left((d(0)u_0)^{-1}(d(t_1)u_1)\right) \cdot \dots \cdot f\left((d(t_{n-1})u_{n-1})^{-1}(d(1)u_n)\right) \\ &= f\left(u_0^{-1}d(0)^{-1}d(t_1)u_1\right) \cdot \dots \cdot f\left(u_{n-1}^{-1}d(t_{n-1})^{-1}d(1)u_n\right) \\ &= f(u_0^{-1})f\left(d(0)^{-1} \cdot d(t_1)\right)f(u_1)f(u_1)^{-1} \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot f(u_{n-1})f(u_{n-1})^{-1}f\left(d(t_{n-1})^{-1}d(1)\right)f(u_n) \\ &= f\left(d(0)^{-1} \cdot d(s_1)\right) \cdot \dots \cdot f\left(d(s_{l-1})^{-1} \cdot d(1)\right) = \tilde{f}(d). \end{aligned}$$

Somit nimmt  $\tilde{f}$  auf homotopen Kurven mit gleichen Endpunkten gleiche Werte an und da  $H$  einfachzusammenhängend ist, hängt  $\tilde{f}$  somit nur von den Endpunkten der Kurven ab. Setzt man also  $\tilde{f}(g) := \tilde{f}(c)$ , wobei  $c$  eine  $e$  mit  $g$  verbindende Kurve ist, dann ist  $\tilde{f}$  wohldefiniert und glatt, da  $\tilde{f}$  lokal bei  $g$  gegeben ist durch  $\tilde{f}(g') = \tilde{f}(c) \cdot f(g^{-1} \cdot g')$  für eine Kurve  $c$  die  $e$  mit  $g$  verbindet. Nun müssen wir

noch nachweisen, daß  $\tilde{f}$  ein Homomorphismus ist. Ist  $c$  eine Kurve von  $e$  nach  $g$ ,  $d$  eine von  $e$  nach  $h$ , so verbindet folgende Kurve  $cd$  den Punkt  $e$  mit  $g \cdot h$ ,

$$cd(t) := \begin{cases} c(2t) & \text{für } t \leq 1/2 \\ g \cdot d(2t - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(g \cdot d) &= \tilde{f}(d), \text{ da} \\ f\left((g \cdot d(t_i))^{-1}(g \cdot d(t_{i+1}))\right) &= f\left(d(t_i)^{-1}g^{-1}gd(t_{i+1})\right) = f\left(d(t_i)^{-1}d(t_{i+1})\right) \end{aligned}$$

Und somit ist  $\tilde{f}(g \cdot h) = \tilde{f}(cd) = \tilde{f}(c)\tilde{f}(g \cdot d) = \tilde{f}(c)\tilde{f}(d) = \tilde{f}(g)\tilde{f}(h)$ .  $\square$

### 2.6 Lemma.

Es sei  $M \rightarrow B$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $F$ . Falls  $B$  und  $F$  zusammenhängend sind, dann ist es auch  $M$ . Falls  $B$  und  $F$  einfach zusammenhängend ist, so auch  $M$ . Allgemeiner hat man die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung (siehe [Whi78, p.187, IV.8.6])

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_k(F) \rightarrow \pi_k(M) \rightarrow \pi_k(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F) \rightarrow \dots$$

**Beweis der 1. Aussage.** Siehe [1.10](#). Ist für ein Faserbündel  $p : M \rightarrow B$  sowohl die Basis  $B$  als auch die typische Faser  $F$  zusammenhängend, so auch der Totalraum  $M$ . Denn seien  $U$  und  $V$  nicht leer und offen in  $M$  mit  $U \cup V = M$ , dann ist  $p(U)$  und  $p(V)$  nicht leer und offen in  $B$  mit  $p(U) \cup p(V) = B$ . Weil  $B$  zusammenhängend ist, gilt  $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$ , also gibt es einen Punkt  $x \in p(U) \cap p(V)$ , und  $U \cap F$  und  $V \cap F$  überdecken die Faser  $F$  über  $x$  mit nicht-leeren Mengen. Da  $F$  zusammenhängend ist, haben  $U$  und  $V$  nicht-leeren Durchschnitt in  $F$ . Also ist  $M$  zusammenhängend.

Die Aussage betreffend des einfachen Zusammenhangs sieht man wie folgt ein: Sei  $c : S^1 \rightarrow M$  eine geschlossene Kurve. Da  $B$  einfach zusammenhängend ist existiert eine Homotopie relativ  $\{1\} \subseteq S^1$  zwischen  $p \circ c$  und der konstanten Kurve. Nun lifte diese Homotopie zu einer Homotopie relativ  $\{1\}$  mit Startwert  $c$ . Der Endwert der Homotopie ist eine geschlossene Kurve in der Faser und läßt sich folglich in der Faser zur konstanten Abbildung homotop verformen. Verklebt man diese beiden Homotopien, so erhält man eine Homotopie relativ  $\{1\}$ , also ist  $M$  einfach zusammenhängend.

Die Homomorphismen  $\pi_k(F) \rightarrow \pi_k(M)$  und  $\pi_k(M) \rightarrow \pi_k(B)$  sind die von der Inklusion  $F \hookrightarrow M$  und der Quotientenabbildung  $M \twoheadrightarrow B$  induzierten. Der Einhängungshomomorphismus  $\partial : \pi_k(B) \rightarrow \pi_{k-1}(F)$  ist wie folgt konstruiert: Sei  $[\varphi] \in \pi_k(B)$  mit  $\varphi : (S^k, e_{k+1}) \rightarrow (B, b_0)$ . Zusammensetzen mit  $S^{k-1} \times I \rightarrow S^{k-1} \times I / S^{k-1} \times \{0\} \cong \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{D}^k / S^{k-1} \cong S^k$  liefert eine Homotopie  $S^{k-1} \times I \rightarrow B$  die zu einer Homotopie nach  $M$  mit vorgegebenen konstanten Anfangswert liftet. Der Endwert des Lifts ist dann eine Abbildung  $S^{k-1} \rightarrow F$  und repräsentiert somit das gesuchte Element in  $\pi_{k-1}(F)$ . Mit dieser Definition ist es nicht allzu schwer die Exaktheit der Sequenz zu zeigen.  $\square$

Dies kann verwendet werden, um mehrere der folgenden Lie-Gruppen als (einfach-)zusammenhängend zu erkennen bzw. deren Homotopiegruppen zu bestimmen.

### 2.7 Beispiele von Fundamentalgruppen von Liegruppen.

Wir wenden [2.6](#) auf die Sequenzen aus [1.26](#) an, die nach [6.12](#) und [6.9](#) Faserbündel beschreiben:

$$\begin{aligned}
SO(n-1) &\hookrightarrow SO(n) \twoheadrightarrow S^{n-1} \\
SU(n-1) &\hookrightarrow SU(n) \twoheadrightarrow S^{2n-1} \\
Q(n-1) &\hookrightarrow Q(n) \twoheadrightarrow S^{4n-1} \\
Sp(n-2) &\hookrightarrow Sp(n) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \\
SO_{\mathbb{C}}(n-1) &\hookrightarrow SO_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow TS^{n-1} \\
Sp_{\mathbb{C}}(n-2) &\hookrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow TS^{2n-1} \\
Q_-(n-1) &\hookrightarrow Q_-(n) \twoheadrightarrow TS^{2n-1}/\mathbb{R}
\end{aligned}$$

und die Anfangswerte aus [1.24](#)

| $G_n$                | $G_n/G_{n-1}$                 | Startwert   | $\pi_1(G_n)$                  |
|----------------------|-------------------------------|---|-------------------------------|
| $SO(n)$              | $S^{n-1}$                     | $SO(2) \cong S^1, SO(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2$       | $\mathbb{Z}_2$ ( $n \geq 3$ ) |
| $SU(n)$              | $S^{2n-1}$                    | $SU(1) \cong \{1\}, SU(2) \cong S^3$                  | $\{1\}$                       |
| $Q(n)$               | $S^{4n-1}$                    | $Q(1) \cong S^3$                                      | $\{1\}$                       |
| $Sp(n)$              | $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ | $Sp(2) \cong S^1 \times \mathbb{C}$                   | $\mathbb{Z}$                  |
| $SO_{\mathbb{C}}(n)$ | $TS^{n-1}$                    | $SO_{\mathbb{C}}(2) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$ | $\mathbb{Z}_2$                |
| $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ | $TS^{2n-1}$                   | $Sp_{\mathbb{C}}(2) \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$    | $\{1\}$                       |
| $Q_-(n)$             | $TS^{2n-1}/\mathbb{R}$        | $Q_-(1) \cong S^1$                                    | $\mathbb{Z}$                  |

Z.B. ist die lange exakte Homotopiesequenz für  $SU$  folgende:

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(S^{2n-1}) \rightarrow \pi_k(SU(n-1)) \rightarrow \pi_k(SU(n)) \rightarrow \pi_k(S^{2n-1}) \rightarrow \dots$$

und, da  $\pi_k(S^n) = 0$  für  $0 < k < n$  gilt, ist  $\pi_k(SU(n)) \cong \pi_k(SU(n-1))$  für  $0 < k < 2n-2$ , also insbesondere  $\pi_1(SU(n)) \cong \pi_1(SU(n-1)) \cong \dots \cong \pi_1(SU(1)) = \{0\}$  für  $n \geq 2$ , d.h.  $SU(n)$  ist einfachzusammenhängend.

Für die  $SO$  erhalten wir analog:

$$\dots \rightarrow \pi_{k+1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_k(SO(n-1)) \rightarrow \pi_k(SO(n)) \rightarrow \pi_k(S^{n-1}) \rightarrow \dots$$

und somit ist  $\pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(n-1))$  für  $0 < k < n-2$ , also insbesondere  $\pi_1(SO(n)) \cong \pi_1(SO(n-1)) \cong \dots \cong \pi_1(SO(3))$  für  $n > 3$ . Da  $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SL(2) \twoheadrightarrow SO(3)$  die universelle Überlagerung ist, ist  $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Ähnlich geht man in den übrigen Fällen vor.

Die Iwasawazerlegungen aus [1.9](#)

$$\begin{aligned}
O(n) &\hookrightarrow GL(n) \twoheadrightarrow D_+(n) \\
SO(n) &\hookrightarrow GL_+(n) \twoheadrightarrow D_+(n) \\
SO(n) &\hookrightarrow SL(n) \twoheadrightarrow D_+(n) \cap SL(n) \\
SU(n) &\hookrightarrow SL_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow D_{+,\mathbb{C}}(n) \cap SL_{\mathbb{C}}(n) \\
Q(n) &\hookrightarrow SL_{\mathbb{H}}(n) \twoheadrightarrow D_{+,\mathbb{H}}(n) \cap SL_{\mathbb{H}}(n)
\end{aligned}$$

liefern uns wegen der Kontrahierbarkeit der rechtsstehenden Quotientenräume für  $k > 0$ :

$$\begin{aligned}\pi_k(GL(n)) &\cong \pi_k(GL_+(n)) \cong \pi_k(SL(n)) \cong \pi_k(SO(n)), \\ \pi_k(SL_{\mathbb{C}}(n)) &\cong \pi_k(SU(n)) \quad \text{und} \quad \pi_k(SL_{\mathbb{H}}(n)) \cong \pi_k(Q(n))\end{aligned}$$

und wegen  $GL_{\mathbb{C}}(n) \cong SL_{\mathbb{C}}(n) \times \mathbb{C}_*$  und  $GL_{\mathbb{H}}(n) \cong \mathbb{R}_+ \times SL_{\mathbb{H}}(n)$  ist für  $k > 0$

$$\begin{aligned}\pi_k(GL_{\mathbb{C}}(n)) &\cong \pi_k(SL_{\mathbb{C}}(n)) \times \pi_k(\mathbb{C}_*), \text{ also } \pi_1(GL_{\mathbb{C}}(n)) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \\ \pi_k(GL_{\mathbb{H}}(n)) &\cong \pi_k(SL_{\mathbb{H}}(n)) \times \pi_k(\mathbb{R}_+) \cong \pi_k(SL_{\mathbb{H}}(n)), \text{ also } \pi_1(GL_{\mathbb{H}}(n)) \cong \{1\}.\end{aligned}$$

Insbesondere sind alle Totalräume der Überlagerungen aus [1.25](#) einfach zusammenhängend.

### 2.8 Lemma.

*Falls  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist, dann ist eine diskrete Untergruppe  $H \subseteq G$  genau dann ein Normalteiler, wenn sie im Zentrum  $Z(G) := \{z \in G : xz = zx \forall x \in G\}$  liegt.*

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) ist trivial.

( $\Rightarrow$ ) Da die Abbildung  $z \mapsto zxz^{-1}$  stetig ist und für  $x \in H$  Werte in der diskreten Teilmenge  $H$  hat, ist sie konstant und somit ist gleich  $zxz^{-1} = exe^{-1} = x$ , d.h.  $x \in Z(G)$ .  $\square$

### 2.9 Lemma (Universelle Überlagerung einer Gruppe).

*Sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe, dann ist die universelle Überlagerung  $\tilde{G}$  (siehe [\[Kri07, 24.30\]](#) und [\[Kri07, 24.31\]](#)) der Mannigfaltigkeit  $G$  selbst eine Lie-Gruppe. Der Kern der Überlagerungsabbildung ist ein diskreter, zentraler Normalteiler.*

**Beweis.** Es ist  $\tilde{G}$  eine Lie-Gruppe, da die Lifte der Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind (Überlagerung, einfacher Zusammenhang) und wegen [\[Kri07, 24.4\]](#) sind die für eine Gruppe nötigen Gleichungen auch auf  $\tilde{G}$  erfüllt: In der Tat lassen sich stetige Abbildungen (wie  $\tilde{G} \times \tilde{G} \xrightarrow{p \times p} G \times G \xrightarrow{\mu} G$  und  $\tilde{G} \xrightarrow{p} G \xrightarrow{\nu} G$ ) von einfach zusammenhängenden Räumen unter Vorgabe von Anfangswerten eindeutig längs der Faserbündelabbildung  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  liften. Die Gleichungen wie  $\mu(g, \nu(g)) = e$  oder  $\mu(g_1, \mu(g_2, g_3)) = \mu(\mu(g_1, g_2), g_3)$  lassen sich als Identitäten von Zusammensetzungen und Produkten von  $\mu, \nu$  und  $\text{id}$  schreiben und gelten wegen der Anfangsbedingungen  $\mu(e, e) = e$  und  $\nu(e) = e$  somit auch für die Lifte dieser Zusammensetzungen die gerade die entsprechenden Zusammensetzungen der Lifte  $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$  und  $\tilde{\text{id}} = \text{id}$  sind.

Nach Konstruktion der Gruppenoperationen auf  $\tilde{G}$  ist  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  ein Homomorphismus und somit  $\text{Ker}(p)$  ein Normalteiler. Da  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  eine Überlagerung ist, ist  $\text{Ker}(p)$  diskret und liegt nach [2.8](#) im Zentrum.  $\square$

### Beispiele von universellen Gruppen-Überlagerungen.

- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \cong SO(2)$ , siehe [\[Kri07, 3.9\]](#).
- $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \cong SO_{\mathbb{C}}(2)$ , siehe [\[Kri07, 3.5\]](#).
- $SU(2) \cong SL_{\mathbb{H}}(1) \cong Q(1) \cong S^3 \rightarrow SO(3)$ , siehe [1.25](#).
- $SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow SO_{\mathbb{C}}(3) = SO^+(4, 1)$ , siehe [1.25](#).
- $SU(2) \times SU(2) \cong S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$ , siehe [1.25](#).

- $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow SO_{\mathbb{C}}(4)$ , siehe [1.25](#).
- Allgemeiner:  $\text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ , siehe [\[Kri07, 24.43\]](#).
- $\text{Pin}(n) \rightarrow O(n)$ , siehe [\[Kri07, 24.43\]](#).
- $SL(2) \times SL(2) \rightarrow SO^+(4, 2)$ , siehe [1.25](#).
- $SL(2) = SU(2, 1) = Sp(2) \rightarrow SO^+(3, 1)$ , siehe [1.25](#).
- $SL(2) \times SU(2) \rightarrow Q_-(2)$ , siehe [1.25](#).

### 2.10 Bemerkung

Zwei zusammenhängende Lie-Gruppen sind also wegen [2.5](#) genau dann als Lie-Gruppen lokal isomorph, wenn ihre universellen Überlagerungen isomorph sind. Alle lokal isomorphen zusammenhängenden Lie-Gruppen erhält man aus ihren einfachzusammenhängenden Repräsentanten durch das Herausfaktorieren diskreter Normalteiler. In vielen Fällen (z.B. bei den halbeinfachen Lie-Gruppen) ist das Zentrum der universellen Überlagerung diskret, also erhält man alle lokal dazu isomorphen Lie-Gruppen durch Herausfaktorieren von Untergruppen des Zentrums. Insbesondere können wir dann das ganze Zentrum herausfaktorieren und erhalten die sogenannte adjungierte Gruppe.

## 3. Infinitesimale Struktur

Wir wollen nun die Gruppenstruktur der Lie-Gruppe benutzen um eine algebraische Struktur am Tangentialraum zu erhalten. Dazu betrachten wir folgenden wichtigen Teilvektorraum aller Vektorfelder:

### 3.1 Definition (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe)

Der Teilvektorraum  $\mathcal{L}(G)$  (oder kurz  $\mathcal{L}G$ ) von  $\mathfrak{X}(G) := C^\infty(G \leftarrow TG)$  der sogenannten LINKSINVARIANTEN VEKTORFELDER ist definiert durch

$$\mathcal{L}(G) := \left\{ \xi \in \mathfrak{X}(G) : \xi \text{ ist } L_g\text{-verwandt mit } \xi \text{ für alle } g, \text{ d.h. } TL_g \circ \xi = \xi \circ L_g \right\},$$

d.h. es ist genau dann  $\xi \in \mathcal{L}(G)$  (siehe [\[Kri07, 29.3\]](#)), wenn  $TL_g(\xi_h) = \xi_{gh} \forall g, h \in G$  und es genügt diese Gleichung für  $h = e$  zu fordern (also sind diese Vektorfelder durch ihren Wert bei  $e$  bereits eindeutig festgelegt), denn aus  $\xi_g = TL_g(\xi_e)$  folgt:

$$TL_g(\xi_h) = TL_g(TL_h(\xi_e)) = T(L_g \circ L_h)(\xi_e) = TL_{gh}(\xi_e) = \xi_{gh} = \xi(L_g(h)).$$

### 3.2 Lemma.

Das Tangentialbündel  $\pi : TG \rightarrow G$  einer Lie-Gruppe  $G$  ist isomorph zum trivialen Bündel  $\text{pr}_1 : G \times \mathcal{L}(G) \rightarrow G$ , also ist jede Lie-Gruppe parallelisierbar.

Der Vektorraum  $T_e G$  ist isomorph zu  $\mathcal{L}G$ , ist also eine  $\dim(G)$ -dimensionale Teil-Lie-Algebra von  $\mathfrak{X}(G)$ .

**Beweis.** Die Einschränkung der Tangentialabbildung  $T\mu : T(G \times G) \rightarrow TG$  der Multiplikation  $\mu : G \times G \rightarrow G$  liefert eine glatte Abbildung  $G \times T_e G \hookrightarrow TG \times TG \cong T(G \times G) \rightarrow TG$ , welche bei fixen  $g \in G$  der lineare Isomorphismus  $TL_g : T_e G \cong \{g\} \times T_e G \rightarrow T_g G$  ist. Also ist diese Abbildung  $(g, \xi) \mapsto TL_g \cdot \xi$  ein faserlinearer Diffeomorphismus  $G \times T_e G \rightarrow TG$  mit inverser Abbildung  $\xi \mapsto (\pi(\xi), TL_{\pi(\xi)^{-1}} \cdot \xi)$ .

Der lineare Isomorphismus zwischen  $T_e G$  und  $\mathcal{L}G$  ist durch  $\xi_e \mapsto (g \mapsto TL_g \cdot \xi_e)$  und  $\xi \mapsto \xi_e$  gegeben. Schließlich ist  $\mathcal{L}G$  eine Teilalgebra, da für  $L_g$ -verwandte

Vektorfelder auch deren Summe bzw. Lie-Klammer  $L_g$ -verwandt ist nach [Kri07, 29.7].  $\square$

### 3.3 Folgerung (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe).

Es definiert  $\mathcal{L}$  einen Funktor von der Kategorie der lokalen Lie-Homomorphismen zwischen Lie-Gruppen in die Kategorie der Homomorphismen zwischen endlich-dimensionalen Lie-Algebren.

**Beweis.** Sei  $f : G \rightarrow H$  ein lokaler Lie-Homomorphismus, dann wird  $\mathcal{L}f : \mathcal{L}G \rightarrow \mathcal{L}H$  definiert durch  $(\mathcal{L}f \cdot \xi)_h := TL_h \cdot T_e f \cdot \xi_e$ , also durch folgendes Diagramm:

$$\mathfrak{X}(G) \supseteq \begin{array}{ccc} \mathcal{L}G & \xrightarrow{\mathcal{L}f} & \mathcal{L}H \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ T_e G & \xrightarrow{T_e f} & T_e H \end{array} \subseteq \mathfrak{X}(H)$$

Jedes  $\xi \in \mathcal{L}G$  ist  $f$ -verwandt mit  $\mathcal{L}f \cdot \xi \in \mathcal{L}H$ , d.h. folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{Tf} & TH \\ \xi \uparrow & & \uparrow \mathcal{L}f \cdot \xi \\ G & \xrightarrow{f} & H, \end{array}$$

denn wegen  $L_{f(p)} \circ f = f \circ L_p$  ist

$$(\mathcal{L}f \cdot \xi)_{f(p)} = TL_{f(p)} \cdot T_e f \cdot \xi_e = T_p f \cdot T_e L_p \cdot \xi_e = T_p f \cdot \xi_p.$$

Offensichtlich ist  $\mathcal{L}f \cdot \xi \in \mathcal{L}H$  eindeutig durch diese  $f$ -Verwandtschaft bestimmt und daraus folgt mittels [Kri07, 29.7] die Homomorphie-Eigenschaft von  $\mathcal{L}f$ .  $\square$

### 3.4 Lemma.

Jedes  $\xi \in \mathcal{L}G$  induziert einen eindeutigen Lie-Homomorphismus

$$\exp_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ mit } \exp'_\xi = \xi \circ \exp_\xi.$$

**Beweis.** Lokal um 0 existiert eine eindeutige Lösung  $\exp_\xi$  dieser Differentialgleichung zum Anfangswert  $\exp_\xi(0) = e$  und diese ist ein lokaler Lie-Homomorphismus: Sei nämlich  $c(t) := \exp_\xi(s)^{-1} \exp_\xi(s+t)$ , dann ist  $c$  ebenfalls Lösung dieser Differentialgleichung, denn

$$\begin{aligned} c'(t) &= TL_{\exp_\xi(s)^{-1}} \cdot \exp'_\xi(s+t) = TL_{\exp_\xi(s)^{-1}} \cdot \xi_{\exp_\xi(s+t)} \\ &\stackrel{\xi \in \mathcal{L}G}{=} TL_{\exp_\xi(s)^{-1}} \cdot TL_{\exp_\xi(s+t)} \cdot \xi_e = TL_{c(t)} \cdot \xi_e = \xi_{c(t)}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\exp'_\xi(t) = c'(t) = \xi_{c(t)} = \xi_{\exp_\xi(s)^{-1} \exp_\xi(s+t)}.$$

Weil  $\mathbb{R}$  einfachzusammenhängend ist, setzt sich  $\exp_\xi$  zu einem globalen Lie-Homomorphismus nach [2.5] fort. Dieser muß die Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$  sein, denn

$$\begin{aligned} \exp'_\xi(t) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_\xi(t+s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left( \exp_\xi(t) \cdot \exp_\xi(s) \right) \\ &= TL_{\exp_\xi(t)} \cdot \xi_e = \xi_{\exp_\xi(t)}. \quad \square \end{aligned}$$

### 3.5 Folgerung (1-Parameter Untergruppen).

$\mathcal{L}G$  steht in Bijektion zur Menge der 1-PARAMETER UNTERGRUPPEN von  $G$ , d.h. der Lie-Homomorphismen von  $\mathbb{R}$  nach  $G$ .

Der (globale) Fluß zu  $\xi \in \mathcal{L}G$  ist  $\text{Fl}^\xi(t, g) = g \cdot \exp_\xi t$ , d.h.  $\text{Fl}_t^\xi = R_{\exp_\xi t}$ .

**Beweis.** Die Abbildung  $\xi \mapsto \exp_\xi, \mathcal{L}G \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}, G)$  ist injektiv, denn  $c \mapsto c'(0) \in T_e G \cong \mathcal{L}G$  ist ein Linksinverses. Dies ist auch ein Rechtsinverses, denn sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow G$  ein Lie-Homomorphismus, dann ist  $c$  Lösung der Differentialgleichung:

$$c'(t) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c(t+s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c(t) \cdot c(s) = TL_{c(t)} \cdot c'(0) = \xi_{c(t)},$$

wobei  $\xi$  das linksinvariante Vektorfeld zu  $c'(0)$  ist, d.h.  $c = \exp_\xi$ .

Es gilt auch die behauptete Formel für den Fluß zu  $\xi$ , denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(g \cdot c(t)) &= TL_g \cdot c'(t) = TL_g \cdot \xi_{c(t)} \\ &= TL_g \cdot TL_{c(t)} \cdot \xi_e = TL_{g \cdot c(t)} \cdot \xi_e = \xi_{g \cdot c(t)}. \quad \square \end{aligned}$$

### 3.6 Definition (Exponentialabbildung)

Unter der EXPONENTIALABBILDUNG  $\exp_G$  einer Liegruppe  $G$  versteht man die Abbildung  $\exp_G: \mathcal{L}G \rightarrow G, \xi \mapsto \exp_\xi(1) = \text{Fl}^\xi(1, e)$ .

### 3.7 Lemma.

Die Exponentialabbildung  $\exp_G$  einer Lie-Gruppe  $G$  ist glatt und erfüllt  $T_0 \exp_G = \text{id}_{T_e G}$ . Es ist also  $\exp_G: \mathcal{L}G \rightarrow G$  ein lokaler Diffeomorphismus bei 0.

**Beweis.** Sei  $\psi(g, \xi) := (\exp(t\xi), \xi)$ , dann ist  $\psi \in \mathfrak{X}(G \times \mathcal{L}G)$  und  $t \mapsto (\exp(t\xi), \xi)$  ist die Lösung der zu  $\psi$  gehörigen Differentialgleichung mit Anfangswert  $(e, \xi)$ , also glatt in  $\xi$ . Somit ist auch  $\exp$  glatt, und es gilt:  $T_0 \exp \cdot \xi = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi) = \exp'_\xi(0) = \xi_e$ .  $\square$

### 3.8 Folgerung.

Es sei  $f: G \rightarrow H$  ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}G & \xrightarrow{\mathcal{L}f} & \mathcal{L}H \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Ist insbesondere  $G$  eine Lie-Untergruppe von  $H$ , so ist  $\exp_G$  die Einschränkung von  $\exp_H$ .

**Beweis.** Es genügt zu zeigen, daß  $t \mapsto f(\exp_G(t\xi_e))$  die Differentialgleichung für  $t \mapsto \exp_H(t \cdot (\mathcal{L}f)(\xi_e))$  löst. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\exp_G(t\xi_e)) &= Tf \cdot \frac{\partial}{\partial t} \exp_G(t\xi_e) = Tf \cdot TL_{\exp_G(t\xi_e)} \cdot \xi_e \\ &= TL_{f(\exp_G(t\xi_e))} \cdot Tf \cdot \xi_e = TL_{f(\exp_G(t\xi_e))} \cdot \mathcal{L}f \cdot \xi_e \quad \square \end{aligned}$$

### 3.9 Beispiele.

- Es sei  $G$  die abelsche Lie-Gruppe  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\mu : G \times G \rightarrow G$  ist die Addition  $(g, h) \mapsto g + h$  und  $T_0 L_g \cdot v = \partial_2 \mu(g, 0) \cdot v = v$ . Also sind die linksinvarianten Vektorfelder gerade die konstanten Vektorfelder, und die Lie-Klammer von solchen ist 0, d.h. die Lie-Algebra  $\mathcal{L}G$  ist  $\mathbb{R}^n$  mit der 0-Klammer. Die Differentialgleichung für  $c : t \mapsto \exp_G(t \cdot \xi_e)$  ist

$$\frac{\partial}{\partial t} c(t) = \xi_{c(t)} = T L_{c(t)} \cdot \xi_e = \xi_e \text{ mit Anfangswert } c(0) = 0,$$

also ist  $c(t) = t \cdot \xi_e$  und somit  $\exp_G(\xi_e) = \xi_e$  die Identität.

- Sei nun  $G$  die Lie-Gruppe  $GL(n)$ . Da  $G$  offen in  $L(n, n)$  ist, ist  $T_g G = L(n, n)$  für alle  $g \in G$ . Die Multiplikation ist  $\mu : G \times G \rightarrow G$  ist die Komposition  $(g, h) \mapsto g \circ h$  und hat als Ableitung  $\mu'(g, h) \cdot (u, v) = g \circ v + u \circ h$ . Die linksinvarianten Vektorfelder  $GL(n) \rightarrow L(n, n)$  sind also jene der Form

$$g \mapsto v_g := T L_g \cdot v = \partial_2 \mu(g, e) \cdot v = g \circ v \text{ mit } v \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Deren Ableitung auf der offenen Menge  $GL(n) \subseteq L(n, n)$  ist

$$v'(g)(h) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v_{g+th} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g + th) \circ v = h \circ v.$$

Die Lie-Klammer von  $u, v \in T_e G \cong \mathcal{L}G$  ist somit nach [Kri07, 29.2]:

$$[u, v]_g := v'(g) \cdot u_g - u'(g) \cdot v_g = u_g \circ v - v_g \circ u = g \circ (u \circ v - v \circ u),$$

Also ist die Lie-Algebra von  $G$  gerade  $L(n, n)$  mit dem Kommutator.

Die Differentialgleichung für  $c : t \mapsto \exp_G(t \cdot \xi_e)$  ist

$$\frac{\partial}{\partial t} c(t) = \xi_{c(t)} = T L_{c(t)} \cdot \xi_e = c(t) \circ \xi_e \text{ mit Anfangswert } c(0) = \text{id},$$

also ist  $c(t) = e^{t \cdot \xi_e}$  (siehe [1.3]) und somit  $\exp_G(\xi_e) = e^{\xi_e}$ . Das rechtfertigt die Bezeichnung Exponentialfunktion für allgemeine Lie-Gruppen.

- Die Exponentialabbildung der  $SL_{\mathbb{C}}(2)$ , siehe [1.24]. Die Lie-Algebra der speziellen linearen Gruppe  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  ist

$$\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2) = \{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : \text{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\},$$

d.h.

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2) \Leftrightarrow d = -a.$$

Wie wir in [1.24] bei der  $SL(2)$  gesehen haben ist

$$\begin{aligned} \exp(T) &= \cosh(\sqrt{-\det T}) + \frac{\sinh(\sqrt{-\det T})}{\sqrt{-\det T}} T \\ &= \cos(\sqrt{\det T}) + \frac{\sin(\sqrt{\det T})}{\sqrt{\det T}} T. \end{aligned}$$

Ist  $\det T$  reell (was z.B. für die Untergruppe  $SL(2) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(2)$  der Fall ist), dann gilt:

Ist  $\det T = 0$ , so ist  $t \mapsto \exp(tT) = 1 + tT$  eine Gerade.

Ist  $\Delta^2 := \det T > 0$ , so parametrisiert  $t \mapsto \exp(tT) = \cos(t\Delta) + \sin(t\Delta) \frac{1}{\Delta} T$  eine Ellipse mit Achsen  $\text{id}$  und  $\frac{1}{\Delta} T$ . Insbesondere ist also  $\exp$  nicht injektiv.

Ist  $-\Delta^2 := \det T < 0$ , so parametrisiert  $t \mapsto \exp(tT) = \cosh(t\Delta) + \sinh(t\Delta) \frac{1}{\Delta} T$  eine Hyperbel mit Achsen  $\text{id}$  und  $\frac{1}{\Delta} T$ .

### 3.10 Folgerung.

Sind  $f$  und  $g$  zwei (lokale) Lie-Homomorphismen mit  $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$ , dann ist  $f = g$  lokal um  $e$ .

**Beweis.** Nach [3.8](#) ist  $f \circ \exp = \exp \circ \mathcal{L}f = \exp \circ \mathcal{L}g = g \circ \exp$ . Da  $\exp$  nach [3.7](#) ein lokaler Diffeomorphismus ist, stimmen also  $f$  und  $g$  lokal überein.  $\square$

### 3.11 Folgerung.

*Jeder stetige Gruppenhomomorphismus zwischen Lie-Gruppen ist bereits glatt.*

**Beweis.** Sei  $f : G \rightarrow H$  ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Zuerst betrachten wir den Fall  $G = \mathbb{R}$ . Es gibt ein radiales offenes  $U \subseteq \mathcal{L}H$  um 0, sodaß  $\exp|_{2U}$  ein Diffeomorphismus ist. Sei  $t_0 > 0$  so gewählt, daß  $f(t) \in \exp(U)$  für  $|t| \leq t_0$ . Es gibt somit  $\xi_0, \xi' \in U$  mit  $f(t_0) = \exp(\xi_0)$  und  $f(t_0/2) = \exp(\xi')$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(2\xi') &= \exp(\xi')^2 = f(t_0/2)^2 = f(t_0) = \exp(\xi_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\xi' = \xi_0 \Rightarrow f(t_0/2) = \exp(\xi_0/2). \end{aligned}$$

Durch Induktion bekommt man:  $f(rt_0) = \exp(r\xi)$  für alle  $r = k/2^m$  mit  $|k| < 2^m$ . Da  $f$  stetig ist, gilt das für alle  $r$  mit  $|r| < 1$ . Also ist  $f$  glatt nahe 0. Sei nun  $G$  beliebig,  $(\xi_i)_{i=1}^m$  eine Basis von  $T_e G \cong \mathcal{L}G$ . Wir betrachten die glatte Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow G, (t_1, \dots, t_m) \mapsto \exp(t_1\xi_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_m\xi_m).$$

Ihre  $i$ -te partielle Ableitung bei 0 ist  $\xi_i$ , somit ist  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus. Es ist

$$(f \circ \varphi)(t_1, \dots, t_m) = f(\exp(t_1\xi_1)) \cdot \dots \cdot f(\exp(t_m\xi_m))$$

lokal bei 0 glatt, also auch  $f$  lokal bei  $e$ . Wegen  $f = L_{f(g)} \circ f \circ L_{g^{-1}}$  ist  $f$  überall glatt.  $\square$

### 3.12 Folgerung.

*Sind zwei Lie-Gruppen als topologische Gruppen isomorph, so sind sie sogar als Lie-Gruppen isomorph. D.h. die  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeitsstruktur einer Lie-Gruppe ist durch die Topologie bereits eindeutig festgelegt.*  $\square$

## 4. Infinitesimale versus lokale Struktur

### 4.1 Definition (Unter-Lie-Gruppe)

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Eine Teilmenge  $H$  heißt UNTER-LIE-GRUPPE von  $G$  falls  $H$  Untergruppe von  $G$  ist,  $H$  eine Lie-Gruppe ist und die Inklusion von  $H$  in  $G$  glatt ist. Letztere ist dann sogar eine Immersion und damit  $\mathcal{L}(H)$  eine Unter-Lie-Algebra von  $\mathcal{L}(G)$ : Angenommen  $T_e \text{incl} \cdot \xi = 0$ , dann ist  $\text{incl}(\exp(t\xi)) = \exp(t \cdot T \text{incl} \xi) = e$ , daher ist  $\text{incl}$  nicht injektiv (Widerspruch).

Bemerkung: Wir verlangen also nicht, daß eine Unter-Lie-Gruppe eine (reguläre) Untermannigfaltigkeit sondern nur eine immersive Untermannigfaltigkeit ist. Mit dieser Definition wird etwa  $(\mathbb{R}, +)$  mit der diskreten Topologie zu einer Unter-Lie-Gruppe von  $(\mathbb{R}, +)$  mit der Standardtopologie.

### 4.2 Bemerkung

Wir haben in [\[Kri07, 28.6\]](#) gesehen, daß Integralkurven von Vektorfeldern nicht immer global definiert sind. Anschaulich gesprochen sind sie nicht für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert, weil sie bereits in endlicher Zeit nach "unendlich" entweichen. Es sind also die Lösungskurven "zu schnell", d.h. die Geschwindigkeitsvektoren zu groß. Wir können aber den Fluß global machen, indem wir seine Geschwindigkeit verkleinern.

Abstrakter, indem wir die Geschwindigkeit insgesamt ignorieren:

- An Stelle von Vektorfeldern betrachten wir eindimensionale Teilräume  $E_p \subseteq T_p M \forall p \in M$ , also Teilvektorbündel.
- An Stelle von Lösungskurven betrachten wir Integralmannigfaltigkeiten, das sind 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten  $N$  von  $M$ , für die  $T_p N = E_p$  gilt.

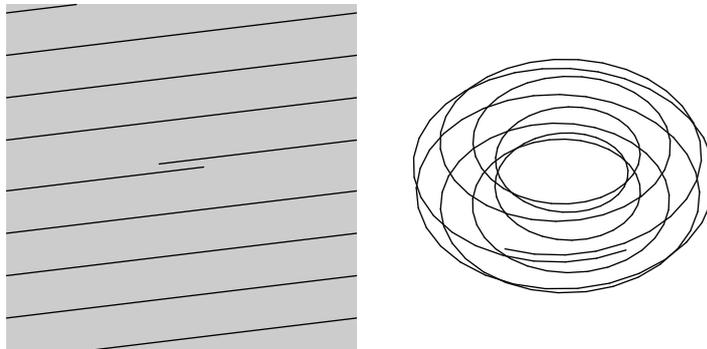
Wir können diese Begriffe auch im mehrdimensionalen Fall formulieren:

#### 4.3 Definition (Integralmannigfaltigkeit)

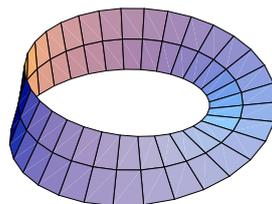
Es sei  $E$  ein Teilvektorbündel von  $\pi: TM \rightarrow M$  (in der (älteren) Literatur auch als DISTRIBUTION bezeichnet). Dann versteht man unter einer INTEGRALMANNIGFALTIGKEIT  $N$  zu  $E$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeitsstruktur auf einer Teilmenge  $N \subseteq M$ , sodaß  $\text{incl}: N \rightarrow M$  eine Immersion und  $T \text{incl}: T_p N \rightarrow E_p$  für alle  $p \in N$  eine Bijektion ist.

#### 4.4 Beispiele

- 1) Für eindimensionale Teilvektorbündel (d.h. LINIENBÜNDEL), die ja lokal von einem Vektorfeld aufgespannt werden, existieren immer Integralkurven zu diesem Vektorfeld, und damit auch Integralmannigfaltigkeiten des Bündels. Z.B.: Hat ein "konstantes" Vektorfeld am Torus irrationalen Anstieg, dann liegt jede ihrer Integralmannigfaltigkeiten dicht.

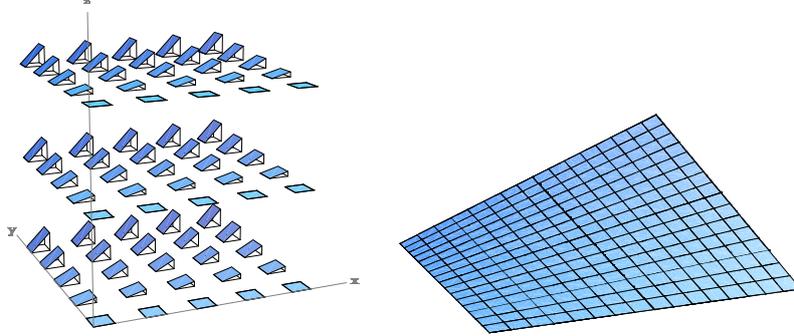


- 2) Man bemerke allerdings, daß Linienbündel  $E$  im allgemeinen nicht global durch ein Vektorfeld aufgespannt werden. Ein Beispiel liefert das Möbiusband  $\pi: M \rightarrow S^1$ , wenn  $E := \text{Ker}(T\pi)$  alle Vektoren sind, die von Kurven in den Fasern herrühren.



- 3) Im mehrdimensionalen Fall gilt im allgemeinen nicht, daß jedes Teilvektorbündel eine Integralmannigfaltigkeit erzeugt. Betrachte dazu das Beispiel

$$M := \mathbb{R}^3 \text{ mit } E_{xyz} := \langle \{ \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \} \rangle \subseteq T_{(x,y,z)} \mathbb{R}^3.$$



Sei  $N$  eine Integralmannigfaltigkeit durch  $(0, 0, 0)$ . Wir betrachten vorerst den Schnitt  $N \cap \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ . Wegen  $T_0 N = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  ist dieser Schnitt lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Tangentialraum  $\langle (0, 1, 0) \rangle$  in jedem Punkt, also Teil der  $y$ -Achse. Für ein fixes  $y_0$  betrachten wir nun den Schnitt  $N \cap \{(x, y_0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ . Wie zuvor ist dieser Schnitt lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit nun mit Tangentialraum  $\langle (1, 0, y_0) \rangle$  in jedem Punkt, also Teil der Geraden  $(0, y_0, 0) + \mathbb{R} \cdot (1, 0, y_0) = \{(x, y_0, xy_0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Somit ist  $N$  lokal durch  $\{(x, y, xy) : x, y \in \mathbb{R}\}$  gegeben. Betrachtet man aber den Tangentialraum in  $(1, 0, 0)$ , so enthält dieser Vektoren, deren 2. und 3. Komponente  $\neq 0$  ist:  $T_{(x,y,xy)} N = \langle (1, 0, y), (0, 1, x) \rangle \neq E_{(x,y,z)}$  für  $x \neq 0$ . Eine Integralmannigfaltigkeit durch 0 existiert also nicht.

#### 4.5 Bemerkung

Angenommen  $E$  ist ein Teilbündel von  $TM$ , das durch jeden Punkt eine Integralmannigfaltigkeit besitzt. Sei  $p \in M$  und  $N$  die Integralmannigfaltigkeit durch  $p$  und seien  $\xi, \eta$  Vektorfelder auf  $M$  mit  $\xi_x, \eta_x \in E_x$  für alle  $x$ . Wegen Lemma [Kri07, 29.5] existieren Vektorfelder  $\xi_1, \eta_1$  auf  $N$ , sodaß  $\xi_1, \eta_1$  bezüglich  $\text{incl}$  verwandt sind mit  $\xi, \eta$ . Dann ist  $[\xi_1, \eta_1]$  ein Vektorfeld auf  $N$  und  $[\xi_1, \eta_1]$  ist  $\text{incl}$ -verwandt mit  $[\xi, \eta]$ . Wir erhalten  $[\xi, \eta]_p = T \text{incl} [\xi_1, \eta_1]_p \in E_p$ .

#### 4.6 Definition (Integrable Teilbündel)

Ein Teilvektorbündel  $E$  von  $\pi : TM \rightarrow M$  heißt integrabel, falls für alle Vektorfelder von  $M$  die punktweise in  $E$  liegen dies auch für deren Lie-Klammer gilt. Dies ist äquivalent dazu, daß für eine/jede lokale Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von Vektorfeldern in  $E$  es Funktionen  $c_{i,j}^k$  für  $i, j, k = 1, \dots, n$  mit  $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k e_k$  gibt. In der Tat seien  $\xi = \sum_i \xi^i e_i$  und  $\eta = \sum_j \eta^j e_j$  zwei Vektorfelder in  $E$ , so ist

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= \sum_{i,j} [\xi^i e_i, \eta^j e_j] \stackrel{\text{[Kri07, 29.2.3]}}{=} \sum_{i,j} \left( \xi^i \eta^j [e_i, e_j] + \xi^i e_i(\eta^j) e_j - \eta^j e_j(\xi^i) e_i \right) \\ &= \sum_{i,j} \left( \xi^i \eta^j \sum_k c_{i,j}^k e_k + \xi^i e_i(\eta^j) e_j - \eta^j e_j(\xi^i) e_i \right) \\ &= \sum_k \left( \sum_{i,j} \xi^i \eta^j c_{i,j}^k + \sum_i \xi^i e_i(\eta^k) - \sum_j \eta^j e_j(\xi^k) \right) e_k \end{aligned}$$

#### 4.8 Lokales Integrabilitätstheorem von Frobenius.

Es sei  $E$  ein Teilvektorbündel von  $\pi: TM \rightarrow M$  der Faserdimension  $n$ . Dann ist  $E$  genau dann integrabel, wenn zu jedem  $p$  eine Integralmannigfaltigkeit durch  $p$  existiert (genauer: es existiert eine Karte  $\varphi$  mit  $\varphi(0) = p$ , sodaß  $\varphi(\mathbb{R}^n \times \{a\})$  eine Integralmannigfaltigkeit für jedes  $a$  ist).

Die Bilder  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  heißen auf englisch PLAQUES, also frei übersetzt Blättchen.

**Beweis.** Wir zeigen zuerst die Existenz einer lokalen Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von Vektorfeldern in  $E$  mit  $[e_i, e_j] = 0$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ :

Sei dazu  $(f_1, \dots, f_n)$  irgendeine lokale Basis von  $E$  und  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten von  $M$ . Dann ist  $f_i = \sum_{j=1}^m f_i^j \frac{\partial}{\partial u^j}$  mit maximalem Rang  $((f_i^j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}) = n$ . Durch Umordnen der Koordinaten  $u^i$  können wir erreichen, daß  $A := (f_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$  invertierbar ist und wenn wir mit  $(e_1, \dots, e_n)$  die aus  $(f_1, \dots, f_n)$  durch Transformation mit  $A^{-1}$  gewonnene Basis von  $E$  bezeichnen, so ist:

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{j>n} e_i^j \frac{\partial}{\partial u^j} \text{ mit } e_i^j : M \rightarrow \mathbb{R} \\ [e_i, e_j] &= \sum_{k>n} e_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial u^k} + 0 \text{ mit } e_{i,j}^k : M \rightarrow \mathbb{R} \\ [e_i, e_j] &= \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k e_k = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k \left( \frac{\partial}{\partial u^k} + \sum_{l>n} e_k^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \text{ mit } c_{i,j}^k : M \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

und somit  $c_{i,j}^k = 0$ , d.h.  $[e_i, e_j] = 0$ .

Seien nun lokale Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$  gewählt mit  $\frac{\partial}{\partial u^i} |_{u(0)} = e_i|_p$ , d.h. o.B.d.A.  $M = \mathbb{R}^m$  und  $e_i|_0$  die standard Einheitsvektoren für  $i \leq n$ . Betrachte  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  (vgl. mit [Kri07, 29.12]) gegeben durch

$$\varphi(t_1, \dots, t_m) := \left( \text{Fl}_{t_1}^{e_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_n}^{e_n} \right) (0, \dots, 0, t_{n+1}, \dots, t_m)$$

Dann ist für  $i \leq n$ :

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi(t_1, \dots, t_m) &= \frac{\partial}{\partial t_i} \text{Fl}_{t_i}^{e_i} \left( \left( \text{Fl}_{t_1}^{e_1} \circ \dots \circ \overline{\text{Fl}_{t_i}^{e_i}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_n}^{e_n} \right) (0, \dots, 0, t_{n+1}, \dots, t_m) \right) \\ &= e_i \left( \text{Fl}_{t_i}^{e_i} \left( \left( \text{Fl}_{t_1}^{e_1} \circ \dots \circ \overline{\text{Fl}_{t_i}^{e_i}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_n}^{e_n} \right) (0, \dots, 0, t_{n+1}, \dots, t_m) \right) \right) \\ &= e_i|_{\varphi(t_1, \dots, t_m)} \end{aligned}$$

und somit  $\varphi'(0) = \text{id}$ . Folglich ist  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein lokaler Diffeomorphismus und  $E_{\varphi(t)} = \varphi'(t)(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ .  $\square$

#### 4.9 Integrabilitätstheorem von Frobenius, globale Version.

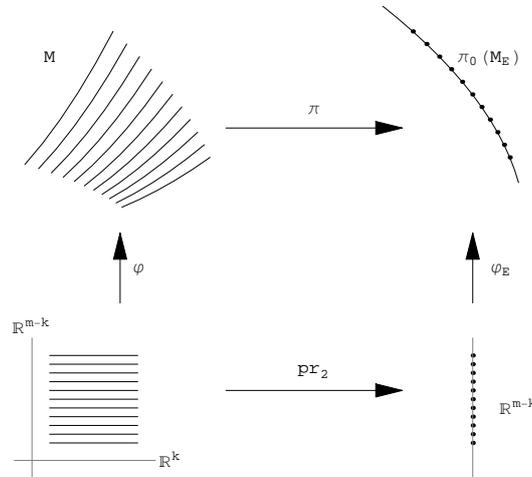
Es sei  $E$  ein integrables Teilbündel von  $TM$ , dann gilt

1. Es existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur  $M_E$  auf  $M$ , sodaß die Inklusion  $\text{incl}: M_E \rightarrow M$  eine Immersion ist und  $T \text{incl}(TM_E) = E$  gilt, d.h.  $T \text{incl}: TM_E \rightarrow E \subseteq TM$  ist bijektiv
2. Sei  $f: N \rightarrow M$  glatt und  $Tf(TN) \subseteq E$ . Dann ist  $f: N \rightarrow M_E$  glatt, d.h.  $M_E$  ist feiner als  $M$ .
3. Jede Zusammenhangskomponente von  $M_E$  (diese heißen MAXIMALE INTEGRALMANNIGFALTIGKEITEN) ist eine initiale (siehe [Kri07, 21.7]) Teilmannigfaltigkeit von  $M$  und ist parakompakt falls  $M$  es ist.

4. Ist  $N$  eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist  $N$  eine offene Teilmannigfaltigkeit einer Zusammenhangskomponente von  $M_E$ .

In dieser Situation spricht man von der von  $E$  induzierten BLÄTTERUNG (engl.: FOLIATION)  $M_E$  von  $M$ . Die maximalen Integralmannigfaltigkeiten heißen BLÄTTER (engl.: leaves) der Blätterung (Achtung: Dies ist etwas anderes als die Blätter einer Überlagerung).

**Beweis.** Sei vorerst  $f : N \rightarrow M$  glatt,  $\text{Bild}(Tf) \subseteq E$ ,  $f(p) = q$  und  $\varphi$  eine  $E$  trivialisierende Karte um  $q$  wie in [4.8](#), d.h. für jedes  $a$  ist  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  eine Integralmannigfaltigkeit.



Dann liegt  $f$  lokal in einem Blättchen  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ , denn für  $\bar{f} := \varphi^{-1} \circ f$  ist

$$\left. \begin{array}{l} \exists a : \bar{f}(p) \in \mathbb{R}^k \times \{a\} \\ \text{Bild}(T_p \bar{f}) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Bild } \bar{f} \subseteq \mathbb{R}^k \times \{a\}.$$

**1** Ein Atlas einer Mannigfaltigkeitsstruktur  $M_E$  auf der Menge  $M$  ist gegeben durch:

$$\left\{ \varphi|_{\mathbb{R}^k \times \{a\}} : \varphi \text{ trivialisert } E \text{ wie in } \text{4.8}, a \in \mathbb{R}^{m-k} \right\}$$

Betrachte dazu  $(\varphi_1, a_1)$ ,  $(\varphi_2, a_2)$  und  $p \in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}) \cap \varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$ . Da  $\varphi_1|_{\mathbb{R}^k \times \{a_1\}} : \mathbb{R}^k \times \{a_1\} \rightarrow M$  eine Integralmannigfaltigkeit ist, liegt nach dem eben gezeigten Bild  $(\varphi_1|_{\mathbb{R}^k \times \{a_1\}})^{-1} \circ \varphi_2|_{\mathbb{R}^k \times \{a_2\}}$  lokal in  $\varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})$ . Es ist also  $(\varphi_2|_{\mathbb{R}^k \times \{a_2\}})^{-1} \circ (\varphi_1|_{\mathbb{R}^k \times \{a_1\}})$  lokal wohldefiniert und als Einschränkung glatt.

Die Inklusion  $M_E \hookrightarrow M$  dieser Mannigfaltigkeit ist eine Immersion, denn  $TM_E = E$  da  $T(\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})) = E|_{\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})}$  ist.

**2** Sei  $f : N \rightarrow M$  glatt und  $\text{Bild}(Tf) \subseteq E$ . Dann liegt  $f$  lokal nach der Vorbemerkung in einem Blättchen  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  und somit ist  $(\varphi|_{\mathbb{R}^k \times \{a\}})^{-1} \circ f$  lokal wohldefiniert und glatt, also  $f : N \rightarrow M_E$  glatt.

**3** Mit  $M$  ist auch  $M_E$  parakompakt: o.B.d.A. sei  $M$  zusammenhängend,  $C$  sei eine Zusammenhangskomponente von  $M_E$ . Dazu genügt es z.z., daß  $C$  durch abzählbar viele Kartenumgebungen  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  überdeckt wird.

Sei  $\mathcal{A}$  eine Menge abzählbar vieler  $E$  trivialisierende Karten, die  $M$  überdecken;  $p_0 \in C$  fix und  $p \in C$  beliebig: Es existiert also eine Kurve  $c$  in  $C$ , die  $p_0$  und

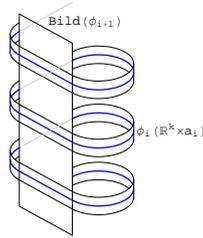
$p$  verbindet. Somit existieren endlich viele Karten  $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in \mathcal{A}$  und  $a_0, \dots, a_n$ , sodaß:

$$p_0 \in \varphi_0(\mathbb{R}^k \times \{a_0\}), \quad p \in \varphi_n(\mathbb{R}^k \times \{a_n\}) \text{ und} \\ \varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset.$$

Zu vorgegebenen  $\varphi_i, \varphi_{i+1}, a_i$  gibt es höchstens abzählbar viele  $a_{i+1}$ , sodaß

$$\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset,$$

denn andernfalls gäbe es eine Überdeckung von  $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \text{Bild } \varphi_{i+1}$  durch überabzählbar viele disjunkte (in der von  $(\varphi_i|_{\mathbb{R}^k \times \{a_i\}})^{-1}(\text{Bild } \varphi_{i+1}) \subseteq \mathbb{R}^k$  induzierten Topologie) offene Mengen  $\varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ , welches ein Widerspruch zur Lindelöf-Eigenschaft wäre.



Also gibt es nur abzählbar viele endliche Folgen  $(\varphi_i, a_i)_i$ , die der Bedingung  $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset$  sowie  $p_0 \in \varphi_0(\mathbb{R}^k \times \{a_0\})$  genügen. Jedes  $p \in C$  wird durch eine geeignete Folge erreicht. Also wird  $C$  durch abzählbar viele Mengen der Form  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  überdeckt.

Die Zusammenhangskomponente  $C$  ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit: Sei dazu  $f : N \rightarrow C \subseteq M$  glatt. Lokal liegt  $f$  in Bild  $\varphi$ , außerdem liegt  $f$  in  $C$ . Da  $C$  (als abzählbare Vereinigung von Blättchen) aber (nach dem eben gezeigten) höchstens abzählbar viele Blättchen von  $\varphi$  trifft, liegt  $f$  lokal in einem Blättchen von  $\varphi$  (verschiedene Blättchen von  $\varphi$  hängen nicht zusammen). Somit ist  $f : N \rightarrow M_E$  stetig und damit auch glatt.

**4** Sei  $N \rightarrow M$  eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist  $\text{incl} : N \rightarrow M_E$  glatt nach (2). Weiters ist  $\text{incl} : N \rightarrow M_E$  injektiv und immersiv (da  $\text{incl} : N \rightarrow M$  es ist) und submersiv (da  $T \text{incl} : T_p N \rightarrow E_p \cong T_p M_E$  bijektiv ist), also ein lokaler Diffeomorphismus. Somit ist  $\text{incl} : N \hookrightarrow M_E$  ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von  $M_E$ .  $\square$

#### 4.10 Proposition (Urbilder von Punkten).

Es sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und  $x \mapsto T_x f$  habe konstanten Rang  $r$ . Dann ist  $\text{Ker}(Tf) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Ker}(T_x f)$  ein integrables Teilvektorbündel von  $TM$  und die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen  $f^{-1}(q)$  sind die maximalen Integralmannigfaltigkeiten zu  $\text{Ker}(Tf)$ , vgl. [Kri07, 21.14.2].

#### 4.11 Satz (Untergruppe zu einer Unteralgebra).

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $\mathcal{H}$  Unter-Lie-Algebra von  $\mathcal{L}G$ . Dann existiert eine eindeutige zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe  $H$  von  $G$  mit  $\mathcal{L}H = \mathcal{H}$ .

**Beweis.** Die Beweisidee ist die folgende: Falls  $H$  eine abgeschlossene Unter-Lie-Gruppe von  $G$  ist, so werden wir in [6.9] eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $G/H$  so definieren, daß die kanonische Quotientenabbildung  $\pi : G \rightarrow G/H$  eine Submersion ist. Die (Zusammenhangskomponenten der) Niveauflächen bilden dann nach [4.10] eine Blätterung mit zugehörigen Teilvektorbündel  $E := \text{Ker}(T\pi)$  von  $TG$ . Es parametrisiert  $H \ni h \mapsto g \cdot h$  die Niveaufläche durch  $g \in G$  und somit ist

$$\begin{aligned} E_g &:= \text{Ker } T_g \pi = T_g(g \cdot H) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} g \cdot \exp(tv) : v \in T_e H \right\} \\ &= \left\{ TL_g \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \exp(tv) : v \in T_e H \right\} = \left\{ TL_g \cdot v : v \in T_e H \right\} = \left\{ \xi_g : \xi \in \mathcal{L}H \right\}. \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt  $\mathcal{H}$  ein Unter-Lie-Algebra von  $\mathcal{L}G$  und das Teilbündel  $E$  von  $TG$  definiert durch  $E_g := \{\xi_g : \xi \in \mathcal{H}\}$ . Dann ist  $E$  integrabel nach [4.6], denn sei  $(e_i)_i$  eine Basis von  $\mathcal{H}$  (bestehend aus links-invarianten Vektorfeldern), dann ist auf  $[e_i, e_j] \in \mathcal{H}$ . Nach dem Satz [4.9] von Frobenius existiert eine eindeutige maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit  $H$  durch  $e$  mit  $TH = E|_H$ . Bleibt zu zeigen, daß  $H$  Untergruppe ist: Sei dazu  $h \in H$ , dann ist  $L_{h^{-1}}(H)$  eine zusammenhängende Teilmannigfaltigkeit. Da die Vektorfelder in  $\mathcal{H}$  linksinvariant sind, ist  $L_{h^{-1}}(H)$  ebenfalls eine Integralmannigfaltigkeit, also  $L_{h^{-1}}(H) \subseteq H$  nach [4.9.4] wegen  $e \in L_{h^{-1}}(H)$ .  $\square$

#### 4.12 Satz (Lie-Gruppe zu einer Lie-Algebra).

Sei  $\mathcal{G}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra. Dann existiert eine (einfachzusammenhängende) Lie-Gruppe  $G$  mit  $\mathcal{L}G \cong \mathcal{G}$ .

**Beweisskizze.** Jede endlich dimensionale Lie-Algebra hat nach dem Satz von Ado (siehe [HN91, §7.2]) eine treue Darstellung auf einem  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\mathcal{G}$  kann als Teilalgebra von  $L(n) \cong \mathcal{L}(GL(n))$  aufgefaßt werden. Nach obigem Satz [4.11] existiert eine zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe  $G$  von  $GL(n)$  mit  $\mathcal{L}G = \mathcal{G}$ . Ihre universelle Überlagerung  $\tilde{G}$  ist dann die gesuchte einfachzusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathcal{G}$ .  $\square$

#### 4.13 Folgerung.

Seien  $G$  und  $H$  zwei Lie-Gruppen,  $\mathfrak{f} : \mathcal{L}G \rightarrow \mathcal{L}H$  ein Lie-Algebra-Homomorphismus. Dann existiert ein lokaler Lie-Gruppen-Homomorphismus  $f$  mit  $\mathcal{L}f = \mathfrak{f}$ . Ist zusätzlich  $G$  einfachzusammenhängend, dann kann  $f$  global gewählt werden.

**Beweis.** Die Beweisidee ist die folgende: Sei  $f : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus. Dann ist  $\text{Graph}(f) \subseteq G \times H$  ein Unterobjekt und  $f$  ist die Lösung der impliziten Bedingung  $(x, f(x)) \in \text{Graph}(f)$ . Wir können also  $f(x)$  (lokal) aus dem Graphen berechnen, falls  $x$  ein eindeutiges Urbild unter  $\text{pr}_1 : \text{Graph}(f) \rightarrow G$  besitzt, und dann ist  $f = \text{pr}_2 \circ (\text{pr}_1|_{\text{Graph}(f)})^{-1}$ . Für (lokale) Lie-Gruppen-Homomorphismen  $f : G \rightarrow H$  gilt  $\mathcal{L}(\text{Graph}(f)) \cong \text{Graph } \mathcal{L}(f)$ , denn  $(\text{id}, f) : G \rightarrow \text{Graph}(f) \subseteq G \times H$  ist ein Lie-Gruppen-Isomorphismus und somit auch  $\mathcal{L}(\text{id}, f) : \mathcal{L}G \rightarrow \mathcal{L}(\text{Graph}(f)) \subseteq \mathcal{L}(G \times H)$  und dies ist  $(\text{id}, \mathcal{L}f)$  vermöge dem Isomorphismus  $\mathcal{L}(G \times H) \cong \mathcal{L}G \times \mathcal{L}H$

Umgekehrt sei also  $\mathcal{K} := \text{Graph}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathcal{L}G \times \mathcal{L}H$ . Nach [4.12] existiert zu dieser Teilalgebra von  $\mathcal{L}G \times \mathcal{L}H = \mathcal{L}(G \times H)$  eine Unter-Lie-Gruppe  $K$  von  $G \times H$  mit  $\mathcal{L}K = \mathcal{K}$ . Sei  $j := \text{pr}_1 \circ \text{incl} : K \hookrightarrow G \times H \rightarrow G$ , dann ist  $j$  ein Lie-Gruppen-Homomorphismus mit  $\mathcal{L}j(\xi, \mathfrak{f}(\xi)) = T \text{pr}_1(T \text{incl}(\xi, \mathfrak{f}(\xi))) = \text{pr}_1(\xi, \mathfrak{f}(\xi)) = \xi$ . Also ist  $\mathcal{L}j$  ein Isomorphismus und  $j$  ein lokaler Diffeomorphismus. Sei schließlich  $f := \text{pr}_2 \circ \text{incl} \circ j^{-1}$ , dann ist  $f$  ein lokaler Lie-Gruppen-Homomorphismus und

$$\mathcal{L}f(\xi) = \mathcal{L} \text{pr}_2(\mathcal{L} \text{incl}(\mathcal{L}j^{-1}(\xi))) = \text{pr}_2(\xi, \mathfrak{f}(\xi)) = \mathfrak{f}(\xi).$$

Für einfachzusammenhängendes  $G$  folgt die Existenz eines globalen Homomorphismus aus [2.5].  $\square$

#### 4.14 Zusammenfassung

Somit stellt  $\mathcal{L}$  eine bis auf lokale (globale) Isomorphien bijektive Zuordnung zwischen (einfachzusammenhängenden) Lie-Gruppen und endlich dimensionalen Lie-Algebren dar.

Genauer: Der Funktor  $\mathcal{L}$  ist eine Äquivalenz (d.h. invertierbar bis auf natürliche Isomorphismen, siehe [Kri08, 1.22]) von der Kategorie der Keime lokalen Lie-Gruppen-Homomorphismen zwischen endlich dimensionalen Lie-Gruppen in jene der Lie-Algebra-Homomorphismen zwischen endlich dimensionalen Lie-Algebren. In der Tat existiert nach [4.12] zu jeder endlich-dimensionalen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Gruppe  $G$  mit  $\mathcal{L}(G) \cong \mathfrak{g}$  (d.h. der Funktor ist dicht, siehe [Kri08, 1.22]) und nach [4.13] zu jedem Lie-Algebra-Homomorphismus  $\mathfrak{f}$  ein lokaler Lie-Gruppen-Homomorphismus  $f$  mit  $\mathcal{L}(f) = \mathfrak{f}$  (d.h. der Funktor ist voll, siehe [Kri08, 1.10]). Ist schließlich  $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$  für  $f, g : G \rightarrow H$ , so ist  $f = g$  lokal um  $e$  nach [3.10] (d.h. der Funktor ist treu, siehe [Kri08, 1.10]). Rein kategoriell folgt nun die Existenz eines bis auf Isomorphie inversen Funktors, siehe [Kri08, 1.22], indem wir zu jeder Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Gruppe  $G$  mit  $\mathcal{L}G \cong \mathfrak{g}$  wählen und zu jedem Lie-Algebra-Homomorphismus  $\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  den zugehörigen lokalen Lie-Gruppen-Homomorphismus  $f$  zuordnen.

Schränkten wir  $\mathcal{L}$  auf die (volle Teilkategorie) der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen ein. So sind die Morphismen nach [2.5] eindeutig zu global definierten Lie-Gruppen-Homomorphismen erweiterbar und die Teilkategorie ist äquivalent zur ganzen Kategorie, denn die universelle Überlagerung definiert einen Funktor welcher bis auf natürliche Isomorphie invers zur Einbettung der Teilkategorie ist.

#### 4.15 Definition (Gruppen-Wirkung)

Wir wollen nun ein Situation diskutieren, die richtig interpretiert eine Verallgemeinerung von [4.13] auf die unendlich dimensionale Diffeomorphismengruppe  $H := \text{Diff}(M)$  von endlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $M$  ist.

Unter einer glatten (LINKS-)WIRKUNG einer Lie-Gruppe  $G$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  versteht man eine glatte Abbildung  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  die

$$\varphi(e, x) = x \text{ und } \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x) \text{ für alle } g, h \in G \text{ und } x \in M$$

erfüllt. Natürlicher wäre es statt dessen die Abbildung  $\check{\varphi} : G \rightarrow C^\infty(M, M)$  zu betrachten. Obige Gleichungen lauten dann

$$\check{\varphi}(e) = \text{id} \text{ und } \check{\varphi}(g) \circ \check{\varphi}(h) = \check{\varphi}(gh),$$

besagen also, daß  $\check{\varphi}$  ein Gruppen-Homomorphismus von  $G$  in die Gruppe  $\text{Diff}(M)$  der Diffeomorphismen von  $M$  ist. Um auch die Glattheit von  $\varphi$  in jene von  $\check{\varphi}$  zu übersetzen benötigt man allerdings eine glatte Struktur auf der unendlich-dimensionalen Gruppe  $\text{Diff}(M)$ . Dies läßt sich auch machen, siehe z.B. [KM97, 43.1].

Was können wir als Lie-Algebra von  $\text{Diff}(M)$  erwarten? Für endlich-dimensionale Lie-Gruppen  $H$  war  $\mathcal{L}H \cong \text{Hom}(\mathbb{R}, H)$  via  $\xi \mapsto (\exp_\xi : t \mapsto \exp(t\xi))$  nach [3.5]. Die 1-Parameter Untergruppen  $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$  entsprechen nach oben Gesagten aber gerade den Wirkungen von  $\mathbb{R}$  auf  $M$ , also den Flüssen auf  $M$ . Nach [Kri07, 28.3]

und [Kri07, 28.6.1] stehen die Flüsse  $\varphi$  auf (kompakten)  $M$  in Bijektion zu den Vektorfeldern  $\xi$  auf  $M$  vermöge

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) = \xi_{\varphi(t, x)}.$$

Also ist insbesondere  $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\varphi(t, x) = \xi_x$  und naheliegenderweise sollte  $\frac{d}{dt}|_{t=0}\check{\varphi}(t)(x) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\varphi(t, x)$  sein, d.h.  $\xi$  der zu  $\check{\varphi}$  gehörende Tangentialvektor in  $T_e(\text{Diff}(M))$  und  $\mathcal{L}(\text{Diff}(M)) = \mathfrak{X}(M)$ .

Was erwarten wir als Exponentialabbildung  $\exp : \mathfrak{X}(M) \cong \mathcal{L}(\text{Diff}(M)) \rightarrow \text{Diff}(M)$ ? Für endlich-dimensionale Lie-Gruppen  $H$  war  $\exp(v)$  der Wert an der Stelle 1 der 1-Parameter-Untergruppe die Ableitung  $v$  bei 0 hat. Für ein  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  ist diese 1-Parameter-Untergruppe gerade der Fluß  $t \mapsto \text{Fl}_t^\xi$  von  $\xi$  und somit  $\exp(\xi) = \text{Fl}_1^\xi$ . Für nicht-kompaktes  $M$  haben wir hier allerdings ein Problem, denn der Fluß  $\text{Fl}^\xi$  zu einem beliebigen Vektorfeld  $\xi$  muß nicht bis zur Zeit 1 existieren. Entweder betrachtet man also nur vollständige Vektorfelder (z.B. solche mit kompakten Träger) oder nur lokale Flüsse.

Wir wollen nun die Lie-Klammer auf  $\mathcal{L}(\text{Diff}(M))$  bestimmen. Sei dazu  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $L^\xi$  das zugehörige linksinvariante Vektorfeld auf  $\text{Diff}(M)$ . Der Fluß von  $L^\xi$  sollte nach [3.5](#) durch

$$\text{Fl}^{L^\xi} : (t, g) \mapsto g \circ \exp(t\xi) = g \circ \text{Fl}_t^\xi = (\text{Fl}_t^\xi)^*(g)$$

gegeben sein. In Verallgemeinerung von [Kri07, 29.10] ist  $[L^\xi, L^\eta] = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\text{Fl}_t^{L^\xi})^*(L^\eta)$  und somit

$$\begin{aligned} [L^\xi, L^\eta]_{\text{id}} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\text{Fl}_t^{L^\xi})^*(L^\eta)(\text{id}) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(T\text{Fl}_{-t}^{L^\xi} \circ L^\eta \circ \text{Fl}_t^{L^\xi}\right)(\text{id}) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}T\text{Fl}_{-t}^{L^\xi}(L^\eta(\text{id} \circ \text{Fl}_t^\xi)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}T\text{Fl}_{-t}^{L^\xi}(L^\eta(\text{Fl}_t^\xi)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}T\text{Fl}_{-t}^{L^\xi}(T\text{Fl}_t^\xi \circ \eta) = \frac{d}{dt}|_{t=0}T((\text{Fl}_{-t}^\xi)^*)(T\text{Fl}_t^\xi \circ \eta) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(T\text{Fl}_{-t}^\xi)^*(T\text{Fl}_t^\xi \circ \eta) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(T(\text{Fl}_t^\xi) \circ \eta \circ \text{Fl}_{-t}^\xi\right) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\text{Fl}_{-t}^\xi)^*\eta = -[\xi, \eta], \end{aligned}$$

wobei wir die hier unbewiesene Tatsache verwendet haben, daß  $T(g^*)$  bis auf natürliche Isomorphismen  $(Tg)^*$  ist, siehe [KM97, 42.18]. Die Lie-Klammer auf  $\mathcal{L}(\text{Diff}(M))$  ist somit das negative jener von  $\mathfrak{X}(M)$ .

Um auch den nicht kompakten Fall behandeln zu können definieren wir: Unter einer **LOKALEN WIRKUNG** einer Lie-Gruppe  $G$  auf der Mannigfaltigkeit  $M$  versteht man eine glatte Abbildung  $\varphi : G \times M \supseteq U \rightarrow M$ , definiert auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $\{e\} \times M$ , für die Gleichungen einer Gruppenwirkung nur dort gelten wo sie definiert sind.

Eine lokale Lie-Gruppen-Wirkung definiert genauso einen Lie-Homomorphismus  $\zeta : \mathcal{L}\varphi : \mathcal{L}G \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  durch  $v \mapsto \zeta^v(: x \mapsto T_{e,x}\varphi \cdot (v, 0_x))$ .

Das sogenannte **FUNDAMENTALE VEKTORFELD**  $\zeta^v$  zu  $v$  ist  $\varphi$ -verwandt zu  $R^v \times 0$ , wobei  $R^v(g) := TR_g \cdot v$  das von  $v \in T_eG$  erzeugte rechts-invariante Vektorfeld ist, denn wegen  $\varphi \circ (\text{id} \times L_g) = \varphi \circ (R_g \times \text{id})$  ist

$$\begin{aligned} (\zeta^v \circ \varphi)(g, x) &= T\varphi(v, 0_{\varphi(g, x)}) = (T\varphi \circ (\text{id} \times TL_g))(v, 0_x) \\ &= (T\varphi \circ (TR_g \times \text{id}))(v, 0_x) = T\varphi(R^v(g) \times 0_x) = (T\varphi \circ (R^v \times 0))(g, x). \end{aligned}$$

Es ist  $[R^v, R^w] = R^{[w,v]}$  (siehe Proseminar) und somit  $-\zeta$  ein Lie-Algebra-Homomorphismus, denn  $[\zeta^v, \zeta^w]$  ist  $\varphi$ -verwandt mit  $[(R^v, 0), (R^w, 0)] = ([R^v, R^w], [0, 0]) = (R^{[w,v]}, 0)$  und auch  $\zeta^{[w,v]}$  ist damit verwandt, also  $[\zeta^v, \zeta^w] = \zeta^{[w,v]}$  oder  $[-\zeta^v, -\zeta^w] = [\zeta^v, \zeta^w] = \zeta^{[w,v]} = \zeta^{-[v,w]} = -\zeta^{[v,w]}$ .

Und es gilt analog zu [4.13](#) folgende Umkehrung:

#### 4.16 Satz.

(Siehe [\[Var84, 2.16.8\]](#) oder [\[Mic08, 6.5\]](#))

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe,  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $-\zeta : \mathcal{L}G \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  ein Lie-Algebra-Homomorphismus. Dann existiert eine lokale Liegruppen-Wirkung  $\varphi$  von  $G$  auf  $M$  mit  $\mathcal{L}\varphi = \zeta$ . Ist zusätzlich  $G$  einfachzusammenhängend und  $\zeta(v)$  vollständig für alle  $v \in T_e G$  (z.B. wenn  $M$  kompakt ist), dann läßt sich  $\varphi$  global wählen.

**Beweis-Skizze.** Die Idee dabei ist, daß wir ein  $\varphi$  aus  $\zeta := \mathcal{L}\varphi$  zurückgewinnen können, indem wir die Niveauflächen

$$\varphi^{-1}(y) := \{(g, x) : g \cdot x = y\} = \{(h^{-1}, h \cdot y) : h \in G\}$$

betrachten. Da  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  längs  $\{e\} \times M$  die Identität und somit submersiv ist, definiert die Blätterung durch Niveauflächen eine integrables Teilbündel  $E$  von  $TG \times TM$  nach [4.10](#). Es sei  $L^v(g) := TL_g \cdot v$  das von  $v \in T_e G$  erzeugte links-invariante Vektorfeld. Dann ist

$$\begin{aligned} T_{(h^{-1}, h \cdot y)}(\varphi^{-1}(y)) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (h^{-1} \cdot (\exp tv)^{-1}, \exp(tv) \cdot h \cdot y) : v \in T_e G \right\} \\ &= \{(L^{-v}(h^{-1}), \zeta^v(h \cdot y)) : v \in T_e G\} \\ &= \{(L^v(h^{-1}), -\zeta^v(h \cdot y)) : v \in T_e G\} \end{aligned}$$

also  $E_{(g,x)} = \{(L^v(g), -\zeta^v(x)) : v \in T_e G\}$ .

Sei also umgekehrt  $E_{(g,x)} := \{(L^v(g), -\zeta^v(x)) : v \in T_e G\}$ . Dann ist  $E$  ein integrables Teilbündel von  $T(G \times M) \rightarrow G \times M$ , denn die Lie-Klammern der Basis-Vektorfelder  $L^{v_i} \times \zeta^{-v_i}$  liegt ebenfalls drinnen. Seien  $N_{(g,x)}$  die maximalen Integralmannigfaltigkeiten.

Es erhält  $L_g \times \text{id}$  das integrable Teilbündel und somit ist  $(L_g \times \text{id})N_{(h,y)} = N_{(g \cdot h, y)}$ , da  $(g \cdot h, y) \in (L_g \times \text{id})N_{(h,y)}$ .

Wir definieren die Wirkung  $\varphi$  durch  $N_{(e,g \cdot x)} := N_{(g,x)} \subseteq G \times M$ , also

$$g \cdot x := \varphi(g, x) := \left( \text{pr}_2 \circ (\text{pr}_1|_{N_{(g,x)}})^{-1} \right)(e).$$

Es ist  $\varphi$  lokal wohldefiniert und glatt, da  $\text{pr}_1 = T \text{pr}_1 : TN_{(g,x)} \rightarrow TG$  invertierbar ist.

Weiters ist  $\varphi$  eine lokale Gruppenwirkung:

$$\begin{aligned} N_{(e,g \cdot x)} &= N_{(g,x)} \quad | \quad (L_{g^{-1}} \times \text{id}) \\ \Rightarrow N_{(g^{-1}, g \cdot x)} &= N_{(g^{-1}, g \cdot x)} = N_{(e,x)} \quad | \quad (L_h \times \text{id}) \\ \Rightarrow N_{(h g^{-1}, g \cdot x)} &= N_{(h,x)} \\ \Rightarrow N_{((gh)^{-1}, (gh) \cdot x)} &= N_{(e,x)} = N_{(h^{-1}, h \cdot x)} = N_{(h^{-1} g^{-1}, g \cdot (h \cdot x))} = N_{((gh)^{-1}, g \cdot (h \cdot x))} \\ \Rightarrow (gh) \cdot x &= g \cdot (h \cdot x). \end{aligned}$$

Es ist  $\mathcal{L}(\varphi) = \zeta$ :

$$\begin{aligned} (\exp(tv)^{-1}, \exp(tv) \cdot x) \in N(e, x) &\Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \exp(tv)^{-1}, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \exp(tv) \cdot x \right) \in E_{(e,x)} \\ &\Rightarrow (-v, \mathcal{L}(\varphi)(v)(x)) \in \left\{ (w, -\zeta^w(x)) : w \in T_e G \right\} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}(\varphi)(v)(x) = \zeta^v(x). \quad \square \end{aligned}$$

#### 4.17 Integration auf Lie-Gruppen

In diesem Abschnitt sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Sei weiters  $\Delta$  eine Determinantenfunktion auf  $\mathcal{L}G \cong T_e G$ , dann definiert

$$\Delta_g(\xi_1, \dots) := \Delta(TL_{g^{-1}} \cdot \xi_1, \dots)$$

eine linksinvariante nirgends verschwindende Differentialform vom Grad  $\dim(G)$  auf  $G$ , welche verwendet werden kann um  $G$  zu orientieren und um Funktionen (mit kompaktem Träger) zu integrieren. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_G (f \circ L_g) \cdot \Delta &= \int_G L_g^*(f) \cdot \Delta = \int_G L_g^*(f \cdot (L_{g^{-1}})^*(\Delta)) \\ &= \int_G f \cdot (L_{g^{-1}})^*(\Delta) = \int_G f \cdot \Delta. \end{aligned}$$

Beachte dabei, daß  $L_g$  für  $g \in G$  in der Zusammenhangskomponente von  $e$  ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist. Also ist das zugehörige Integral ebenfalls linksinvariant. Dieses Integral ist bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt und wir schreiben in der Folge kurz  $\int_G f$  anstelle  $\int_G f \cdot \delta$ : Sein nämlich  $\nu$  ein weiteres linksinvariantes Maß auf  $G$  und  $f \in C_c(G)$  mit  $\mu(f) := \int f \cdot \Delta \neq 0$ . Dann ist  $\lambda_f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{\mu(f)} \nu(R_x^*(f))$  stetig. Sei  $g$  ebenfalls in  $C_c(G)$ , dann hat auch  $(x, y) \mapsto f(x)g(x^{-1}y)$  kompakten Träger und mit  $S(g) : x \mapsto g(x^{-1})$  gilt:

$$\begin{aligned} \mu(f) \cdot \nu(S(g)) &= \int_G f(x) \nu(S(g)) \Delta(x) = \int_G f(x) \nu(L_{x^{-1}}^*(S(g))) \Delta(x) \\ &= \int_G f(x) \int_G L_{x^{-1}}^*(S(g))(y) d\nu(y) \Delta(x) \\ &= \int_G \int_G f(x) g(y^{-1}x) d\nu(y) \Delta(x) \\ &= \int_G \int_G f(x) g(y^{-1}x) \Delta(x) d\nu(y) \\ &= \int_G \int_G f(yx) g(y^{-1}yx) \Delta(x) d\nu(y) \\ &= \int_G \int_G f(yx) g(x) d\nu(y) \Delta(x) = \int_G g(x) \int_G f(yx) d\nu(y) \Delta(x) \\ &= \int_G g(x) \nu(R_x^*(f)) \Delta(x) = \mu(g \cdot \mu(f) \cdot \lambda_f) = \mu(f) \cdot \mu(g \cdot \lambda_f). \end{aligned}$$

Also ist  $\nu(g) = \mu(S(g) \cdot \lambda_f)$  und damit  $\lambda_f$  unabhängig von  $f \geq 0$ . Nach Definition ist  $\lambda(e) \mu(f) = \nu(R_e^*(f)) = \nu(f)$  und  $\lambda(e) > 0$ .

Wann ist  $\mu$  zusätzlich rechtsinvariant? Eine einfache Rechnung zeigt, daß  $R_g^* \Delta$  linksinvariant ist. Also ist  $R_g^* \Delta = \lambda(g) \cdot \Delta$  für ein  $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist  $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}^*$  ein stetiger Gruppen Homomorphismus, denn  $R_g^* \circ R_h^* = R_{gh}^*$ . Wegen  $\lambda(g^{-1}) = \lambda(g)^{-1}$

gilt

$$\int (f \circ R_g) \cdot \Delta = \int R_g^*(f R_{g^{-1}}(\Delta)) = \int f R_{g^{-1}}^*(\Delta) = \int f \lambda(g^{-1}) \Delta = \lambda(g)^{-1} \cdot \int f \Delta.$$

Man nennt  $G$  UNIMODULAR, falls  $\lambda(g) = 1$  für alle  $g$ . Ist  $G$  kompakt, so existiert  $\int 1 \Delta$  und es gilt:  $\int 1 \Delta = \int (1 \circ R_g) \cdot \Delta = \lambda(g)^{-1} \cdot \int 1 \Delta$ , also ist  $G$  unimodular.

Falls die Kommutatoruntergruppe  $G' := [G, G] := \langle g h g^{-1} h^{-1} : g, h \in G \rangle_{\text{Gruppe}}$  dicht in  $G$  liegt, so ist  $G$  unimodular, denn  $\lambda(G') \subseteq [\mathbb{R}^*, \mathbb{R}^*] = \{1\}$  liegt dann dicht in  $\lambda(G)$ , also ist  $\lambda(G) = \{1\}$ .

**Proposition.**

*Es ist  $G$  genau dann unimodular, wenn  $\int_G S(f) = \int_G f$  gilt.*

**Beweis.** Sei wieder  $\mu(f) := \int_G f$ .

( $\Leftarrow$ ) Falls  $\mu(f) = \mu(S(f))$  so ist  $\mu$  rechtsinvariant, da  $\mu \circ S$  es ist, also ist  $G$  unimodular.

( $\Rightarrow$ ) Sei umgekehrt  $G$  unimodular, also  $\lambda = 1$  und damit auch  $S(\lambda) = 1$ . Dann ist

$$\mu(S(f)) = \mu(S(f) \cdot S(\lambda)) = \mu(f),$$

da die letzte Gleichheit ganz allgemein gilt:

Sei nämlich  $\nu(f) := \mu(S(f) \cdot S(\lambda))$ , dann ist  $\nu$  linksinvariant, denn

$$\begin{aligned} \nu(L_g^* f) &= \mu(S(L_g^* f) \cdot S(\lambda)) = \mu(R_{g^{-1}}^*(S(f)) \cdot S(\lambda)) \\ &= \mu(R_{g^{-1}}^*(S(f)) \cdot R_{g^{-1}}^*(S(\lambda)) \cdot S(\lambda)(g)) \\ &= S(\lambda)(g) \cdot \mu(R_{g^{-1}}^*(S(f) \cdot S(\lambda))) \\ &= \lambda(g)^{-1} \cdot \lambda(g) \cdot \mu(S(f) \cdot S(\lambda)) = \mu(S(f) \cdot S(\lambda)) = \nu(f) \end{aligned}$$

also  $\nu = c\mu$  mit  $c > 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Lokal um  $e$  ist  $|1 - \lambda| < \varepsilon$  und für symmetrisches  $g \geq 0$  mit Träger in dieser Umgebung ist somit  $|g(x) - S(g)(x) S(\lambda)(x)| \leq \varepsilon g(x)$  für alle  $x$ , also

$$\begin{aligned} |1 - c| \cdot \mu(g) &= |\mu(g) - \nu(g)| = |\mu(g) - \mu(S(g) \cdot S(\lambda))| \\ &\leq \mu(|g - S(g) S(\lambda)|) \leq \varepsilon \cdot \mu(g), \end{aligned}$$

und somit  $c = 1$ . □

## 5. Untergruppen

**5.1 Lemma.**

*Sei  $H$  eine separable Unter-Lie-Gruppe von  $G$ , dann ist  $H$  initial in  $G$ .*

Die Separabilität von  $H$  ist dabei essentiell, denn  $\mathbb{R}$  mit der diskreten Topologie ist nicht initial in  $\mathbb{R}$ .

**Beweis.** Da  $\mathcal{L}H$  Unter-Lie-Algebra von  $\mathcal{L}G$  ist, existiert nach [4.11](#) eine eindeutige zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe  $K$  von  $G$  mit  $\mathcal{L}K = \mathcal{L}H$ . Diese ist als maximale Integralmannigfaltigkeit nach [4.9.3](#) initial in  $G$ . Da die Lie-Algebren gleich sind, muß die Zusammenhangskomponente  $H_0$  von  $H$  nach [4.9.4](#) offen in  $K$  sein, somit als Untergruppe auch abgeschlossen und daher mit der zusammenhängenden Gruppe  $K$  übereinstimmen.

Es besitzt  $H$  als separable Mannigfaltigkeit aber nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, die also maximale Integralmannigfaltigkeiten sind. Glatte Abbildungen  $f : M \rightarrow G$  die (lokal) nur abzählbar viele Blätter treffen liegen lokal in einem Blatt und sind somit glatt nach  $H$ . Also ist  $H$  eine initiale Teilmannigfaltigkeit.  $\square$

### 5.2 Lemma.

Sei  $M$  lokalkompakt,  $G$  eine  $\sigma$ -kompakte lokalkompakte topologische Gruppe und  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  eine stetige transitive Gruppenwirkung. Dann ist  $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$  abgeschlossen in  $G$  für alle  $x \in M$  abgeschlossen und die Abbildung  $G/G_x \rightarrow M, g \cdot G_x \mapsto g \cdot x$  ist ein Homöomorphismus.

**Beweis.** Da  $R_x : G \rightarrow M, g \mapsto g \cdot x$  stetig ist, ist  $G_x := (R_x)^{-1}(x)$  abgeschlossen in  $G$ . Somit ist die nach [A.11](#) induzierte bijektive Abbildung  $G/G_x \rightarrow M$  stetig.

Bleibt zu zeigen, daß  $R_x$  offen ist, d.h.  $R_x(U) = U \cdot x = \{g \cdot x : g \in U\}$  offen in  $M$  ist für alle offenen  $U \subseteq G$ : Sei dazu  $g_0 \in U$ . Dann ist  $g_0^{-1}U$  eine offene Umgebung von  $e$ . Da  $G$  eine lokalkompakte Gruppe ist existiert eine symmetrische kompakte Umgebung  $V$  von  $e$  mit  $V^2 \subseteq g_0^{-1}U$ . Dann existiert eine Folge  $g_n \in G$  mit  $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g_n V$ , denn wegen der  $\sigma$ -Kompaktheit von  $G$  existieren kompakte Teilmengen  $K_n \subseteq G$  mit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = G = \bigcup_{g \in G} gV^o$  und somit existieren für jedes  $n$  endlich viele  $g_{n,j} \in G$  mit  $K_n \subseteq \bigcup_j g_{n,j}V^o$ , also  $G = \bigcup_n K_n \subseteq \bigcup_{n,j} g_{n,j}V^o \subseteq \bigcup_{n,j} g_{n,j}V$ .

Somit ist  $M = \bigcup_n g_n V \cdot x$  und da  $M$  lokalkompakt und folglich Baire'sch ist (siehe [Kri99, 3.2.4](#)), existiert ein  $n$  so, daß das Innere der kompakten Menge  $g_n V \cdot x$  nicht leer ist (siehe [Kri99, 3.2.1](#)). Sei also  $g_n h \cdot x$  mit  $h \in V$  ein innerer Punkt. Dann ist  $x$  ein innerer Punkt von  $(g_n h)^{-1} g_n V \cdot x = h^{-1} V \cdot x \subseteq V^{-1} V \cdot x \subseteq g_0^{-1} U \cdot x$ , also  $g_0 \cdot x$  ein innerer Punkt von  $U \cdot x$ .  $\square$

### 5.3 Satz über offene Abbildungen.

Seien  $G$  und  $H$  zwei lokalkompakte topologische Gruppen und  $\varphi : G \rightarrow H$  ein stetiger surjektiver Gruppen-Homomorphismus. Falls  $G$   $\sigma$ -kompakt ist, so ist  $\varphi$  offen.

**Beweis.** Wir betrachten die Wirkung von  $G$  auf  $H$  welche durch  $g \cdot h = \varphi(g)h$  gegeben ist. Offensichtlich ist diese stetig und sie ist transitiv, da  $\varphi$  surjektiv vorausgesetzt ist. Der Stabilisator  $G_e := \{g \in G : \varphi(g)e = e\} = \text{Ker}(\varphi)$  und somit  $G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow H, g \text{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(g)e = \varphi(g)$  ein Homöomorphismus nach [5.2](#), also  $\varphi : G \rightarrow H$  offen, da  $\pi : G \rightarrow G/\text{Ker} \varphi$  offen ist.  $\square$

### 5.4 Satz.

Sei  $H$  eine separable Unter-Lie-Gruppe von  $G$ . Dann ist  $H$  genau dann reguläre Teilmannigfaltigkeit (d.h. trägt die Spurtopologie, siehe [Kri07, 21.12](#)) von  $G$ , wenn  $H$  abgeschlossen in  $G$  ist.

#### Beweis.

( $\Leftarrow$ ) Wir wenden [5.3](#) auf die Identität von  $H$  mit der Lie-Gruppen-Topologie nach  $H$  mit der Spurtopologie an; letztere ist auch lokalkompakt, wenn  $H$  in  $G$  abgeschlossen ist.

( $\Rightarrow$ ) Als reguläre Teilmannigfaltigkeit ist  $H$  lokal abgeschlossen in  $G$ , demnach ist  $H$  offen und somit abgeschlossen im Abschluß  $\overline{H}$  (siehe Aufgabe [Kri10, 28](#)), also ist  $H = \overline{H}$  abgeschlossen.  $\square$

### 5.5 Satz (Abgeschlossen Untergruppen).

Jede abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe ist selbst eine Lie-Gruppe.

Dieser Satz wurde zuerst durch VonNeumann für  $G = GL(n)$  und dann von Cartan für beliebiges  $G$  bewiesen.

**Beweis.** Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe  $G$ . Wir setzen  $\mathcal{H} := \{c'(0) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, G), c(\mathbb{R}) \subseteq H, c(0) = e\}$ . Dann ist  $\mathcal{H}$  ein Teilvektorraum von  $\mathcal{L}G$ : Seien  $c'_i(0) \in \mathcal{H}$  und  $t_i \in \mathbb{R}$ , definiere  $c(t) := c_1(t_1 t) \cdot c_2(t_2 t)$ , dann gilt  $c'(0) = t_1 \cdot c'_1(0) + t_2 \cdot c'_2(0)$ .

**Behauptung:**  $\mathcal{H} = \{\xi \in \mathcal{L}G \mid \exp(t \cdot \xi) \in H \text{ für alle } t\}$ .

( $\supseteq$ ) ist klar.

( $\subseteq$ )  $\xi := c'(0)$ , sei  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}G$  so, daß  $v(0) = 0$  und  $\exp \circ v = c$  lokal um 0. Es gilt:

$$\xi = c'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(v(t)) = T_0 \exp(v'(0)) = v'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot v\left(\frac{1}{n}\right)$$

Setzen wir  $t_n := 1/n$  und  $v_n := n \cdot v(t_n)$ , so ist  $t_n v_n = v(1/n)$  und  $\exp(t_n v_n) = \exp(v(1/n)) = c(1/n) \in H$ . Aus der nachfolgenden Behauptung ergibt sich dann  $\exp(t\xi) \in H$ .

**Behauptung:** Seien  $v_n \in \mathcal{L}G$ ,  $0 \neq t_n \rightarrow 0$ ,  $v_n \rightarrow v$ ,  $\exp(t_n v_n) \in H$ . Dann ist  $\exp(tv) \in H$  für alle  $t$ .

Da  $\exp(t_n v_n)^{-1} = \exp(-t_n v_n)$  ist, können wir uns auf positive  $t_n$  beschränken. Sei  $t \in \mathbb{R}$  beliebig und  $k_n \in \mathbb{Z}$  mit  $k_n \leq t/t_n < k_n + 1$ . Dann ist  $t - t_n < k_n t_n \leq t$  und somit konvergiert  $k_n t_n \rightarrow t$  und  $\exp(tv) \leftarrow \exp(k_n t_n v_n) = \exp(t_n v_n)^{k_n} \in H$ .

**Behauptung:**  $\exists U' \subseteq \mathcal{H}^\perp$ , eine offene 0-Umgebung mit  $\exp(U') \cap H = \{e\}$ :

Anderenfalls existieren  $v_k \in \mathcal{H}^\perp$ ,  $v_k \rightarrow 0$ ,  $\exp(v_k) \in H$ . Setzen  $t_k := 1/|v_k|$ , o.B.d.A. konvergiert  $t_k v_k \rightarrow v \in \mathcal{H}^\perp \setminus \{0\}$ . Dann ist  $\exp(t_k v_k / t_k) = \exp(v_k) \in H$  und  $1/t_k \rightarrow 0$ . Aus der vorigen Behauptung folgt  $\exp(tv) \in H$  für alle  $t$  und somit  $v \in \mathcal{H}$ , ein Widerspruch.

**Behauptung:**  $\exists U \subseteq \mathcal{L}G$  eine offene 0-Umgebung mit  $\exp(U \cap \mathcal{H}) = \exp(U) \cap H$ :

( $\subseteq$ ) klar für jedes  $U$ .

( $\supseteq$ ) Sei  $a \in \exp(U) \cap H$ . Dann ist  $a = \exp \xi \cdot \exp \eta$  mit  $\xi \in \mathcal{H}$  und  $\eta \in \mathcal{H}^\perp$  für  $U$  genügend klein (da  $(\xi, \eta) \mapsto \exp \xi \cdot \exp \eta$  ein lokaler Diffeomorphismus ist). Es gilt  $\exp \eta \in H$  (da  $a, \exp \xi \in H$ ), und nach der vorigen Behauptung ist  $\eta = 0$ , also  $a = \exp \xi$  mit  $\xi \in \mathcal{H} \cap U$ .

Somit ist  $\exp : \mathcal{L}G \supseteq U \cap \mathcal{H} \rightarrow \exp(U) \cap H \subseteq G$  ein Homöomorphismus bei 0 und  $\{L_h \circ \exp|_{U \cap \mathcal{H}} : h \in H\}$  bildet einen Atlas für  $H$ . Die Kartenwechsel

$$(L_h \circ \exp)^{-1} \circ L_{h'} \circ \exp = \exp^{-1} \circ L_{h^{-1} \circ h'} \circ \exp$$

sind dort glatt, wo sie definiert sind. Dieser Atlas ist wegen der letzten Behauptung ein Teilmannigfaltigkeits-Atlas für  $H \subseteq G$ .  $\square$

### 5.6 Proposition.

**[Yam50]** Sei  $H$  eine wegzusammenhängende Untergruppe einer Lie-Gruppe  $G$ . Dann ist  $H$  eine Unter-Lie-Gruppe von  $G$ .

**Beweis für  $C^\infty$ -wegzusammenhängende  $H$ .** Wie im Beweis von [5.5](#) sei  $\mathcal{H} := \{c'(0) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, G), c(\mathbb{R}) \subseteq H, c(0) = e\}$ . Wie dort folgt, daß  $\mathcal{H}$  ein Teilvektorraum von  $\mathcal{L}G$  ist. Seien  $c_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  zwei solche Kurven. Für  $h \in H$  ist auch  $c : t \mapsto h \cdot c_1(t) \cdot h^{-1}$  so eine Kurve, also  $\text{Ad}(h)(c'_1(0)) = c'(0) \in \mathcal{H}$  (siehe [6.15](#)) und somit auch die Ableitung  $[c'_2(0), c'_1(0)] = \text{ad}(c'_2(0))(c'_1(0)) \in \mathcal{H}$  von  $t \mapsto \text{Ad}(c_2(t))(c'_1(0)) \in H$  bei 0 (siehe [6.16](#)). Also ist  $\mathcal{H}$  ein Unter-Lie-Algebra. Sei  $H_0$  die maximale Integralmannigfaltigkeit des integrierbaren Teilbündels welches

durch die links-invarianten Vektorfelder in  $\mathcal{H}$  erzeugt wird. Für jede Kurve  $c$  wie oben ist

$$T(L_{c(t)^{-1}}) \cdot c'(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c(t)^{-1} c(t+s) \in \mathcal{H},$$

somit ist  $c$  tangential an das Teilbündel und liegt nach [4.9](#) folglich in  $H_0$ , d.h.  $H \subseteq H_0$ , da  $H$   $C^\infty$ -wegzusammenhängend vorausgesetzt ist.

Für die Umkehrung wählen wir eine Basis  $(c'_1(0), \dots, c'_k(0))$  von  $\mathcal{H}$ . Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow H \subseteq H_0$ ,  $(t_1, \dots, t_k) \mapsto c_1(t_1) \cdot \dots \cdot c_k(t_k)$  hat invertierbare Ableitung  $T_0\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{H} = T_e H_0$  und ist somit ein lokaler Diffeomorphismus um 0, also enthält  $H$  eine 0-Umgebung von  $H_0$  (die  $H_0$  erzeugt) und somit ist  $H = H_0$ .  $\square$

## 6. Homogene Räume und Gruppenwirkungen

Wir wollen nun Orbiträume  $X/G$  von Gruppenwirkungen  $G \times X \rightarrow X$  studieren, insbesondere im Fall wo  $G$  eine Untergruppe einer Gruppe  $X$  ist und auf dieser durch links-Multiplikation wirkt. Die zwei extremen Situationen dabei sind einerseits jene diskreter Untergruppen (oder allgemeiner strikt diskontinuierlicher Wirkungen, siehe [\[Kri07, 24.15\]](#)) und andererseits jener zusammenhängender Untergruppen (siehe [\[Kri07, 4.12\]](#)). Die allgemeine Situation der Wirkung einer Lie-Gruppe  $G$  können wir darauf zurückspielen, indem wir die Zusammenhangskomponente  $G_0$  von  $G$  betrachten. Diese ist ein Normalteiler und  $G/G_0$  ist diskret. Allgemein gilt:

### 6.1 Lemma (Zweiter Isomorphiesatz der Gruppentheorie).

*Sei  $G \times X \rightarrow X$  eine Gruppen-Wirkung und  $N \trianglelefteq G$  ein Normalteiler. So induziert die Wirkung von  $G$  auf  $X$  eine solche von  $G/N$  auf  $X/N$  und eine Bijektion  $X/G \rightarrow (X/N)/(G/N)$ .*

Für einen Beweis siehe Aufgabe [\[Kri10, 29\]](#).

Es wirke eine Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $Y$  derart, daß die kanonische Quotientenabbildung  $\pi : Y \rightarrow Y/G$  eine Überlagerungsabbildung ist. Also existiert eine Überdeckung von  $Y/G$  mit offenen Mengen  $V$ , s.d.  $\pi^{-1}(V)$  disjunkte topologische Vereinigung  $\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U$  von Mengen  $U$  ist, für welche  $\pi|_U : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus ist. Somit ist  $V = \pi(U)$  und  $U \subseteq \pi^{-1}(V) \subseteq Y$  offen. Damit  $\pi|_U : U \rightarrow V$  injektiv ist, muß für  $\{x\} = \pi|_U^{-1}(\pi(x)) = Gx \cap U$  für  $x \in U$  gelten, also  $x = y$  aus  $y = g \cdot x \in U$  mit  $x \in U$  und  $g \in G$  folgen, d.h.  $y \in G \cdot U \cap U \Rightarrow y = g \cdot y$ , und damit  $g = e$  unter der Voraussetzung  $G_y = \{e\}$ .

Wir sagen, daß eine Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $Y$  STRIKT DISKONTINUIERLICH wirkt, falls für jedes  $y \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $y$  existiert mit  $g \cdot V \cap V \neq \emptyset \Rightarrow g = e$ . Jede strikt diskontinuierliche Wirkung ist eine FREIE WIRKUNG, d.h.  $G_y = \{e\}$  für alle  $y \in Y$ , denn für  $g \in G_y$  ist  $y \in g \cdot V \cap V$  für jede Menge  $V \ni y$ .

### 6.2 Proposition.

*Es sei  $G$  eine Gruppe, welche strikt unstetig auf einem topologischen Raum  $Y$  wirkt. Dann ist  $p : Y \rightarrow Y/G$  eine Überlagerungsabbildung. Wenn  $Y$  wegzusammenhängend ist, so ist  $G$  die Gruppe  $\text{Aut}(p) := \{f \in \text{Homöo}(Y) : p \circ f = p\}$  der Decktransformationen von  $p$ . Ist  $Y$  zusätzlich eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $G$  wirke durch Diffeomorphismen, dann ist auch  $Y/G$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit (die nicht Hausdorff zu sein braucht) und  $p : Y \rightarrow Y/G$  eine  $C^\infty$ -Überlagerung.*

**Beweis.** Wir bezeichnen mit  $p : Y \rightarrow Y/G$  die Quotientenabbildung. Im ersten Schritt versuchen wir  $p : Y \rightarrow Y/G$  zumindest mengentheoretisch als Überlagerung

zu erkennen. Für jeden Punkt  $p(y) := Gy \in Y/G$  existiert nach Voraussetzung eine offene Umgebung  $V$  von  $y$  in  $Y$  mit  $gV \cap V = \emptyset \forall g \neq e$ . Also ist

$$p^{-1}(p(V)) = GV = \bigsqcup_{g \in G} gV,$$

und jedes  $gV$  ist offen in  $Y$  und damit ist  $p(V)$  offen in der Quotiententopologie. Weiters ist  $p|_{gV} : gV \rightarrow p(V)$  offensichtlich bijektiv, stetig und nach dem eben gezeigten eine offene Abbildung, also ein Homöomorphismus. Folglich ist  $p : Y \rightarrow Y/G$  eine Überlagerungsabbildung mit trivialisierenden Mengen  $p(V)$  und zugehörigen Blättern  $gV$  für  $g \in G$ :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \hookrightarrow & p^{-1}(p(V)) & = & \bigsqcup_{g \in G} gV & \xrightarrow[p \cong]{p} & \bigsqcup_{g \in G} p(V) \\ & \searrow p & & \searrow & & & \swarrow \text{pr} \\ & & Y/G & \longleftarrow & p(V) & & \end{array}$$

Offensichtlich wirkt jedes  $g \in G$  als Decktransformation. Umgekehrt sei  $\gamma : Y \rightarrow Y$  eine Decktransformation. Sei  $y \in Y$  fix gewählt. Dann gilt  $p(y) = p(\gamma(y))$  und daher gibt es irgendein  $g_y \in G$  mit  $g_y \cdot y = \gamma(y)$ . Da  $Y$  zusammenhängend ist und die zwei Abbildungen  $\gamma$  und  $g_y$  die Identität überdecken und bei  $y$  übereinstimmen, sind sie gleich.

Es wirke nun  $G$  auf der  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $Y$  durch Diffeomorphismen. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß obiges  $V$  Bild einer Karte  $\mathbb{R}^m \subseteq \underline{V} \xrightarrow{\varphi} V \subseteq Y$  ist. Als Karten von  $Y/G$  verwenden wir nun die Homöomorphismen  $\mathbb{R}^m \subseteq \underline{V} \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow[p \cong]{p} p(V) \subseteq Y/G$ .

Der Kartenwechsel für zwei derartige Karten  $p \circ \varphi : \underline{V} \rightarrow p(V)$  und  $p \circ \psi : \underline{W} \rightarrow p(W)$  ist auf der Menge

$$\begin{aligned} \{x \in \underline{V} : p(\varphi(x)) \in p(\psi(\underline{W}))\} &= \{x \in \underline{V} : \varphi(x) \in G(\psi(\underline{W}))\} \\ &= \{x \in \underline{V} : \exists g \in G, \exists y \in \underline{W} \text{ mit } \varphi(x) = g(\psi(y))\}. \end{aligned}$$

Da  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $g$  Homöomorphismen sind, ist diese Menge offen. Und die Kartenwechselabbildung  $(p \circ \psi)^{-1} \circ (p \circ \varphi)$  ist gerade durch  $x \mapsto y$  gegeben, d.h. durch  $\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ \varphi$  und ist somit glatt.

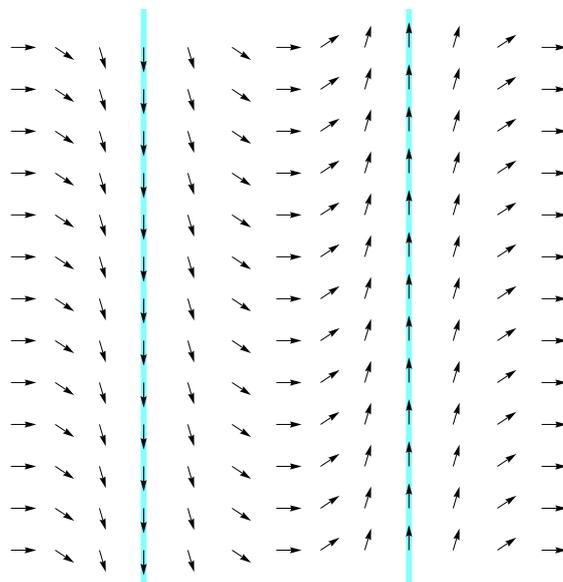
In der durch diesen Atlas definierte Mannigfaltigkeit  $Y/G$  sind folglich die Kartenbilder  $p(V)$  offen, und  $p|_V : V \rightarrow p(V)$  ein Diffeomorphismus. Somit auch  $p \circ g^{-1} : gV \rightarrow V \rightarrow p(V)$ , also ist  $p : Y \rightarrow Y/G$  eine  $C^\infty$ -Überlagerungsabbildung und die Mannigfaltigkeitstopologie von  $Y/G$  die Quotiententopologie, da sich die entsprechende Überdeckungseigenschaft offensichtlich überträgt.

Wenn  $Y$  Lindelöf und  $Y/G$  Hausdorff ist, dann ist auch  $Y/G$  Lindelöf.  $\square$

### 6.3 Gegenbeispiel.

Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 x, \quad \frac{dy}{dt} = \sin x.$$



Da dieses Vektorfeld beschränkt ist, existieren die Lösungen global und wir erhalten eine glatte Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche zu jedem  $t \in \mathbb{R}$  und  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  die Lösung mit Werten  $(x, y)$  bei 0 zur Zeit  $t$  assoziiert.

Wenn der initiale Wert  $\cos^2 x = 0$  erfüllt, dann ist die Lösung  $y(t) = y(0) + t \cdot \sin x$ . Andernfalls haben wir  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x}$ , daher muß sie enthalten sein in Translaten von  $\{(y, x) : y(x) = \frac{1}{\cos x}\}$ . Weiters ist die Zeit, die man benötigt um von  $x = x_0$  zu  $x = x_1$  zu gelangen, durch  $t(x_1) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_{x=x_0}^{x_1}$  gegeben.

Man kann diese Differentialgleichung sogar explizit lösen, denn

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \cos^2 x &\Rightarrow d \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ &\Rightarrow \tan x(t) = t + c_1 \Rightarrow x(t) = \arctan(t + c_1) \\ \frac{dy}{dt} = \sin x &= \sin(\arctan(t + c_1)) = \pm \frac{\tan(t + c_1)}{\sqrt{1 + \tan^2(t + c_1)}} \\ &\Rightarrow y(t) = c_2 \pm \sqrt{1 + (t + c_1)^2}. \end{aligned}$$



Beachte, daß der Quotientenraum  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  nicht Hausdorff ist. Er besteht aus einer abzählbaren Vereinigung  $\bigsqcup_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  von  $\mathbb{R}$ 's zusammen mit den Punkten  $\pi/2 + \pi \cdot \mathbb{Z}$ . Ein Umgebungsbasis der Punktes  $\pi/2 + k\pi$  wird durch Endintervalle der zwei benachbarten  $\mathbb{R}$ 's gegeben.

#### **Eine strikt diskontinuierliche Wirkung mit nicht-Hausdorff Orbitraum:**

Wenn wir die Wirkung der Untergruppe  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^2$  betrachten, dann ist diese strikt diskontinuierlich, denn hinreichend schmale vertikale Streifen, welche keine der Achsen  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  für  $k \in \mathbb{Z}$  enthalten, werden unter dieser Wirkung nach rechts verschoben (hinreichend kleine Bälle um Punkte auf diesen Achsen werden vertikal verschoben und nach rechts verzerrt).

Der Orbitraum  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$  ist allerdings nicht Hausdorff, denn  $[(-\pi/2, 0)]$  und  $[(\pi/2, 0)]$  lassen sich nicht trennen.

#### **Eine freie nicht strikt unstetige Wirkung mit diskreten abgeschl. Orbits:**

Wir können den Raum  $X := ([-\pi/2, \pi/2] \times \mathbb{R})/\sim$  bilden, wobei  $(-\pi/2, t) \sim$

$(\pi/2, -t)$ . Da die freie Wirkung von  $\mathbb{R}$  verträglich mit dieser Äquivalenz-Relation ist, wirkt  $\mathbb{R}$  ebenso frei auf diesem Möbiusband  $X$ . Die Bahnen der diskreten Untergruppe  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  sind offensichtlich diskrete abgeschlossene Teilmengen. Jedoch ist die Wirkung nicht strikt unstetig und somit die Quotientenabbildung keine Überlagerung, da für jede Umgebung von  $[(\pi/2, 0)]$  irgendein Translat um  $t \in \mathbb{Z}$  es wieder trifft.

**6.4 Lemma.**

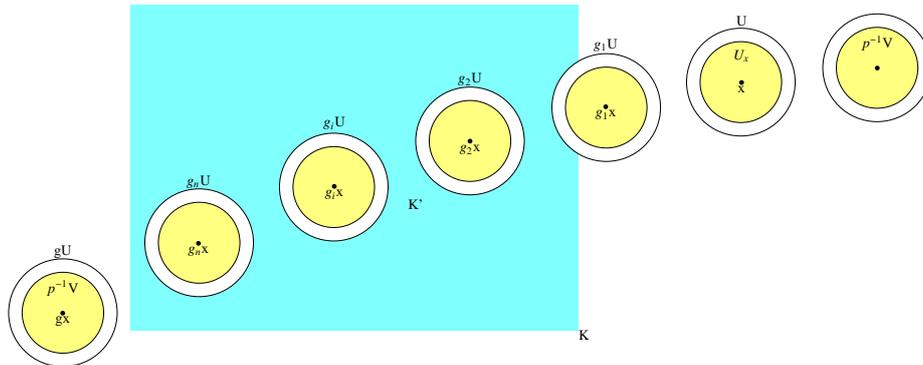
Sei  $G$  eine Gruppe die strikt diskontinuierlich auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  wirkt. Dann sind die Orbits  $Gx$  abgeschlossene diskrete Teilräume von  $M$ . Und die Topologie von  $M/G$  ist genau dann regulär (oder Hausdorff), wenn  $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist für jede kompakte Menge  $K \subseteq M$ .

**Beweis.** Nach [6.2](#) sind die Orbits  $G \cdot x = p^{-1}(\{x\})$  als stetige Urbilder abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen. Wenn  $G$  strikt diskontinuierlich wirkt, dann ist der Orbit  $Gx$  eine diskrete Teilmenge, da aus  $gU \cap U = \emptyset \forall g \neq e$  folgt, daß  $U \cap Gx = \{x\}$ , also ist jeder Punkt in  $Gx$  offen. Insbesondere ist für jede kompakte Menge  $K$  die Menge  $Gx \cap K$  diskret und kompakt also endlich.

( $\Rightarrow$ ) Sei  $K \subseteq M$  kompakt. Wir behaupten, daß jeder Punkt  $x \in M$  eine Umgebung  $U_x \subseteq U$  besitzt, s.d.  $\{g \in G : gU_x \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist. Sei  $\{g \in G : gx \in K\} = \{g_1, \dots, g_n\}$  und  $K' := K \setminus \bigcup_{i=1}^n g_i U$ . Dann ist  $K'$  kompakt und  $Gx \cap K' = \emptyset$ , also  $p(x) \notin p(K')$ . Wenn  $M/G$  regulär ist, so finden wir eine offene Umgebung  $V$  von  $p(x)$ , die  $p(K')$  nicht trifft. Dann ist  $U_x := U \cap p^{-1}(V)$  die gesuchte Umgebung, denn für alle  $g \in G$  trifft  $gU_x \subseteq p^{-1}(V)$  die Menge  $K'$  nicht und für  $g \notin \{g_1, \dots, g_n\}$  trifft  $gU_x \subseteq gU$  die Menge  $\bigcup_{i=1}^n g_i U$  nicht also auch nicht  $K \subseteq K' \cup \bigcup_{i=1}^n g_i U$ .

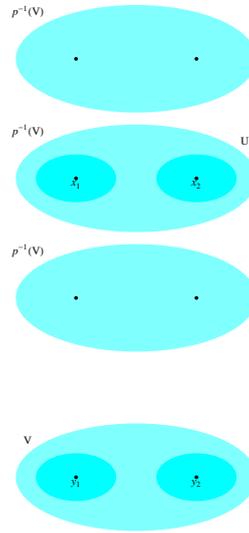
Die Familie  $\{U_x : x \in K\}$  bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $K$ , also reichen endlich viele, sagen wir  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ , aus. Dann ist

$$\begin{aligned} \{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\} &\subseteq \left\{g \in G : g\left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}\right) \cap K \neq \emptyset\right\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^n \left\{g \in G : g(U_{x_i}) \cap K \neq \emptyset\right\} \text{ endlich.} \end{aligned}$$

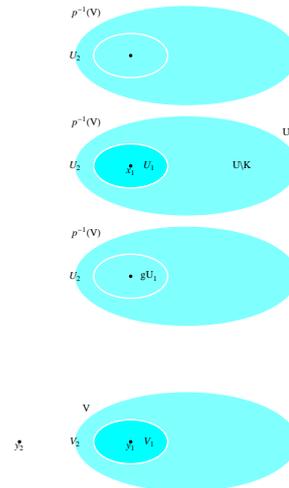


( $\Leftarrow$ ) Da  $M/G$  nach [6.2](#) eine Mannigfaltigkeit ist müssen wir wegen [\[Kri07, 19.5\]](#) nur zeigen, daß  $M/G$  Hausdorff ist. Sei dazu  $y_1 \neq y_2$  in  $N := M/G$ .

Falls  $y_1, y_2$  in einer trivialisierenden Menge  $V \subseteq N$  liegen, dann können wir ein Blatt  $U$  über  $V$  wählen, die beiden Punkte  $x_1 := (p|_U)^{-1}(y_1)$  und  $x_2 := (p|_U)^{-1}(y_2)$  dort durch offene Umgebungen trennen, und da  $p|_U : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus ist, trennen die Bilder  $y_1$  von  $y_2$ .



Falls  $y_2$  nicht in einer trivialisierenden Umgebung  $V$  von  $y_1$  liegt. Dann wählen wir ein Urbild  $x_1$  von  $y_1$  und eine relativ kompakte Umgebung  $U_1$  von  $x_1$ , deren Abschluß  $K := \bar{U}_1$  im Blatt über  $V$  von  $x_1$  enthalten ist. Dann ist  $G \cdot K$  abgeschlossen: Sei nämlich  $x \notin G \cdot K$ , dann existiert eine (relativ kompakte) Umgebung  $U$  von  $x$ , s.d.  $\{g \in G : gU \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist, denn nach Voraussetzung ist  $\{g \in G : gU \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \{g \in G : g(\bar{U} \cup K) \cap (\bar{U} \cup K) \neq \emptyset\}$  endlich. Wenn wir für diese endlich vielen  $g_i \in G$ , die Menge  $U$  nun so verkleinern, daß  $g_i U \cap K = \emptyset$  (geht, da  $g_i x \notin K$ ), so ist  $GU \cap K = \emptyset$  und damit auch  $U \cap GK = \emptyset$ . Somit ist  $U_2 := M \setminus GK$  offen und disjunkt von  $GU_1 \subseteq GK$  und die Bilder  $V_j := p(U_j)$  sind offene Mengen, die  $y_1$  und  $y_2$  trennen.  $\square$



Wir haben in [6.3](#) ein Beispiel angegeben, welches zeigt, daß es nicht genügt zu fordern, daß die Bahnen diskret (und die  $g \neq e$  fixpunktfrei) sind um eine Überlagerung zu erhalten und es auch nicht genügt, daß  $G$  strikt diskontinuierlich wirkt um einen Hausdorff-Quotienten zu erhalten.

In den meisten unserer Beispiele ist aber  $M$  eine Lie-Gruppe und  $G$  eine Untergruppe von  $M$ , die durch Linksmultiplikation auf  $M$  wirkt. In dieser Situation gilt:

**6.5 Lemma.**

*Es sei  $M$  eine lokalkompakte Gruppe und  $G < M$  eine abgeschlossene Untergruppe. Dann sind äquivalent*

1.  $G$  ist diskret in  $M$ ;
2.  $G$  wirkt auf  $M$  durch Linksmultiplikation strikt diskontinuierlich;
3. Für alle kompakten  $K \subseteq M$  ist  $\{g : gK \cap K \neq \emptyset\}$  endlich.

**Beweis.** (1 $\Rightarrow$ 3) Sei  $K \subseteq M$  kompakt. Da  $(g, h) \mapsto gh^{-1}$  stetig ist, ist  $KK^{-1} := \{k'k^{-1} : k', k \in K\}$  kompakt und somit der Durchschnitt mit der diskreten abgeschlossenen Teilmenge  $G$  endlich. D.h.  $\{g \in G : g \in KK^{-1}\} = \{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$  ist endlich.

(2 $\Leftarrow$ 3) Sei  $K$  eine kompakte Umgebung von  $x$ . Dann existieren nur endlich viele  $g \in G$  mit  $gK \cap K \neq \emptyset$  und wir können  $K$  so verkleinern, daß  $gK \cap K = \emptyset$  für alle diese  $g \neq e$ .

(1 $\Leftarrow$ 2) Sei  $U$  eine Umgebung von  $e$  in  $M$  mit  $gU \cap U = \emptyset$  für alle  $g \neq e$ . Dann ist  $g \in gU$  und somit nicht in  $U$  für  $g \neq e$ , also  $U \cap G = \{e\}$ , d.h.  $\{e\}$  ist offen in  $G$ .  $\square$

Wir kommen nun zum anderen Extrem, wo die wirkende Gruppe zusammenhängend ist.

### 6.6 Definition (Reguläres Teilbündel)

Man nennt ein integrables Teilvektorbündel REGULÄR (bzw. die zugehörige Blätterung regulär), wenn trivialisierende Karten existieren, die jede (maximale) Integralmannigfaltigkeit höchstens einmal treffen. Diese heißen REGULÄRE KARTEN.

Die Blätterung des Torus mit irrationalen Anstieg ist klarerweise nicht regulär und der Raum der maximalen Integralmannigfaltigkeiten in der kanonischen Quotiententopologie offensichtlich indiskret also keine Mannigfaltigkeit. Hingegen sind die Blätterungen aus [4.10](#) offensichtlich regulär.

Wir zeigen nun, daß die regulären Blätterungen genau jene aus [4.10](#) sind.

### 6.7 Satz (Raum der maximalen Integralmannigfaltigkeiten).

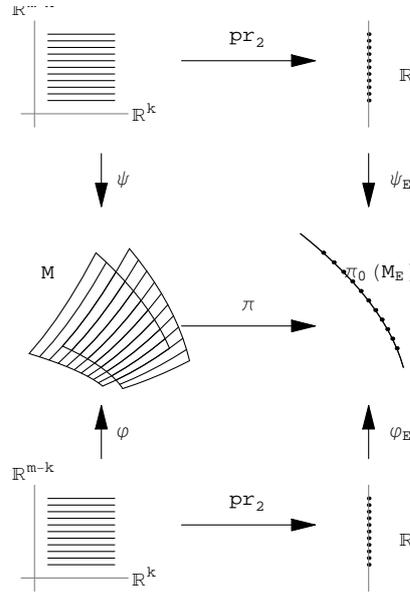
Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $E$  ein reguläres integrables Teilvektorbündel von  $TM$ . Dann existiert am Raum aller maximalen Integralmannigfaltigkeiten (also dem Raum  $\pi_0(M_E)$  der Zusammenhangskomponenten von  $M_E$ ) eine (nicht notwendig Hausdorff'sche) Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß die kanonische Quotientenabbildung  $\pi : M \rightarrow \pi_0(M_E)$  mit  $p \mapsto (\text{max. Integralmannigfaltigkeit durch } p)$  eine Submersion mit  $\text{Ker}(T\pi) = E$  ist.

**Beweis.** Es sei  $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M$  eine reguläre Karte von  $M$  für  $E$ . Man definiert dann eine Karte  $\varphi_E$  für  $\pi_0(M_E)$  wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & \pi_0(M_E) \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi_E \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\text{Pr}_2} & \mathbb{R}^{n-k} \end{array}$$

Offensichtlich ist  $\varphi_E : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \pi_0(M_E)$  wohldefiniert und (weil  $\varphi$  regulär ist) injektiv, also  $\varphi_E$  bijektiv auf das Bild. Es bleibt z.z., daß der Kartenwechsel glatt ist. Seien  $\varphi$  und  $\psi$  reguläre Karten und  $C$  ein Punkt (d.h. eine maximale Integralmannigfaltigkeit) im Bild von  $\varphi_E$  und  $\psi_E$ , d.h.  $C \cap \text{Bild } \varphi \neq \emptyset \neq C \cap \text{Bild } \psi$ .

Wir betrachten zuerst den Spezialfall, wo  $\text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi \cap C$  nicht leer ist. Sei  $p$  ein Punkt in diesem Durchschnitt.



Wegen  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E \circ \text{pr}_2 = \psi_E^{-1} \circ \pi \circ \varphi = \text{pr}_2 \circ \psi^{-1} \circ \varphi$  ist  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$  als Einschränkung eines Diffeomorphismus lokal um  $\text{pr}_2(\varphi^{-1}(p))$  ein Diffeomorphismus.

Nun zum allgemeinen Kartenwechsel  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$ : Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge der regulärer Karten  $\varphi$  die  $C$  treffen:

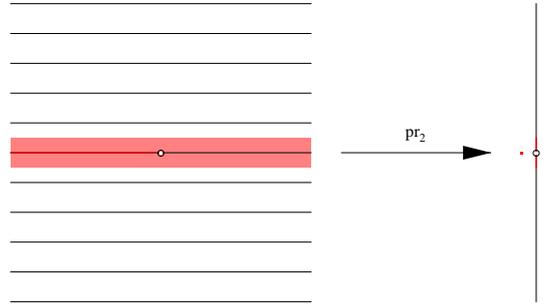
$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \psi_E^{-1} \circ \varphi_E \text{ ist Diffeomorphismus offener Umgebungen von } \varphi_E^{-1}(C).$$

Seien  $A, B$  Äquivalenzklassen, dann gilt:  $R(A) := \bigcup_{\varphi \in A} \text{Bild } \varphi \cap C$  ist offen in  $C$ . Falls  $R(A) \cap R(B)$  nicht leer ist, so gilt  $A = B$ , denn wenn  $\varphi \in A$  und  $\psi \in B$  ist mit  $p \in \text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi \cap C$ , dann ist  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$  ein Diffeomorphismus lokal um  $\text{pr}_2(\varphi^{-1}(p)) = \varphi_E^{-1}(C)$  nach dem zuvor Gezeigten, d.h.  $\varphi \sim \psi$  also  $A = B$ . Die Vereinigung  $\bigcup_A R(A)$  ist somit eine disjunkte Überdeckung von  $C$  mit offenen Mengen. Da  $C$  zusammenhängend ist, gibt es also genau eine Äquivalenzklasse  $A$ . Somit ist  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$  für je zwei Karten  $\varphi$  und  $\psi$  mit  $C \in \text{Bild } \varphi_E \cap \text{Bild } \psi_E$  lokal um  $\varphi_E^{-1}(C)$  glatt also  $\pi_0(M_E)$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Es ist  $\pi : M \rightarrow \pi_0(M_E)$  submersiv mit  $\text{Ker}(T\pi) = E$ , denn die Kartendarstellung von  $\pi$  bzgl. der Karten  $\varphi$  und  $\varphi_E$  ist durch  $\text{pr}_2$  gegeben und somit  $\text{Ker}(T\pi)$  via  $T\varphi$  faserweise durch  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ .  $\square$

### 6.8 Gegenbeispiel

Nicht jede  $\pi_0(M_E)$  ist Hausdorff, wie das Beispiel  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , das vollständige Vektorfeld  $\xi_{(x,y)} := (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x}$  und  $E_{(x,y)} := \mathbb{R} \cdot \xi_{(x,y)}$  zeigt.



### 6.9 Satz (Homogene Räume).

Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Dann existiert auf der Menge der (rechten) Nebenklassen  $G/H := \{gH : g \in G\}$  eine eindeutige  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeitsstruktur, für die  $G \rightarrow G/H$  eine Submersion ist. Es ist dann  $G \rightarrow G/H$  sogar ein  $H$ -Hauptfaserbündel.

**Beweis.** Wir beweisen dies in zwei Teilen: Im ersten Schritt bilden wir die Faktorgruppe nach der Zusammenhangskomponente  $H_0$  von  $e$  in  $H$ , im zweiten faktorisieren wir die Wirkung der diskreten Gruppe  $H/H_0$  heraus.

$$G \rightarrow G/H_0 \rightarrow (G/H_0)/(H/H_0) \cong G/H \quad \text{nach } \boxed{6.1}$$

Durch  $E_g := TL_g(T_e H)$  wird ein integrables Teilvektorbündel mit den  $H_0$ -Nebenklassen  $gH_0$  als maximale Integralmannigfaltigkeiten (nach dem Beweis von [4.11](#)) definiert. Nach [5.4](#) ist  $H_0$  als abgeschlossene separable Untergruppe eine reguläre Teilmannigfaltigkeit und damit  $E_g$  ein reguläres Teilbündel:

Reguläre trivialisierende Karten für  $E$  sind nämlich durch

$$\varphi : \mathfrak{h}^\perp \times H_0 \supseteq U \times H_0 \rightarrow \exp(U)H_0 \subseteq G, \quad (\xi, h) \mapsto \exp(\xi)h$$

für hinreichend kleine  $U$ -Umgebungen  $U$  gegeben. Offensichtlich ist dies ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus.

Injektivität: Lokal um  $0 \in \mathfrak{h}^\perp \times \mathfrak{h}^\perp$  hat  $\psi : (\xi', \xi) \mapsto \exp(-\xi')\exp(\xi)$  Werte in einer Umgebung  $U$  von  $e \in G$  und da  $H_0 \subseteq G$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit ist, existiert eine Submersion  $f : G \supseteq U \rightarrow \mathfrak{h}^\perp$  mit  $f^{-1}(0) = H_0 \cap U$  und  $\text{Ker}(T_e f) = \mathfrak{h}$ . Somit ist  $f \circ \psi : \mathfrak{h}^\perp \times \mathfrak{h}^\perp \rightarrow \mathfrak{h}^\perp$  eine Submersion und  $(f \circ \psi)^{-1}(\{0\})$  eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension  $\dim(\mathfrak{h}^\perp)$  welche die Diagonale enthält also aus Dimensionsgründen lokal mit dieser übereinstimmt. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi', h') = \varphi(\xi, h) &\Rightarrow \psi(\xi', \xi) = \exp(-\xi')\exp(\xi) = h'h^{-1} \in H_0 \\ &\Rightarrow f(\psi(\xi', \xi)) = 0 \Rightarrow \xi' = \xi \end{aligned}$$

und damit auch  $h' = h$ . Also ist  $\varphi$  auch injektiv und damit ein Diffeomorphismus.

In [6.7](#) haben wir gezeigt, daß in so einer Situation  $G/H_0$  eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur trägt, sodaß  $\pi : G \rightarrow G/H_0$  eine Submersion ist. Da  $H_0$  ein (offener) Normalteiler von  $H$  ist, ist  $H/H_0$  selbst eine (diskrete) Gruppe, und diese wirkt strikt unstetig auf der Mannigfaltigkeit  $G/H_0$  durch  $hH_0 \cdot gH_0 := gh^{-1}H_0$ : Sei nämlich  $U$  offen in  $G$  mit  $U^{-1}U \cap H \subseteq H_0$  und  $h \notin H_0$ , dann ist  $(hH_0 \cdot \pi(U)) \cap \pi(U) = \emptyset$ , denn andernfalls wäre  $uH_0 = hH_0 \cdot u'H_0 = uh^{-1}H_0$  für gewisse  $u, u' \in U$ , also  $u'h^{-1} = uh_0$  für ein  $h_0 \in H_0$ , folglich  $h_0h = u^{-1}u' \in U^{-1}U \cap H \subseteq H_0$  und somit  $h \in H_0$ . Aus [6.2](#) folgt nun, daß  $(G/H_0)/(H/H_0)$  eine Mannigfaltigkeit und  $G/H_0 \rightarrow (G/H_0)/(H/H_0)$  eine Überlagerung ist.

Es bleibt die Faserbündelstruktur zu beweisen: Da  $p : G \rightarrow G/H$  als Zusammensetzung von Submersionen ebenfalls eine ist, finden wir einen lokalen Schnitt  $s : U \rightarrow G$

nach [Kri07, 22.1]. Dann ist  $U \times H \rightarrow p^{-1}U$ ,  $(u, h) \mapsto s(u) \cdot h$  eine Trivialisierung mit inverser Abbildung  $g \mapsto (p(g), s(p(g))^{-1} \cdot g)$ :

Es ist  $p(s(u) \cdot h) = p(s(u)) = u \in U$  und  $p(g) = p(s(p(g)))$  also  $g = s(p(g)) \cdot h$  für ein  $h \in H$ , d.h.  $s(p(g))^{-1}g = h \in H$ . Weiters ist  $(u, h) \mapsto s(u) \cdot h \mapsto (u, s(u)^{-1} \cdot s(u) \cdot h) = (u, h)$  und  $g \mapsto (p(g), s(p(g))^{-1} \cdot g) \mapsto s(p(g)) \cdot (s(p(g))^{-1} \cdot g) = g$ .

Beachte, daß die rechts-Wirkung von  $H$  auf  $G$  genau die rechten Nebenklassen als Orbits besitzt und auf diesen transitiv und frei wirkt, also ist  $G \rightarrow G/H$  ein  $H$ -Hauptfaserbündel in der Terminologie von [6.11].

Beachte weiters, daß  $G/H$  Hausdorff ist, denn sei  $x, x' \in G$  mit  $\pi(x) \neq \pi(x')$ , i.e.  $x'$  liegt nicht in der abgeschlossenen Menge  $xH$ . Somit existiert eine  $e$ -Umgebung  $U$  mit  $U^{-1}Ux' \cap xH = \emptyset$  und damit sind  $UxH$  und  $Ux'H$  offene  $H$ -invariante disjunkte Umgebungen von  $xH$  und  $xH'$ .  $\square$

### 6.10 Bemerkungen

1. Ist  $H$  zusätzlich normal in  $G$ , dann ist klarerweise  $G/H$  eine Lie-Gruppe und  $G \rightarrow G/H$  ein Lie-Gruppen-Homomorphismus.
2. Die Gruppe  $G$  wirkt transitiv von links auf  $M := G/H$  und die entsprechenden Fixgruppen  $G_{\dot{g}} = \{k \in G : k \cdot \dot{g} = \dot{g}\}$  für  $\dot{g} \in M$  sind konjugiert zu  $H$ , denn  $p(g) = \dot{g} = k \cdot \dot{g} = k \cdot p(g) = p(kg) \Leftrightarrow \exists h \in H : kg = gh \Leftrightarrow k \in gHg^{-1}$ .

### 6.11 Definition. Hauptfaserbündel.

Es sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Unter einem  $G$ -HAUPTFASERBÜNDEL versteht man ein Faserbündel  $p : P \rightarrow M$  mit einer rechts-Wirkung von  $G$  auf  $P$  welche die Fasern invariant läßt und transitiv und frei auf ihnen wirkt.

Für separable  $G$  braucht man dabei gar nicht voraussetzen, daß  $p$  ein Faserbündel ist, sondern es genügt surjektiv und submersiv zu verlangen, denn dann existieren lokale Schnitte  $\sigma : M \supseteq U \rightarrow p^{-1}(U) \subseteq P$  und diese liefern Faserbündelkarten

$$\varphi : U \times G \rightarrow p^{-1}(U), \quad (x, g) \mapsto \sigma(x) \cdot g$$

Es ist nämlich  $p(\varphi(x, g)) = p(\sigma(x) \cdot g) = p(\sigma(x)) = x = \text{pr}_1(x, g)$  und somit  $\varphi(U \times G) \subseteq p^{-1}(U)$ . Weiters ist  $\varphi : U \times G \rightarrow p^{-1}(U)$  bijektiv, denn für  $y \in p^{-1}(U)$  ist  $x := p(y) \in U$  und somit existiert (wegen transitiv und frei) ein eindeutiges  $g \in G$  mit  $y = \sigma(x) \cdot g$ . Die Tangentialabbildung von  $\varphi$  bei  $(x, e)$  ist  $(\xi_x, \eta_e) \mapsto T_x \sigma \cdot \xi_x + T \text{ev}_{\sigma(x)} \cdot \eta_e$ , also surjektiv, denn wegen  $p \circ \sigma = \text{id}$  ist  $\text{Bild}(T_x \sigma) \oplus \text{Ker } T_{\sigma(x)} p \cong T_{\sigma(x)} P$ , also  $\zeta \in T_{\sigma(x)} P$  darstellbar als  $\zeta = T_x \sigma \cdot \xi_x + \bar{\eta}$  mit  $\xi_x \in T_x M$  und  $\bar{\eta} \in \text{Ker } T_{\sigma(x)} p = T_{\sigma(x)}(\sigma(x) \cdot G) = T \text{ev}_{\sigma(x)}(T_e G)$  (wegen [6.12]), also  $\bar{\eta} = T \text{ev}_{\sigma(x)} \cdot \eta_e$  für eine  $\eta_e \in T_e G$ .

Wegen  $\varphi(x, g) = R_g(\varphi(x, e))$  ist  $\varphi$  somit eine Submersion. und aus Dimensionsgründen auch eine Immersion, d.h.  $\varphi$  ist Faserbündelkarte.

### 6.12 Satz.

Wirkt eine separable Lie-Gruppe  $G$  transitiv auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  und sei  $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$  für ein beliebiges  $x \in M$ , dann gilt:  $G_x$  ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  und  $G/G_x$  ist diffeomorph zu  $M$  vermöge  $gG_x \mapsto gx$ . Der Wirkung von  $G$  auf  $M$  entspricht dabei die Linksmultiplikation auf  $G/G_x$ .

$$\begin{array}{c}
 G_x \hookrightarrow G \xrightarrow{\text{ev}_x} G \cdot x \equiv M \\
 \searrow \pi \qquad \uparrow \cong \\
 \qquad \qquad \qquad G/G_x
 \end{array}$$

**Beweis.** Nach [A.11](#) ist die vertikale Abbildung  $gG_x \mapsto gx$  eine bijektive Abbildung, die mit der Wirkung von  $G$  auf  $G/G_x$  und auf  $M$  vertauscht. Sie ist offensichtlich glatt und auch eine Immersion, denn dazu genügt es die Injektivität der Tangentialabbildung bei  $eG_x \in G/G_x$  nachzuweisen. Sei dazu  $0 = T_e \text{ev}_x \cdot v = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tv) \cdot x)$  für ein  $v \in T_e G$ , dann ist

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\exp(tv) \cdot x) &= \frac{d}{ds}|_{s=0}(\exp((t+s)v) \cdot x) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\exp(tv) \cdot \exp(sv) \cdot x) \\
 &= TL_{\exp(tv)}\left(\frac{d}{ds}|_{s=0}(\exp(sv) \cdot x)\right) = 0
 \end{aligned}$$

für alle  $t$ , also  $\exp tv \cdot x = x$ , i.e.  $\exp tv \in G_x$ , und somit  $T\pi \cdot v = 0$  in  $T(G/G_x)$ .

Eine bijektive Immersion mit Lindelöf'schen Definitionsbereich ist aber bereits ein Diffeomorphismus: Es genügt dazu die Submersivität nachzuweisen. Angenommen, die Dimension des Zielraums ist größer, dann gibt es auf Grund des Rangsatzes [\[Kri07, 21.2\]](#) zu jedem Punkt eine Umgebung, deren Bild nirgends dicht ist. Abzählbar viele dieser Bilder überdecken dann das Bild (da  $G$  als Lie-Gruppe parakompakt ist nach [2.2](#) und wegen der Separabilität nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt und somit Lindelöf ist nach [\[Kri07, 19.6\]](#)), was ein Widerspruch zur Baire'schen Eigenschaft (des lokalkompakten Raums  $M$ , siehe [\[Kri99, 3.2.4\]](#)) ist.  $\square$

### 6.13 Bemerkung.

Für Hauptfaserbündel wird durch  $(y, y \cdot g) \mapsto g$  eine glatte Abbildung

$$\tau : P \times_M P := \{(y', y) : p(y') = p(y)\} \rightarrow G$$

definiert: Da  $p : P \rightarrow M$  submersiv ist, ist  $p \times p : P \times P \rightarrow M \times M$  transversal zu  $\Delta := \{(x, x) : x \in M\}$  und somit  $P \times_M P$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $P \times P$  nach [\[Kri07, 21.22\]](#), oder benutze direkt [\[Kri07, 21.23\]](#). Es ist  $\tau(y, y')$  durch die implizite Gleichung  $y' = y \cdot \tau(y, y')$  gegeben und da  $G$  frei wirkt, ist  $T\text{ev}_y : TG \rightarrow T(y \cdot G) \subseteq TP$  injektiv nach [6.12](#). Der implizite Funktionensatz liefert somit die Glattheit von  $\tau$ .

Im Allgemeinen können wir für Wirkungen einer Lie-Gruppe  $G$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  nicht erwarten, daß der Orbitraum  $M/G$  eine Mannigfaltigkeit ist. Probleme machen insbesondere Fixpunkte. Z.B. wirkt  $SO(n)$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit Fixpunkt  $0$  und  $\mathbb{R}^n/SO(n) \cong \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$  vermöge  $SO(n) \cdot x \mapsto \|x\|$ . Betrachten wir aber freie Wirkungen, dann können wir die Konstruktion aus [6.9](#) verallgemeinern:

### 6.14 Satz (Mannigfaltigkeit der Orbits).

Die separable Lie-Gruppe  $G$  wirke frei auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $M/G$  besitzt eine (eindeutige) Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß  $\pi : M \rightarrow M/G$  eine Submersion ist. Dies ist dann sogar ein  $G$ -Hauptfaserbündel.
2. Die Abbildung  $G \times M \rightarrow M \times M$  mit  $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$  ist eine topologische Einbettung (oder äquivalent: die Abbildung  $M \times M \supseteq \{(y, x) : \exists g \in G, y = g \cdot x\} \rightarrow G$ ,  $(g \cdot x, x) \mapsto g$  ist stetig).

**Beweis.** (2) Die Äquivalenz der beiden Bedingungen in (2) ist klar, denn  $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$  ist injektiv (da die Wirkung frei ist) mit Umkehrabbildung  $(g \cdot x, x) \mapsto (g, x)$  definiert am Bild.

(1) Wir zeigen zuerst, daß die Submersivität von  $\pi : M \rightarrow M/G$  bereits die Hauptfaserbündel-Eigenschaft impliziert: Sei dazu  $s : M/G \supseteq U \rightarrow M$  ein Schnitt auf einer offenen Menge  $U$ . Dann ist  $\varphi : U \times G \rightarrow \pi^{-1}U$ ,  $(u, g) \mapsto g \cdot s(u)$  glatt und bijektiv mit inverser Abbildung  $x \mapsto (\pi(x), g)$ , wobei  $g$  definiert durch  $g \cdot s(\pi(x)) = x$  ist. Weiters ist  $\varphi$  immersiv, da  $s(U)$  transversal zu den Orbits liegt. Genauer: Es genügt die Immersivität von  $\varphi : (u, g) \mapsto g \cdot s(u)$  bei  $(u, e)$  nachzurechnen (vgl. [6.11](#)):

$$\begin{aligned} 0 &= T_{u,e}\varphi \cdot (\xi, v) = T_u s \cdot \xi + T_e \text{ev}_{s(u)} \cdot v \in T_{s(u)}(s(U)) + T_x(G \cdot x) \Rightarrow \\ 0 &= T\pi \left( T_u s \cdot \xi + T_e \text{ev}_{s(u)} \cdot v \right) = T_u(\pi \circ s) \cdot \xi + T_e(\pi \circ \text{ev}_{s(u)}) \cdot v \\ &= T_u \text{id} \cdot \xi + T_e(\text{konst}_{\pi(s(u))}) \cdot v = \xi + 0 \Rightarrow \\ 0 &= T_e \text{ev}_{s(u)} \cdot v \xrightarrow{\text{Bew. von } \text{6.12}} v \in T_e G_{s(u)} = \{0\}. \end{aligned}$$

Nach dem Beweis von [6.12](#) ist  $\varphi$  somit eine glatte Trivialisierung. Die rechts-Wirkung von  $G$  auf  $M$  ist durch  $x \cdot g := g^{-1} \cdot x$  gegeben. Diese ist offensichtlich frei und transitiv auf den Fasern  $G \cdot x$ .

(1  $\Rightarrow$  2) Es konvergiere  $(g_i x_i, x_i) \rightarrow (g_\infty x_\infty, x_\infty)$  in  $M \times M$ . Es genügt zu zeigen, daß  $g_i \rightarrow g_\infty$ . O.B.d.A. sei  $g_\infty = e$  (ersetze dazu  $g_\infty^{-1} g_i$  durch  $g_i$ ). Sei  $s : M/G \supseteq U \rightarrow M$  wie zuvor ein glatter lokaler Schnitt um  $\pi(x_\infty)$ . Dann ist  $U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq M$ ,  $(x, h) \mapsto h \cdot s(x)$  ein Diffeomorphismus und somit  $\pi^{-1}(U) \ni x_i = h_i s(\dot{x}_i)$  für  $\dot{x}_i := \pi(x_i)$  und eindeutige  $h_i \rightarrow e$ . Wegen  $g_i h_i s(\dot{x}_i) = g_i x_i \rightarrow g_\infty x_\infty = e s(\pi(x_\infty))$  in  $\pi^{-1}(U)$  gilt  $g_i h_i \rightarrow e$  und somit  $g_i \rightarrow e$ .

(1  $\Leftarrow$  2) Wie im Beweis von [6.9](#) stellen wir  $\pi$  als Zusammensetzung dar:

$$M \rightarrow M/G_0 \rightarrow (M/G_0)/(G/G_0) = M/G.$$

Für die erste Abbildung definieren wir  $E_x := T \text{ev}_x(T_e G) \subseteq T_x M$ , wobei  $\text{ev}_x : G \rightarrow G \cdot x \subseteq M$ ,  $g \mapsto g \cdot x$  ein Diffeomorphismus ist nach [6.12](#) und weil  $g \mapsto g \cdot x$  eine topologische Einbettung nach Voraussetzung (2) ist. Dies ist ein integrables Teilvektorbündel mit maximaler zusammenhängender Integralmannigfaltigkeit  $G_0 \cdot x$  durch  $x \in M$ . Es ist  $E$  regulär, da  $G_0 \cdot x$  nach Voraussetzung (2) reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M$  ist:

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & M \times M \\ \uparrow & & \uparrow \\ G_0 \times \{x\} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & M \times \{x\} \end{array}$$

Indem wir eine kleine zu  $G_0 \cdot x$  transversale Mannigfaltigkeit  $S$  wählen erhalten wir eine reguläre Karte  $S \times G_0 \rightarrow M$ ,  $(y, g) \mapsto g \cdot y$ . Also können wir wieder [6.7](#) anwenden und erhalten, daß  $M \rightarrow M/G_0$  eine Submersion ist.

Für die zweite Abbildung beachten wir, daß  $G/G_0$  auf  $M/G_0$  vermöge  $gG_0 \cdot G_0 x := G_0 g x$  wirkt. Die Wirkung dieser diskreten Gruppe ist strikt diskontinuierlich: Sei  $(gG_0 \cdot G_0 U) \cap G_0 U \neq \emptyset$  für eine offene Umgebung  $U$  von  $x_\infty$  in  $M$ , dann ist  $gu = g'u'$  mit  $g' \in G_0$  und  $u, u' \in U$ . Es folgt  $u = g^{-1}g'u'$  und somit  $h := g^{-1}g' \in G_0$  für hinreichend kleines  $U$  (andernfalls existieren  $u_i \rightarrow x_\infty$  in  $M$  und  $h_i \in G \setminus G_0$  mit  $h_i u_i \rightarrow x_\infty$  und somit  $h_i \rightarrow e$  wegen (2), ein Widerspruch zu  $h_i \notin G_0$ ), also ist  $g \in G_0$ .  $\square$

**6.15 Definition. Adjungierte Darstellungen.**

Es sei  $G$  eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Wir betrachten folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} \text{konj} : G &\rightarrow \text{Aut}(G), & g &\mapsto (h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}) \\ \text{Ad} : G &\rightarrow GL(\mathfrak{g}), & g &\mapsto \mathcal{L}(\text{konj}_g) = T_e \text{konj}_g = TL_g \circ TR_{g^{-1}} = TR_{g^{-1}} \circ TL_g \\ \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), & X &\mapsto (Y \mapsto [X, Y]) \end{aligned}$$

Man bezeichnet  $\text{Ad}$  als die ADJUNGIERTE DARSTELLUNG DER LIE-GRUPPE und  $\text{ad}$  als die ADJUNGIERTE DARSTELLUNG DER LIE-ALGEBRA.

**6.16 Proposition.**

Für jede Lie-Gruppe  $G$  mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  sind  $\text{konj} : G \rightarrow \text{Aut}(G)$  und  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subseteq GL(\mathfrak{g})$  Gruppen-Homomorphismen,  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq L(\mathfrak{g})$  ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus und es gilt

$$\mathcal{L}(\text{Ad}) = \text{ad} \quad \text{und} \quad \text{Ad} \circ \exp_G = \exp_{GL(\mathfrak{g})} \circ \text{ad},$$

d.h.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_{GL(\mathfrak{g})} \\ G & \xrightarrow{\text{Ad}} & GL(\mathfrak{g}) \end{array}$$

**Beweis.** Offensichtlich ist  $\text{ad}$  ein Lie-Algebra-Homomorphismus und  $\text{konj}$  ein Gruppen-Homomorphismus und weil  $\mathcal{L}$  funktoriell ist auch  $\text{Ad} : G \xrightarrow{\text{konj}} \text{Aut}(G) \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subseteq GL(\mathfrak{g})$  einer. Letzterer ist glatt, denn  $\widehat{\text{Ad}} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ist es. Wegen [3.8](#) bleibt nur noch  $\mathcal{L}(\text{Ad}) = \text{ad}$  zu zeigen. Für  $X, Y \in \mathfrak{g}$  ist

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)(Y) &:= [X, Y] \stackrel{\text{[Kri07, 29.10]}}{=} \mathcal{L}_X(Y) := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^X)^*(Y)_e \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} T \text{Fl}_{-t}^X \cdot Y_{\text{Fl}_t^X(e)} \\ &\stackrel{\text{[3.5]}}{=} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} TR_{\exp(-tX)} \cdot TL_{\exp(tX)} \cdot Y = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp(tX))(Y) \\ &= T_e \text{Ad} \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \exp(tX) \right) (Y) = T_e \text{Ad}(X)(Y). \quad \square \end{aligned}$$

**6.17 Induzierte Darstellung einer Wirkung mit Fixpunkt.**

Die Argumentation im Beweis von [6.16](#) zeigt, daß das Differential einer  $G$ -Wirkung auf  $M$  mit Fixpunkt  $x$  eine DARSTELLUNG von  $G$  auf  $T_x M$  definiert, d.h. eine Wirkung  $G \times T_x M \rightarrow T_x M$ , die in der zweiten Variable linear ist, also einen Lie-Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow GL(T_x M)$  induziert.

**Local Linearization Theorem.**

Sei  $G$  eine kompakte Lie-Gruppe die auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  wirkt, sei weiters  $x \in M$  ein Fixpunkt. Dann existiert ein  $G$ -äquivarianter Diffeomorphismus von einer Nullumgebung in  $T_x M$  auf eine Umgebung von  $x \in M$ .

**Beweis.** Sei  $U$  eine  $G$ -invariante Umgebung von  $x$  und  $f : U \rightarrow T_x M$  glatt mit  $T_x f = \text{id}$ . Sei  $\tilde{f}(y) := \int_G g \cdot f(g^{-1} \cdot y) dg$ , wobei  $dg$  das invariante Haarmaß auf  $G$  mit

$\int_G dg = 1$  bezeichnet. Dann ist  $\tilde{f} : U \rightarrow T_x M$  glatt,  $G$ -äquivariant und  $T_x \tilde{f} = \text{id}$ :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(h \cdot y) &= \int_G g \cdot f(g^{-1}hy) dg = h \cdot \int_G h^{-1}g \cdot f((h^{-1}g)^{-1}y) dg \\ &= h \cdot \int_G g \cdot f(g^{-1}y) dg = h \cdot \tilde{f}(y) \\ (T_x \tilde{f})(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{f}(c(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_G g \cdot f(g^{-1} \cdot c(t)) dg \\ &= \int_G TL_g \cdot T_{g^{-1}x} f \cdot TL_{g^{-1}} \cdot c'(0) dg = c'(0) = v\end{aligned}$$

Die lokale Inverse ist dann der gesuchte Diffeomorphismus.  $\square$

### 6.18 Bemerkung. Orbiträume welche Faserbündel sind.

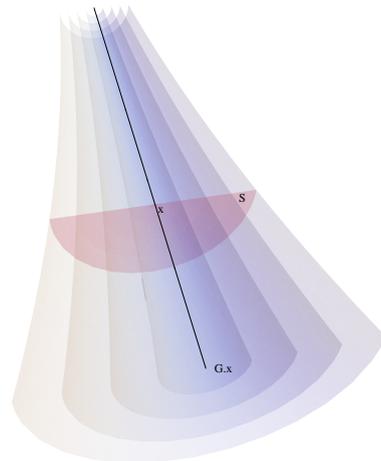
In [6.14](#) haben wir separable Lie-Gruppen  $G$ , die frei auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  wirken und für die der Orbitraum  $M/G$  selbst eine Mannigfaltigkeit und die kanonische Abbildung  $\pi : M \rightarrow M/G$  eine Submersion ist, betrachtet. In [6.14.1](#) zeigten wir, daß dann  $\pi : M \rightarrow M/G$  sogar ein  $G$ -Hauptfaserbündel ist, wobei Faserbündelkarten  $\psi : M/G \times G \supseteq V \times G \rightarrow \pi^{-1}(V) \subseteq M$  gegeben sind durch  $(u, g) \mapsto g \cdot s(u)$  für lokale Schnitte  $s : M/G \supseteq V \rightarrow \pi^{-1}(V) \subseteq M$  von  $\pi$ . Diese Faserbündelkarten sind  $G$ -äquivariant und insbesondere  $U := \pi^{-1}(V)$  eine  $G$ -invariante offene Teilmenge von  $M$ . Sei  $x \in U$  und damit auch  $G \cdot x \subseteq U$ . O.B.d.A. können wir die typische Faser  $G$  mit  $\pi^{-1}(\pi(x)) = G \cdot x$  indentifizieren. Folglich ist  $\rho := \text{pr}_2 \circ \psi^{-1} : U \rightarrow V \times G \rightarrow G \cong G \cdot x$  glatt,  $G$ -äquivariant und  $\rho|_{G \cdot x} = \text{id}$ . Sei schließlich  $S := \psi(V \times \{x\})$  das diffeomorphe Bild von  $V \times \{x\} \cong V \subseteq M/G$  in  $U$ , d.h.

$$S = \psi(V \times \{x\}) = (\pi, \rho)^{-1}(V \times \{x\}) = \pi^{-1}(V) \cap \rho^{-1}(\{x\}) = \rho^{-1}(\{x\}).$$

Beachte nun, daß so eine äquivariante Retraktion  $\rho : M \supseteq U \rightarrow G \cdot x = \{x\}$  auch im anderen Extremfall, wo  $x$  ein Fixpunkt der  $G$ -Wirkung ist (also  $G$  nicht frei wirkt), existiert, nämlich die konstante Abbildung.

### Definition. Äquivariante tubuläre Umgebungen und Scheiben.

Es wirke  $G$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Unter einer ÄQUIVARIANTEN TUBULÄREN UMGEBUNG eines Orbits  $G \cdot x$  versteht man eine  $G$ -äquivariante Retraktion  $\rho : U \rightarrow G \cdot x$  von einer  $G$ -invarianten offenen Umgebung  $U$  von  $G \cdot x$  in  $M$  auf  $G \cdot x$ . Es heißt dann  $S := \rho^{-1}(\{x\})$  SCHEIBE (engl.: slice) der Gruppenwirkung bei  $x$ .



### 6.19 Bemerkung. Wirkungen mit Scheiben.

Was folgt nun umgekehrt, wenn so eine  $G$ -äquivariante tubuläre Umgebung  $\rho : M \supseteq U \rightarrow G \cdot x$  von  $G \cdot x$  gegeben ist? Offensichtlich ist dann  $(\pi, \rho) : U \rightarrow \pi(U) \times G \cdot x$   $G$ -äquivariant und  $\text{pr}_1 \circ (\pi, \rho) = \pi$ . Weiters gilt:

1. Es ist  $\rho$  eine surjektive Submersion, denn  $\text{id} = \rho \circ \text{incl} : G \cdot x \hookrightarrow U \rightarrow G \cdot x$ , und somit die Faser  $S := \rho^{-1}(\{x\})$  und das Retrakt  $G \cdot x$  abgeschlossene Teilmannigfaltigkeiten von  $U$ .
2. Für  $g \in G$  gilt:  $S \cap gS \neq \emptyset \Leftrightarrow g \in G_x \Leftrightarrow g \cdot S \subseteq S$ :  
 (1  $\Rightarrow$  2) Sei  $y \in S \cap gS$ , dann ist  $y = g \cdot y'$  für ein  $y' \in S$ . Somit ist  $x = \rho(y) = \rho(g \cdot y') = g \cdot \rho(y') = g \cdot x$ , also  $g \in G_x$ .  
 (2  $\Rightarrow$  3) Sei  $g \in G_x$  und  $y \in S$ . Dann ist  $\rho(g \cdot y) = g \cdot \rho(y) = g \cdot x = x$ , also  $g \cdot y \in \rho^{-1}(\{x\}) = S$ .  
 (1  $\Leftarrow$  3) ist trivial, da  $S \neq \emptyset$ .
3.  $U = G \cdot S$ :  
 $G \cdot S = G \cdot \rho^{-1}(\{x\}) = \rho^{-1}(G \cdot x) = U$ , da  $y \in \rho^{-1}(G \cdot x) \Leftrightarrow \rho(y) \in G \cdot x \Leftrightarrow \exists g \in G : \rho(g^{-1} \cdot y) = g^{-1} \cdot \rho(y) = x \Leftrightarrow y \in G \cdot \rho^{-1}(\{x\})$ .
4. Für  $z \in U$  ist  $G_z$  enthalten in einer zu  $G_x$  konjugierten Untergruppe:  
 Nach [3] ist  $z = g \cdot y$  mit  $y \in S$  und  $g \in G$ . Für  $h \in G_z$  gilt somit:  $hgy = gy \Rightarrow g^{-1}hgy = y \Rightarrow y \in S \cap g^{-1}hg \cdot S \Rightarrow g^{-1}hg \in G_x$ , d.h.  $h \in g \cdot G_x \cdot g^{-1}$ .
5. Es ist  $(\pi, \rho) : U \rightarrow \pi(U) \times G \cdot x$  surjektiv:  
 Sei  $(z, gx) \in \pi(U) \times G \cdot x$ . Dann existiert ein  $y \in U$  mit  $z = \pi(y)$ . Somit ist  $\rho(y) \in G \cdot x$ , also existiert ein  $h \in G$  mit  $\rho(y) = hx$ . Nun ist  $(\pi, \rho)(gh^{-1}y) = (\pi(gh^{-1}y), gh^{-1}\rho(y)) = (\pi(y), gh^{-1}hx) = (z, gx)$ .
6. Hingegen ist  $(\pi, \rho) : U \rightarrow \pi(U) \times G \cdot x$  nicht notwendig injektiv, also auch keine Faserbündelkarte:  
 Es wirkt z.B.  $SO(2) = S^1$  auf  $\mathbb{R}^2$  mit Orbitraum  $\mathbb{R}^2/S^1 \cong \mathbb{R}^+$  via der Abbildung  $SO(2) \cdot v \mapsto \|v\|$ . Die invarianten offenen zusammenhängenden Umgebungen von  $0 \in \mathbb{R}^2$  sind genau die offenen Bälle  $U$  um 0 und die einzige Retraktion  $U \rightarrow G \cdot 0 = \{0\}$  die konstante Abbildung. Somit ist  $\pi(U) \times G \cdot 0 \cong \mathbb{R}^+ \times \{0\}$  nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ .

Wir wollen trotzdem versuchen die invariante Umgebung  $U = G \cdot S$  besser zu beschreiben:

7. Die Abbildung  $G \times S \rightarrow G \cdot S$ ,  $(g, y) \mapsto g \cdot y$  induziert eine  $G$ -äquivalente Bijektion  $G \times_{G_x} S := (G \times S)/G_x \rightarrow G \cdot S$ , wobei die (rechts-)Wirkung von  $G_x$  auf  $G \times S$  durch  $(g, y) \cdot h = (gh, h^{-1}y)$  gegeben ist:

$$g \cdot y = g' \cdot y' \Rightarrow y = hy' \text{ mit } y, y' \in S \text{ und } h := g^{-1}g' \in G \stackrel{[2]}{\Rightarrow} h \in G_x \Rightarrow (g', y') = (gh, h^{-1}y). \text{ Umgekehrt ist offensichtlich } (gh) \cdot (h^{-1}y) = g \cdot y.$$

8. Es ist  $G \times_{G_x} S \rightarrow G \cdot S$  ein Diffeomorphismus:

Nach [3] ist  $G \cdot S = U$  und somit offene Teilmannigfaltigkeit von  $M$ . Nach [6.20]  $G \times S \rightarrow G \times_{G_x} S$  ein  $G_x$ -Hauptfaserbündel (und  $G \times_{G_x} S \rightarrow G/G_x$  ein Faserbündel mit Faser  $S$  und Strukturgruppe  $G_x$ , welches vermöge der Wirkung von  $G_x$  auf  $S$  assoziiert ist zum  $G_x$ -Hauptfaserbündel  $G \rightarrow G/G_x$ ). Die universelle Eigenschaft liefert, daß  $G \times_{G_x} S \rightarrow G \cdot S$  glatt ist. Sie ist submersiv, da  $\mu : G \times S \rightarrow G \cdot S$ ,  $(g, y) \mapsto g \cdot y$  es ist:

$$T\mu(T_e G \times T_x S) = T\text{ev}_x(T_e G) + TL_e(T_x S) \stackrel{[6.12]}{=} T_x(G \cdot x) + T_x S = T_x M.$$

Somit ist  $T_{(e,y)}\mu$  surjektiv für alle  $y \in S$  nahe  $x$  und durch Verkleinern von  $S$  können wir das für alle  $y \in S$  erreichen. Damit ist

$$\text{Bild}(T_{(g,y)}\mu) = TL_g(\text{Bild}(T_{(e,y)}\mu)) = TL_g(T_y M) = T_{gy} M.$$

Aus Dimensionsgründen ist sie somit ein Diffeomorphismus, denn

$$\begin{aligned} \dim(G \times_{G_x} S) &= \dim(G) + \dim(S) - \dim(G_x) = \dim(G/G_x) + \dim(S) \\ &= \dim(G \cdot x) + \dim(S) = \dim(M). \end{aligned}$$

9. Es ist  $S$  lokal diffeomorph zu  $T_x M / T_x(G \cdot x)$  und wenn  $G_x$  kompakt ist, kann dieser Diffeomorphismus  $G_x$ -äquvariant gewählt werden.

Durch Differenzieren von  $y \mapsto g \cdot y$  bei  $x$  für  $g \in G_x$  erhalten wir eine Darstellung von  $G_x$  auf  $T_x M$  für welche  $T_x(G \cdot x)$  und  $T_x S$  nach [2] invariant sind. Somit ist der lineare Isomorphismus  $T_x S \cong T_x M / T_x(G \cdot x)$   $G_x$ -äquvariant und  $S \cong T_x S \cong T_x M / T_x(G \cdot x)$  lokal als Mannigfaltigkeiten. Falls  $G_x$  kompakt ist, so zeigt [6.17], daß auch der erste Diffeomorphismus  $G_x$ -äquvariant gewählt werden kann.

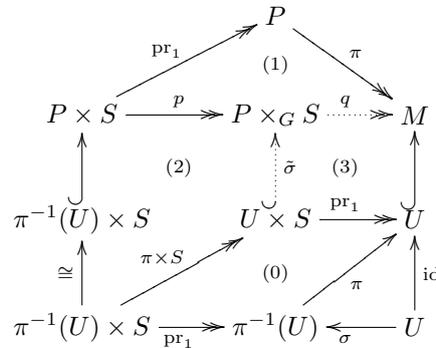
**Definition. Faserbündel mit Strukturgruppe.**

Man sagt ein Faserbündel  $\pi : P \rightarrow M$  mit typischer Faser  $S$  habe STRUKTURGRUPPE  $G$ , wenn eine links-Wirkung von  $G$  auf  $S$  so existiert, daß die Transitionsfunktionen über glatten Abbildungen mit Werten in  $G$  faktorisieren welche die übliche Kozyklen-Bedingung (siehe [Kri07, 25.7.3]) erfüllen.

**6.20 Proposition. Assoziierte Bündel.**

Sei  $\pi : P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel und  $\lambda : G \times S \rightarrow S$  eine glatte links-Wirkung. Dann wirkt  $G$  von rechts auf  $P \times S$  durch  $(y, s) \cdot g := (y \cdot g, g^{-1} \cdot s)$  und der Orbitraum  $P \times_G S := (P \times S) / G$  ist eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, sodaß  $P \times S \rightarrow P \times_G S$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel und  $S \hookrightarrow P \times_G S \rightarrow M$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $S$  und Strukturgruppe  $G$  ist.

**Beweis.** Klarerweise ist  $(y, s) \cdot g := (y \cdot g, g^{-1} \cdot s)$  eine rechts-Wirkung von  $G$  auf  $P \times S$ . Sei  $\sigma : M \supseteq U \rightarrow P$  ein lokaler glatter Schnitt des  $G$ -Hauptfaserbündels  $\pi : P \rightarrow M$ . Dann betrachten wir folgendes Diagramm:



Es existiert  $q$  als surjektive Abbildung, da  $\pi \circ \text{pr}_1$  konstant auf den  $G$ -Orbits von  $P \times S$  ist:  $\pi(\text{pr}_1(yg, g^{-1}z)) = \pi(yg) = \pi(y) = \pi(\text{pr}_1(y, z))$ . Der linke vertikale Diffeomorphismus ist durch  $(y, z) \mapsto (y, \tau(y, \sigma(\pi(y))) \cdot z)$  gegeben, wobei das nach [6.13] glatte  $\tau : P \times_M P \rightarrow G$  gegeben ist durch  $(y \cdot g, y) \mapsto g$ .

Der vertikale Pfeil  $\tilde{\sigma}$  ist durch  $\tilde{\sigma} := p \circ (\sigma \times S)$  gegeben. Er macht das linke Fünfeck kommutativ, denn

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma} \circ (\pi \times S))(y, z) &= (p \circ (\sigma \times S) \circ (\pi \times S))(y, z) = p(\sigma \pi y, z) \\ &= p(y \cdot \tau(\sigma \pi y, y), z) = p(y, \tau(y, \sigma \pi y) \cdot z). \end{aligned}$$

Weiters macht er das rechte Quadrat kommutativ, denn  $\pi \times S$  ist surjektiv und der Rand des Diagramms kommutiert offensichtlich. Wir können ihn als Faserbündelkarte verwenden um  $P \times_G S$  zu einem Faserbündel mit typischer Faser  $S$  zu machen, denn  $q^{-1}(U) = p(\pi^{-1}(U) \times S) = \tilde{\sigma}(\pi(\pi^{-1}(U)) \times S) = \tilde{\sigma}(U \times S)$ .

Die Transitionsfunktionen der  $\tilde{\sigma}$  sind durch  $(x, z) \mapsto (\tilde{\sigma}^{-1} \circ \tilde{\sigma}')(x, z) =: (x', z')$  gegeben, d.h.  $p(\sigma(x'), z') = \tilde{\sigma}(x', z') = \tilde{\sigma}'(x, z) = p(\sigma'(x), z)$ . Somit existiert ein  $g \in G$  mit  $\sigma(x') = \sigma'(x) \cdot g$  und  $z' = g^{-1} \cdot z$ , also ist  $x = x'$  und  $g = \tau(\sigma'(x), \sigma(x))$ , und damit  $z' = \tau(\sigma(x), \sigma'(x)) \cdot z$ . Das bedeutet, daß  $P \times_G S \rightarrow M$  ein Faserbündel mit Strukturgruppe  $G$  ist. Beachte dabei, daß diese Rechnung auch zeigt, daß  $\tilde{\sigma}$  injektiv ist.

Nach Konstruktion sind die  $G$ -Orbits in  $P \times S$  genau die Fasern von  $p : P \times S \rightarrow P \times_G S$  und da  $G$  frei auf  $P$  wirkt gilt selbes auch für die Wirkung auf  $P \times S$ , also ist  $P \times S \rightarrow P \times_G S$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel.  $\square$

### 6.21 Bemerkung. Vektorbündel versus Rahmenbündel.

Falls  $p : P \rightarrow M$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel ist und  $\lambda : G \rightarrow GL(k)$  eine Darstellung ist, so ist das assoziierte Bündel  $P \times_G \mathbb{R}^k$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $\mathbb{R}^k$  und Strukturgruppe  $GL(k)$  bzgl. der standard Wirkung, also ein Vektorbündel nach [Kri07, 25.7.6].

Umgekehrt können wir jedes Vektorbündel  $p : E \rightarrow M$  mit Faserdimension  $k$  so erhalten, indem wir das zugehörige Rahmenbündel  $GL(\mathbb{R}^k, E) \rightarrow M$  betrachten. Dabei ist  $GL(\mathbb{R}^k, E) := \{f \in L(M \times \mathbb{R}^k, E) : f \text{ ist faserweise invertierbar}\}$  eine offene Teilmenge des Vektorbündels  $L(M \times \mathbb{R}^k, E) \rightarrow M$ . Die Fasern des Rahmenbündels sind die linearen Isomorphismen  $\mathbb{R}^k \rightarrow E_x$  (oder auch die Basen in  $E_x$ ) und die rechts-Wirkung von  $GL(k)$  auf diesen ist durch Umparametrisieren  $f \mapsto f \circ g$  gegeben. Es ist dann  $E \cong GL(\mathbb{R}^k, E) \times_{GL(k)} \mathbb{R}^k$  bezüglich der Standard-Wirkung von  $GL(k)$  auf  $\mathbb{R}^k$ : Die Evaluationsabbildung  $ev : GL(\mathbb{R}^k, E) \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$ ,  $(f, v) \mapsto f(v)$  ist  $GL(k)$ -invariant und hat lokale Schnitte  $\tilde{\varphi} : M \supseteq U \rightarrow GL(\mathbb{R}^k, E)$  gegeben durch lokale Trivialisierungen  $\varphi : M \times \mathbb{R}^k \supseteq U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U) \subseteq E$  von  $E \rightarrow M$ . Sie induziert somit eine surjektive faserweise lineare Submersion  $GL(\mathbb{R}^k, E) \times_{GL(k)} \mathbb{R}^k \rightarrow E$ . Aus Dimensionsgründen ist letztere somit ein Vektorbündel-Isomorphismus.

### 6.22 Beispiel.

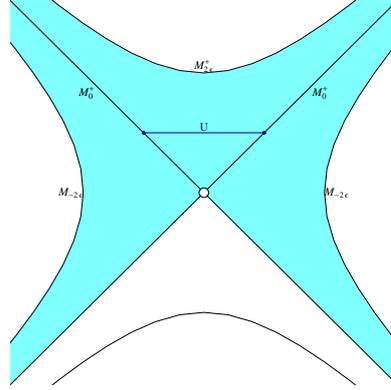
Die Standard-Wirkung von  $SO^+(3, 1)$  auf  $\mathbb{R}^3$  läßt per Definition die Niveauflächen  $M_c := \{v : b(v, v) = c\}$  für jedes  $c \in \mathbb{R}$  invariant, wobei  $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  die symmetrische Standard-Form mit Signatur 1 bezeichnet. In Aufgabe [EX19] wurde gezeigt, daß  $SO^+(3, 1)$  transitiv auf  $M_1$  wirkt und folglich auch auf allen  $M_c$  mit  $c > 0$ .

Auf dem positiven Lichtkegel  $M_0^+ := \{v \in \mathbb{R}^3 : b(v, v) = 0 \text{ und } \text{pr}_3(v) > 0\} \subseteq M_0$  wirkt  $SO^+(3, 1)$  ebenfalls transitiv, denn durch Drehungen um die  $z$ -Achse können wir  $(x, y, z) \in M_0^+$  auf  $(z, 0, z)$  abbilden und durch

$$\frac{1}{2z} \begin{pmatrix} z^2+1 & 0 & z^2-1 \\ 0 & 2z & 0 \\ z^2-1 & 0 & z^2+1 \end{pmatrix} \in SO^+(3, 1)$$

können wir  $(1, 0, 1)$  auf  $(z, 0, z)$  abbilden.

Diese Wirkung besitzt keine Scheibe für den Orbit  $M_0^+$ , denn jede invariante Umgebung  $U$  von  $M_0^+$  enthält die Orbits  $M_c$  für alle kleinen  $c > 0$ . Eine äquivariante Retraktion  $r : U \rightarrow M_0^+$  würde aber eine Retraktion einer hinreichend kleinen Scheibe  $\{(x, y, \varepsilon) : x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2\} \subseteq U \rightarrow M_0^+ \xrightarrow{\varepsilon/z} \{(x, y, \varepsilon) : x^2 + y^2 = \varepsilon^2\}$  auf ihren Rand liefern.



### 6.23 Lemma.

Seien  $f : X \times Y \rightarrow Z$  eine stetige Abbildung topologischer Räume,  $K \subseteq X$  kompakt,  $y \in Y$ ,  $W \subseteq Z$  offen mit  $f(K \times \{y\}) \subseteq W$ . Dann existieren offene Umgebungen  $U$  von  $K$  und  $V$  von  $y$  mit  $f(U \times V) \subseteq W$ .

**Beweis.** Es ist  $w' := f^{-1}(W)$  eine offene Umgebung von  $K \times \{y\}$ . Wegen  $K \times \{y\} \subseteq W$  existieren für jedes  $x \in K$  offene Umgebungen  $U^x$  von  $x$  und  $V^x$  von  $y$  mit  $U^x \times V^x \subseteq w'$ . Da  $K$  kompakt ist, existieren endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in K$  mit  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U^{x_i} =: U$ . Sei  $V := \bigcap_{i=1}^n V^{x_i}$ . Dann ist  $U$  eine offene Umgebung von  $K$  sowie  $V$  eine von  $y$  und  $U \times V \subseteq w'$ , denn aus  $(x', y') \in U \times V$  folgt,  $\exists i : x' \in U^{x_i}$ ,  $y' \in V \subseteq V^{x_i} \Rightarrow (x', y') \in U^{x_i} \times V^{x_i} \subseteq w' = f^{-1}(W)$ , also  $f(U \times V) \subseteq W$ .  $\square$

### 6.24 Equivariant Tubular Neighborhood Theorem.

Sei  $\rho : G \times M \rightarrow M$  eine glatte Wirkung einer separablen Liegruppe  $G$  mit kompakten Isotropiegruppen  $G_x$ .

Dann existieren genau dann Scheiben, wenn für jedes  $x \in M$  und jede Umgebung  $W$  von  $G_x$  in  $G$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  in  $M$  existiert mit  $\{g \in G : V \cap g \cdot V \neq \emptyset\} \subseteq W$ .

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Es existiert  $e$ -Umgebung  $U$  mit  $U \cdot G_x \cdot U^{-1} \subseteq W$ , denn  $\varphi : (h, g) \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1}$  ist stetig und  $G_x$  ist kompakt also existiert nach [6.23](#) eine Umgebung der Form  $U \times V \subseteq \varphi^{-1}(W)$  von  $\{e\} \times G_x$ . Dann ist  $U \cdot x$  offen in  $G \cdot x \cong G/G_x$  und somit auch  $\rho^{-1}(U \cdot x) = U \cdot \rho^{-1}(x) = U \cdot S =: V$  (siehe [6.19.3](#)) offen in  $M$ . Sei  $V \cap g \cdot V \neq \emptyset$ , also existieren  $u, u' \in U$  und  $z, z' \in S$  mit  $u \cdot z = gu' \cdot z'$ , d.h.  $z = u^{-1}gu' \cdot z'$  und somit  $u^{-1}gu' \in G_x$  nach [6.19.2](#), also  $g \in U \cdot G_x \cdot U^{-1} \subseteq W$ .

( $\Leftarrow$ )

**Beh.:**  $G \cdot x$  ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M$  Nach [6.12](#) induziert  $\text{ev}_x : G \rightarrow G \cdot x \subseteq M$  eine injektive Immersion  $G/G_x \rightarrow M$ . Bleibt zu zeigen, daß diese ein Homöomorphismus auf ihr Bild  $G \cdot x$  versehen mit der Spurtopologie von  $M$  ist. Sei dazu  $y = g_0 \cdot x \in G \cdot x$  und  $U \subseteq G/G_x$  eine offene Umgebung von  $g_0 \cdot G_x$  in  $G/G_x$ . Dann ist  $\pi^{-1}(U)$  offene Umgebung von  $g_0 \cdot G_x$  in  $G$  und  $W := \pi^{-1}(U) \cdot g_0^{-1}$  eine solche von  $g_0 \cdot G_x \cdot g_0^{-1} = G_{g_0 \cdot x} = G_y$ . Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung  $V$  von  $y$  mit  $\{g \in G : V \cap g \cdot V \neq \emptyset\} \subseteq W$ . Dann ist  $\text{ev}_x^{-1}(V) \subseteq \pi^{-1}(U)$ , denn sei  $g \in \text{ev}_x^{-1}(V)$  so ist  $gg_0^{-1} \cdot y = g \cdot x \in V$  und damit  $gg_0^{-1} \in W$ , also  $g \in W \cdot g_0 = \pi^{-1}(U)$ .

Nach Voraussetzung ist  $G_x$  kompakt und somit existiert nach [6.17](#) ein lokaler  $G_x$ -äquivarianter Diffeomorphismus  $\varphi : T_x M \rightarrow M$  bei 0 mit  $\varphi(0) = x$  und  $T_0 \varphi = \text{id}$ . Sei  $F$  das orthogonale Komplement von  $T_x(G \cdot x)$  in  $T_x M$  bezüglich einem  $G_x$ -invarianten inneren Produkt (middle irgend ein inneres Produkt über  $G_x$ ). Da  $G \cdot x$  unter  $G_x \subseteq G$  invariant ist, ist es auch  $T_x(G \cdot x)$  und folglich auch  $F$ . Also ist  $G \times_{G_x} F \rightarrow M$  ein wohldefiniertes Faserbündel nach [6.20](#). Dann ist  $\Phi : G \times_{G_x} F \rightarrow$

$M$ ,  $\Phi([(g, v)]) := g \cdot \varphi(v)$  ein lokaler Diffeomorphismus bei  $[(e, 0)]$ , denn nach [6.20](#) ist  $G/G_x \times F$  lokal diffeomorph zu  $G \times_{G_x} F$  via  $\tilde{\sigma} := p \circ (\sigma \times F)$  und somit hat  $\Phi$  unter diesem Diffeomorphismus die partiellen Darstellungen  $(\Phi \circ \tilde{\sigma})(-, 0) = \text{ev}_x \circ \sigma : G/G_x \cong G \cdot x \subseteq M$  und  $(\Phi \circ \tilde{\sigma})(e, -) = \varphi|_F$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times T_x M & \xrightarrow{G \times \varphi} & G \times M & & \\
 \uparrow & & \searrow \rho & & \\
 G \times F & \xrightarrow{p} & G \times_{G_x} F & \xrightarrow{\Phi} & M \\
 \swarrow \sigma \times F & & \uparrow \tilde{\sigma} & & \uparrow \text{---} \\
 & & G/G_x \times F & \xrightarrow{\cong} & G \cdot x \times F
 \end{array}$$

Wegen der  $G$ -Äquivarianz ist  $\Phi$  auch ein lokaler Diffeomorphismus bei  $[(g, 0)]$  für jedes  $g \in G$ .

Bleibt zu zeigen, daß  $\Phi$  injektiv auf einer Umgebung von  $G \times_{G_x} \{0\}$  ist: Andernfalls existieren  $v_n \rightarrow 0$  und  $v'_n \rightarrow 0$  in  $F$  und  $g_n, g'_n \in G$  mit  $[(g_n, v_n)] \neq [(g'_n, v'_n)]$  und  $g_n \cdot \varphi(v_n) = g'_n \cdot \varphi(v'_n)$ . Durch Anwenden von  $(g'_n)^{-1}$  können wir  $g'_n = e$  voraussetzen. Somit konvergiert  $g_n \cdot \varphi(v_n) = \varphi(v'_n) \rightarrow \varphi(0) = x$ . Für jede (kompakte) Umgebung  $W$  der kompakten Teilmenge  $G_x$  existiert nach Voraussetzung eine Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $\{g \in G : V \cap g \cdot V \neq \emptyset\} \subseteq W$ . Es liegt  $\varphi(v_n) \in V$  und  $g_n \cdot \varphi(v_n) \in V$  und somit  $g_n \in W$  für alle hinreichend großen  $n$ . Also konvergiert eine Teilfolge der  $g_n$  gegen ein  $g_\infty \in G$ . Somit ist  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \cdot \varphi(v_n) = g_\infty \cdot x$ , also  $g_\infty \in G_x$ , ein Widerspruch dazu, daß  $\Phi$  ein lokaler Diffeomorphismus bei  $[(g_\infty, 0)]$  ist. Nun ist  $q \circ \Phi^{-1} : M \rightarrow G \times_{G_x} F \rightarrow G/G_x \cong G \cdot x$  die gesuchte äquivariante Retraktion.  $\square$

**6.25 Proposition.**

Es sei  $S$  eine Scheibe der Wirkung  $G \times M \rightarrow M$  bei  $x$  und  $U := G \cdot S$  die zugehörige tubuläre offene Umgebung von  $G \cdot x$  in  $M$ . Dann induziert die Inklusion  $S \hookrightarrow M$  einen Homöomorphismus  $S/G_x \cong U/G$  und dieser induziert einen Algebra-Isomorphismus  $C^\infty(U/G) := C^\infty(U)^G \cong C^\infty(S)^{G_x} =: C^\infty(S/G_x)$  zwischen den Algebren invarianter glatter Funktionen.

Wir haben zwar keine Mannigfaltigkeitsstruktur auf den Orbiträumen aber die Kandidaten der glatten Funktionen auf diesen entsprechen also einander. Beachte weiters, daß  $x \in S$  ein Fixpunkt der Wirkung von  $G_x$  ist, also diese nach [6.17](#) (lokal) isomorph zu einer Darstellung von  $G$  auf dem Vektorraum  $T_x M/T_x(G \cdot x)$  ist.

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_x M/T_x(G \cdot x) & \cong & S & \hookrightarrow & G \cdot S & \cong & U & \hookrightarrow & M \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S/G_x & \hookrightarrow & & \xrightarrow{\cong} & & \hookrightarrow & U/G & \hookrightarrow & M/G \\
 & & & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & & & & \mathbb{C} & & & & 
 \end{array}$$

**Beweis.**  $S/G_x \rightarrow U/G$  ist wohldefiniert: Sei  $z, z' \in S$  mit  $z' = g \cdot z$  für ein  $g \in G_x \subseteq G$ , dann ist offensichtlich  $[z] = [z']$  in  $U/G$ .

$S/G_x \rightarrow U/G$  ist injektiv: Sei  $z, z' \in S$  mit  $z' = g \cdot z$  für ein  $g \in G$ . Nach [6.19.2](#) ist  $g \in G_x$  und somit  $[z] = [z']$  in  $S/G_x$ .

$S/G_x \rightarrow U/G$  ist surjektiv: Sei  $u \in U$ , also  $u = g \cdot z$  für ein  $g \in G$  und ein  $z \in S$ , also  $[u] = [z]$  in  $U/G$  und ist somit das Bild von  $[z]$  in  $S/G_x$ .

$S/G_x \rightarrow U/G$  ist stetig: Da  $S \rightarrow S/G_x$  final ist.

$S/G_x \rightarrow U/G$  ist offen: Sei  $W \subseteq S/G_x$  offen, also  $\pi^{-1}(W) \subseteq U$  offen und  $G_x$ -invariant in  $S$ . Dann ist  $G \times \pi^{-1}(W) \subseteq G \times S$  offen und somit auch  $G \cdot \pi^{-1}(W) \cong G \times_{G_x} \pi^{-1}(W)$  offen in  $G \times_{G_x} S \cong G \cdot S = U$  und  $G$  invariant, also das Bild  $\pi(G \times_{G_x} \pi^{-1}(W))$  von  $W$  in  $U/G$  offen in  $U/G$ .

*Algebra-Isomorphismus:* Offensichtlich ist die Einschränkung jeder  $G$ -invarianten Abbildung  $f \in C^\infty(U)$   $G_x$ -invariant auf  $S$ . Umgekehrt definiert jede  $G_x$ -invariante glatte Abbildung  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $G_x$ -invariante glatte Abbildung  $f \circ \text{pr}_2 : G \times S \rightarrow \mathbb{C}$  und somit eine bezüglich der links-Wirkung von  $G$  auf  $U \cong G \times_{G_x} S$  invariante glatte Abbildung  $U \rightarrow \mathbb{C}$ . Diese Zuordnungen sind offensichtlich invers zueinander, denn  $G$ -invariante Funktionen auf  $G \cdot S$  sind durch ihre Werte auf  $S$  bereits eindeutig festgelegt, und erstere ist klarerweise ein Algebra-Homomorphismus.  $\square$

### 6.26 Definition.

Sei  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  eine stetige Wirkung einer topologischen Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $M$ . Die Wirkung heißt PROPER falls folgende äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Abbildung  $(\varphi, \text{pr}_2) : G \times M \rightarrow M \times M$  ist PROPER, d.h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt;
2. Falls  $K_1, K_2 \subseteq M$  kompakt sind, so ist  $\{g \in G : K_1 \cap g \cdot K_2 \neq \emptyset\}$  kompakt.

Beachte, daß  $\{g \in G : K_1 \cap g K_2 \neq \emptyset\}$  abgeschlossen in  $G$  ist. Denn sei  $K_1 \cap g_0 K_2 = \emptyset$ , d.h.  $g_0 K_2 \subset M \setminus K_1$  dann existieren and [6.23](#) offene Umgebungen  $U$  von  $g_0$  und  $W$  von  $K_2$  mit  $M \setminus K_1 \supseteq U \cdot W \supseteq U \cdot K_2$ , d.h.  $U \cap \{g \in G : K_1 \cap g K_2 \neq \emptyset\} = \emptyset$ .

Insbesondere ist jede stetige Wirkung einer kompakten Gruppe proper.

**Beweis.** (1 $\Rightarrow$ 2) Nach Voraussetzung ist  $(\varphi, \text{pr}_2)^{-1}(K_1 \times K_2) \subseteq G \times M$  kompakt und somit auch

$$\begin{aligned} \text{pr}_1((\varphi, \text{pr}_2)^{-1}(K_1 \times K_2)) &= \{g \in G : \exists x \in M : (\varphi, \text{pr}_2)(g, x) \in K_1 \times K_2\} \\ &= \{g \in G : \exists x \in K_2 : g \cdot x \in K_1\} \\ &= \{g \in G : K_1 \cap g \cdot K_2 \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

(1 $\Leftarrow$ 2) Sei  $K \subseteq M \times M$  kompakt, also  $K \subseteq \text{pr}_1(K) \times \text{pr}_2(K)$  mit  $K_i := \text{pr}_i(K) \subseteq M$  kompakt für  $i \in \{1, 2\}$ . Dann ist  $(\varphi, \text{pr}_2)^{-1}(K)$  abgeschlossen in  $(\varphi, \text{pr}_2)^{-1}(K_1 \times K_2) = \{(g, x) \in G \times M : g \cdot x \in K_1, x \in K_2\} \subseteq L \times K_2$ , wobei  $L := \{g \in G : K_1 \cap g \cdot K_2 \neq \emptyset\}$  nach Voraussetzung kompakt ist.  $\square$

Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen Hausdorff-Räumen heißt PERFECT falls sie abgeschlossen ist und kompakte Fasern  $f^{-1}(\{y\})$  hat. Solche Abbildungen haben sehr gute Stabilitätseigenschaften, siehe z.B. [\[Kri99, 3.3.10\]](#).

### Lemma.

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen Hausdorff-Räumen.

1. Falls  $f$  perfekt ist, so ist  $f$  proper.
2. Falls  $Y$  kompakt-erzeugt ist, so gilt auch die Umkehrung.

**Beweis.** (1) Sei  $K \subseteq Y$  kompakt und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $f^{-1}(K)$ . Sei  $\mathcal{F}$  die Menge der endlichen Teilmengen von  $\mathcal{U}$ . Für jedes  $y \in K$  ist  $f^{-1}(\{y\})$  kompakt und somit Teilmenge von  $\bigcup F$  für ein  $F \in \mathcal{F}$ . Damit ist  $y \notin f(X \setminus \bigcup F)$

und somit  $K \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (Y \setminus f(X \setminus \bigcup F))$ . Da  $Y \setminus f(X \setminus \bigcup F)$  offen ist, existieren endlich viele  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$  mit  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n (Y \setminus f(X \setminus \bigcup F_i))$  und somit ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(K) &\subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus \bigcup F_i)) = \bigcup_{i=1}^n X \setminus f^{-1}(f(X \setminus \bigcup F_i)) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n X \setminus (X \setminus \bigcup F_i) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup F_i = \bigcup_{i=1}^n F_i. \end{aligned}$$

(2) Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig, proper und  $Y$  ein kompakt-erzeugter Raum, d.h. er trägt die finale Topologie bzgl. seiner kompakten Teilmengen. Sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Für alle kompakten  $L \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(L) \subseteq X$  kompakt und somit auch  $A \cap f^{-1}(L)$  und, da  $Y$  Hausdorff ist, auch  $f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L$ , also abgeschlossen und damit auch  $f(A)$  abgeschlossen, da  $Y$  kompakt-erzeugt ist.  $\square$

### 6.27 Proposition. Scheibensatz.

Sei  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  eine propere Wirkung auf einem lokalkompakten Raum  $M$ .

Für  $x \in M$  sind dann die Isotropiegruppen  $G_x$  kompakt, die Orbits  $G \cdot x$  abgeschlossen und  $M/G$  vollständig regulär. Weiters existiert zu jeder Umgebung  $W$  von  $G_x$  in  $G$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  in  $M$  mit  $\{g \in G : V \cap g \cdot V \neq \emptyset\} \subseteq W$ .

Falls die Wirkung zusätzlich glatt ist, so besitzt sie Scheiben nach [6.24](#).

**Beweis.** Die Fasern von  $(\varphi, \text{pr}_2) : G \times M \rightarrow M \times M$  sind

$$(\varphi, \text{pr}_2)^{-1}(y, x) = \{(g, x) : g \cdot x = y\} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } y \notin G \cdot x \\ hG_x \times \{x\} & \text{für } y = h \cdot x \text{ mit } h \in G \end{cases}$$

Insbesondere ist  $G_x \cong (\varphi, \text{pr}_2)^{-1}(x, x) = \{g \in G : \{x\} \cap g \cdot \{x\} \neq \emptyset\}$  und somit kompakt.

Nach Voraussetzung ist  $(\varphi, \text{pr}_2)$  proper und somit eine abgeschlossene Abbildung, den lokalkompakte Räume sind kompakt-erzeugt, siehe [\[Kri99, 2.3.2\]](#). Damit ist aber  $G \cdot x \times \{x\} = (\varphi, \text{pr}_2)(G \times \{x\}) \subseteq M \times \{x\}$  abgeschlossen in  $M \times M$ , also auch in  $M \times \{x\}$ , d.h.  $G \cdot x$  ist abgeschlossen in  $M$ .

Folglich ist  $\text{ev}_x : G \rightarrow G \cdot x$  proper und somit die induzierte Abbildung  $G/G_x \rightarrow G \cdot x$  eine propere bijektive Immersion (nach dem Beweis von [6.12](#)) für glatte Wirkungen, also eine Einbettung einer Teilmannigfaltigkeit.

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{(\varphi, \text{pr}_2)} & M \times M \\ \uparrow (G, x) & & \uparrow (M, x) \\ G & \xrightarrow{\text{ev}_x} & G \cdot x \hookrightarrow M \end{array}$$

Es ist  $M/G$  Hausdorff, denn sei  $x, y \in M$  mit  $Gx \neq Gy$ , also  $x \notin Gy$ . Da  $Gy$  abgeschlossen ist existiert eine offene Umgebungen  $U$  von  $x$  mit  $U \cap Gy = \emptyset$ . Sei  $V$  eine offene Umgebung von  $y$  mit  $V \cap U = \emptyset$ . Durch Verkleinern können wir annehmen, daß  $U$  und  $V$  kompakte Umgebungen sind. Nach Voraussetzung ist  $K := \{g \in G : U \cap gV \neq \emptyset\}$  kompakt und  $K \cdot y \subseteq M \setminus U$ . Somit existiert nach [6.23](#) eine Umgebung  $V' \subseteq V$  von  $y$  in  $M$  mit  $K \cdot V' \subseteq M \setminus U$ , d.h.  $\forall g \in K : U \cap gV' = \emptyset$  aber auch  $\forall g \notin K : U \cap gV' \subseteq U \cap gV = \emptyset$ . Also ist  $GU \cap GV' = \emptyset$  und somit  $\pi(U)$  und  $\pi(V')$  trennende Umgebungen in  $M/G$ .

Da die Quotientenabbildung  $M \rightarrow M/G$  einer stetigen Gruppenwirkung offen ist, ist  $M/G$  lokalkompakt (siehe [\[Kri99, 2.2.8\]](#)) und damit vollständig regulär (siehe [\[Kri99, 2.2.2\]](#)).

Sei nun  $W$  eine offene Umgebung von  $G_x$  in  $G$ . Gesucht ist eine Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $\{g \in G : V \cap g \cdot V \neq \emptyset\} \subseteq W$ , i.e.  $V \cap (G \setminus W) \cdot V = \emptyset$ : Da  $(G \setminus W) \cdot x \times \{x\} = (\varphi, \text{id})((G \setminus W) \times \{x\})$  als Bild einer abgeschlossenen Menge unter einer abgeschlossenen Abbildung abgeschlossen ist, ist  $M \setminus (G \setminus W) \cdot x$  offen. Sei  $V' \subseteq M \setminus (G \setminus W) \cdot x$  eine kompakte Umgebung von  $x \notin (G \setminus G_x) \cdot x \supseteq (G \setminus W) \cdot x$ . Da  $G$  proper wirkt, ist  $K := \{g \in G : V' \cap g \cdot V' \neq \emptyset\} \setminus W$  kompakt. Wegen  $K \cdot x \subseteq (G \setminus W) \cdot x \subseteq M \setminus V'$  und weil  $M \setminus V'$  offen ist, existiert nach [6.23](#) eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $K \cdot V \subseteq M \setminus V' \subseteq M \setminus V$ , d.h.  $V \cap g \cdot V = \emptyset$  für alle  $g \notin W$ .  $\square$

### 6.28 Beispiel.

Die Wirkung von  $SL(2)$  auf  $\mathbb{R}^2$  hat die Orbits  $\{0\}$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und ist wegen [6.27](#) somit nicht proper. Allerdings existieren Scheiben, denn der Orbit  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist offen und der Orbit  $\{0\}$  hat  $\mathbb{R}^2$  als äquivariante tubuläre Umgebung bzgl. der Retraktion  $\rho = \text{konst}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0\}$ .

### Folgerung. Invariante Partitionen der 1.

*Es wirke  $G$  proper und glatt auf  $M$ . Dann existiert zu jeder Überdeckung von  $M$  mit offenen  $G$ -invarianten Mengen eine untergeordnete Partition der 1 mit  $G$ -invarianten glatten Funktionen.*

*In dieser Situation existiert eine glatte  $G$ -invariante Riemann-Metrik auf  $M$ .*

### Beweis.

**Beh.:** Sei  $\rho : U \rightarrow G \cdot x$  eine äquivariante tubuläre Umgebung. Dann existiert eine  $G$ -invariante glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit Träger in  $U$  und  $f|_{G \cdot x} = 1$ .

Sei  $S := \rho^{-1}(x)$  die zugehörige Scheibe und  $f_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion mit kompakten Träger in  $S$  und  $f_0(x) = 1$ . Die gemittelte Funktion  $f_1 : z \mapsto \int_{G_x} f_0(g \cdot z) dg$ , wobei  $dg$  das invariante Haar-Maß auf der kompakten Gruppe  $G_x$  bezeichnet, ist dann eine  $G_x$ -invariante glatte Funktion mit kompakten Träger  $G_x \cdot \text{Trg}(f_0)$ . Somit ist  $f_2 : (g, z) \mapsto f_1(z)$  eine  $G_x$ -invariante glatte Funktion, die zu einer glatten Funktion  $f : U = G \cdot S \cong G \times_{G_x} S \rightarrow \mathbb{R}$  faktorisiert. Da  $f_2$  auch invariant bzgl. der Links-Wirkung von  $G$  ist, gilt gleiches auch für  $f$ . Wegen  $\text{Trg}(f) = G \cdot \text{Trg}(f_1) \subseteq U$  läßt sich  $f$  durch 0 zu einer glatten  $G$ -invarianten Funktion auf  $M$  fortsetzen.

Nun können wir wie in [\[Kri07, 18.2\]](#) verfahren und uns dabei auf eine Zusammenhangskomponente von  $M$  beschränken: Zur gegebenen Überdeckung mit  $G$ -invarianten offenen Teilmengen existiert eine Verfeinerung bestehend aus Carrier-Mengen von  $G$ -invarianten glatten Funktionen. Da die Zusammenhangskomponenten von  $M$  Lindelöf sind, reichen abzählbar viele solche Funktionen  $f_n$ . Sei  $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $h^{-1}(0) = \mathbb{R}_-$ , dann ist  $h_n : x \mapsto h(f_n(x)) \cdot \prod_{i < n} h(\frac{1}{n} - f_i(x))$   $G$ -invariant und die Mengen  $\text{carr}(h_n)$  bilden eine lokalendliche Verfeinerung. Also ist  $h_n / \sum_k h_k$  die gesuchte Partition der 1.

Auf jeder äquivarianten tubulären Umgebung  $\rho : U \rightarrow G \cdot x$  können wir eine  $G$ -invariante Riemann-Metrik  $\gamma_U$  finden, indem wir eine Metrik auf  $S = \rho^{-1}(x)$  wählen und diese über die kompakte Gruppe  $G_x$  mitteln und die Zusammensetzung mit  $\text{pr}_2 : G \times S \rightarrow S$  faktorisiert dann zu einer  $G$ -invarianten Metrik auf  $U$ . Mittels der vorher konstruierten Partitionen der 1 können wir diese Riemann-Metriken zu einer auf ganz  $M$  verkleben.  $\square$

### 6.29 Bemerkung.

Sei  $\rho : G \times M \rightarrow M$  eine Gruppen-Wirkung. Dann ist  $\check{\rho} : G \rightarrow \text{Bij}(M)$  ein Gruppen-Homomorphismus. Die Wirkung heißt EFFEKTIV, falls dieser ein Monomorphismus ist, d.h.  $\text{Ker}(\check{\rho}) = \{g \in G : \forall x \in M : g \cdot x = x\} = \{e\}$  gilt. Da  $\text{Ker}(\check{\rho})$  ein

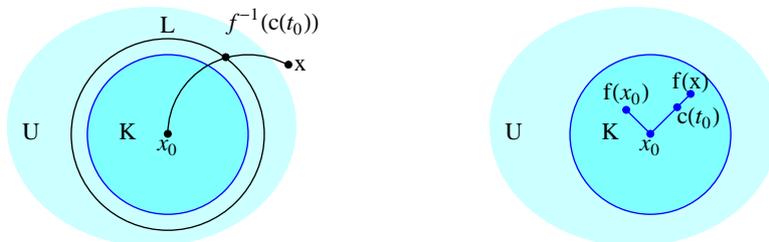
Normalteiler ist, können wir anstelle von  $G$  auch die Gruppe  $G/\text{Ker}(\check{\rho})$  betrachten. Die Wirkung  $\rho$  induziert eine Wirkung dieser Gruppe auf  $M$  mit den selben Orbits und somit auch dem selben Quotientenraum.

Falls  $\rho$  eine glatte Wirkung einer Lie-Gruppe auf eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist, so ist  $\text{Ker}(\check{\rho})$  ein abgeschlossener Normalteiler und somit  $G/\text{Ker}(\check{\rho})$  ebenfalls eine Lie-Gruppe nach [6.9], die glatt auf  $M$  wirkt (da  $G \rightarrow G/\text{Ker}(\check{\rho})$  submersiv ist).

Sei die Wirkung also o.B.d.A. effektiv. Es ist dann  $\check{\rho}$  ein Gruppen-Isomorphismus von  $G$  mit einer Untergruppe von  $\text{Hom}\ddot{o}(M) \subseteq C(M, M)$ .

Für topologische Räume  $X$  und  $Y$  versehen wir  $C(X, Y)$  mit der kompakt offenen Topologie, d.h. eine Subbasis ist gegeben durch die Mengen  $N_{K,U} := \{f : f(K) \subseteq U\}$ , wobei  $K \subseteq M$  kompakt und  $U \subseteq M$  offen sind, siehe [Kri99, 2.4.2]. Man zeigt leicht (siehe [Kri99, 2.4.10]):

- $Y$  Hausdorff  $\Rightarrow C(X, Y)$  Hausdorff.
- $X$  lokal-kompakt,  $X$  und  $Y$  2.Abzählbarkeitsaxiom  $\Rightarrow C(X, Y)$  2.Abz.axiom.
- Für zusammenhängende parakompakte Mannigfaltigkeiten  $X$  und  $Y$  ist somit kompakt und folgenkompakt für Teilmengen von  $C(X, Y)$  äquivalent, siehe [Kri99, 2.5.3].
- Für stetiges  $\rho : Z \times X \rightarrow Y$  ist auch  $\check{\rho} : Z \rightarrow C(X, Y)$  stetig, siehe [Kri99, 2.4.5].
- Für lokalkompaktes  $Y$  ist die Komposition  $\circ : C(Y, Z) \times C(X, Y) \rightarrow C(X, Z)$  stetig, denn es ist  $f \circ g \in N_{L,U} \circ N_{K,V} \subseteq N_{K,U}$ , wenn  $f(g(K)) \subseteq U$  und  $L$  kompakt und  $V$  offen so gewählt werden, daß  $g(K) \subseteq V \subseteq L \subseteq f^{-1}(U)$  gilt, siehe [Kri99, 2.2.3]
- Auf dem Teilraum  $\text{Hom}\ddot{o}(M) \subseteq C(M, M)$  ist auch die Inversion stetig (bei id): Sei  $K \subseteq U$ . Indem wir  $K$  mit geodätischen Bällen überdecken, dürfen wir o.B.d.A.  $K$  als geodätischen Ball mit Radius  $\delta > 0$  um eine Punkt  $x_0$  voraussetzen. Wir wählen einen geodätischen Ball  $B_{\delta'}(x_0) \subseteq U$  mit Radius  $\delta' > \delta$  und betrachten die Umgebung  $N_{L,V} \cap N_{\{x_0\}, K^\circ}$  mit  $V := U \setminus K$  und  $L$  die geodätische Sphäre mit Radius  $\delta'$ . Für  $f \in N_{L,V} \cap N_{\{x_0\}, K^\circ}$  gilt  $f(x_0) \in K$  und  $f(L) \subseteq V$ , d.h.  $M \setminus L \supseteq f^{-1}(M \setminus V)$ . Wir behaupten, daß daraus  $f^{-1}(K) \subseteq U$ , d.h.  $M \setminus K \supseteq f(M \setminus U)$  folgt. Andernfalls existiert ein  $x \notin U$  mit  $f(x) \in K$ , also ist  $f(x) = \exp(tv)|_{t=1}$  für ein  $v \in T_{x_0}M$  mit  $|v| \leq \delta$  und  $f(x_0) = \exp(tw)|_{t=1}$  für ein  $w \in T_{x_0}M$  mit  $|w| \leq \delta$ . Also liefern diese beiden Geodäten ein Kurve  $c$  in  $K$  welche  $f(x_0)$  mit  $f(x)$  verbindet. Damit ist  $f^{-1} \circ c$  eine Kurve die  $x_0$  mit  $x \notin U \supseteq B_{\delta'}(x_0)$  verbindet und somit die geodätische Sphäre  $L$  für ein  $t_0$  trifft, und somit  $c(t_0) \in f(L) \cap K$ , ein Widerspruch.



Insbesondere ist  $\check{\rho} : G \rightarrow \text{Hom}\ddot{o}(M)$  ein stetiger Homomorphismus topologischer Gruppen. Falls die Wirkung zusätzlich proper ist, so existiert nach der Folgerung aus [6.27] eine  $G$ -invariante glatte Riemann-Metrik  $\gamma$ , d.h.  $\check{\rho}(G)$  ist in der Untergruppe  $\text{Iso}(M, \gamma)$  der Isometrien von  $M$  bzgl.  $\gamma$  enthalten.

**6.30 Lemma.**

Sei  $(M, \gamma)$  eine zusammenhängende Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann ist die Gruppe  $\text{Iso}(M, \gamma)$  der Isometrien lokal kompakt.

**Beweis.** Dazu genügt zu zeigen, daß  $N_{\{x_0\}, U}$  relativ kompakt ist für relativ kompakte offene Menge  $U$ . Sei also  $g_n \in \overline{N_{\{x_0\}, U}} \subseteq N_{\{x_0\}, \overline{U}}$ . Dann existiert eine Teilfolge, für welche  $g_n(x_0)$  gegen ein  $y_0 \in \overline{U}$  konvergiert.

**Beh.:**  $\{g_n \cdot x : n \in \mathbb{N}\}$  relativ kompakt für jedes  $x \in M$ .

Dazu wählen wir eine glatte Kurve  $c : [0, b] \rightarrow M$  mit  $|c'(t)| \leq 1$  und  $b \in \mathbb{N}$ , die  $x_0$  mit  $x$  verbindet. Dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , s.d.  $\exp_{c(t)}$  für  $t \in [0, b]$  auf einer Umgebung des abgeschlossenen Balls mit Radius  $1/N$  ein Diffeomorphismus ist (siehe [Kri07, 62.8]) und somit ist  $c(\frac{i+1}{N})$  von  $c(\frac{i}{N})$  durch eine Geodäte  $t \mapsto \exp_{c(i/N)} tv$  der Länge  $\leq d(c(\frac{i}{N}), c(\frac{i+1}{N})) \leq \frac{1}{N}$  erreichbar.

Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, daß  $T_{c(0)}g_n$  auf einer Basis von  $T_{c(0)}M$  in  $TM$  konvergiert, also  $T_{c(0)}g_n \rightarrow \ell \in L(T_{c(0)}M, T_{y_0}M)$ . Auf Geodäten der Länge  $1/N$  durch  $c(0)$  konvergiert somit  $g_n$ , denn  $g_n(\exp(tv)) = \exp(tTg_n \cdot v) \rightarrow \exp(t\ell(v))$  für  $|t| \leq 1/N$ , insbesondere also für  $c(0 + 1/N)$ .

Durch rekursive Anwendung dieses Arguments auf  $i/N$  anstelle 0 erhalten wir eine Teilfolge der  $g_n$  die auch in  $x = c(\frac{bN}{N})$  konvergiert.

**Beh.:**  $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$  ist relativ kompakt in  $C(M, M)$ . Da  $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Iso}(M)$ , ist diese Menge gleichgradig stetig und somit nach Ascoli-Arzelà (siehe [Kri99, 2.4.11]) relativ kompakt.  $\square$

Nach [Kob67] ist  $\text{Iso}(M)$  sogar eine Lie-Gruppe der Dimension  $\leq \frac{(1+\dim M)\dim M}{2}$ .

**6.31 Proposition.**

Sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe, die auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit glatt und effektiv wirkt. Dann ist die Wirkung genau dann proper, wenn eine Riemann-Metrik  $\gamma$  auf  $M$  existiert, so daß  $G$  vermöge  $\check{\rho}$  isomorph (als Lie-Gruppe) zu einer abgeschlossenen Untergruppe von  $\text{Iso}(M, \gamma)$  ist.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Nach [6.27] existiert eine  $G$ -invariante Riemann-Metrik und somit ist  $\check{\rho} : G \rightarrow \text{Iso}(M, \gamma)$  ein stetiger Gruppen-Monomorphismus. Sein Bild ist abgeschlossen, denn sei  $g_n \in G$  mit  $\check{\rho}(g_n) \rightarrow h \in \text{Homöo}(X)$ . Wähle  $x \in M$  und  $L$  eine kompakte Umgebung von  $h(x)$ . Dann ist  $\{g \in G : L \cap g \cdot \{x\} \neq \emptyset\}$  kompakt in  $G$  und enthält fast alle  $g_n$ . Somit existiert eine Teilfolge der  $g_n$ , welche gegen ein  $g_\infty \in G$  konvergiert. Damit ist aber  $h = \check{\rho}(g_\infty) \in \check{\rho}(G)$ .

Somit ist auch  $\check{\rho}(G)$  eine lokalkompakte topologische Gruppe (siehe [Kri99, 2.2.4]), und damit  $\check{\rho}$  ein Homöomorphismus nach [5.3]. Als abgeschlossene (oder auch als  $C^\infty$ -wegzusammenhängende) Untergruppe der Lie-Gruppe  $\text{Iso}(M, \gamma)$  ist  $\check{\rho}(G)$  selbst eine Lie-Gruppe nach [5.5] bzw. [5.6]. Und nach [3.11] ist  $\check{\rho}$  ein Diffeomorphismus.

( $\Leftarrow$ ) Sei  $G$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $\text{Iso}(M, \gamma)$  und  $K, L \subseteq M$  kompakt. Wir müssen zeigen, daß jede Folge  $g_n$  mit  $L \cap g_n K \neq \emptyset$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Seien also  $x_n \in K$  mit  $g_n x_n \in L$ . O.B.d.A. konvergiere  $x_n \rightarrow x_\infty$  und  $g_n x_n \rightarrow y_\infty$ . Dann konvergiert  $g_n \cdot x_\infty \rightarrow y_\infty$ , denn

$$d(g_n x_\infty, y_\infty) \leq d(g_n x_\infty, g_n x_n) + d(g_n x_n, y_\infty) = d(x_\infty, x_n) + d(g_n x_n, y_\infty) \rightarrow 0.$$

Nach dem Beweis von [6.30] besitzt  $g_n$  eine konvergente Teilfolge in  $C(M, M)$  und deren Grenzwert ist wegen der Abgeschlossenheit in  $G$ .  $\square$

Achtung: Für nicht zusammenhängendes  $M$  stimmt ( $\Leftarrow$ ) nicht mehr, denn sei  $M = S^1 \sqcup \mathbb{R}$ . Dann ist  $\text{Iso}(M) = \text{Iso}(S^1) \times \text{Iso}(\mathbb{R}) = S^1 \times (\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{R})$ , denn (kompakte)

Zusammenhangskomponenten werden wieder in solche abgebildet. Die Isotropieuntergruppe für  $1 \in S^1$  ist somit  $\{(g_1, g_2) : g_1(1) = 1\} = \{1\} \times \text{Iso}(\mathbb{R})$ , also nicht kompakt im Widerspruch zu [6.27](#).

### 6.32 Peter-Weyl Theorem.

Es sei  $G$  eine kompakte Lie-Gruppe. Dann ist der Raum der Matrix-Koeffizienten

$$\{g \mapsto v(\rho(g)w) : \rho : G \rightarrow GL(E) \text{ ist endl.dim. Darstellung, } v \in E^*, w \in E\}$$

dicht in  $C(G)$  bzgl. der Supremumsnorm.

**Beweis.** Sei  $f_0 \in C(G)$  und  $\varepsilon > 0$ .

Jedes  $f \in C(G)$  ist gleichmäßig stetig bzgl. der Uniformität von  $G$ , also existiert eine offene Umgebung  $U^f$  von  $e$  in  $G$  mit  $|f(g) - f(g')| < \varepsilon$  für alle  $g, g' \in G$  mit  $g^{-1}g' \in U^f$ .

Sei  $U := U^{f_0}$ . Wähle ein glattes  $\kappa \in C^\infty(G, \mathbb{R})$  mit  $\kappa \geq 0$ ,  $\text{Trg}(\kappa) \subseteq U$ ,  $\int_G \kappa = 1$  und  $\kappa(g^{-1}) = \kappa(g)$  für alle  $g \in G$ . Und definiere

$$K : C(G) \rightarrow C(G) \text{ durch } Kf := f \star \kappa$$

also (vgl. mit [\[Kri05, 10.45\]](#) und [\[Kri05, 10.49\]](#))

$$Kf(x) := \int_G f(y) \kappa(y^{-1}x) dy = \int_G \kappa(x^{-1}y) f(y) dy,$$

wobei  $dy$  das invariante Maß auf  $G$  mit  $\mu(G) = 1$  bezeichnet. Dann ist  $K$  (eine) wohldefiniert (Kontraktion):

$$\left| \int_G \kappa(x^{-1}y) f(y) dy \right| \leq \|f\|_\infty \int_G \kappa(x^{-1}y) dy = \|f\|_\infty \int_G \kappa(y) dy = \|f\|_\infty$$

Es ist  $\|Kf_0 - f_0\|_\infty \leq \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} |(Kf_0 - f_0)(x)| &\leq \int_G |f_0(y) \kappa(y^{-1}x) - f_0(x) \kappa(y^{-1}x)| dy \\ &\leq \int_{xU^{-1}} |f_0(y) - f_0(x)| \kappa(y^{-1}x) dy < \varepsilon \int_G \kappa(y^{-1}x) dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

Weiters ist  $K(\{f : \|f\|_2 \leq 1\})$  gleichgradig stetig, denn für  $x^{-1}x' \in U^\kappa$  ist

$$|Kf(x) - Kf(x')| \leq \int_G |f(y)| |\kappa(y^{-1}x) - \kappa(y^{-1}x')| dy < \varepsilon \|f\|_1 \leq \varepsilon \|f\|_2.$$

Nach Ascoli-Arzelà (siehe [\[Kri06, 6.4.4\]](#)) ist somit  $K(\{f : \|f\|_2 \leq 1\})$  relativkompakt also beschränkt in  $C(G)$  und erweitert sich somit zu einem kompakten Operator  $K : L^2(G) \rightarrow C(G) \rightarrow L^2(G)$ . Da  $\kappa$  reell-wertig ist, ist dieser selbstadjungiert:

$$\langle Kf, g \rangle = \int_G \int_G f(y) \kappa(y^{-1}x) dy \overline{g(x)} dx = \int_G f(y) \int_G \kappa(y^{-1}x) \overline{g(x)} dx dy = \langle f, Kg \rangle.$$

Nach dem Spektralsatz (siehe [\[Kri06, 6.5.4\]](#)) ist  $Kf = \sum_i \lambda_i \langle f, u_i \rangle u_i$ , wobei die  $0 \neq \lambda_i \rightarrow 0$  Eigenwerte mit endlich-dimensionalen Eigenräumen und zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren  $u_i$  sind. Bleibt nur noch zu zeigen, daß die Eigenvektoren  $u_i$  Matrix-Koeffizienten endlich dimensionaler Darstellungen sind.

Es ist  $G \times C(G) \rightarrow C(G)$ ,  $(g, f) \mapsto (x \mapsto f(g^{-1}x))$ , eine stetige Wirkung auf dem Banach-Raum  $C(G)$ , denn

$$\begin{aligned} |f(g^{-1}x) - f((g')^{-1}x)| &\leq |f(g^{-1}x) - f'(g^{-1}x)| + |f'(g^{-1}x) - f'((g')^{-1}x)| \\ &\leq \|f - f'\|_\infty + \varepsilon, \end{aligned}$$

falls  $g^{-1}g' = (g^{-1}x)((g')^{-1}x)^{-1} \in U^S(f')$ . Weiters ist  $K$  äquivariant:

$$(g \cdot K(f))(x) = \int_G \kappa(x^{-1}gy) f(g^{-1}gy) dy = \int_G \kappa(x^{-1}y) f(g^{-1}y) dy = K(g \cdot f)(x).$$

Sei  $E_i$  der (endlich dimensionale) Eigenraum von  $K$  zum Eigenwert  $\lambda_i \neq 0$ . Dann ist  $E_i$   $G$ -invariant, denn für  $f \in E_i$  ist

$$K(g \cdot f) = g \cdot Kf = g \cdot \lambda_i f = \lambda_i (g \cdot f),$$

und somit erhalten wir durch Einschränken eine endlich dimensionale stetige (und nach [3.11](#) glatte) Darstellung  $\rho : G \rightarrow GL(E_i)$ . Es ist  $\text{ev}_e : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig linear, also  $v_i^* := \text{ev}_e|_{E_i} \in (E_i)^*$  und mit  $u_i \in E_i$  ist  $v_i^*(\rho(g)(u_i)) = \rho(g)(u_i)(e) = u_i(g^{-1}e) = u_i(g^{-1}) = S(u_i)(g)$ , also  $S(u_i)$  ein Matrix-Koeffizient dieser Darstellung und damit  $u_i$  einer der Darstellung

$$G \xrightarrow{\text{inv}} G \xrightarrow{\rho} GL(E_i) \xrightarrow{(-)^*} GL(E_i^*). \quad \square$$

### 6.33 Mostow-Palais Einbettungssatz.

Sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit auf welcher eine kompakte Lie-Gruppe  $G$  glatt wirkt. Dann existiert eine äquivariante Einbettung von  $M$  in eine endlich-dimensionale lineare Darstellung von  $G$ .

Jede kompakte Lie-Gruppe ist isomorph zu einer abgeschlossene Untergruppe einer orthogonalen Gruppe.

**Beweis.** Die Wirkung von  $G$  auf  $M$  induziert eine Darstellung von  $G$  auf den unendlich dimensionalen Fréchet-Raum  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  vermöge  $g \cdot f : x \mapsto f(g^{-1} \cdot x)$  für  $g \in G$ ,  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  und  $x \in M$  und somit auch auf den Dualraum vermöge  $(g \cdot \ell)(f) := \ell(g^{-1} \cdot f) = \ell(x \mapsto f(g \cdot x))$ . Nach dem Beweis des Peter-Weyl Theorems [6.32](#) sind die  $u \in C(G, \mathbb{R})$ , für welche das lineare Erzeugnis  $E_u := \langle G \cdot u \rangle$  von  $G \cdot u$  endlich dimensional ist, dicht in  $C(G, \mathbb{R})$ .

Faltung mit glatten Funktionen  $f$  auf  $M$  liefert glatte Funktionen auf  $M$  mit der gleichen Eigenschaft und somit sind diese dicht in  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ :

Für  $u \in C(G, \mathbb{R})$  und  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  sei

$$u \star f : x \mapsto \int_G u(g) f(g^{-1}x) dg,$$

dann ist

$$\begin{aligned} (g \cdot (u \star f))(x) &= (u \star f)(g^{-1}x) = \int_G u(h) f(h^{-1}g^{-1}x) dh \\ &= \int_G u(g^{-1}gh) f((gh)^{-1}x) dh = \int_G u(g^{-1}h) f(h^{-1}x) dh = (g \cdot u) \star f. \end{aligned}$$

und somit

$$E_{u \star f} = \langle G \cdot (u \star f) \rangle = \langle (G \cdot u) \star f \rangle = \langle G \cdot u \rangle \star f = E_u \star f.$$

Jede Abbildung  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  faktorisiert zu einer äquivarianten Abbildung  $M \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})^* \rightarrow E_f^*$ ,  $x \mapsto \text{ev}_x|_{E_f}$  über  $\text{ev}_f : E_f^* \rightarrow \mathbb{R}$ , denn  $(g \cdot \text{ev}_x)(u) = \text{ev}_x(g^{-1} \cdot u) = (g^{-1} \cdot u)(x) = u(g \cdot x) = \text{ev}_{g \cdot x}(u)$ . Nach [\[Kri07, 21.13\]](#) läßt sich  $M$  glatt in einen  $\mathbb{R}^n$  einbetten. Die Komponenten der Einbettung können wir  $C^\infty$ -approximieren durch  $f_i$  mit endlich dimensionalen  $E_{f_i}$ . Die Einbettung  $(f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  induziert eine äquivariante Einbettung  $M \rightarrow E := E_{f_1}^* \times \dots \times E_{f_n}^*$  die mit  $(\text{ev}_{f_1}, \dots, \text{ev}_{f_n}) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  zusammengesetzt  $(f_1, \dots, f_n)$  ergibt.

Betrachten wir nun die Wirkung von  $G$  auf sich selbst durch Linksmultiplikation und  $\iota : M := G \hookrightarrow E$  die  $G$ -äquivariante Einbettung in eine lineare Darstellung  $\rho : G \rightarrow GL(E)$ . Diese ist treu, denn aus  $\rho(g) = \text{id}$  folgt  $\iota(h) = \rho(g)(\iota(h)) = \iota(g \cdot h)$ ,

also  $h = g \cdot h$  und somit  $g = e$ . Wir können  $\rho$  orthogonal machen, indem wir ein inneres Produkt über die Gruppe mitteln.  $\square$

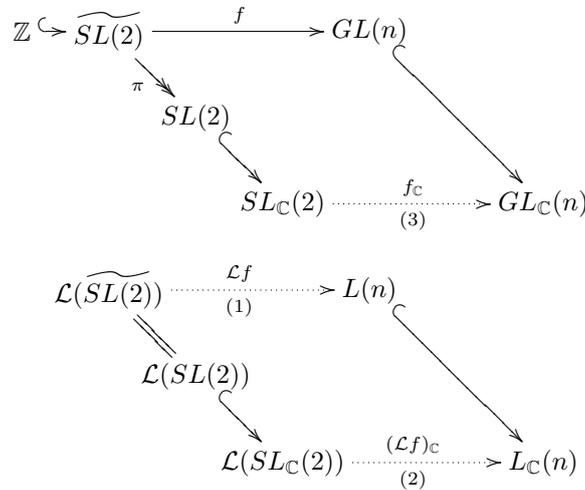
**Beispiel.**

Die Gruppe  $SL(2)$  besitzt keine nicht-triviale endlich dimensionale unitäre Darstellung:

Sei  $f : SL(2) \rightarrow U(n)$  ein Lie-Gruppen Homomorphismus. Die Lie-Algebra  $\mathcal{L}(SL(2))$  hat als Vektorraumbasis  $E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $F := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   $H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [E, F]$ . Es ist  $\exp(tE) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für  $t \neq 0$  konjugiert zu  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  vermöge  $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und somit auch  $f(\exp(tE))$  zu  $f(\exp(E))$ . Da die Konjugiertheitsklassen in  $U(n)$  kompakt und somit abgeschlossen sind, gilt dies auch für  $t = 0$ , d.h.  $f(\exp(tE)) = \text{id}$  für alle  $t$  und somit ist  $\mathcal{L}f(E) = 0$  und analog für  $F$ . Damit ist  $\text{Ker}(\mathcal{L}f) = \mathcal{L}(SL(2))$ , also  $\mathcal{L}f = 0$  und somit  $f$  trivial.

Die universelle Überlagerung  $G := \widetilde{SL(2)}$  von  $SL(2)$  besitzt keine treue Darstellung:

Sei nämlich  $f : G \rightarrow GL(n)$  ein Darstellung. Dann ist  $\mathcal{L}f : \mathcal{L}(SL(2)) \rightarrow L(n)$  eine Lie-Algebra Homomorphismus und ebenso seine Komplexifizierung  $\mathcal{L}f \otimes \mathbb{C} : \mathcal{L}(SL_{\mathbb{C}}(2)) = \mathcal{L}(SL(2)) \otimes \mathbb{C} \rightarrow L(n) \otimes \mathbb{C} = L_{\mathbb{C}}(n)$ . Da  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  einfach zusammenhängend ist, existiert nach [2.5](#) ein Lie-Gruppen Homomorphismus  $f_{\mathbb{C}} : SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(n)$  mit  $\mathcal{L}f_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}f \otimes \mathbb{C}$ . Damit haben die beiden Lie-Gruppen Homomorphismen  $f : G \rightarrow GL(n) \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}}(n)$  und  $f_{\mathbb{C}} \circ \pi : G \rightarrow SL(2) \hookrightarrow SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(n)$  die selbe Tangentialabbildung  $\mathcal{L}f \otimes \mathbb{C}$  bei  $e$  und stimmen somit nach [2.4](#) and [3.10](#) überein. Der zweite hat aber mindestens  $\text{Ker}(\pi) \cong \pi_1(SL(2)) \cong \mathbb{Z}$  als Kern, ist also nicht injektiv.



**7. Auflösbare Lie-Gruppen und Lie-Algebren**

**7.1 Algebraischen Struktur von  $G$  versus jener von  $\mathcal{L}(G)$**

Im Folgenden sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe,  $\mathcal{G} := \mathcal{L}G$  die zugehörige Lie-Algebra und  $\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$  die Exponentialabbildung. Wir wissen nach [4.11](#), daß die Unter-Lie-Gruppen von  $G$  via  $\mathcal{L}$  den Teil-Lie-Algebren von  $\mathcal{G}$  entsprechen. Es stellt sich natürlich die Frage nach dem genauen Zusammenhang zwischen der

Multiplikation in  $G$  und der Lie-Algebra Struktur von  $\mathcal{G}$ . Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot \exp(t\eta) = \xi + \eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t(\xi + \eta)).$$

Es ist  $t \mapsto \exp(t(\xi + \eta))$  eine 1-Parameter Untergruppe und für Abelsche  $G$  auch  $t \mapsto \exp(t\xi) \cdot \exp(t\eta)$  und stimmt somit mit dieser überein. Das heißt, die Multiplikation in Abelschen Lie-Gruppen  $G$  entspricht vermittels der Exponentialabbildung der Addition in  $\mathcal{G}$ . Im allgemeinen Fall (für nicht-Abelsche Lie-Gruppen) kann das natürlich nicht stimmen.

Ein weiterer Zusammenhang ergibt sich aus dem in [Kri07, 29.11.2] bewiesenen:  $[\xi, \eta] = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \Big|_{t=0} (G_{-t} \circ F_{-t} \circ G_t \circ F_t)$ , wobei  $F$  und  $G$  die Flüsse zu  $\xi$  und  $\eta$  sind.

Im Falle linksinvarianter Vektorfelder haben wir nach [3.5] also:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \Big|_{t=0} e \cdot \exp(t\xi) \cdot \exp(t\eta) \cdot \exp(-t\xi) \cdot \exp(-t\eta) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{ds} \right)^2 \Big|_{s=0} \exp(-s\xi) \cdot \exp(-s\eta) \cdot \exp(s\xi) \cdot \exp(s\eta). \end{aligned}$$

Definiert man den Kommutator in  $G$  als  $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$ , dann ist somit

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \Big|_{t=0} [\exp(t\xi), \exp(t\eta)] = [\xi, \eta] = \left[ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi), \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\eta) \right].$$

Der vollständige Zusammenhang zwischen Gruppenmultiplikation und Lie-Algebrastruktur wird durch die CAMPBELL-BAKER-HAUSDORFF FORMEL geliefert, die wir nun herleiten.

### 7.2 Lemma.

Es sei  $f : E \rightarrow G$  eine glatte Funktion auf einem Vektorraum  $E$  mit Werten in einer Lie-Gruppe  $G$  mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann ist die linkslogarithmische Ableitung  $\delta f : E \rightarrow L(E, \mathfrak{g})$  definiert durch  $\delta f(x) := TL_{f(x)^{-1}} \circ T_x f$ . Falls  $g : E \rightarrow G$  eine zweite solche Funktion ist, dann gilt die Produktregel:

$$\delta(f \cdot g)(x) = \delta g(x) + \text{Ad}(g(x)^{-1}) \circ \delta f(x).$$

Der Name kommt daher, daß für  $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$  die (links)logarithmische Ableitung  $\delta f(x) = f(x)^{-1} \cdot f'(x) = (\log \circ f)'(x)$  ist.

**Beweis.** Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta(f \cdot g)(x) &= TL_{(f(x) \cdot g(x))^{-1}} \circ T_x(f \cdot g) \\ &= TL_{g(x)^{-1}} \circ TL_{f(x)^{-1}} \circ T_{(f(x), g(x))} \mu \circ (T_x f, T_x g) \\ &= TL_{g(x)^{-1}} \circ TL_{f(x)^{-1}} \circ (TR_{g(x)} \circ T_x f + TL_{f(x)} \circ T_x g) \\ &= TL_{g(x)^{-1}} \circ TR_{g(x)} \circ TL_{f(x)^{-1}} \circ T_x f + TL_{g(x)^{-1}} \circ T_x g \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{6.15}} \quad \text{Ad}(g(x)^{-1}) \circ \delta f(x) + \delta g(x) \quad \square$$

### 7.3 Proposition.

Die linkslogarithmische Ableitung  $\delta \exp$  der Exponentialfunktion  $\exp$  einer Lie-Gruppe  $G$  hat folgende Gestalt:

$$\delta \exp(X) := TL_{\exp(-X)} \circ T_X \exp = g(\text{ad}(X)),$$

wobei die analytische Funktion  $g : L(\mathfrak{g}) \rightarrow L(\mathfrak{g})$  durch  $g(z) := \frac{1-e^{-z}}{z}$  gegeben ist.

**Beweis.** Für  $X, Y \in \mathfrak{g}$  definieren wir eine glatte Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$  durch

$$c(t) := t \delta \exp(tX)(Y).$$

Es gilt  $c(1) = \delta \exp(X)(Y)$  sowie  $c(0) = 0$  und

$$c'(0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} t \delta \exp(tX)(Y) = \delta \exp(0)(Y) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \delta \exp(tX)(Y) = Y,$$

Weiters ist

$$\begin{aligned} c(t+s) &= (t+s) \delta \exp((t+s)X)(Y) = \delta(\exp((t+s)\cdot))(X)(Y) \\ &= \delta(\exp(t\cdot) \cdot \exp(s\cdot))(X)(Y) \\ &\stackrel{7.2}{=} \delta(\exp(s\cdot))(X)(Y) + \left( \text{Ad}(\exp(sX)^{-1}) \circ \delta(\exp(t\cdot)(X)) \right)(Y) \\ &= s \delta \exp(sX)(Y) + \text{Ad}(\exp(-sX))(t \delta \exp(tX)(Y)) \\ &= c(s) + \text{Ad}(\exp(-sX))(c(t)) \end{aligned}$$

und durch Differenzieren dieser Gleichung nach  $s$  bei  $s = 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} c'(t) &= c'(0) + \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Ad}(\exp(-sX)) \cdot c(t) \stackrel{6.16}{=} c'(0) + \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} e^{s \text{ad}(-X)} \cdot c(t) \\ &= c'(0) + \text{ad}(-X) \cdot c(t) = Y - [X, c(t)]. \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogenen linearen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$c'(s) = -[X, c(s)]$$

ist  $c(s) := \text{Ad}(\exp(-sX)) \cdot c_0$ , denn dafür ist

$$c'(s) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{Ad}(\exp(-tX)) \text{Ad}(\exp(-sX)) c_0 = \text{ad}(-X)(c(s)) = -[X, c(s)].$$

Mittels Ansatz  $s \mapsto \text{Ad}(\exp(-sX)) \cdot c_0(s)$  durch Variation der Konstanten erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als

$$c(s) = \text{Ad}(\exp(-sX)) \int_0^s \text{Ad}(\exp(tX))(Y) dt.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \delta \exp(X)(Y) = c(1) &= \text{Ad}(\exp(-X)) \int_0^1 \text{Ad}(\exp(tX))(Y) dt \\ &= e^{-\text{ad}(X)} \int_0^1 e^{t \text{ad}(X)} dt (Y) = g(\text{ad}(X))(Y), \end{aligned}$$

denn

$$e^{-z} \int_0^1 e^{tz} dt = e^{-z} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1 - e^{-z}}{z}. \quad \square$$

#### 7.4 Theorem, Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel.

Es sei  $G$  eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann ist

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp \left( X + \int_0^1 f(e^{\text{ad} X} \cdot e^{t \text{ad} Y}) \cdot Y dt \right)$$

für  $X, Y$  nahe 0, wobei  $f : L(\mathfrak{g}) \rightarrow L(\mathfrak{g})$  lokal durch  $f(z) := \frac{z \ln(z)}{z-1}$  gegeben ist.

**Beweis.** Für fixes  $X, Y \in \mathfrak{g}$  sei  $c(t) := \exp^{-1}(\exp(X) \cdot \exp(tY)) \in \mathfrak{g}$ . Dann ist  $\delta(\exp \circ c)(t) = \delta \exp(c(t)) \cdot c'(t) = g(\text{ad}(c(t))) \cdot c'(t)$  nach [7.3](#). Andererseits ergibt sich wegen  $\exp(c(t))^{-1} = \exp(tY)^{-1} \cdot \exp(X)^{-1}$  folgendes:

$$\begin{aligned} \delta(\exp \circ c)(t) &= TL_{\exp(c(t))^{-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\exp(c(t))) \\ &= TL_{\exp(tY)^{-1} \cdot \exp(X)^{-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\exp(X) \cdot \exp(tY)) \\ &= TL_{\exp(tY)^{-1}} \cdot TL_{\exp(X)^{-1}} \cdot TL_{\exp(X)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \exp(tY) \\ &\stackrel{\text{3.5}}{=} TL_{\exp(tY)^{-1}} \cdot TL_{\exp(tY)} \cdot Y = Y, \end{aligned}$$

und somit ist  $Y = \delta(\exp \circ c)(t) = g(\text{ad}(c(t))) \cdot c'(t)$ . Es sei  $f : GL(\mathfrak{g}) \rightarrow L(\mathfrak{g})$  lokal durch  $f(z) := \frac{z \ln(z)}{z-1}$  definiert. Dann ist  $f(e^z) \cdot g(z) = 1$  und somit  $f(e^{\text{ad}(c(t))}) \cdot Y = f(e^{\text{ad}(c(t))}) \cdot g(\text{ad}(c(t))) \cdot c'(t) = c'(t)$ , also ist

$$\exp^{-1}(\exp X \cdot \exp Y) = c(1) = c(0) + \int_0^1 c'(t) dt = X + \int_0^1 f(e^{\text{ad} X} \cdot e^{t \text{ad} Y})(Y) dt,$$

denn

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}(c(t))} &\stackrel{\text{6.16}}{=} \text{Ad}(\exp(c(t))) = \text{Ad}(\exp(X) \cdot \exp(tY)) = \\ &= \text{Ad}(\exp(X)) \circ \text{Ad}(\exp(tY)) \stackrel{\text{6.16}}{=} e^{\text{ad}(X)} \circ e^{\text{ad}(tY)}. \quad \square \end{aligned}$$

Wenn man sukzessive die auftretenden Funktionen in Potenzreihen entwickelt, so erhält man

$$\begin{aligned} g(z) &:= \frac{1 - e^{-z}}{z} = \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}\right) \cdot z^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(k+1)!}, \\ \ln(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (z-1)^k}{k} \quad \text{und} \quad f(z) := \frac{z \ln(z)}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^k}{k+1} z \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(e^{\text{ad} X} \cdot e^{t \text{ad} Y})(Y) dt &= \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{\text{ad} X} \cdot e^{t \text{ad} Y} - 1)^k}{k+1} \cdot e^{\text{ad} X} \cdot e^{t \text{ad} Y} \cdot Y dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left( \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \geq 1}} \frac{t^j}{i! j!} \text{ad}(X)^i \cdot \text{ad}(Y)^j \right)^k \cdot e^{\text{ad} X} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\text{ad} Y)^n \cdot Y dt \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \geq 0 \\ j_1, \dots, j_k \geq 0 \\ i_i + j_i \geq 1 \\ m \geq 0}} \frac{(\text{ad} X)^{i_1} (\text{ad} Y)^{j_1} \dots (\text{ad} X)^{i_k} (\text{ad} Y)^{j_k}}{i_1! \dots i_k! j_1! \dots j_k! (1 + j_1 + \dots + j_k)} \frac{(\text{ad} X)^m}{m!} Y \end{aligned}$$

Sortieren nach der Gesamtzahl von ad's liefert die Baker-Campbell-Hausdorff Reihe:

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots\right).$$

### 7.5 Lemma.

Die diskreten Untergruppen von  $(\mathbb{R}^n, +)$  sind genau die von linear unabhängigen Vektoren erzeugten Untergruppen.

**Beweis.** Wir beweisen das mittels Induktion nach  $n$ . Für  $n = 0$  ist es trivial. Sei nun  $n > 0$  und  $H$  eine diskrete Untergruppe. Wir wählen eine maximal linear unabhängige Teilmenge  $H_0 := \{h_1, \dots, h_k\}$  von  $H$ . Falls  $k < n$  ist, dann liegt  $H$  in der von  $H_0$  aufgespannten echten Teilraum, und ist wird somit nach Induktionsvoraussetzung von linear unabhängigen Vektoren erzeugt. Andernfalls ist  $k = n$  und wir betrachten die von  $\{h_1, \dots, h_{n-1}\}$  aufgespannte Hyperebene  $E$ . Dann ist  $H \cap E$  eine diskrete Untergruppe von  $E$  und wird somit nach Induktionsvoraussetzung von linear unabhängigen  $\{h'_1, \dots, h'_k\}$  (mit  $k' \leq n - 1$ ) erzeugt. Da die Basis  $\{h_j : j < n\}$  von  $E$  in  $H$  liegt, muß  $k' = n - 1$  sein, und wir können o.B.d.A. annehmen, daß die  $\{h_1, \dots, h_{n-1}\}$  diese Erzeuger sind.

Sei nun  $Q$  der kompakte Quader  $\{\sum_{j \leq n} t_j h_j : 0 \leq t_j \leq 1\}$ . Dann ist  $H \cap Q$  endlich, und wir wählen ein  $h' = \sum_{j \leq n} t_j h_j \in H \cap Q$  (solche gibt es, z.B.  $h_n$ ) mit minimalen  $t_n > 0$ .

Wir behaupten, daß  $H$  von der linear unabhängigen Menge  $\{h_1, \dots, h_{n-1}, h'\}$  erzeugt wird: Jedes  $h \in H$  läßt sich natürlich als  $h = \sum_{j < n} s_j h_j + s_n h'$  schreiben mit  $s_j \in \mathbb{R}$ . Für geeignet gewählte  $k_j \in \mathbb{Z}$  betrachten wir

$$\begin{aligned} H \ni h'' &:= h - \sum_{j < n} k_j h_j - k_n h' = \sum_{j < n} (s_j - k_j) h_j + (s_n - k_n) \left( \sum_{j \leq n} t_j h_j \right) \\ &= \sum_{j < n} \left( s_j - k_j + (s_n - k_n) t_j \right) h_j + (s_n - k_n) t_n h_n. \end{aligned}$$

Wenn wir  $k_n := \lfloor s_n \rfloor$  und  $k_j := \lfloor s_j + (s_n - k_n) t_j \rfloor$  setzen, dann ist  $h'' \in Q$  und der Koeffizient von  $h_n$  kleiner als jener von  $h'$ , also muß er 0 sein, d.h.  $s_n \in \mathbb{Z}$ . Dann ist aber auch  $h - s_n h' \in H \cap E$  und somit nach Induktionsvoraussetzung auch alle anderen  $s_j \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

### 7.6 Folgerung.

Jede  $n$ -dimensionale zusammenhängende Abelsche Lie-Gruppe ist isomorph zu  $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  für ein  $0 \leq k \leq n$ .

Die einfach zusammenhängend Abelschen Lie-Gruppen sind also die zu einem  $(\mathbb{R}^k, +)$  isomorphen und die kompakten Abelschen Lie-Gruppen die zu  $(S^1)^k$  isomorphen.

**Beweis.** Da  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  für abelsche zusammenhängende Lie-Gruppen  $G$  eine Gruppenüberlagerung ist (Siehe Aufgabe [Kri10, 39]: Als lokaler Diffeomorphismus und Homomorphismus ist sein Kern diskret und damit  $\exp$  eine Gruppenüberlagerung nach [6.2], [6.5] und [3.11]), ist  $G$  ist von der Form  $\mathbb{R}^n/D$ , mit einer diskreten Untergruppe  $D$ , d.h.  $D$  wird nach [7.5] von  $k$  linear unabhängigen Vektoren erzeugt wird. Nach Anwenden eines linearen Isomorphismuses (und somit eines Gruppenautomorphismuses) können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $D = \langle e_1, \dots, e_k \rangle_{Grp} = \mathbb{Z}^k \times \{0\}$  ist, und somit ist  $G \cong \mathbb{R}^n/D = (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k})/(\mathbb{Z}^k \times \{0\}) = (\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k) \times (\mathbb{R}^{n-k}/\{0\}) = (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ .  $\square$

### 7.8 Definition. Derivierte- und Zentralreihen

Für das Weitere noch einige gemeinsame Definitionen für Lie-Gruppen und Lie-Algebren: Sei dazu  $X$  eine (Lie-)Gruppe oder eine Lie-Algebra und sei  $Y_i \leq X$  entsprechend eine Untergruppe oder Teilalgebra.

Für  $y, z$  in einer Gruppe  $G$  bezeichnen wir den Kommutator mit  $[y, z] := y^{-1}z^{-1}yz$ .

Mit  $[Y_1, Y_2]$  bezeichnen wir die von allen Kommutatoren aus  $Y_1$  und  $Y_2$  aufgespannte (abgeschlossene) Untergruppe oder Teilalgebra von  $X$ .

Mit  $Z(X) := \{y : [x, y] = 0 \text{ für alle } x\}$  bezeichnet man das ZENTRUM von  $X$ . Für Lie-Gruppen  $G$  ist  $Z(G)$  eine Abelsche abgeschlossene Untergruppe.

Die DERIVIERTE REIHE ist rekursiv definiert durch

$$X^{(0)} := X \text{ und } X^{(r+1)} := [X^{(r)}, X^{(r)}]$$

und wir schreiben auch  $X'$  für  $X^{(1)}$ , ein charakteristisches Unterobjekt (siehe Aufgabe [Kri10, 43]).

Die ABSTEIGENDE ZENTRALREIHE ist rekursiv definiert durch

$$X^0 := X \text{ und } C^{r+1}X := X^{r+1} := [X, X^r].$$

Die AUFSTEIGENDE ZENTRALREIHE ist rekursiv definiert durch

$$C_0X := 0 \text{ und } C_{r+1}(X) := p^{-1}(Z(X/C_rX)),$$

wobei  $p : X \rightarrow X/C_r(X)$  die kanonische Quotienten-Abbildung und  $0$  das 1-elementige Objekt bezeichnet.

Es steht  $Y \trianglelefteq X$  für  $Y$  ist ein (abgeschlossener) Normalteiler bzw. ein Ideal in  $X$ .

Klarerweise gilt:

1.  $Y \subseteq Z(X) \Leftrightarrow [X, Y] = 0$ .
2.  $X$  ist Abelsch  $\Leftrightarrow X' := [X, X] = 0 \Leftrightarrow Z(X) = X$ .
3. Für Unterobjekte  $Y \leq X$  gilt:  $Y \trianglelefteq X \Leftrightarrow [X, Y] \subseteq Y$ .

### 7.9 Lemma. Normalisatoren.

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  ein linearer Teilraum. Dann ist der  $N_G(\mathfrak{h}) := \{g \in G : \text{Ad}(g)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}\}$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  mit dem Normalisator  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}\}$  als Lie-Algebra.

**Beweis.** Da  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$  ein stetiger Gruppen-Homomorphismus ist, ist  $K := N_G(\mathfrak{h})$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  und somit Unter-Lie-Gruppe nach [5.5].

Sei  $X \in \mathcal{L}K$ , d.h.  $\exp(\mathbb{R}X) \subseteq K = N_G(\mathfrak{h})$ , und  $Y \in \mathfrak{h}$ . Dann ist

$$\text{ad}(X)(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t \text{ad } X} Y \stackrel{[6.16]}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp(tX))Y \in \mathfrak{h}$$

und damit  $X \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ .

Umgekehrt sei  $X \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . Dann folgt induktiv, daß  $(\text{ad } X)^n \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$  und somit  $\text{Ad}(\exp(tX))\mathfrak{h} = e^{t \text{ad } X} \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$ , also  $\exp(tX) \in N_G(\mathfrak{h}) =: K$  für alle  $t$  und damit  $X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \in \mathcal{L}K$ .  $\square$

Nach [4.11] entsprechen die Unter-Lie-Algebren von  $\mathfrak{g} := \mathcal{L}G$  in eindeutiger Weise den zusammenhängenden Unter-Lie-Gruppen (siehe [4.1]) von  $G$ . Wir untersuchen nun die entsprechende Frage für Ideal versus Normalteiler.

### 7.10 Proposition. Normalteiler versus Ideale.

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe mit Zusammenhangskomponente  $G_0$  von  $e$  und Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , weiters  $\mathfrak{h}$  eine Teil-Lie-Algebra von  $\mathfrak{g}$  mit zugehöriger zusammenhängender Unter-Lie-Gruppe  $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle_{G_{\text{rp}}}$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ;
2.  $e^{\text{ad } X} \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h} \quad \forall X \in \mathfrak{g}$ ;
3.  $\text{Ad}(G_0)\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$ ;
4.  $H \trianglelefteq G_0$ .

**Beweis.** (1 $\Rightarrow$ 2)  $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{g} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \stackrel{7.9}{=} \mathcal{L}(N_G(\mathfrak{h})) \Rightarrow \forall X \in \mathfrak{g} : \exp X \in N_G(\mathfrak{h})$ ,

i.e.  $e^{\text{ad } X} \mathfrak{h} \stackrel{6.16}{=} \text{Ad}(\exp X) \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$ .

(2 $\Rightarrow$ 3), da  $e^{\text{ad } X} = \text{Ad}(\exp X)$  und  $\langle \exp \mathcal{L}G \rangle = G_0$ .

(3 $\Rightarrow$ 4)  $H := \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$  ist zusammenhängend, also  $H \subseteq G_0$ . Für  $g \in G_0$  ist

$\text{konj}_g(H) = \langle \text{konj}_g(\exp \mathfrak{h}) \rangle \stackrel{3.8}{=} \langle \exp(T_e \text{konj}_g \cdot \mathfrak{h}) \rangle = \langle \exp(\text{Ad}(g)\mathfrak{h}) \rangle \subseteq \langle \exp \mathfrak{h} \rangle = H$ .

(4 $\Rightarrow$ 1) Für  $X \in \mathcal{L}G$  und  $Y \in \mathfrak{h}$ , d.h.  $\exp \mathbb{R}Y \subseteq H$ , ist  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exp(\mathbb{R}e^{\text{ad } X}Y) &= \exp(\mathbb{R} \text{Ad}(\exp X)Y) = (\exp \circ \text{Ad}(\exp X))(\mathbb{R}Y) \\ &\stackrel{6.15}{=} (\exp \circ \mathcal{L}(\text{konj}_{\exp X}))(\mathbb{R}Y) \stackrel{3.8}{=} (\text{konj}_{\exp X} \circ \exp)(\mathbb{R}Y) \\ &= \text{konj}_{\exp X}(\exp \mathbb{R}Y) \subseteq \text{konj}_{\exp X}(H) \subseteq H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle, \end{aligned}$$

also  $e^{\text{ad } X}Y \in \mathfrak{h}$  und somit  $[X, Y] = \frac{d}{dt}|_{t=0} e^{\text{ad } tX}Y \in \mathfrak{h}$ .  $\square$

### 7.11 Lemma. Der Kern der adjungierten Darstellung Ad.

Für Lie-Gruppen  $G$  ist  $\text{Ker Ad} = Z(G_0, G) := \{g \in G : \forall h \in G_0 : [g, h] = e\}$ , der Zentralisator der Zusammenhangskomponente  $G_0$  von  $e$  in  $G$ .

**Beweis.** ( $\subseteq$ ) Für  $g \in \text{Ker Ad}$  ist  $\text{konj}_g(\exp X) = \exp(\text{Ad}(g)X) = \exp X$  für alle  $X \in \mathcal{L}G$  und, da  $G_0$  von  $\exp \mathcal{L}G$  erzeugt wird, gilt  $\text{konj}_g(h) = h$  für alle  $h \in G_0$ , d.h.  $g \in Z(G_0, G)$ .

( $\supseteq$ )  $g \in Z(G_0, G) \Rightarrow \text{konj}_g|_{G_0} = \text{id} \Rightarrow \text{Ad}(g) = T_e \text{konj}_g = \text{id}$ , i.e.  $g \in \text{Ker Ad}$ .  $\square$

### 7.12 Proposition. Das Zentrum.

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe.

1. Für Lie-Gruppen-Homomorphismen  $f : G \rightarrow H$  ist  $\mathcal{L}(\text{Ker } f) = \text{Ker } \mathcal{L}f$ .
2. Für zusammenhängendes  $G$  ist  $\mathcal{L}(Z(G)) = Z(\mathcal{L}(G))$ .

**Beweis.** (1)  $X \in \mathcal{L}(\text{Ker } f) \Leftrightarrow \{e\} = f(\exp(\mathbb{R}X)) = \exp(\mathcal{L}f(\mathbb{R}X))$ , also  $\mathcal{L}f \cdot X = 0$ .

(2) Wegen  $Z(G, G) = Z(G)$  ist

$$\mathcal{L}(Z(G)) = \mathcal{L}(Z(G, G)) \stackrel{7.11}{=} \mathcal{L}(\text{Ker Ad}) \stackrel{(1)}{=} \text{Ker}(\mathcal{L} \text{Ad}) \stackrel{6.16}{=} \text{Ker ad} = Z(\mathcal{L}G). \quad \square$$

### 7.13 Erweiterungen

Eine Methode aus Objekten neue zu machen ist mittels Erweiterungen, also kurzen exakten Sequenzen:

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Y \rightarrow 0.$$

Im Falle von Gruppen, setzen wir die Pfeile als Gruppen-Homomorphismen voraus mit  $i$  injektiv,  $p$  surjektiv und  $\text{Bild } i = \text{Ker } p$ . Im Falle von topologischen Gruppen soll zusätzlich  $i$  eine topologische (abgeschlossene) Einbettung und  $p$  eine Quotientenabbildung sein. Im Falle von Lie-Gruppen, soll zusätzlich  $i$  Einbettung einer (abgeschlossenen) Untergruppe und  $p$  eine surjektive Submersion sein. Im Falle von Lie-Algebren, soll  $i$  ein injektiver und  $p$  ein surjektiver Lie-Algebra-Homomorphismus mit  $\text{Bild } i = \text{Ker } p$  sein. Man sagt in diesen Situationen, daß  $X$  eine ERWEITERUNG von  $Z$  mit  $Y$  ist. Man sagt, die Erweiterung SPALTET AUF, falls  $p$  einen rechtsinversen Homomorphismus  $s$  besitzt. Genau in dieser Situation ist  $X$

semidirektes Produkt von  $Z$  mit  $Y$ . Beachte dabei, daß bei Lie-Algebren ein solches durch einen Lie-Algebra-Homomorphismus  $\rho : Y \rightarrow \text{Der}(Z)$  beschrieben wird: Analog zu Gruppen ist die Bijektion  $Z \times Y \cong X$  gegeben durch  $(z, y) \mapsto i(z) + s(y)$  und  $(i^{-1}(x - s(i(x))), i(x)) \leftarrow x$  und die von  $X$  induzierte Lie-Klammer auf  $Z \times Y$  gegeben durch

$$[(z, y), (z', y')] = (i^{-1}(x - s(p(x))), p(x)) = ([z, z'] + \rho(y)(z') - \rho(y')(z), [y, y'])$$

mit

$$x = [i(z) + s(y), i(z') + s(y')] = i([z, z']) + [s(y), i(z')] - [s(y'), i(z)] + [s(y), s(y')] = i\left([z, z'] + \rho(y)(z') - \rho(y')(z)\right)$$

wobei

$$\rho(y)(z) := i^{-1}([s(y), i(z)]) \text{ und } c(y, y') := i^{-1}\left([s(y), s(y')] - s([y, y'])\right).$$

Ein Objekt heißt AUFLÖSBAR, falls es durch endlich viele Erweiterungen aus Abelschen Objekten gewonnen werden kann.

Es heißt NILPOTENT, falls es durch endlich viele zentrale Erweiterungen (d.h. mit  $\text{Bild}(i) \subseteq Z(X)$ ) aus Abelschen Objekten gewonnen werden kann.

#### 7.14 Proposition. Auflösbare Gruppen.

Für Gruppen  $X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $X$  ist auflösbar;
2.  $\exists n: X^{(n)} = 0$ ;
3.  $\exists h_i: X \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{h_2} \dots \xrightarrow{h_n} Y_n = 0$  (surjektive) Homomorphismen mit Abelschen Kernen;
4.  $\exists X_i: X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_n = 0$  mit  $X_i/X_{i+1}$  Abelsch (und  $X_i \trianglelefteq X$ ).

**Beweis.** (1 $\Rightarrow$ 2) Die Klasse der Objekte die (2) erfüllt enthält die Abelschen (mit  $n = 1$ ) und ist stabil unter Erweiterungen: Seien nämlich  $N \trianglelefteq X$  und  $Y := X/N$  wie in (2), d.h.  $\exists n, k$  mit  $N^{(n)} = 0$  und  $Y^{(k)} = 0$ . Dann ist  $\pi(X') \subseteq Y'$  und induktiv  $\pi(X^{(k)}) \subseteq Y^{(k)} = 0$ , also  $X^{(k)} \subseteq \text{Ker}(\pi) = N$ . Somit ist  $X^{(k+n)} \subseteq N^{(n)} = 0$ .

(2 $\Rightarrow$ 3) Die (surjektiven) Homomorphismen

$$X = X/0 \twoheadrightarrow X/X^{(n-1)} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow X/X' \twoheadrightarrow X/X = 0$$

haben Abelsche Kerne  $X^{(i)}/X^{(i+1)}$ .

(3 $\Rightarrow$ 4) Indem wir in der Sequenz aus (3) alle  $Y_i$  durch die Bilder der davorliegenden Zusammensetzungen ersetzen, dürfen wir annehmen, daß diese Homomorphismen surjektiv sind. Dann ist  $X_{i-1} := \text{Ker}(h_{i-1} \circ \dots \circ h_1)$  Normalteiler in  $X_i$  und  $h_{i-1} \circ \dots \circ h_1 : X \rightarrow Y_{i-1}$  induziert einen Isomorphismus  $X_i/X_{i-1} \cong \text{Ker}(h_i)$  mit Abelschen Bild.

(4 $\Rightarrow$ 1) Seien  $X_i$  wie in (4). Dann ist  $X_{i-1}$  eine Erweiterung von  $X_i$  mit Abelschen Quotienten und somit  $X_i$  auflösbar mittels Induktion.  $\square$

#### 7.15 Proposition. Auflösbare topologische Gruppen.

Für topologische Hausdorff Gruppen  $X$  sind äquivalent:

1.  $X$  ist als topologische Gruppe auflösbar, d.h. durch endlich viele topologische Erweiterungen (d.h. bzgl. abgeschlossener Normalteiler und Quotientenabbildungen) aus den Abelschen erreichbar;
2.  $\exists n: X^{(n)} = 0$ , wobei  $X'$  den Abschluß der Kommutator-Untergruppe bezeichnet.
3.  $\exists h_i: X \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{h_2} \dots \xrightarrow{h_n} Y_n = 0$  von Quotientenabbildungen mit Abelschen Kernen;

4.  $\exists X_i: X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_n = 0$  mit  $X_i/X_{i+1}$  Abelsch und  $X_i$  abgeschlossen;
5.  $X$  ist als Gruppe auflösbar.

**Beweis.**  $(1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4)$  folgt wie in [7.14](#).

$(2 \Rightarrow 5)$  ist offensichtlich, da die algebraischen  $X^{(i)}$  in den topologischen  $X^{(i)}$  enthalten sind.

$(2 \Leftarrow 5)$  gilt, da die topologischen Derivierten in den Abschlüssen der algebraischen Derivierten  $X^{(i)}$  enthalten sind, denn für die algebraischen Konstrukte gilt:  $[X_1, \overline{X_2}] \subseteq \overline{[X_1, X_2]}$  und somit  $[\overline{X_1}, \overline{X_2}] \subseteq \overline{[X_1, X_2]} \subseteq [X_1, X_2]$ , also  $[\overline{X^{(i)}}, \overline{X^{(i)}}] \subseteq \overline{X^{(i+1)}}$  und mittels Induktion das Gewünschte. □

### 7.16 Proposition. Auflösbare Lie-Algebren.

Für endlich dimensionale Lie-Algebren  $X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $X$  ist auflösbar;
2.  $\exists n: X^{(n)} = 0$ ;
3.  $\exists h_i: X \xrightarrow{h_1} Y_1 \xrightarrow{h_2} \dots \xrightarrow{h_n} Y_n = 0$  (surjektiv) mit Abelschen Kernen;
4.  $\exists X_i: X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_n = 0$  mit  $X_i/X_{i+1}$  Abelsch (und  $X_i \trianglelefteq X$ );
5.  $\exists X_i: X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_{\dim X} = 0$  mit  $\dim X_i = 1 + \dim X_{i+1}$ .

**Beweis.**  $(1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4)$  folgt wie in [7.14](#).

$(5 \Rightarrow 4)$   $\dim(X_i/X_{i+1}) = 1 \Rightarrow X_i/X_{i+1}$  ist Abelsch.

$(5 \Leftarrow 4)$  Seien die  $X_i$  wie in (4). Da  $X_i/X_{i+1}$  Abelsch ist, ist  $[X_i, X_i] \subseteq X_{i+1}$ , Also ist jeder Teilraum von  $X_i$  der  $X_{i+1}$  erhält ein Ideal. Indem wir Teilräume mit jeweiliger Kodimension 1 einschieben erhalten wir das Gewünschte. □

### 7.17 Folgerung. Auflösbare Lie-Gruppen versus Lie-Algebren.

Eine zusammenhängende Lie-Gruppe  $G$  ist genau dann auflösbar, wenn es ihre Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist.

**Beweis.**  $(\Rightarrow)$  Sei  $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n = 0$  eine Reihe abgeschlossener Normalteiler mit Abelschen Quotienten. Dann ist  $\mathfrak{g} = \mathcal{L}G_0 \supseteq \mathcal{L}G_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{L}G_n = 0$  eine Reihe von Idealen nach [7.10](#) mit Abelschen Quotienten  $\mathcal{L}G_i/\mathcal{L}G_{i+1} = \mathcal{L}(G_i/G_{i+1})$ , also ist  $\mathfrak{g}$  nach [7.16](#) auflösbar.

$(\Leftarrow)$  Wir zeigen mittels Induktion nach  $n$ , daß  $G$  auflösbar ist, falls  $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$ . Die abgeschlossene Hülle  $H$  des Erzeugnisses von  $\exp(\mathfrak{g}^{(n-1)})$  ist nach [7.10](#) ein Abelscher Normalteiler von  $G$  und somit  $\mathfrak{h} := \mathcal{L}H \supseteq \mathfrak{g}^{(n-1)}$  ein Abelsches Ideal in  $\mathfrak{g}$ . Wegen  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(n-1)})^{(n-1)} = \{e\}$  (siehe Aufgabe [Kri10, 44](#)) gilt gleiches auch für  $\mathcal{L}(G/H) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(n-1)})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{g}^{(n-1)})$  und somit ist  $G/H$  auflösbar nach Induktionsannahme. Damit ist aber auch  $G$  auflösbar weil  $H$  Abelsch ist. □

### 7.18 Proposition. Nilpotente Gruppen.

Sei  $X$  eine Gruppe. Dann sind äquivalent:

1.  $X$  ist nilpotent.
2.  $\exists n: X^n = 0$ ;
3.  $\exists X_i: X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_n = 0$  mit  $[X, X_i] \subseteq X_{i+1}$ ;
4.  $\exists n: C_n(X) = X$ , wobei  $C_0(X) := 0$  und  $C_i(X) := p^{-1}(Z(X/C_{i-1}(X)))$ .

Ist  $X$  eine topologische Gruppe, so können alle  $X^i$  und  $C_i X$  durch ihre Abschlüsse ersetzt werden.

**Beweis.** (1 $\Rightarrow$ 2) Abelsche Gruppen erfüllen (2) mit  $n = 1$ . Sei  $N \hookrightarrow X \rightarrow Y$  kurz exakt mit  $N \subseteq Z(X)$  (und damit Abelsch) und  $Y^k = 0$ . Dann ist  $p(X') \subseteq Y'$  und somit mittels Induktion  $p(X^k) \subseteq Y^k = 0$ . Damit ist  $X^k \subseteq N$  also  $X^{k+1} = [X, X^k] \subseteq [X, N] = 0$ , da  $N \subseteq Z(X)$ .

(2 $\Rightarrow$ 3) setze  $X_i := X^i$ .

(3 $\Rightarrow$ 4)  $X_n = 0 = C_0 X$ . Sei  $X_{n-i} \subseteq C_i X$  und  $p : X \rightarrow X/C_i X$  die kanonische Projektion. Dann ist  $[p(X), p(X_{n-i-1})] \subseteq p([X, X_{n-i-1}]) \subseteq p(X_{n-i}) \subseteq C_i X/C_i X = 0$  (nach Aufgabe [Kri10, 44]), also  $X_{n-i-1} \subseteq p^{-1}(Z(X/C_i X)) = C_{i+1} X$ . Und somit ist nach Induktion  $X = X_0 \subseteq C_n X \subseteq X$ .

(4 $\Rightarrow$ 1) Wir zeigen mittels Induktion nach  $i$ , daß  $Y_i := X/C_{n-i}(X)$  nilpotent ist. Es ist  $X/C_{n-i} \rightarrow X/C_{n-(i-1)}$  eine Epimorphismus mit Kern  $C_{n-(i-1)}/C_{n-i}$  und  $C_{n-(i-1)}/C_{n-i} = p(C_{n-(i-1)}) = p(p^{-1}(Z(X/C_{n-i}))) = Z(X/C_{n-i})$ , also ist  $Y_i$  eine zentrale Erweiterung von  $Y_{i-1}$ .

Für topologische Gruppen beachte, daß  $[X, \overline{X_i}] \subseteq \overline{X_{i+1}}$ . □

### 7.19 Satz. Nilpotente Lie-Algebren.

Sei  $X$  eine Lie-Algebra. Dann sind äquivalent:

1.  $X$  ist nilpotent.
2.  $\exists n: X^n = 0$ ;
3.  $\exists X_i: X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_n = 0$  mit  $[X, X_i] \subseteq X_{i+1}$ ;
4.  $\exists n: C_n(X) = X$ , wobei  $C_0(X) := 0$  und  $C_i(X) := p^{-1}(Z(X/C_{i-1}(X)))$ .
5.  $\exists n: x_1, \dots, x_n \in X \Rightarrow \text{ad}(x_1) \circ \dots \circ \text{ad}(x_n) = 0$ .

**Beweis.** (1 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 3 $\Leftrightarrow$ 4) zeigt man wie [7.18].

(2 $\Leftrightarrow$ 5), da  $X^k$  von  $(\text{ad}(x_1) \circ \dots \circ \text{ad}(x_k))y$  mit  $x_i, y \in X$  erzeugt wird. □

Nur für Lie-Gruppen  $G$  mit Abelscher Zusammenhangskomponente  $G_0$  von  $e$  ist  $\exp : (\mathcal{L}G, +) \rightarrow G$  ein Gruppen-Homomorphismus, denn aus  $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y) = \exp(Y+X) = \exp(Y)\exp(X)$  folgt, daß  $(G_0)' = 0$  ist. Wir wollen nun für nilpotente Lie-Gruppen  $G$  eine Gruppen-Operation  $\star$  auf  $\mathfrak{g} := \mathcal{L}G$  so definieren, daß  $\exp : (\mathfrak{g}, \star) \rightarrow G$  ein Gruppen-Homomorphismus wird, also  $\exp(X \star Y) = \exp(X)\exp(Y)$  für  $X, Y \in \mathfrak{g}$  ist. Dazu muß folglich  $X \star Y$  durch die Campbell-Baker-Hausdorff-Reihe aus [7.4] gegeben sein.

### 7.20 Proposition.

Sei  $\mathfrak{g}$  nilpotent. Dann definiert die Campbell-Baker-Hausdorff-Reihe eine polynomiale Multiplikation  $\star$ , die  $\mathfrak{g}$  zu einer einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \star) \cong \mathfrak{g}$  und Exponentialabbildung  $\exp_{(\mathfrak{g}, \star)} = \text{id}_{\mathfrak{g}}$  macht.

**Beweis.** Da  $\mathfrak{g}^n = \{0\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  ist, bricht die Campbell-Baker-Hausdorff-Reihe [7.4] bei der  $n$ -ten Ordnung ab, also ist die dadurch definierte Multiplikation

$$(X, Y) \mapsto X + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \geq 0 \\ j_1, \dots, j_k \geq 0 \\ i_i + j_i \geq 1 \\ m \geq 0}} \frac{(\text{ad } X)^{i_1} (\text{ad } Y)^{j_1} \dots (\text{ad } X)^{i_k} (\text{ad } Y)^{j_k}}{i_1! \dots i_k! j_1! \dots j_k! (1 + j_1 + \dots + j_k)} \frac{(\text{ad } X)^m}{m!} Y$$

polynomial und somit global definiert. Klarerweise ist  $0 \star X = X = X \star 0$  und  $X \star (-X) = 0 = (-X) \star X$ .

Sei  $G$  die einfachzusammenhängende Lie-Gruppe mit  $\mathcal{L}(G) = \mathfrak{g}$ . Nach der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel [7.4](#) ist  $\exp(X \star Y) = \exp(X) \exp(Y)$  für  $X$  und  $Y$  nahe 0. Also ist

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad (X, Y) \mapsto \exp(X \star Y) \exp(Y)^{-1} \exp(X)^{-1}$$

lokal konstant  $e$  (und die Zusammensetzung mit  $\exp^{-1}$  damit global konstant  $(X \star Y) \star (-X) \star (-Y) = e$ ). Analog folgt  $X \star (Y \star Z) = (X \star Y) \star Z$  (lokal, also global). Somit ist  $(\mathfrak{g}, \star)$  eine Lie-Gruppe und  $\exp_G : (\mathfrak{g}, \star) \rightarrow G$  ein lokaler Lie-Gruppen-Isomorphismus. Insbesondere ist  $\mathcal{L} \exp_G : \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \star) \cong \mathcal{L}G = \mathfrak{g}$  ein Isomorphismus von Lie-Algebren und  $\text{id} : \mathfrak{g} \cong \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \star) \rightarrow \mathfrak{g}$  die zugehörige Exponentialfunktion  $\exp_{(\mathfrak{g}, \star)}$ : Aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \star) & \xrightarrow{\cong} & \mathfrak{g} \\ \exp_{(\mathfrak{g}, \star)} \downarrow & \swarrow \text{id} & \downarrow \exp_G \\ (\mathfrak{g}, \star) & \xrightarrow{\exp_G} & G \end{array}$$

folgt dies lokal und damit auch global, denn

$$\exp_{(\mathfrak{g}, \star)}(nX) = \exp_{(\mathfrak{g}, \star)}(X) \star \cdots \star \exp_{(\mathfrak{g}, \star)}(X) = X \star \cdots \star X = nX. \quad \square$$

### 7.21 Folgerung. Universelle Überlagerung nilpotenter Lie-Gruppen.

Sei  $G$  eine zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann ist  $\exp : (\mathfrak{g}, \star) \rightarrow G$  die universelle Überlagerung (und insbesondere surjektiv).

**Beweis.** Es ist  $\mathfrak{g} := \mathcal{L}G$  nilpotent nach  $(\Rightarrow)$  in [7.22](#). Wegen [7.20](#) ist  $(\mathfrak{g}, \star)$  die einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \star) = \mathfrak{g}$  und  $\exp_G : (\mathfrak{g}, \star) \rightarrow G$  ein (lokaler und somit globaler) Lie-Gruppen-Homomorphismus. Als lokaler Diffeomorphismus ist sein Kern diskret und damit  $\exp$  eine Überlagerung (siehe den Beweis von [7.6](#)).  $\square$

### 7.22 Folgerung. Nilpotenz von Lie-Gruppen versus Lie-Algebren.

Eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist genau dann nilpotent, wenn es ihre Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist.

**Beweis.**  $(\Rightarrow)$  Sei  $G = G_0 \triangleright \cdots \triangleright G_n = 0$  eine Reihe abgeschlossener Normalteiler mit  $[G, G_i] \subseteq G_{i+1}$  nach [7.18](#). Dann ist  $\mathfrak{g} = \mathcal{L}G_0 \triangleright \cdots \triangleright \mathcal{L}G_n = 0$  eine Reihe von Idealen nach [7.10](#). Für  $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathcal{L}G_i$  ist  $[X, Y] = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \Big|_{t=0} [\exp(tX), \exp(tY)] \in \mathcal{L}G_{i+1}$ , siehe [7.1](#). Also  $\mathcal{L}G$  nilpotent nach [7.19](#).

$(\Leftarrow)$  Es genügt zu zeigen, daß die nach [7.20](#) einfach zusammenhängende Lie-Gruppe  $(\mathfrak{g}, \star)$  mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  nilpotent ist: Seien dazu  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \triangleright \cdots \triangleright \mathfrak{g}_n = 0$  mit  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i+1}$  nach [7.19](#). Dann sind die  $\mathfrak{g}_i$  auch Untergruppen von  $(\mathfrak{g}, \star)$  und für  $X \in \mathfrak{g}$  und  $Y \in \mathfrak{g}_i$  nahe 0 ist  $[X, Y]_{(\mathfrak{g}, \star)} := (-X) \star (-Y) \star X \star Y$  eine endliche Summe (beginnend mit  $[X, Y]$ ) von Kommutatoren welche  $Y$  enthalten, also liegt dieser Kommutator in  $\mathfrak{g}_{i+1}$  und somit ist  $(\mathfrak{g}, \star)$  nilpotent nach [7.18](#).  $\square$

### Bemerkung.

Man kann zeigen (siehe III.3.21 in [\[HN91, S.226-169\]](#)), daß  $\mathcal{L}(G^n) = (\mathcal{L}G)^n$  und  $\mathcal{L}(G^{(n)}) = (\mathcal{L}G)^{(n)}$  für zusammenhängende Lie-Gruppen  $G$  ist, wobei  $G^n$  und  $G^{(n)}$  die algebraische Zentral- bzw. derivierte Reihe bezeichnet.

Daraus folgt dann ebenfalls, daß zusammenhängende Lie-Gruppen genau dann nilpotent bzw. auflösbar sind, wenn es ihre Lie-Algebra ist. Insbesondere sind dann auch die minimalen  $n$  in [7.18] und [7.19] bzw. in [7.15] und [7.16] gleich.

### 7.23 Lemma.

Für nilpotente Lie-Algebren  $\mathfrak{g}$  ist  $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}, \star)$ .

**Beweis.** Offensichtlich ist  $Z(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g}, \star)$ , denn für  $X \in Z(\mathfrak{g})$  und  $Y \in \mathfrak{g}$  gilt  $X \star Y = X + Y = Y \star X$ .

Umgekehrt, sei  $X \in Z(\mathfrak{g}, \star)$ . Dann ist  $e^{\text{ad} X} = \text{Ad}(\exp_{(\mathfrak{g}, \star)} X) = T_e \text{konj}_X \stackrel{X \in Z}{=} T_e \text{id}_{\mathfrak{g}} = \text{id}_{\mathfrak{g}}$  nach [7.20] und, weil  $\text{ad} X$  nach [7.19] nilpotent ist, ist somit  $\text{ad} X = 0$  (bringe  $\text{ad} X$  auf Jordan'sche Normalform), also  $X \in \text{Ker}(\text{ad}) = Z(\mathfrak{g})$ .  $\square$

### 7.24 Folgerung.

Das Zentrum nilpotenter zusammenhängender Lie-Gruppen ist zusammenhängend.

**Beweis.** Nach [7.21] ist  $\exp : (\mathfrak{g}, \star) \rightarrow G$  eine Überlagerungsabbildung und nach Aufgabe [Kri10, 15] ist  $\exp(Z(\mathfrak{g}, \star)) = Z(G)$ . Nach [7.23] ist schließlich  $Z(\mathfrak{g}, \star) = Z(\mathfrak{g})$ , ein Teilvektorraum.  $\square$

### Bemerkung.

Für auflösbare Lie-Gruppen ist dies nicht der Fall, wie das semidirekte Produkt  $G := \mathbb{C} \rtimes_{\varphi} \mathbb{R}$  mit  $\varphi(t)(z) := e^{it}z$  zeigt. Für diese einfach zusammenhängende auflösbare Gruppe ist  $Z(G) = \{0\} \times 2\pi\mathbb{Z}$ , denn aus  $(z, t) \cdot (w, s) = (z + e^{it}w, t + s) = (w + e^{is}z, s + t)$  für alle  $w, s$  folgt  $z = e^{is}z$  (setze  $w = 0$ ) und  $w = e^{it}w$ . Weiters ist  $G/Z(G)$  die Gruppe der Bewegungen von  $\mathbb{C}$  und  $\exp$  ist nicht surjektiv, siehe [HN91, S.231-169].

### 7.25 Proposition. Struktursatz nilpotenter Lie-Gruppen.

Sei  $G$  eine zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppe. Dann existiert ein zentraler Torus  $K \subseteq G$  (d.h. eine kompakte Abelsche Untergruppe) mit  $G/K$  einfach zusammenhängend und  $G$  diffeomorph (aber nicht isomorph) zu  $K \times G/K$ .

**Beweis.** Es ist  $\exp : (\mathfrak{g}, \star) \rightarrow G$  die universelle Überlagerung nach [7.21]. Somit ist  $D := \text{Ker}(\exp) \subseteq Z(\mathfrak{g}, \star) = Z(\mathfrak{g})$  eine diskrete Untergruppe nach [7.23]. Sei  $\mathfrak{k} \subseteq Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}, \star)$  das linear Erzeugnis von  $D$ , ein abgeschlossenes Ideal in  $(\mathfrak{g}, \star)$ , denn für  $X, Y \in \mathfrak{k}$  ist  $X \star Y = X + Y \in \mathfrak{k}$  und für  $W \in \mathfrak{g}$  ist  $[W, X]_{(\mathfrak{g}, \star)} = \{e\} \subseteq \mathfrak{k}$ . Dann ist  $\mathfrak{k}/D \cong \exp(\mathfrak{k}) =: K$  ein zentraler Torus. Nun betrachten wir folgendes Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xlongequal{\quad} & D & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{k} & \hookrightarrow & (\mathfrak{g}, \star) & \longrightarrow & \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \\
 \downarrow & & \downarrow \text{exp} & & \parallel \\
 K & \hookrightarrow & G & \twoheadrightarrow & \mathfrak{g}/\mathfrak{k}
 \end{array}$$

Nach dem Isomorphiesatz existiert der punktierte Pfeil  $G = \mathfrak{g}/D \rightarrow G/K = (\mathfrak{g}/D)/(\mathfrak{k}/D) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$  und macht die letzte Zeile exakt. Da dieser offensichtlich eine glatten Schnitt

$$(\mathfrak{g}, \star)/\mathfrak{k} \cong (\mathfrak{g}, +)/\mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow G$$

besitzt, ist

$$G \cong K \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \cong K \times (G/K). \quad \square$$

Es ist  $K$  als Abelsche kompakte Gruppe nach [7.6] isomorph zu  $(S^1)^k$  für ein  $k$  und  $G/K$  als nilpotente einfach zusammenhängende Gruppe nach [7.21] diffeomorph zu  $\mathbb{R}^m$  für ein  $m$ , also  $G$  diffeomorph zu  $(S^1)^k \times \mathbb{R}^m$ .

**7.26 Theorem. Struktursatz auflösbarer Lie-Gruppen.**

Sei  $G$  eine zusammenhängende auflösbare Lie-Gruppe. Dann ist  $G$  als Mannigfaltigkeit diffeomorph zu  $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Ist  $G$  zusätzlich einfachzusammenhängend, so ist  $k = 0$ .

Der Beweis dieses Theorems ist viel aufwendiger als [7.25](#), siehe z.B. [\[HN91, S.287-169\]](#).

**Strukturtheorie von Lie-Algebren****7.27 Bemerkung. Kern der adjungierten Darstellung  $\text{ad}$ .**

Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra. Die adjungierte Darstellung

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto \text{ad}(X) : (Y \mapsto [X, Y])$$

ist ein Lie-Algebra Homomorphismus mit Kern  $\text{Ker}(\text{ad}) = Z(\mathfrak{g})$  und Bild

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Bild}(\text{ad}) \subseteq \text{Der}(\mathfrak{g}) := \{\partial \in L(\mathfrak{g}) : \partial([X, Y]) = [\partial(X), Y] + [X, \partial(Y)]\}$$

Insbesondere ist  $Z(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \text{ad}(\mathfrak{g})$  eine zentrale Erweiterung. Um  $\mathfrak{g}$  als nilpotent oder auflösbar zu erkennen, genügt es somit dies für  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq L(\mathfrak{g})$  zu zeigen.

**7.28 Lemma.**

Sei  $V \neq 0$  ein Vektorraum und  $\mathfrak{g}$  ein Teil-Lie-Algebra von  $L(V)$  und  $X \in \mathfrak{g}$ . Falls  $X$  als linearer Operator nilpotent ist (d.h.  $\exists n : X^n = 0$ ), dann ist es auch  $\text{ad}(X)$ .

**Beweis.** Es ist  $\text{ad}(X) = L_X - R_X$  und wegen  $L_X \circ R_X = R_X \circ L_X$  somit

$$\text{ad}(X)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (-1)^k L_X^{2n-1-k} R_X^k = 0,$$

denn in jedem Summanden ist eine der beiden Exponenten mindestens  $n$ .  $\square$

**7.29 Lemma.**

Sei  $V \neq 0$  ein Vektorraum und  $\mathfrak{g}$  ein Teil-Lie-Algebra von  $L(V)$ . Falls alle  $X \in \mathfrak{g}$  nilpotent sind, so ist  $\text{Ker } \mathfrak{g} := \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \text{Ker } X \neq \{0\}$ .

**Beweis.** Induktion nach  $\dim \mathfrak{g}$ : Für  $\dim \mathfrak{g} = 1$  ist  $\mathfrak{g} = \mathbb{K}X_0$  für ein  $0 \neq X_0 \in \mathfrak{g}$ . Sei  $n > 0$  minimal mit  $X_0^n = 0$ , dann existiert ein  $v \in V$  mit  $v_1 := X_0^{n-1}v \neq 0$  und  $X_0 v_1 = X_0^n v = 0$ . Damit ist  $v_1 \in \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} \text{Ker } X$ .

Sei nun  $\mathfrak{h}$  eine echte Teilalgebra von  $\mathfrak{g}$  maximaler Dimension ( $\geq 1$ ) und  $\rho : \mathfrak{h} \rightarrow L(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$  gegeben durch  $\rho(X)(Y + \mathfrak{h}) := \text{ad}(X)(Y) + \mathfrak{h} = [X, Y] + \mathfrak{h}$ . Dann ist  $\rho$  ein wohldefinierter Lie-Algebra-Homomorphismus und somit  $\rho(X)$  nilpotent für alle  $X \in \mathfrak{h}$  nach [7.28](#). Nach Induktionsannahme für  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  existiert ein  $X_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$  mit  $\rho(\mathfrak{h})(X_0 + \mathfrak{h}) = \{\mathfrak{h}\}$ , d.h.  $[\mathfrak{h}, X_0] \subseteq \mathfrak{h}$ . Damit ist auch  $\mathbb{K}X_0 + \mathfrak{h}$  eine Teilalgebra von  $\mathfrak{g}$ . Also ist wegen der Maximalität  $\mathbb{K}X_0 + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$  und damit  $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  mit Kodimension 1. Nach Induktionsannahme für  $\mathfrak{h}$  existiert ein  $0 \neq v \in V$  mit  $\mathfrak{h}(v) = \{0\}$ , d.h.  $V_0 := \text{Ker } \mathfrak{h} \neq \{0\}$ . Es ist  $X_0(V_0) \subseteq V_0$ , denn für  $w \in V_0$  und  $Y \in \mathfrak{h}$  ist

$$(YX_0)(w) = (X_0Y)(w) - [X_0, Y](w) \in X_0(\mathfrak{h}(w)) - \mathfrak{h}(w) = \{0\}.$$

Wie beim Induktionsanfang angewendet auf  $X_0|_{V_0}$  existiert somit ein  $0 \neq v_0 \in V_0$  mit  $X_0(v_0) = 0$ . Insgesamt ist also  $\mathfrak{g}(v_0) = \mathfrak{h}(v_0) + \mathbb{K}X_0(v_0) = \{0\}$ .  $\square$

**7.30 Folgerung. Satz von Engel.**

Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist genau dann nilpotent, wenn  $\text{ad}(X)$  ein nilpotenter Operator für alle  $X \in \mathfrak{g}$  ist.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Sei  $\mathfrak{g}$  nilpotent, dann existiert nach [7.19](#) ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ad}(X)^n = 0$  für jedes  $X \in \mathfrak{g}$ .

( $\Leftarrow$ ) Induktion nach  $\dim(\mathfrak{g})$ : Nach [7.29](#) angewandt auf  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  existiert ein  $0 \neq X \in \mathfrak{g}$  mit  $[\mathfrak{g}, X] = \{0\}$ , d.h.  $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ . Es besteht die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \text{ad}(\mathfrak{g})$  nur aus nilpotenten Elementen und  $\dim(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})) < \dim \mathfrak{g}$ . Nach Induktionsannahme ist somit  $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  nilpotent und damit auch die zentrale Erweiterung  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**7.31 Folgerung. Struktursatz nilpotenter Lie-Algebren.**

Sei  $V \neq 0$  ein Vektorraum und  $\mathfrak{g}$  ein Teil-Lie-Algebra von  $L(V)$ . Falls jedes  $X \in \mathfrak{g}$  nilpotent ist, so existiert eine Fahne  $\{0\} = V_0 \subseteq \dots \subseteq V_n = V$  mit  $\dim(V_k) = k$  mit  $\mathfrak{g}(V_k) \subseteq V_{k-1}$ . Also existiert eine Basis von  $V$ , bzgl. wessen alle  $X \in \mathfrak{g}$  strikt obere Dreiecksgestalt haben.

**Beweis.** Nach [7.29](#) existiert ein  $0 \neq v_1 \in V$  mit  $\mathfrak{g}(v_1) = \{0\}$ . Sei  $V_1 := \mathbb{K}v_1$  dann ist  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow L(V/V_1)$ ,  $X \mapsto (v + V_1 \mapsto X(v) + V_1)$  ein Lie-Algebra-Homomorphismus wie im Beweis von [7.29](#) und  $\varphi(\mathfrak{g})$  besteht nur aus nilpotenten Elementen. Nach Induktionsannahme besitzt  $V/V_1$  eine Fahne für  $\varphi(\mathfrak{g})$ . Die Urbilder unter  $\pi : V \rightarrow V/V_1$  zusammen mit  $V_0 := \{0\}$  bilden dann die gesuchte Fahne für  $\mathfrak{g}$ .

Insbesondere ist  $\mathfrak{g}$  nilpotent.  $\square$

**7.32 Lemma.**

Sei  $V \neq 0$  ein komplexer Vektorraum und  $\mathfrak{g} < L(V)$  eine auflösbare komplexe Teil-Lie-Algebra. Dann existiert ein  $0 \neq v \in V$  mit  $\mathfrak{g}(v) \subseteq \mathbb{C} \cdot v$ , also ein gemeinsamer Eigenvektor.

**Beweis (Analog [7.29](#)).** Induktion nach  $\dim \mathfrak{g}$ . Für  $\dim \mathfrak{g} = 1$  können wir als  $v$  einen Eigenvektor eines Erzeugers nehmen. Allgemein sein  $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{g}'$  eine komplexe Hyperebene in  $\mathfrak{g}$ . Somit ist  $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$  nach [7.8.3](#) und nach Induktionsannahme existiert ein  $v \in V$  mit  $\mathfrak{h}(v) \subseteq \mathbb{C}v$ , d.h. für jedes  $Y \in \mathfrak{h}$  existiert ein eindeutiges  $\ell(Y) \in \mathbb{C}$  mit  $Y(v) = \ell(Y)v$ . Offensichtlich ist  $\ell : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  linear und  $v \in V_\ell := \{w \in V : \forall Y \in \mathfrak{h} : Y(w) = \ell(Y)w\}$ .

**Beh.:**  $V_\ell$  ist  $\mathfrak{g}$ -invariant:

Für  $w \in V_\ell$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  und  $Y \in \mathfrak{h}$  ist

$$(YX)(w) = (XY)(w) - [X, Y](w) = \ell(Y)X(w) - \ell([X, Y])(w).$$

Sei  $W^k := \sum_{j=0}^k \mathbb{C}X^j(w)$ . Wegen  $(YX^k)(w) = (XY)(X^{k-1}w) - [X, Y](X^{k-1}w)$ ,  $X(W^{k-1}) \subseteq W^k$  und  $Y(w) = \ell(Y)w \forall Y \in \mathfrak{h}$  folgt  $\mathfrak{h}(W^k) \subseteq W^k$  mit Induktion. Sei  $k_0$  maximal für:  $(X^j w)_{j=0}^{k_0}$  ist Basis von  $W^{k_0}$ . Dann ist  $W^k = W^{k_0}$  für alle  $k \geq k_0$  und  $\{0\} \subseteq \mathbb{C}w = W^0 \subseteq \dots \subseteq W^{k_0}$  ist eine  $\mathfrak{h}$ -invariante Fahne. Damit ist  $Y|_{W^{k_0}}$  eine obere Dreiecksmatrix bzgl. der angegebenen Basis für jedes  $Y \in \mathfrak{h}$ . Die Diagonalelemente sind gleich  $\ell(Y)$ , denn aus  $Y(w) = \ell(Y)w$  folgt

$$\begin{aligned} (YX^j)w &= [Y, X]X^{j-1}w + XYX^{j-1}w \\ &= [Y, X]X^{j-1}w + X[Y, X]X^{j-2}w + X^2YX^{j-2}w \\ &= [Y, X]X^{j-1}w + \dots + X^{j-1}[Y, X]w + X^jYw \in \ell(Y)X^jw + W^{j-1}. \end{aligned}$$

Somit ist  $(k_0 + 1)\ell([X, Y]) = \text{Spur}([X, Y]|_{W^{k_0}}) = \text{Spur}([X|_{W^{k_0}}, Y|_{W^{k_0}}]) = 0$ , also  $\ell([X, Y]) = 0$  und damit  $X(w) \in V_\ell$ .

Wie beim Induktionsanfang existiert zu  $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$  ein  $0 \neq v_0 \in V_\ell$  mit  $Y(v_0) \in \mathbb{C}v_0$ , also  $\mathfrak{g}(v_0) = (\mathfrak{h} + \mathbb{C}Y)(v_0) \subseteq \mathbb{C}v_0$ .  $\square$

### 7.33 Folgerung. Satz von Lie.

Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $\mathfrak{g} < L(V)$  eine auflösbare Teil-Lie-Algebra. Dann existiert eine  $\mathfrak{g}$ -invariante Fahne in  $V$ .

**Beweis (Analog 7.31).** Induktion nach  $\dim V$ : Nach 7.32 existiert ein  $0 \neq v \in V$  mit  $\mathfrak{g}(v) \subseteq \mathbb{C}v =: V_1$ . Die Abbildung  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow L(V/V_1)$ ,  $X \mapsto (v + V_1 \mapsto X(v) + V_1)$  ist dann ein wohldefinierter Lie-Algebra-Homomorphismus und somit  $\varphi(\mathfrak{g})$  auflösbar. Nach Induktionsannahme existiert eine  $\varphi(\mathfrak{g})$ -invariante Fahne von  $V/V_1$  und deren Urbild unter  $\pi : V \rightarrow V/V_1$  zusammen mit  $V_0 := \{0\}$  ist dann die gesuchte Fahne für  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

### 7.34 Folgerung.

Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist genau dann auflösbar, wenn  $\mathfrak{g}'$  nilpotent ist.

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Sei  $\mathfrak{g}'$  nilpotent und somit auflösbar, also  $\mathfrak{g}^{(n+1)} = (\mathfrak{g}')^{(n)} = \{0\}$  für ein  $n$ , d.h.  $\mathfrak{g}$  ist auflösbar.

( $\Rightarrow$ ) Sei nun  $\mathfrak{g}$  auflösbar. Falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist, so sieht man leicht, daß dann auch die Komplexifizierung  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  auflösbar ist, sei also o.B.d.A.  $\mathfrak{g}$  eine komplexe auflösbare Lie-Algebra. Nach 7.33 besteht  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  aus oberen Dreiecksmatrizen und damit

$$\text{ad}(\mathfrak{g}') = (\text{ad}(\mathfrak{g}))'$$

aus strikt oberen Dreiecksmatrizen. Diese sind nilpotente Operatoren und nach 7.30 ist somit  $\mathfrak{g}'$  nilpotent (und falls nötig damit auch der Realteil).  $\square$

### 7.35 Definition. Halbeinfache Operatoren.

Sei  $V$  ein Vektorraum,  $T \in L(V)$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Es heißt

$$V_\lambda(T) := \{v \in V : \exists n : (T - \lambda)^n v = 0\}$$

VERALLGEMEINERTER EIGENRAUM.

Der Operator  $T$  heißt ZERFALLEND, falls  $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda(T)$ . Für solche Abbildungen sei die Diagonalabbildung  $S_T$  definiert durch  $S_T|_{V_\lambda(T)} := \lambda$  der HALBEINFACHE und  $N_T = T - S_T$  der NILPOTENTE TEIL von  $T$ . Ein Operator  $T$  heißt HALBEINFACH falls  $T = S_T$  gilt.

### 7.36 Proposition. Jordan-Zerlegung.

Es sei  $T \in L(V)$  zerfallend. Dann gilt:

1.  $S_T N_T = N_T S_T$ .
2.  $T = N_T \Leftrightarrow S_T = 0 \Leftrightarrow \exists n : T^n = 0$ .
3.  $T = S + N$  mit  $S$  halbeinfach und  $N$  nilpotent und  $SN = NS \Rightarrow N = N_T$  und  $S = S_T$ .
4.  $\forall A \in L(V) : AT = TA \Rightarrow AS_T = S_T A$  und  $AN_T = N_T A$ .
5.  $T(W_1) \subseteq W_1 \Rightarrow S_T(W_1) \subseteq T(W_1)$  und  $N_T(W_1) \subseteq T(W_1)$ .

### Beweis.

- [1]. Offensichtlich ist  $V_\lambda(T)$  invariant unter  $T$  und  $S_T$  und damit auch unter  $N_T$ . Für  $v \in V_\lambda(T)$  ist somit  $N_T S_T v = N_T \lambda v = \lambda N_T v = S_T N_T v$ .

2. Die erste Äquivalenz ist offensichtlich. Nun zur zweiten:  
 $(\Rightarrow)$   $S_T = 0 \Rightarrow V = V_0(T)$ , d.h.  $\forall v \exists n: T^n v = 0$ . Wegen  $\dim V < \infty$  ist somit  $T^n = 0$  für ein  $n$ .  
 $(\Leftarrow)$  Wegen  $TS_T = S_T T$  ist  $(T - \lambda)^n = (T - S_T)^n = N_T^n$  auf  $V_\lambda(T)$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  minimal mit  $N_T^n|_{V_\lambda(T)} = 0$ . Falls  $V_\lambda(T) \neq 0$ , so existiert ein  $v \in V_\lambda(T)$  mit  $v_1 := N_T^{n-1} v \neq 0$  und  $N_T v_1 = 0$ . Dann ist  $T v_1 = N_T v_1 + \lambda v_1 = \lambda v_1$ . Aus  $T^k = 0$  folgt somit  $\lambda^k = 0$ , also  $V = V_0(T)$ . Damit ist  $S_T = S_T|_{V_0(T)} = 0$ .
3. Für  $v \in V_\lambda(S)$  ist  $Sv = S_S v = \lambda v$  und wegen  $TS = ST$  ist für hinreichend große  $n$  somit  $(T - \lambda)^n v = (T - S)^n v = N^n v = 0$ , also  $V_\lambda(S) \subseteq V_\lambda(T)$ , und, wegen  $\sum_\lambda V_\lambda(T) = V = \sum_\lambda V_\lambda(S)$ , sogar  $V_\lambda(S) = V_\lambda(T)$ . Somit ist  $S_T|_{V_\lambda(T)} = \lambda = S|_{V_\lambda(S)} = S|_{V_\lambda(T)}$  und auch  $N_T = T - S_T = T - S = N$ .
4.  $AT = TA \Rightarrow (T - \lambda)^n A = A(T - \lambda)^n \Rightarrow A(V_\lambda(T)) \subseteq V_\lambda(T) \Rightarrow AS_T = S_T A \Rightarrow AN_T = N_T A$ .
5. Beh.:  $W_1 = \sum_\lambda V_\lambda(T) \cap W_1$ .  
 Sei nämlich  $V_\lambda(T) = \text{Ker}(T - \lambda)^n$ . Dann ist der größte gemeinsame Teiler der Polynome  $p_\lambda(x) := \prod_{\mu \neq \lambda} (x - \mu)^{n_\mu}$  gleich 1 und somit existieren Polynome  $q_\lambda$  mit  $\sum_\lambda p_\lambda \cdot q_\lambda = 1$ . Sei  $P_\lambda := q_\lambda(T) \cdot p_\lambda(T)$ . Dann ist  $\sum_\lambda P_\lambda = \sum_\lambda p_\lambda(T) \cdot q_\lambda(T) = \text{id}$  sowie  $P_\lambda P_\mu = 0$  für  $\lambda \neq \mu$ , da  $\prod_\lambda (x - \lambda)^{n_\lambda}$  das Polynom  $q_\lambda q_\mu$  teilt, und  $P_\mu = \sum_\lambda P_\lambda P_\mu = P_\mu^2$ . Folglich ist  $\text{Bild}(P_\lambda) = V_\lambda(T)$ , denn für  $v \in V_\lambda(T)$  ist  $(T - \lambda)^{n_\lambda} v = 0$  und somit  $P_\mu(v) = 0$  für alle  $\mu \neq \lambda$ , also  $v = \sum_\mu P_\mu(v) = P_\lambda(v) \in \text{Bild}(P_\lambda)$ . Umgekehrt sei  $v \in \text{Bild}(P_\lambda)$ , also  $v = P_\lambda(w)$  für ein  $w$  und somit  $P_\lambda(v) = P_\lambda^2(w) = P_\lambda(w) = v$  also  $(T - \lambda)^{n_\lambda} v = (T - \lambda)^{n_\lambda} p_\lambda(T) q_\lambda(T) v = p_\lambda(T) \prod_{\mu \neq \lambda} (T - \mu)^{n_\mu} v = 0$ , d.h.  $v \in V_\lambda(T)$ . Sei schließlich  $w = \sum_\lambda v_\lambda \in W_1$  mit  $v_\lambda \in V_\lambda(T)$ . Dann ist  $v_\mu = \sum_\lambda P_\mu(v_\lambda) = P_\mu w \in V_\mu(T)$ .  
 Sei nun  $\lambda \neq 0$  und  $v \in V_\lambda(T) \cap W_1$ . Dann existiert ein  $n$  mit

$$0 = (T - \lambda)^n v = \sum_{k=0}^n (-\lambda)^k \binom{n}{k} T^{n-k} v \in (-\lambda)^n v + TW_1.$$

Also ist  $V_\lambda(T) \cap W_1 \subseteq TW_1$  und somit  $W_1 = V_0(T) \cap W_1 + TW_1$ . Aus  $S_T|_{V_\lambda(T)} = \lambda$  folgt  $S_T W_1 = S_T(\sum_\lambda V_\lambda(T) \cap W_1) \subseteq 0 + \sum_{\lambda \neq 0} \lambda TW_1 \subseteq TW_1$  und somit

$$N_T W_1 = (T - S_T) W_1 \subseteq TW_1 + S_T W_1 \subseteq TW_1. \quad \square$$

### 7.37 Proposition.

Sei  $X \in L(V)$  zerfallend.

Dann ist  $\text{ad}(X)$  zerfallend mit  $S_{\text{ad}(X)} = \text{ad}(S_X)$  und  $N_{\text{ad}(X)} = \text{ad}(N_X)$ .

**Beweis.** Es ist  $\text{ad}(X) = L_X - R_X$  und somit

$$\begin{aligned} \text{ad}(N_X) \text{ad}(S_X) &= (L_{N_X} - R_{N_X}) \circ (L_{S_X} - R_{S_X}) \\ &= L_{N_X S_X} + R_{S_X N_X} - R_{N_X} L_{S_X} - L_{N_X} R_{S_X} \\ &= L_{S_X N_X} + R_{N_X S_X} - L_{S_X} R_{N_X} - R_{S_X} L_{N_X} \\ &= (L_{S_X} - R_{S_X}) \circ (L_{N_X} - R_{N_X}) = \text{ad}(S_X) \text{ad}(N_X) \end{aligned}$$

Da  $S_X$  halbeinfach ist, existiert eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von Eigenvektoren von  $S_X$  mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_i$ . Es bilden die  $E^{i,j}(v_k) := \delta_{j,k} v_i$  eine Basis von  $L(V)$  mit

$$\begin{aligned} (\text{ad}(S_X)(E^{i,j}))(v_k) &= S_X E^{i,j}(v_k) - E^{i,j} S_X(v_k) \\ &= \lambda_i \delta_{j,k} v_i - \delta_{j,k} \lambda_k v_i = (\lambda_i - \lambda_j) E^{i,j}(v_k), \end{aligned}$$

d.h.  $\text{ad}(S_X)(E^{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E^{i,j}$  und somit  $\text{ad}(S_X)$  diagonalisierbar, also insbesondere halbeinfach. Nach [7.28](#) ist  $\text{ad}(N_X)$  nilpotent und nach [7.36.3](#) somit  $\text{ad}(S_X) = S_{\text{ad}(X)}$  und  $\text{ad}(N_X) = N_{\text{ad}(X)}$ .  $\square$

### 7.38 Folgerung.

Seien  $W_2 \subseteq W_1$  Teilräume von  $L(V)$  und  $X \in M := \{Y \in L(V) : [Y, W_1] \subseteq W_2\}$  mit  $\text{Spur}(XY) = 0$  für alle  $Y \in M$ . Dann ist  $X$  nilpotent.

**Beweis.** Mit  $X \in M$  ist auch  $S_X, N_X \in M$  nach [7.36.5](#). Wir müssen  $S_X = 0$  zeigen. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $S_X$  und  $e_1, \dots, e_n$  eine zugehörige Basis von Eigenvektoren. Sei  $Q$  der von den  $\lambda_i$  erzeugte  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum in  $\mathbb{C}$  und  $g \in Q^*$ . Sei  $g(S_X)$  die Diagonalmatrix mit den gleichen Eigenvektoren  $e_i$  wie  $S_X$  und Eigenwerten  $g(\lambda_i)$ . Sei  $p$  das Lagrange-Interpolations-Polynom mit  $p(\lambda_i - \lambda_j) := g(\lambda_i - \lambda_j) = g(\lambda_i) - g(\lambda_j)$ . Der Beweis von [7.37](#) zeigt, daß  $\text{ad}(g(S_X)) = p(\text{ad}(S_X))$ , denn

$$\text{ad}(g(S_X))E^{i,j} = (g(\lambda_i) - g(\lambda_j))E^{i,j} = p(\lambda_i - \lambda_j)E^{i,j} = p(\text{ad}(S_X))E^{i,j}$$

Wegen  $p(0) = 0$  ist somit  $Y := g(S_X) \in M$ , also  $0 = \text{Spur}(XY) = \text{Spur}(N_X Y) + \text{Spur}(S_X g(S_X)) = 0 + \sum_i \lambda_i g(\lambda_i)$  und weiters  $0 = g\left(\sum_i \lambda_i g(\lambda_i)\right) = \sum_i g(\lambda_i)^2$ , also  $g(\lambda_i) = 0$  wegen  $g(\lambda_i) \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ . Da die  $g \in Q^*$  die Punkte in  $Q$  trennen ist  $\lambda_i = 0$  und somit  $S_X = 0$ , also  $X = N_X$  nilpotent.  $\square$

### 7.39 Proposition. Cartan-Kriterium.

Sei  $\mathfrak{g} < L(V)$  eine Teil-Lie-Algebra. Dann ist  $\mathfrak{g}$  genau dann auflösbar, wenn  $\text{Spur}(XY) = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g}'$  und  $Y \in \mathfrak{g}$ .

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Wegen [7.34](#) genügt  $\mathfrak{g}'$  nilpotent nachzuweisen. Wegen [7.30](#) müssen wir nur die Nilpotenz von  $X \in \mathfrak{g}'$  zeigen. Dies folgt aus [7.38](#) angewandt auf  $W_1 := \mathfrak{g}$ ,  $W_2 := \mathfrak{g}'$  und  $M := \{Y \in L(V) : [Y, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}'\} \supseteq \mathfrak{g}$ : Sei dazu  $X = [X_1, X_2] \in \mathfrak{g}' \subseteq M$  mit  $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$  und  $Y \in M$ . Wegen  $[X_2, Y] = -[Y, X_2] \in \mathfrak{g}'$  ist nach Voraussetzung  $\text{Spur}(X_1[X_2, Y]) = 0$  und somit

$$\begin{aligned} \text{Spur}(XY) &= \text{Spur}([X_1, X_2]Y) = \text{Spur}(X_1 X_2 Y - X_2 X_1 Y) \\ &= \text{Spur}(X_1 X_2 Y - X_1 Y X_2) = \text{Spur}(X_1[X_2, Y]) = 0. \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) O.B.d.A. ist  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Nach [7.33](#) existiert eine Basis von  $V$  s.d. alle  $X \in \mathfrak{g}$  obere Dreiecksmatrizen sind. Somit besteht  $\mathfrak{g}'$  nur aus strikt oberen Dreiecksmatrizen. Das Produkt einer oberen Dreiecksmatrix mit einer strikt oberen Dreiecksmatrix ist aber eine strikt obere Dreiecksmatrix und hat somit Spur 0.  $\square$

### 7.40 Folgerung.

Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist genau dann auflösbar, wenn  $\text{Spur}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g}'$  und  $Y \in \mathfrak{g}$ .

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Nach [7.39](#) ist  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$  auflösbar und somit auch  $\mathfrak{g}$  auflösbar.

( $\Rightarrow$ ) Mit  $\mathfrak{g}$  ist auch  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  auflösbar und damit  $\text{Spur}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = 0$  nach [7.39](#).  $\square$

## 8. Halbeinfache Lie-Gruppen und Lie-Algebren

### 8.1 Definition. Halbeinfache Lie-Algebren.

Im Gegensatz zu den auflösbaren Objekten, die ja sehr viele Normalteiler bzw. Ideale besitzen, wollen wir nun Objekte mit wenigen Idealen studieren.

Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt EINFACH, falls  $\dim \mathfrak{g} > 1$  ist und sie nur die Ideale  $\mathfrak{g}$  und  $0$  besitzt. Sie heißt HALBEINFACH, falls  $0$  ihr einziges auflösbare Ideal ist. Jede einfache Lie-Algebra ist halbeinfach, denn andernfalls wäre sie auflösbar und wegen  $\mathfrak{g}' \trianglelefteq \mathfrak{g}$  auch Abelsch, besäße also wegen  $\dim \mathfrak{g} > 1$  eindimensionale Ideale.

Die Summe  $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$  auflösbarer Ideale  $\mathfrak{h}_i \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ist ebenfalls auflösbar, denn mit  $\mathfrak{h}_1$  ist auch  $\mathfrak{h}_1/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \cong (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2$  auflösbar und somit auch  $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ . Folglich besitzt jede Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ein eindeutiges maximales auflösbare Ideal, das RADIKAL  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  von  $\mathfrak{g}$ , und  $\mathfrak{g}$  ist genau dann halbeinfach, wenn  $\text{Rad} \mathfrak{g} = 0$  gilt. Weiters hat  $\mathfrak{g}/\text{Rad} \mathfrak{g}$  keine nichttrivialen auflösbaren Ideale  $\mathfrak{h}$  und ist damit halbeinfach, denn das Urbild  $\pi^{-1}(\mathfrak{h})$  in  $\mathfrak{g}$  wäre eine Erweiterung  $\text{Rad} \mathfrak{g} \hookrightarrow \pi^{-1}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{h}$  von  $\text{Rad} \mathfrak{g}$  mit dem auflösbaren Ideal also selbst ein auflösbare Ideal.

Da  $\text{Rad} \mathfrak{g}$  auflösbar ist, existiert ein minimales  $n$  mit  $(\text{Rad} \mathfrak{g})^{(n)} = 0$  und damit ist  $\mathfrak{a} := (\text{Rad} \mathfrak{g})^{(n-1)}$  ein CHARAKTERISTISCHES IDEAL (d.h. invariant unter Derivationen) in  $\text{Rad} \mathfrak{g}$  und folglich ein Abelsches Ideal in  $\mathfrak{g}$ . Somit ist eine Lie-Algebra genau dann halbeinfach, wenn sie nur  $0$  als Abelsches Ideal besitzt.

Die KILLING-FORM  $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist die symmetrische Bilinearform  $(X, Y) \mapsto \text{Spur}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$ . Sie erfüllt  $\kappa([X, Y], Z) = \kappa(X, [Y, Z])$ , denn (vgl. mit dem Beweis von [7.39](#))

$$\begin{aligned} \kappa([X, Y], Z) &= \text{Spur}\left(\text{ad}([X, Y]), \text{ad}(Z)\right) \\ &= \text{Spur}\left((\text{ad}(X)\text{ad}(Y) - \text{ad}(Y)\text{ad}(X))\text{ad}(Z)\right) \\ &= \text{Spur}\left(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)\text{ad}(Z)\right) - \text{Spur}\left(\text{ad}(Y)\text{ad}(X)\text{ad}(Z)\right) \\ &= \text{Spur}\left(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)\text{ad}(Z)\right) - \text{Spur}\left(\text{ad}(X)\text{ad}(Z)\text{ad}(Y)\right) \\ &= \text{Spur}\left(\text{ad}(X)(\text{ad}(Y)\text{ad}(Z) - \text{ad}(Z)\text{ad}(Y))\right) = \kappa(X, [Y, Z]), \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$0 = \kappa(\text{ad}(Y)X, Z) + \kappa(X, \text{ad}(Y)Z).$$

Man sagt dazu auch:  $\kappa$  ist ad-invariant. Wir werden  $X \perp Y$  für  $\kappa(X, Y) = 0$  schreiben.

### 8.2 Bemerkung.

Das Cartan-Kriterium [7.39](#) angewandt auf  $\text{ad} \mathfrak{g}$  besagt (siehe [7.40](#)): Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist genau dann auflösbar, wenn  $\mathfrak{g}' \perp \mathfrak{g}$ , d.h.

$$\mathfrak{g}' \subseteq \text{Ker}(\kappa) := \mathfrak{g}^\perp := \{X \in \mathfrak{g} : X \perp Y = 0 \forall Y\}.$$

### 8.3 Lemma.

Sei  $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ . Dann ist  $\text{Rad} \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cap \text{Rad} \mathfrak{g}$ .

**Beweis.** Es ist  $\text{Rad}(\mathfrak{n})$  ein auflösbare charakteristisches (siehe [HN91](#), II.7.4) Ideal in  $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  und somit auch in  $\mathfrak{g}$ , also  $\text{Rad} \mathfrak{n} \subseteq \text{Rad} \mathfrak{g}$ . Umgekehrt ist  $\mathfrak{n} \cap \text{Rad} \mathfrak{g}$  ein auflösbare Ideal in  $\mathfrak{n}$ , also  $\mathfrak{n} \cap \text{Rad} \mathfrak{g} \subseteq \text{Rad} \mathfrak{n}$ .  $\square$

**8.4 Lemma.**

Die Killing-Form eines Ideals ist die Einschränkung der Killing-Form.

**Beweis.** Für  $X \in \mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  ist die Matrixdarstellung von  $\text{ad}(X)$  bzgl. einer linearen Zerlegung  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}^k$  von der Form

$$\begin{pmatrix} \text{ad}(X)|_{\mathfrak{n}} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist für  $X, Y \in \mathfrak{n}$ :

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{Spur}(\text{ad}(X) \text{ad}(Y)) = \text{Spur}(\text{ad}(X)|_{\mathfrak{n}} \text{ad}(Y)|_{\mathfrak{n}}) = \kappa_{\mathfrak{n}}(X, Y). \quad \square$$

**8.5 Theorem.**

Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g} \neq 0$  ist genau dann halbeinfach, wenn  $\kappa$  nicht ausgeartet ist, d.h.  $\text{Ker}(\kappa) := \mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$  ist.

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Falls  $\mathfrak{g}$  nicht halbeinfach ist, so besitzt  $\mathfrak{g}$  ein abelsches Ideal  $\mathfrak{a}$  nach [8.1](#). Für  $0 \neq X \in \mathfrak{a}$  und  $Y, Z \in \mathfrak{g}$  ist

$$(\text{ad}(X) \text{ad}(Y))^2(Z) = [X, [Y, [X, [Y, Z]]]] = 0, \text{ da } [Y, [X, [Y, Z]]] \in \mathfrak{a}.$$

Somit ist  $\text{ad}(X) \text{ad}(Y)$  nilpotent und damit  $\kappa(X, Y) = \text{Spur}(\text{ad}(X) \text{ad}(Y)) = 0$ .

( $\Rightarrow$ ) Sei  $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}^{\perp} \neq 0$  der Kern der Killing-Form. Dann ist  $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ , denn für  $X \in \mathfrak{a}$ ,  $Y, Z \in \mathfrak{g}$  ist  $\kappa(Y, [Z, X]) = \kappa([Y, Z], X) = 0$ . Es ist  $\text{ad}(\mathfrak{a})$  eine Lie-Algebra mit  $\text{Spur}(XY) = 0$  für alle  $X, Y \in \text{ad}(\mathfrak{a})$ . Wegen [8.4](#) und [7.40](#) ist  $\mathfrak{a}$  auflösbar und somit  $\mathfrak{g}$  nicht halbeinfach.  $\square$

**8.6 Proposition. Halbeinfache als Summe einfacher.**

Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist genau dann halbeinfach, wenn einfache Lie-Algebren  $\mathfrak{g}_i$  existieren mit  $\mathfrak{g} \cong \prod_{i=1}^k \mathfrak{g}_i$ .

Jedes Ideal in  $\prod_{i=1}^k \mathfrak{g}_i$  ist von der Form  $\prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$  für eine Teilmenge  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$

Sei  $\mathfrak{g}$  halbeinfach. Dann gilt:

1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ .
2. Ideale und homomorphe Bilder von  $\mathfrak{g}$  sind halbeinfach.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Falls  $\mathfrak{g}$  einfach ist, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls sei  $\mathfrak{a} \neq 0$  ein minimales Ideal in  $\mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{a}^{\perp}$  das orthogonale Komplement bzgl. der Killing-Form. Dann ist  $\mathfrak{a}^{\perp}$  ebenfalls ein Ideal (wegen  $\kappa(Y, [Z, X]) = \kappa([Y, Z], X)$ ). Es ist  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$  (und somit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ ), denn wegen der Minimalität ist andernfalls  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} \subseteq \mathfrak{a}^{\perp}$  und somit  $\mathfrak{a}$  auflösbar nach Cartan's Kriterium [7.39](#) (siehe [8.2](#)), ein Widerspruch. Es sind  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{a}^{\perp}$  halbeinfach nach [8.3](#) und somit folgt das Resultat mittels Induktion nach  $\dim \mathfrak{g}$ .

Sei  $\mathfrak{n} \trianglelefteq \prod_{i=1}^k \mathfrak{g}_i =: \mathfrak{g}$ . Es ist  $\text{pr}_i(\mathfrak{n}) \trianglelefteq \mathfrak{g}_i$ , also entweder 0 oder  $\mathfrak{g}_i$ . Im letzteren Fall ist  $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}'_k = [\mathfrak{g}_k, \text{pr}_k(\mathfrak{n})] = [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$  und somit  $\mathfrak{n} = \prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$  wobei  $I := \{i : \text{pr}_i(\mathfrak{n}) \neq 0\}$ .

[1](#) Da  $\mathfrak{g}_i$  einfach ist, ist  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$  und somit

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \sum_{i,j} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \sum_i [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \sum_i \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}$$

( $\Leftarrow$ ) Das Radikal von  $\prod_i \mathfrak{g}_i$  ist also Ideal von der Form  $\prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$  und wegen  $(\prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i)' = \prod_{i \in I} \mathfrak{g}'_i = \prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$  (siehe [8.6.1](#)) nur dann auflösbar, wenn  $I = \emptyset$ .

**2** Nach Obigem ist jedes Ideal  $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  von der Form  $\mathfrak{h} = \sum_{j \in J} \mathfrak{g}_j$  für eine Teilmenge  $J$  und somit  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \sum_{i \notin J} \mathfrak{g}_i$  halbeinfach.  $\square$

### 8.7 Satz.

Sei  $\mathfrak{g}$  halbeinfach, dann ist  $\mathfrak{g} \cong \text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g})$ .

**Beweis.** Es ist  $\text{Ker ad} = Z(\mathfrak{g})$  ein Abelsches Ideal und somit  $0$ , also  $\mathfrak{g} \cong \text{ad}(\mathfrak{g})$ . Nach **7.27** ist  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Der}(\mathfrak{g})$ . Weiters ist  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \trianglelefteq \text{Der}(\mathfrak{g})$ , denn für  $\partial \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  und  $X, Y \in \mathfrak{g}$  ist

$$\begin{aligned} [\partial, \text{ad}(X)](Y) &= (\partial \circ \text{ad}(X) - \text{ad}(X) \circ \partial)(Y) = \partial([X, Y]) - [X, \partial Y] \\ &= [\partial X, Y] + [X, \partial Y] - [X, \partial Y] = [\partial X, Y] = \text{ad}(\partial X)(Y). \end{aligned}$$

Sei  $\kappa$  die Killing-Form von  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ , dann ist  $\text{ad}(\mathfrak{g})^\perp \trianglelefteq \text{Der}(\mathfrak{g})$ . Da  $\kappa$  auf  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  nach **8.4** und **8.5** nicht-degeneriert ist, ist  $0 = \text{ad}(\mathfrak{g})^\perp \cap \text{ad}(\mathfrak{g}) \supseteq [\text{ad}(\mathfrak{g})^\perp, \text{ad}(\mathfrak{g})]$  und somit  $\text{ad}(\partial X) = [\partial, \text{ad}(X)] = 0$  für alle  $\partial \in \text{ad}(\mathfrak{g})^\perp$  und  $X \in \mathfrak{g}$ , d.h.  $\partial X \in \text{Ker ad} = \{0\}$ , also  $\partial = 0$ . Somit ist  $\text{ad}(\mathfrak{g})^\perp = 0$  und  $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{Der}(\mathfrak{g})$ .  $\square$

### 8.8 Lemma.

1.  $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$  halbeinfach  $\Rightarrow \text{Rad } \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{n}$ .
2.  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h} \Rightarrow \pi(\text{Rad } \mathfrak{g}) = \text{Rad}(\mathfrak{h})$ .

**Beweis.** (1)  $\text{Rad } \mathfrak{g}$  auflösbar  $\Rightarrow \pi(\text{Rad } \mathfrak{g})$  auflösbar  $\Rightarrow \pi(\text{Rad } \mathfrak{g}) = 0 \Rightarrow \text{Rad } \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{n}$ .  
 (2)  $\text{Rad } \mathfrak{g} \trianglelefteq \mathfrak{g}$  auflösbar  $\Rightarrow \pi(\text{Rad } \mathfrak{g}) \trianglelefteq \mathfrak{h}$  auflösbar  $\Rightarrow \pi(\text{Rad } \mathfrak{g}) \subseteq \text{Rad } \mathfrak{h}$ . In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Rad } \mathfrak{g} & \hookrightarrow & \mathfrak{g} & \twoheadrightarrow & \mathfrak{g}/\text{Rad } \mathfrak{g} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{dotted} \\ \pi(\text{Rad } \mathfrak{g}) & \hookrightarrow & \mathfrak{h} & \twoheadrightarrow & \mathfrak{h}/\pi(\text{Rad } \mathfrak{g}) \end{array}$$

ist  $\mathfrak{g}/\text{Rad } \mathfrak{g}$  und damit auch  $\mathfrak{h}/\pi(\text{Rad } \mathfrak{g})$  halbeinfach, also  $\text{Rad } \mathfrak{h} \subseteq \pi(\text{Rad } \mathfrak{g})$  nach (1).  $\square$

### 8.9 Proposition.

Sei  $\mathfrak{g} \rightarrow L(V)$  ein Darstellung (man sagt auch  $V$  ist ein  $\mathfrak{g}$ -Modul) einer halbeinfachen Lie-Algebra. Dann besitzt jeder invariante Teilraum  $W < V$  ein invariantes Komplement.

Für einen Beweis siehe z.B. **[FH91, C.15]**.

### 8.10 Satz von Levi.

Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra. Die Lie-Algebra-Sequenz  $\text{Rad}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$  splittet, d.h. es existiert ein Lie-Algebra-Isomorphismus  $\sigma : \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$  auf eine (halbeinfache) Teil-Lie-Algebra  $\mathfrak{s}$  von  $\mathfrak{g}$  mit  $p \circ \sigma = \text{id}$ . Jede solche Teil-Lie-Algebra  $\mathfrak{s}$  heißt LEVI-TEILALGEBRA.

**Beweis.** O.B.d.A. existiert kein in  $\text{Rad } \mathfrak{g}$  enthaltenes nicht-triviales Ideal von  $\mathfrak{g}$ : Wäre nämlich  $\mathfrak{n}$  so ein Ideal, dann wäre  $(\text{Rad } \mathfrak{g})/\mathfrak{n} = \text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})$  nach **8.8.2** und  $(\text{Rad } \mathfrak{g})/\mathfrak{n} = \text{Rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}) \hookrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{n} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\text{Rad } \mathfrak{g}$  würde nach Induktion splitten. Sei  $\bar{\mathfrak{h}}$  eine Levi-Teilalgebra von  $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{h} := \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{h}})$  dessen Urbild unter  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ . Da  $\mathfrak{h}/\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{h}}$  halbeinfach ist, ist  $\mathfrak{n} = \text{Rad } \mathfrak{h}$  und nach Induktionsannahme besitzt  $\mathfrak{h}$  eine Levi-Teilalgebra, die dann auch Levi-Teilalgebra von  $\mathfrak{g}$  ist.

Folglich ist o.B.d.A.  $\text{Rad } \mathfrak{g}$  Abelsch, denn andernfalls wäre  $(\text{Rad } \mathfrak{g})'$  ein echtes charakteristisches Ideal in  $\text{Rad } \mathfrak{g}$  und damit auch in  $\mathfrak{g}$ . Weiters wäre  $[\mathfrak{g}, \text{Rad } \mathfrak{g}] = \text{Rad } \mathfrak{g}$ , denn  $[\mathfrak{g}, \text{Rad } \mathfrak{g}] = 0$  hätte zur Folge, daß  $\text{ad}$  über das halbeinfache  $\mathfrak{g}/\text{Rad } \mathfrak{g}$  faktorisiert und nach [8.9](#) hätte somit  $\text{Rad } \mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{g}$  ein Komplement als  $\mathfrak{g}$ -Modul und damit auch als Lie-Algebra.

Sei  $V := L(\mathfrak{g})$ . Für  $X \in \mathfrak{g}$  und  $T \in V$  sei  $X \cdot T := [\text{ad}(X), T] = \text{ad}(X) \circ T - T \circ \text{ad}(X)$ , d.h.  $(X \cdot T)(Y) := [X, TY] - T([X, Y])$  für alle  $Y \in \mathfrak{g}$ . Sei nun

$$W_0 := \{\text{ad}(X) : X \in \text{Rad } \mathfrak{g}\} \subseteq V,$$

$$W_1 := \{T \in V : T(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Rad } \mathfrak{g} \text{ und } T(\text{Rad } \mathfrak{g}) = 0\} \supseteq W_0 \text{ und}$$

$$W_2 := \{T \in V : T(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Rad } \mathfrak{g} \text{ und } T|_{\text{Rad } \mathfrak{g}} \in \mathbb{K} \cdot \text{id}\} \supseteq W_1.$$

Die  $W_i$  sind  $\mathfrak{g}$ -invariante Teilräume von  $V$ . Es ist  $W_2/W_1 \cong \mathbb{K}$  vermöge  $T \mapsto \lambda$  mit  $T|_{\text{Rad } \mathfrak{g}} = \lambda \cdot \text{id}$ , denn  $W_1 \neq W_2$ , da  $T \in V$  existiert mit  $T|_{\text{Rad } \mathfrak{g}} = \text{id}$  und 0 auf einem linearen Komplement.

Beh.:  $\mathfrak{g} \cdot W_2 \subseteq W_1$  und  $\text{Rad } \mathfrak{g} \cdot W_2 \subseteq W_0$ :

Sei  $T \in W_2$  mit  $\lambda \cdot \text{id} := T|_{\text{Rad } \mathfrak{g}}$ . Für  $X \in \mathfrak{g}$  und  $Y \in \text{Rad } \mathfrak{g}$  ist  $(X \cdot T)(Y) = [X, \lambda Y] - \lambda[X, Y] = 0$  und somit  $X \cdot T \in W_1$ .

Für  $X \in \text{Rad } \mathfrak{g}$  und  $Y \in \mathfrak{g}$  ist  $[X, TY] \in (\text{Rad } \mathfrak{g})' = 0$ , also  $(X \cdot T)(Y) = -T([X, Y]) = [-\lambda X, Y]$  und damit  $X \cdot T = \text{ad}(-\lambda X) \in W_0$ .

Also ist  $\varphi : W_2/W_0 \rightarrow W_2/W_1 \cong \mathbb{K}$  ein surjektiver  $\mathfrak{g}/\text{Rad } \mathfrak{g}$ -Modul Homomorphismus und splittet somit nach [8.9](#) da  $\mathfrak{g}/\text{Rad } \mathfrak{g}$  halbeinfach und  $\text{Ker } \varphi$  invariant ist, d.h. es existiert ein  $T \in W_2$  mit  $T|_{\text{Rad } \mathfrak{g}} = 1 \cdot \text{id}$  und  $\mathfrak{g} \cdot T \subseteq W_0$ . Dann ist  $\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} : X \cdot T = 0\}$  eine Lie-Teilalgebra von  $\mathfrak{g}$ . Es ist  $\mathfrak{h} \cap \text{Rad } \mathfrak{g} = 0$ , denn andernfalls existiert  $0 \neq X \in \mathfrak{h} \cap \text{Rad } \mathfrak{g}$  und damit ist  $0 = X \cdot T = \text{ad}(-X)$  wegen der Beh., d.h.  $[\mathfrak{g}, X] = 0$  und somit  $0 \neq \mathbb{K}X \subseteq \text{Rad } \mathfrak{g}$  eine Ideal in  $\mathfrak{g}$ , ein Widerspruch. Sei nun  $X \in \mathfrak{g}$  und damit  $X \cdot T \in W_0$ , also  $X \cdot T = \text{ad}(Y)$  für ein  $Y \in \text{Rad } \mathfrak{g}$ . Wegen der Beh. ist  $\text{ad}(Y) = -Y \cdot T$  und somit  $(X + Y) \cdot T = 0$ , also  $X + Y \in \mathfrak{h}$  und damit  $X = (X + Y) + (-Y)$  eine Zerlegung in  $\mathfrak{h} \times \text{Rad } \mathfrak{g}$ .  $\square$

### 8.11 Proposition.

Jede kurze exakte Sequenz  $\mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$  mit halbeinfachen  $\mathfrak{h}$  splittet.

**Beweis.** Sei

$$\mathfrak{n} \xhookrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \twoheadrightarrow_{\pi} \mathfrak{h}$$

kurz exakt und  $\mathfrak{k} = \prod_{i=1}^k \mathfrak{k}_i$  ein Levi-Komplement für  $\mathfrak{g}$  mit einfachen  $\mathfrak{k}_i \trianglelefteq \mathfrak{k}$ . Es ist  $\pi(\text{Rad } \mathfrak{g}) \trianglelefteq \mathfrak{h}$  auflösbar also 0 und somit  $\text{Rad } \mathfrak{g} \subseteq \text{Ker } \pi$  also  $\pi|_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{h}$  surjektiv, damit

$$\text{Ker}(\pi|_{\mathfrak{k}}) \xhookrightarrow{\iota} \mathfrak{k} \twoheadrightarrow_{\pi|_{\mathfrak{k}}} \mathfrak{h}$$

kurz exakt und  $\text{Ker } \pi|_{\mathfrak{k}} = \prod_{i \in I} \mathfrak{k}_i$  für eine Teilmenge  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$  nach [8.6](#). Also ist  $\mathfrak{h} \cong \prod_{i \notin I} \mathfrak{k}_i$  und die beiden exakten Sequenzen splitten vermöge

$$\mathfrak{h} \cong \prod_{i \notin I} \mathfrak{k}_i \hookrightarrow \prod_i \mathfrak{k}_i = \mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{g}. \quad \square$$

### 8.12 Die einfachen Lie-Algebren

Da jede Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  nach [8.10](#) ein semidirektes Produkt aus dem auflösbaren Ideal  $\text{Rad}(\mathfrak{g})$  und einer halbeinfachen (Levi-)Teilalgebra ist, und letzter nach [8.6](#) in ein direktes Produkt einfacher zerfällt, bleibt nur noch eine Klassifikation der einfachen Lie-Algebren anzugeben.

Die folgende Tabelle aller komplexen halbeinfachen Lie-Algebren  $\mathfrak{g}$  hat als Einträge die eingebürgerte Abkürzung für  $\mathfrak{g}$ , ihre Dimension  $\dim$ , eine zugehörige Lie-Gruppe  $G$ , die universellen Überlagerung  $\tilde{G}$  und deren Zentrum  $Z(\tilde{G})$ .

| Typ               | $\dim$    | $G$                                     | $\tilde{G}$                             | $Z(\tilde{G})$   |
|-------------------|-----------|---|---|--|
| $A_n$ ( $n > 0$ ) | $n(n+2)$  | $\mathrm{SL}_{\mathbb{C}}(n+1)$         | $\mathrm{SL}_{\mathbb{C}}(n+1)$         | $\mathbb{Z}_{n+1}$   |
| $B_n$ ( $n > 1$ ) | $n(2n+1)$ | $\mathrm{SO}_{\mathbb{C}}(2n+1)$        | $\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}(2n+1)$      | $\mathbb{Z}_2$   |
| $C_n$ ( $n > 2$ ) | $n(2n+1)$ | $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(2n)$          | $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(2n)$          | $\mathbb{Z}_2$   |
| $D_n$ ( $n > 3$ ) | $n(2n-1)$ | $\mathrm{SO}_{\mathbb{C}}(2n)$          | $\mathrm{Spin}_{\mathbb{C}}(2n)$        | $\begin{cases} \mathbb{Z}_4 & (n \equiv 0(2)) \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & (n \equiv 1(2)) \end{cases}$ |
| $E_6$             | 78        |   |   | $\mathbb{Z}_3$   |
| $E_7$             | 133       |   |   | $\mathbb{Z}_2$   |
| $E_8$             | 248       |   |   | 0  |
| $F_4$             | 52        |   |   | 0  |
| $G_2$             | 14        | $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ | $\mathrm{Aut}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ | 0  |

Dabei ist  $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$  die ALGEBRA DER OKTAVEN mit komplexen Koeffizienten, d.h. ein komplex 8-dimensionaler Vektorraum, mit folgender Multiplikation für die Basis  $(1, e_1, \dots, e_7)$ :

$$1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot e_i = e_i = e_i \cdot 1, e_i^2 = -1, e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i \text{ für } i \neq j, \\ e_1 = e_2 \cdot e_6 = e_3 \cdot e_4 = e_5 \cdot e_7, \text{ sowie zyklische Vertauschungen hiervon.}$$

Im Folgenden soll kurz skizziert werden, wie man diese Klassifizierung erhält.

### 8.13 Definition. Zerlegung in Wurzelräume.

Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra. Wir versuchen möglichst große Abelsche Teilalgebren  $\mathfrak{h}$  von  $\mathfrak{g}$  zu finden, welche via  $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathfrak{g})$  auf  $\mathfrak{g}$  diagonalisierbar wirken, für welche also eine Basis von Vektoren  $X \in \mathfrak{g}$  existiert mit  $\mathrm{ad}(H)X = \lambda(H)X$  für ein  $\lambda(H) \in \mathbb{C}$  zu jedem  $H \in \mathfrak{h}$ . Diese Teilalgebren heißen CARTAN-ALGEBREN. Für eine allgemeinere Definition im Falle nicht halbeinfacher nicht notwendig komplexer Lie-Algebren siehe [HN91, II.3.15]. Offensichtlich ist  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  linear und wir erhalten eine sogenannte WURZELRAUM-ZERLEGUNG

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_{\lambda} \text{ mit } \mathfrak{g}_{\lambda} := \left\{ X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \lambda(H)X \forall H \in \mathfrak{h} \right\}.$$

Die  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  mit  $\mathfrak{g}_{\lambda} \neq 0$  heißen WURZELN und die  $\mathfrak{g}_{\lambda}$  WURZELRÄUME. Wir schreiben  $R$  für die Menge der Wurzeln  $\lambda \neq 0$ . Für jede Wurzelraum-Zerlegung ist  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$ , da  $\mathfrak{h}$  Abelsch ist. Für  $H \in \mathfrak{h}$  ist weiters  $\mathfrak{g}_0 := \{X : [\mathfrak{h}, X] = 0\} \subseteq \{X : [H, X] = 0\} =: \mathrm{Ker} \mathrm{ad} H$ . Um also ein möglichst großes Abelsches und diagonalisierbar wirkendes  $\mathfrak{h}$  zu finden, sollten wir  $H \in \mathfrak{g}$  mit diagonalisierbaren  $\mathrm{ad}(H)$  und minimalem  $\dim \mathrm{Ker} \mathrm{ad} H$  suchen. Dazu definiert man den RANG von  $\mathfrak{g}$  als

$$\mathrm{rang}(\mathfrak{g}) := \min \left\{ \dim \mathrm{Ker} \mathrm{ad} H : H \in \mathfrak{g} \text{ und } \mathrm{ad}(H) \text{ halbeinfach} \right\}.$$

Ein Element  $H \in \mathfrak{g}$  mit halbeinfachen  $\mathrm{ad}(H)$  heißt REGULÄR, wenn  $\dim \mathrm{Ker} \mathrm{ad} H = \mathrm{rang}(\mathfrak{g})$ . Falls  $H$  regulär ist, so läßt sich nicht allzuschwer zeigen, daß  $\mathfrak{h} := \mathrm{Ker} \mathrm{ad} H$  eine Cartan-Algebra und  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$  ist und man kann weiters zeigen, daß jede Cartan-Teilalgebra von dieser Gestalt ist, siehe z.B. [FH91, D.3] oder [HN91, II.3.19].

### 8.14 Darstellungen von $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$

Für die folgenden einfachen Resultate betreffend Darstellungen  $\rho : \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow L(V)$  siehe z.B. [Kir08].

1. Die Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2) := \mathcal{L}(SL_{\mathbb{C}}(2))$  hat als Basis

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit  $[H, X] = 2X$ ,  $[H, Y] = -2Y$  und  $[X, Y] = H$ .

2. Es ist  $\mathfrak{h} := \mathbb{C} \cdot H$  eine Cartan-Teilalgebra von  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$ ,  $R = \{\pm 2\}$ ,  $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{C} \cdot X$  und  $\mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C} \cdot Y$ .
3. Die Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  ist einfach:  
Es ist  $\text{ad}(H)$  diagonalisiert bzgl.  $\{X, Y, H\}$ . Jedes Ideal ist invariant unter  $\text{ad}(H)$ , also eine Summe gewisser dieser Eigenräume. Falls es einen der Vektoren aus  $\{X, Y, H\}$  enthält, so auch alle anderen.
4. Die Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $\rho(H)$  heißen GEWICHTE und die Eigenvektoren GEWICHTSVEKTOREN.  
Sei  $V_{\lambda} := \{v : H \cdot v = \lambda v\}$  der Raum der Gewichtsvektoren zum Gewicht  $\lambda$ .
5.  $X \cdot V_{\lambda} \subseteq V_{\lambda+2}$ ,  $Y \cdot V_{\lambda} \subseteq V_{\lambda-2}$ , vgl. mit [8.15.1](#)
6.  $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$  (die Gewichtszersetzung):  
 $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  (halb-)einfach  $\Rightarrow$  Darstellungen sind vollständig reduzibel  $\Rightarrow$  o.B.d.A.  $V$  irreduzibel. Es ist  $\bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$  invariant, also gleich  $V$ .
7. Ein Gewicht  $\lambda$  heißt HÖCHSTES GEWICHT, falls  $\Re(\lambda)$  maximal ist.
8. Sei  $v \in V_{\lambda}$  ein höchster Gewichtsvektor.  
Dann ist  $X \cdot v = 0$  und mit  $v_k := \frac{1}{k!} Y^k v$  gilt für  $k \geq 0$ :  
 $Hv_k = (\lambda - 2k)v_k$ ,  $Yv_k = (k+1)v_{k+1}$ ,  $Xv_k = (\lambda - k + 1)v_{k+1}$  ( $k > 0$ ).
9. Sei  $V$  ein Vektorraum mit Basis  $v_0, \dots, v_n$ . Dann definieren die Formeln aus [8](#) eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  auf  $V$ . Jede irreduzible Darstellung ist isomorph zu so einer, siehe z.B. [\[Kir08, 5.6\]](#).
10. Folgerung: Für jede endlich dimensionale Darstellung von  $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  ist die Gewichtszersetzung  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ . Weiters sind  $X : V_n \rightarrow V_{-n}$  und  $Y : V_{-n} \rightarrow V_n$  Isomorphismen, siehe z.B. [\[Kir08, 5.7\]](#).

### 8.15 Grundlegende Eigenschaften der Zerlegung in Wurzelräume.

Man zeigt nun folgende elementare Eigenschaften:

1.  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^* \Rightarrow [\mathfrak{g}_{\lambda}, \mathfrak{g}_{\mu}] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ :  
 $X \in \mathfrak{g}_{\lambda}, Y \in \mathfrak{g}_{\mu} \Rightarrow$   
 $\text{ad}(H)[X, Y] = [\text{ad}(H)X, Y] + [X, \text{ad}(H)Y] = (\lambda(H) + \mu(H))[X, Y]$ .
2.  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*, \lambda + \mu \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda} \perp \mathfrak{g}_{\mu}$  (vgl. mit [7](#)):  
 $X \in \mathfrak{g}_{\lambda}, Y \in \mathfrak{g}_{\mu} \Rightarrow \text{ad}(X)\text{ad}(Y)\mathfrak{g}_{\nu} \subseteq \mathfrak{g}_{\nu+(\lambda+\mu)}$  wegen [1](#)  $\Rightarrow \text{ad}(X)\text{ad}(Y)$  ist nilpotent  $\Rightarrow 0 = \text{Spur}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = \kappa(X, Y)$ .
3.  $R := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} : \mathfrak{g}_{\lambda} \neq 0\}$  ist symmetrisch, d.h.  $\lambda \in R \Rightarrow -\lambda \in R$ :  
 $\lambda \in R, -\lambda \notin R \Rightarrow \mathfrak{g}_{\lambda} \perp \mathfrak{g}_{\mu} \forall \mu \in R$  nach [2](#), ein Widerspruch zu [8.5](#).
4.  $\kappa$  ist nicht-degeneriert auf  $\mathfrak{h}$ :  
 $\kappa$  nicht degeneriert auf  $\mathfrak{g}$  nach [8.5](#)  $\Rightarrow$  Für  $0 \neq H \in \mathfrak{h}$  existiert  $X \in \mathfrak{g}$  mit  $\kappa(H, X) \neq 0$  [2](#) o.B.d.A.  $X \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ .
5.  $\langle R \rangle = \mathfrak{h}^*$ , d.h.  $R$  trennt die Punkte in  $\mathfrak{h}$ :  
Sei  $H \in \mathfrak{h}$  mit  $\lambda(H) = 0 \forall \lambda \in R \Rightarrow [H, Y] = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}_{\lambda} \Rightarrow H \in Z(\mathfrak{g}) = 0$ .
6.  $X \in \mathfrak{g}_{\lambda}, Y \in \mathfrak{g}, H \in \mathfrak{h} \Rightarrow \kappa(H, [X, Y]) \stackrel{\text{8.1}}{=} \kappa([H, X], Y) = \lambda(H)\kappa(X, Y)$ .

7.  $\lambda \in R \Rightarrow [\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\lambda}] \neq 0$ :  
 Sei  $H \in \mathfrak{h}$  mit  $\lambda(H) \neq 0$  nach [5] und  $0 \neq X \in \mathfrak{g}_\lambda$ . Die rechte Seite von [6] kann wegen [8.5] nicht für alle  $Y$  verschwinden und wegen [2] ist o.B.d.A.  $Y \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ .
8.  $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^* \exists ! T_\lambda \in \mathfrak{h} \forall H \in \mathfrak{h} : \kappa(H, T_\lambda) = \lambda(H)$ .  
 Weiters ist  $[X, Y] = \kappa(X, Y)T_\lambda \forall X \in \mathfrak{g}_\lambda, Y \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ :  
 $\tilde{\kappa} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$  ist Iso nach [4]  $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathfrak{h}^* \exists ! T_\lambda : \kappa(H, T_\lambda) = \tilde{\kappa}(T_\lambda)(H) = \lambda(H)$ .  
 Für  $\forall H \in \mathfrak{h}$  gilt somit nach [6]:  

$$\kappa(H, \kappa(X, Y)T_\lambda) = \kappa(H, T_\lambda)\kappa(X, Y) = \lambda(H)\kappa(X, Y) = \kappa(H, [X, Y])$$
9.  $\lambda \in R \Rightarrow \lambda(T_\lambda) \neq 0$ :  
 Nach [7]  $\exists X \in \mathfrak{g}_\lambda, Y \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$  mit  $[X, Y] \neq 0 \Rightarrow [X, Y] = cT_\lambda$  mit  $c := \kappa(X, Y) \neq 0$  nach [8]  $\Rightarrow \mathfrak{s} := \langle \{X, Y, T_\lambda\} \rangle \leq \mathfrak{g}$ , denn  $[T_\lambda, X] = \lambda(T_\lambda)X$  und  $[T_\lambda, Y] = -\lambda(T_\lambda)Y$ . Angenommen  $\lambda(T_\lambda) = 0 \Rightarrow \mathfrak{s}' = \mathbb{K}T_\lambda \Rightarrow \mathfrak{s}$  auflösbar,  $0 \neq [X, Y] \in \mathfrak{s}' \Rightarrow \text{ad}([X, Y])$  nilpotent nach [7.34] und [7.19]  $\Rightarrow \text{ad}(T_\lambda)$  nilpotent,  $\text{ad}(T_\lambda)$  diagonalisiert bzgl.  $(X, Y, T_\lambda) \Rightarrow \text{ad}(T_\lambda) = 0 \Rightarrow T_\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ , ein Widerspruch.
10.  $\lambda \in R \Rightarrow \dim(\mathfrak{g}_\lambda) = 1$ :  
 Dies benötigt etwas Darstellungstheorie:  $\exists X \in \mathfrak{g}_\lambda, Y \in \mathfrak{g}_{-\lambda} : H := [X, Y] \neq 0, \lambda(H) = 2, \mathfrak{s} := \langle \{X, Y, H\} \rangle \cong \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  wirkt irreduzibel auf  $V := \mathbb{C}H \oplus \bigoplus_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{k\lambda}$ : Wegen  $\lambda(H) = 2$  ist die Gewichtszerlegung von  $V$  gegeben durch  $V_{2k+1} = 0, V_{2k} = \mathfrak{g}_{k\lambda}, V_0 = \mathbb{C}H$  nach [8.14.10]. Wegen  $\dim(V_0) = 1$  ist  $V$  irreduzibel.  
 Die Gewichtsräume jeder irreduziblen endl. dimensionalen Darstellung von  $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  sind 1-dimensional nach [8.14.9]
11.  $\lambda \in R \Rightarrow \mathfrak{s}_\lambda := \mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{g}_{-\lambda} + [\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\lambda}] \cong \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$ :  
 $\mathfrak{s}_\lambda$  ist eine Teilalgebra von  $\mathfrak{g}$ , da  $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\lambda}] \subseteq \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ . Wähle nun mittels [9] und [10] (Erzeuger)  $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$  und  $Y_\lambda \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$  mit  $0 \neq H_\lambda := [X_\lambda, Y_\lambda] \in \mathfrak{h}$  und  $\lambda(H_\lambda) = 2$ . Dann ist  $\mathfrak{s}_\lambda \cong \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$ .
12.  $\mu(H_\lambda) \in \mathbb{Z}$ , d.h. die Eigenwerte von  $\text{ad}(H_\lambda)$  sind ganzzahlig.  
 Dies folgt aus der Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$ :  $\mathfrak{s}_\lambda \cong \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  wirkt auf  $\mathfrak{g}$  und die Elemente in  $\mathfrak{g}_\mu$  haben  $\mu(H_\lambda)$  als Gewicht und diese sind für endlich dimensionale Darstellungen von  $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  alle ganzzahlig nach [8.14.10].
13.  $T_\lambda = \frac{2}{\kappa(H_\lambda, H_\lambda)} H_\lambda$ :

$$\begin{aligned} \kappa(H, H_\lambda) &:= \kappa(H, [X_\lambda, Y_\lambda]) \stackrel{[6]}{=} \lambda(H)\kappa(X_\lambda, Y_\lambda) \\ &\Rightarrow \kappa(H_\lambda, H_\lambda) = \lambda(H_\lambda)\kappa(X_\lambda, Y_\lambda) \stackrel{[11]}{=} 2\kappa(X_\lambda, Y_\lambda) \\ &\Rightarrow 0 \neq H_\lambda := [X_\lambda, Y_\lambda] \stackrel{[8]}{=} \kappa(X_\lambda, Y_\lambda)T_\lambda = \frac{\kappa(H_\lambda, H_\lambda)}{2} T_\lambda \end{aligned}$$

14. Ein inneres Produkt auf  $\mathfrak{h}^*$  ist definiert via dem Isomorphismus  $\lambda \mapsto T_\lambda, \mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$ : Also  $\langle \lambda, \mu \rangle := \kappa(T_\lambda, T_\mu)$ .
15.  $\lambda \in R, c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \Rightarrow c\lambda \notin R$ :  
 Dies folgt aus der Darstellungstheorie von  $\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  angewendet auf die Darstellung von  $\mathfrak{s}_\lambda$  auf  $\bigoplus_{c \in \mathbb{R}} \mathfrak{g}_{c\lambda}$ :  
 Es sei  $\mu := c\lambda \in R$  mit  $c \in \mathbb{C}$ . Nach [12] ist  $2c = \frac{2\langle \lambda, \mu \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} \in \mathbb{Z}$  und analog  $\frac{2}{c} \in \mathbb{Z}$ , also  $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}\}$ . Durch Austauschen der Wurzeln

und wenn nötig Ersetzen von  $\lambda$  durch  $-\lambda$  liefert  $c \in \{1, 2\}$ . Der Teilraum  $V := \mathbb{C}H_\lambda \oplus \bigoplus_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{k\lambda}$  ist eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{s}_\lambda$  nach [8.14.9](#) und nach [10](#) ist der Gewichtsraum  $V_2 = \mathfrak{g}_\lambda = \mathbb{C}X_\lambda$ , also  $\text{ad}(X_\lambda) = 0 : \mathfrak{g}_\lambda \rightarrow \mathfrak{g}_{2\lambda}$ . Nach [8.14.9](#) ist  $\text{Ker ad}(X_\lambda)$  der höchste Gewichtsraum, also hat  $V$  höchstes Gewicht 2 und somit  $V_4 = V_6 = \dots = 0$ , d.h.  $V = \mathfrak{g}_{-\lambda} \oplus \mathbb{C}H_\lambda \oplus \mathfrak{g}_\lambda$ , also nur  $\pm\lambda \in R$ . Insbesondere ist  $2\lambda \notin R$ .

16. Sei  $W_\lambda : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  die Spiegelung an der Hyperebene  $\mu^\perp$  (=Eigenraum zum Eigenwert 1 und  $W_\lambda(\lambda) = -\lambda$ , d.h.  $W_\lambda(v) = v - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$  nach [1.15](#)).

Dann ist  $n_{\lambda, \mu} := \frac{2\langle \mu, \lambda \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} \lambda = \frac{2\mu(H_\lambda)}{\lambda(H_\lambda)} \lambda = \mu(H_\lambda) \in \mathbb{Z}$ :

$$2 \frac{\langle \mu, \lambda \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} \stackrel{\text{14}}{=} 2 \frac{\kappa(T_\lambda, T_\mu)}{\kappa(T_\lambda, T_\lambda)} \stackrel{\text{8}}{=} 2 \frac{\mu(T_\lambda)}{\lambda(T_\lambda)} \stackrel{\text{13}}{=} 2 \frac{\mu(H_\lambda)}{\lambda(H_\lambda)} \stackrel{\text{11}}{=} \mu(H_\lambda)$$

17. Die von  $\{W_\lambda : 0 \neq \lambda \in R\}$  erzeugte Gruppe  $W$  heißt WEYL-GRUPPE von  $\mathfrak{g}$ . Die Weyl-Gruppe permutiert die Wurzeln, d.h.  $W_\lambda(R) \subseteq R$ : Falls  $n := \mu(H_\lambda) \geq 0$ , dann haben die Element von  $\mathfrak{g}_\mu$  Gewicht  $n$  bzgl. der Wirkung von  $\mathfrak{s}_\lambda$ . Nach [8.14.10](#) wirkt  $\text{ad}(Y_\lambda)^n$  als Isomorphismus vom Gewichtsraum zu  $n$  auf jenen zu  $-n$ . Für  $0 \neq v \in \mathfrak{g}_\mu$  ist somit  $0 \neq \alpha(Y_\lambda)^n v \in \mathfrak{g}_{\mu-n\lambda}$ , also  $W_\lambda(\mu) = \mu - n\lambda \in R$ . Der Fall  $n \leq 0$  geht analog.

### 8.16 Wurzelsysteme

Zusammenfassend erhalten wir folgendes für die Menge  $R$  der Wurzeln:

1.  $R$  ist ein endliches Erzeugendensystem eines euklidischen Raums (siehe [8.15.5](#)).
2.  $\lambda \in R, c \in \mathbb{C} \Rightarrow c\lambda \in R \Leftrightarrow c \in \{\pm 1\}$  (siehe [8.15.15](#)).
3. Für  $\lambda, \mu \in R$  ist  $n_{\lambda\mu} := 2 \frac{\langle \alpha, \mu \rangle}{\langle \mu, \mu \rangle} \in \mathbb{Z}$  (siehe [8.15.12](#) und [8.15.16](#)).
4. Für  $\lambda \in R$  sei  $W_\lambda : v \mapsto v - 2 \frac{\langle v, \lambda \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} \lambda$ . Dann ist  $W_\lambda(R) \subseteq R$  (siehe [8.15.17](#)).

Achtung ([1](#)), ([3](#)), ([4](#)),  $\lambda, c\lambda \in R \Rightarrow c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}\}$ , aber nicht  $c \neq \pm \frac{1}{2}$ , siehe [Kir08, 8.2](#).

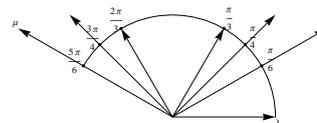
Allein aus diesen 4 Eigenschaften [1](#)–[4](#) (eines sogenannten abstrakten WURZEL-SYSTEMS  $R \subseteq V$ ) erhalten wir weiters:

5. Für  $\lambda, \mu \in R$  sei  $\vartheta := \angle \lambda \mu$ . Nach [3](#) ist dann

$$2 \cos(\vartheta) \frac{\|\mu\|}{\|\lambda\|} = 2 \frac{\langle \lambda, \mu \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle} =: n_{\lambda, \mu} \in \mathbb{Z}$$

und somit  $n_{\lambda, \mu} n_{\mu, \lambda} = 4 \cos^2(\vartheta) \in \mathbb{Z} \cap [0, 4]$ . Also gibt es nur folgende Fälle, wobei wir o.B.d.A.  $\|\mu\| \geq \|\lambda\|$  voraussetzen:

| $\cos \vartheta$         | $\vartheta$                        | $\frac{\ \mu\ }{\ \lambda\ }$ | $n_{\lambda, \mu}$ | $n_{\mu, \lambda}$ |
|--------------------------|------------------------------------|-------------------------------|--------------------|--------------------|
| $\pm 1$                  | $\pi(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2})$ | 1                             | $\pm 2$            | $\pm 2$            |
| $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\pi(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{3})$ | $\sqrt{3}$                    | $\pm 3$            | $\pm 1$            |
| $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\pi(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{4})$ | $\sqrt{2}$                    | $\pm 2$            | $\pm 1$            |
| $\pm \frac{1}{2}$        | $\pi(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{6})$ | 1                             | $\pm 1$            | $\pm 1$            |
| 0                        | $\pi \frac{1}{2}$                  | *                             | 0                  | 0                  |



Bis auf den ersten Fall gibt es bis auf Vorzeichen nur eine Zerlegung  $n_{\lambda\mu}n_{\mu\lambda}$  in ganze Zahlen. Im ersten Falls ist die andere mögliche Zerlegung ausgeschlossen, denn dann wäre  $\pm 4 = n_{\lambda\mu} = 2 \frac{\|\mu\|}{\|\lambda\|}$ , also  $\mu = \pm 2\lambda$ , ein Widerspruch zu [2].

6.  $\lambda, \mu \in R, \lambda \neq \pm\mu, \langle \mu, \lambda \rangle \leq 0 \Rightarrow \lambda \pm \mu \in R$ :  
 $\langle \mu, \lambda \rangle > 0 \Rightarrow n_{\lambda\mu} > 0 \Rightarrow n_{\lambda\mu} = 1$  nach [5]  $\Rightarrow W_\mu(\lambda) = \lambda + n_{\lambda\mu}\mu = \lambda - \mu \in R$   
nach [4] (oder  $W_\lambda(\mu) = \mu + n_{\mu\lambda}\lambda = \mu - \lambda \in R$ ). Für  $\langle \mu, \lambda \rangle < 0$  ersetze  $\lambda$  durch  $-\lambda$ .
7.  $\lambda, \mu \in R, \lambda \neq \pm\mu, p, q \in \mathbb{N}$  maximal mit  $\lambda - p\mu, \lambda + q\mu \in R \Rightarrow p - q = n_{\lambda\mu}$ :  
 $W_\mu(\lambda) = \lambda - n_{\lambda\mu}\mu \Rightarrow \lambda - p\mu = W_\mu(\lambda + q\mu) = (\lambda - n_{\lambda\mu}\mu) - q\mu \Rightarrow p = n_{\lambda\mu} + q$ .
8.  $\lambda, \mu \in R$  und  $p, q \in \mathbb{N}$  wie in [7]  $\Rightarrow \lambda + j\mu \in R$  für alle  $-p \leq j \leq q$ :  
Indirekt: Sei  $-p \leq r < s \leq q$  mit  $\lambda + r\mu, \lambda + s\mu \in R, \lambda + (r+1)\mu, \lambda + (s-1)\mu \notin R$ . Dann ist  $\langle \mu, \lambda + r\mu \rangle \geq 0$  und  $\langle \mu, \lambda + s\mu \rangle \leq 0$  nach [6] und somit  
 $0 \geq \langle \mu, \lambda + s\mu \rangle = \langle \mu, \lambda \rangle + s\langle \mu, \mu \rangle > \langle \mu, \lambda \rangle + r\langle \mu, \mu \rangle = \langle \mu, \lambda + r\mu \rangle \geq 0$ .

### Positive und einfache Wurzeln

9. Wegen  $\lambda \in R \Rightarrow -\lambda \in R$  wählt man ein lineares Funktional auf  $\mathfrak{h}^*$  welches auf  $R$  nicht verschwindet und nennt die Wurzeln welche auf positive Werte abgebildet werden POSITIVE WURZELN. Und wir schreiben  $R_+$  für die Menge aller positiver Wurzeln. Mit  $R_- := -R_+$  ist  $R = R_- \sqcup R_+$ .  
Eine positive Wurzel heißt EINFACH, falls sie nicht Summe zweier positiver Wurzeln ist.
10.  $\lambda - \mu \notin R$  für alle einfachen Wurzeln  $\lambda \neq \mu$ :  
 $\lambda = \mu + (\lambda - \mu) \Rightarrow \lambda - \mu \notin R_+, \mu = \lambda + (\mu - \lambda) \Rightarrow \mu - \lambda \notin R_+ \Rightarrow \lambda - \mu \notin R = R_+ \cup R_-$ .
11.  $\angle \lambda\mu \geq \pi/2$  für alle einfachen Wurzeln  $\lambda, \mu$ :  
Das folgt aus [6] und [10]:  $\angle \lambda\mu < \pi/2 \Leftrightarrow \cos(\angle \lambda\mu) > 0 \Leftrightarrow \langle \lambda, \mu \rangle > 0$ .
12. Die einfachen Wurzeln bilden eine Basis von  $\mathfrak{h}^*$  und jede positive Wurzel ist eine eindeutige Linearkombination mit Koeffizienten in  $\mathbb{N}$  der einfachen Wurzeln:  
Lineare Unabhängigkeit: Diese liegen auf einer Seite einer Hyperebene und bilden stumpfe Winkel nach [11], sind somit linear unabhängig, andernfalls wäre  $\sum_{i \leq k} n_i \lambda_i =: v = \sum_{i > k} n_i \lambda_i$  mit  $n_i \geq 0$ . Dann ist  $\langle v, v \rangle = \sum_{i \leq k < j} n_i n_j \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle \leq 0$  also  $v = 0$ , liegt aber auf der selben Seite der Hyperebene wie die  $\lambda_i$ .  
Mittels Induktion folgt, daß jede positive Wurzel ganzzahlige Linearkombination von einfachen Wurzeln ist, denn sei  $\lambda \in R_+ := \{\mu \in R : \varphi(\mu) > 0\}$  nicht so zerlegbar mit minimalen  $\varphi(\lambda)$ . Falls  $\lambda$  nicht einfach ist, so existieren  $\lambda_1, \lambda_2 \in R_+$  mit  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  und somit  $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_1) + \varphi(\lambda_2) > \varphi(\lambda_i) > 0$ , also  $\lambda_i$  zerlegbar und damit auch  $\lambda$ .

### Dynkin-Diagramm

13. Das DYNKIN-DIAGRAMM des Wurzelsystems erhält man, wenn man für jede einfache Wurzel einen Knoten zeichnet, und je zwei Knoten mit  $n$ -Kanten verbindet (für  $n \geq 2$  vom größeren zum kleineren Eigenwert), wobei  $n = 0, 1, 2, 3$  falls der Winkel zwischen den beiden Wurzeln  $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$  ist (spitze Winkel können nicht auftreten, siehe [11]).

14. Die halbeinfache Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist genau dann einfach, wenn das Wurzelsystem irreduzibel ist, d.h. heißt nicht orthogonale Summe zweier Wurzelsysteme ist (siehe z.B. [FH91, Exercise 21.6, S.322]). Und dies ist genau dann der Fall, wenn das Dynkin-Diagramm zusammenhängend ist, siehe z.B. [FH91, Theorem 21.11, S.325]).
15. Die zusammenhängenden Dynkin-Diagramme lassen sich nun leicht mittels Euklidischer Geometrie wie folgt klassifizieren (siehe z.B. [FH91, §21.2]):

$$(A_n) \quad \circ - \circ - \dots - \circ - \circ$$

$$(B_n) \quad \circ - \circ - \dots - \circ \rightrightarrows \circ$$

$$(C_n) \quad \circ - \circ - \dots - \circ \leftrightsquigarrow \circ$$

$$(D_n) \quad \circ - \circ - \dots - \circ \begin{array}{l} / \circ \\ \backslash \circ \end{array}$$

$$(E_6) \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array}$$

$$(E_7) \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array}$$

$$(E_8) \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array}$$

$$(F_4) \quad \circ - \circ \rightrightarrows \circ - \circ$$

$$(G_2) \quad \circ \rightrightarrows \circ$$

### 8.17 Rekonstruktion der Lie-Algebra aus dem Dynkin-Diagramm

1. Jede positive Wurzel  $\lambda$  ist Linearkombination  $\sum_i m_i \lambda_i$  der einfachen Wurzeln  $\lambda_i$  mit Koeffizienten  $m_i \in \mathbb{N}$  welche aus dem Dynkin-Diagramm bestimmt

werden können:

$(\sum_i m_i = 2)$   $2\lambda_i \notin R$  nach [8.16.2](#);  $\lambda_i + \lambda_j \in R \Leftrightarrow \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle < 0$  nach [8.16.6](#).  
 $(\sum_i m_i > 2)$   $\lambda + \lambda_i = \lambda_i + \sum_j m_j \lambda_j$ : Betrachte  $\lambda - p\lambda_i, \dots, \lambda, \dots, \lambda + q\lambda_i$  wie in [8.16.6](#). Es ist  $p \leq m_i$  und  $\lambda - p\lambda_i \in R_+$  und  $p$  nach Induktionsannahme bekannt. Weiters ist  $q = p - n_{\lambda, \lambda_i}$  nach [8.16.7](#). Also  $\lambda + \lambda_i \in R \Leftrightarrow p > n_{\lambda, \lambda_i} = 2 \frac{\langle \lambda, \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i, \lambda_i \rangle} = \sum_j m_j n_{\lambda_j, \lambda_i}$ . Jede positive Wurzel kann so erhalten werden, denn sei  $\lambda = \sum_i r_i \lambda_i$  mit  $\sum_i r_i = m + 1$ . Wegen  $0 < \langle \lambda, \lambda \rangle = \sum_i r_i \langle \lambda, \lambda_i \rangle$  existiert ein  $i$  mit  $\langle \lambda, \lambda_i \rangle > 0$  und nach [8.16.6](#) ist  $\lambda - \lambda_i$  eine Wurzel.

2.  $\lambda, \mu, \lambda + \mu \in R \Rightarrow [\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] = \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ :

Folgt aus der Darstellungstheorie von  $\mathfrak{s}_\lambda$  auf  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\mu+k\lambda}$ :

Da  $\mathfrak{s}_\lambda$  irreduzibel auf  $V := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\mu+k\lambda}$  wirkt ist nach [8.14.9](#) für  $0 \neq v \in V_k$  mit  $V_{k+2} \neq 0$  auch  $\text{ad}(X_\lambda) \cdot v \neq 0$ , also  $[X_\lambda, Y_\lambda] \neq 0$ .

3. Sei  $T_i$  die Basis von  $\mathfrak{h}$  welche via  $\kappa$  den einfachen Wurzeln  $\lambda_i$  entspricht. Sei  $H_i := \frac{2}{\langle \lambda_i, \lambda_i \rangle} T_i$ ,  $0 \neq X_i \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$  und  $Y_i \in \mathfrak{g}_{-\lambda_i}$  mit  $[X_i, Y_i] = H_i$ . Nach [2](#) und wegen  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  wird dann  $\mathfrak{g}$  als Lie-Algebra von  $\{X_i, Y_i, H_i : i\}$  erzeugt. Sei  $\lambda \in R_+$ , also  $\lambda = \sum_{j=1}^r \lambda_{i_j}$  mit  $\sum_{j=1}^s \lambda_{i_j} \in R$  für alle  $s \leq r$  (Siehe im Bew. von [1](#)). Definiere  $X_\lambda := [X_{i_r}, [\dots, [X_{i_1}, X_{i_0}] \dots]]$  und  $Y_\lambda := [Y_{i_r}, [\dots, [Y_{i_1}, Y_{i_0}] \dots]]$ . Dann ist  $\{X_\lambda, Y_\lambda : \lambda \in R_+\} \cup \{H_i : i\}$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$  als Vektorraum.

4. Hat man zwei solche Darstellungen von  $\lambda \in R_+$  so unterscheiden sich die entsprechenden  $X_\lambda$  nur um einen aus dem Dynkin-Diagramm bestimmbaren rationalen Faktor:  
Für  $I = (i_r, \dots, i_0)$  sei  $X_I := [X_{i_r}, \dots, [X_{i_1}, X_{i_0}] \dots]$ . Sei  $k = i_r$  und  $J = (j_r, \dots, j_0)$ . Es ist  $X_J = q_1 \cdot [X_k, [Y_k, X_J]]$  mit einem  $0 \neq q_1 \in \mathbb{Q}$  welches aus dem Dynkin Diagramm bestimmbar ist, denn  $\lambda_J - \lambda_k = \lambda_I - \lambda_k$  ist eine Wurzel und die Wirkung von  $\mathfrak{s}_{\lambda_k} \cong \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2)$  auf  $\bigoplus_i \mathfrak{g}_{\lambda_J + i\lambda_k}$  ergibt sich aus der Dimension (=Länge dieser Folge= $n_{\lambda_k, \lambda_J}$  nach [8.16.7](#)). Sei  $s$  maximal mit  $j_s = k$ . Für  $K = (j_{s-1}, \dots, j_0)$  ist dann

$$[Y_k, X_J] = [X_{j_r}, \dots, [X_{j_{s+1}}, [Y_k, [X_k, X_K]]] \dots],$$

denn  $[Y_k, [X_i, Z]] = [X_i, [Y_k, Z]]$  für  $i \neq k$ . Da  $\lambda_K + \lambda_k$  eine Wurzel ist, ist  $[Y_k, [X_k, X_K]] = q_2 \cdot X_K$  und somit

$$X_J = q_1 q_2 \cdot [X_k, [X_{j_r}, \dots, [X_{j_{s+1}}, X_K]] \dots]$$

Nach Induktion nach der Länge  $r$  ist  $X_{(i_{r-1}, \dots, i_0)} = X_{(j_r, \dots, j_{s+1}, j_{s-1}, \dots, j_0)}$ .

5. Die Lie-Klammer zweier Elemente obiger Basis ist bis auf einen aus dem Dynkin-Diagramm bestimmbaren rationalen Faktor Element dieser Basis:  
Für  $[X_\lambda, X_\mu]$  folgt dies aus [4](#) und analog für  $[Y_\lambda, Y_\mu]$ . Für  $[Y_\lambda, X_\mu]$  betrachte  $[Y_i, X_\mu]$  wie im Beweis von [4](#).
6. Umgekehrt läßt sich zu jedem Dynkin-Diagramm eine endlich dimensionale halbeinfache Lie-Algebra konstruieren: Dazu betrachtet man die freie Lie-Algebra mit Erzeugern  $H_i, X_i, Y_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und dividiert (nach

[Ser87]) das Ideal heraus, welches durch folgende Relationen gegeben ist:

$$\begin{aligned}
 [X_i, Y_j] &= 0 \text{ f\"ur } i \neq j \\
 [X_i, Y_i] &= H_i \\
 [H_i, H_j] &= 0 \\
 [H_i, X_j] &= n_{j,i} X_j \text{ f\"ur } i \neq j \\
 [H_i, Y_j] &= -n_{j,i} Y_j \text{ f\"ur } i \neq j \\
 [X_i, X_j] &= 0 = [Y_i, Y_j] \text{ falls } n_{i,j} = 0 \\
 [X_i, [X_i, X_j]] &= 0 = [Y_i, [Y_i, Y_j]] \text{ falls } n_{i,j} = 1 \\
 [X_i, [X_i, [X_i, X_j]]] &= 0 = [Y_i, [Y_i, [Y_i, Y_j]]] \text{ falls } n_{i,j} = 2 \\
 [X_i, [X_i, [X_i, [X_i, X_j]]]] &= 0 = [Y_i, [Y_i, [Y_i, [Y_i, Y_j]]]] \text{ falls } n_{i,j} = 3
 \end{aligned}$$

Die Cartan-Teilalgebra ist von den  $H_i$  erzeugt und deren Wurzelsystem ist jenes des Dynkin-Diagramms, siehe z.B. [FH91, 337] oder [Kir08, 8.52].

### 8.18 Klassifikation der reellen einfachen Lie-Algebren.

Aus der Klassifizierung der komplexen einfachen Lie-Algebren läßt sich auch eine der reellen einfachen Lie-Algebren erhalten:

Und zwar ist die Komplexifizierung jeder (halb)einfachen reellen Lie-Algebra eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra (siehe z.B. [Tit83, S.217, Lemma 2]). Erstere heißt dann REELLE FORM der letzteren. Jede reelle einfach Lie-Algebra ist entweder eine reelle Form oder die zugrundeliegende reelle Lie-Algebra einer komplexen einfachen Lie-Algebra (siehe z.B. [Tit83, S.217, Satz 3]).

A. Weil hat gezeigt: wenn von zwei lokal isomorphen, zusammenhängenden reellen Lie-Gruppen mit halbeinfacher Lie-Algebra eine kompakt ist, dann auch die andere. Kompaktheit ist also eine lokale Eigenschaft halbeinfacher Lie-Algebren, und es kann gezeigt werden, daß zu jeder komplexen halbeinfachen Lie-Algebra genau eine kompakte reelle Form existiert.

Die folgende Tabelle listet alle reellen Formen der einfachen komplexen Lie-Algebren auf (siehe z.B. [Tit83, S.225]):

|                    | $G$                     | ist reelle Form von      | kompakte Form ist |
|--------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------|
| $n > 1$            | $SL(n)$                 | $A_{n-1}$                | —                 |
| $n > 1, 2k \leq n$ | $SU(n, k)$              | $A_{n-1}$                | $SU(n)$           |
| $n > 0$            | $SL_{\mathbb{H}}(n)$    | $A_{2n-1}$               | —                 |
| $n > 1$            | $SL_{\mathbb{C}}(n)$    | $A_{n-1} \times A_{n-1}$ | —                 |
| $n > 1, k \leq n$  | $SO(2n+1, k)$           | $B_n$                    | $SO(2n+1)$        |
| $n > 1$            | $SO_{\mathbb{C}}(2n+1)$ | $B_n \times B_n$         | —                 |
| $n > 2$            | $Sp(2n)$                | $C_n$                    | —                 |
| $n > 2, 2k \leq n$ | $Q(n, k)$               | $C_n$                    | $Q(n)$            |
| $n > 2$            | $Sp_{\mathbb{C}}(2n)$   | $C_n \times C_n$         | —                 |
| $n > 3, k \leq n$  | $SO(2n, k)$             | $D_n$                    | $SO(2n)$          |
| $n > 3$            | $Q_-(n)$                | $D_n$                    | —                 |
| $n > 3$            | $SO_{\mathbb{C}}(2n)$   | $D_n \times D_n$         | —                 |
| $k = 1, \dots, 6$  |                         | $E_6$                    |                   |
| $k = 1, \dots, 5$  |                         | $E_7$                    |                   |
| $k = 1, \dots, 4$  |                         | $E_8$                    |                   |
| $k = 1, \dots, 4$  |                         | $F_4$                    |                   |
| $k = 1, \dots, 3$  |                         | $G_2$                    |                   |

Dabei wurde wieder folgende Bezeichnungsweise verwendet:

$$\begin{aligned}
SO_{\mathbb{C}}(n) &:= \{A \in GL_{\mathbb{C}}(n) : A^t A = 1, A^t J A = J\} \\
Sp(2n) &:= \{A \in GL(2n) : A^t J A = J\} \\
Sp_{\mathbb{C}}(2n) &:= \{A \in GL_{\mathbb{C}}(2n) : A^t J A = J\} \\
SO(n, k) &:= \{A \in SL(n) : A^t J_k A = J_k\} \\
SU(n, k) &:= \{A \in SL_{\mathbb{C}}(n) : A^t J_k \bar{A} = J_k\} \\
Q(n, k) &:= \{A \in GL_{\mathbb{H}}(n) : A^t J_k \bar{A} = J_k\} \\
Q_-(n) &:= \{A \in GL_{\mathbb{H}}(n) : A^t \alpha \bar{A} = \alpha\} \\
J &= \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ -\text{id} & 0 \end{pmatrix}; \quad J_k = \begin{pmatrix} \text{id}_{n-k} & 0 \\ 0 & -\text{id}_k \end{pmatrix}; \quad \alpha = i \cdot \text{id}
\end{aligned}$$

### 8.19 Definition. Halbeinfache Lie-Gruppen.

Naheliegenderweise übersetzt man nun die Eigenschaft (halb-)einfach zu sein von Lie-Algebren auf Lie-Gruppen durch:

Eine Lie-Gruppe heißt HALBEINFACH falls ihre Lie-Algebra halbeinfach ist, oder äquivalent falls sie keine zusammenhängende auflösbare Normalteiler besitzt.

Eine Lie-Gruppe heißt EINFACH falls ihre Lie-Algebra einfach ist, oder äquivalent sie nicht-Abelsch ist und keine nicht-trivialen zusammenhängenden Normalteiler besitzt.

## 9. Weiterführendes

Wir wollen abschließend exemplarisch ein paar Themen angeben, die für ein weitergehendes Studium der Lie-Theorie interessant sein könnten.

Wir haben in [1.9](#) Gram-Schmidt Orthonormalisierung und Polarzerlegung verwendet um  $GL(n)$  als Produkt von  $O(n)$  und  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  darzustellen. Dies ist auf halbeinfache Lie-Gruppen verallgemeinerbar:

### 9.1 Definition.

Sei  $\mathfrak{g}$  eine reelle halbeinfache Lie-Algebra mit Killing-Form  $\kappa$ . Eine CARTAN-INVOLUTION von  $\mathfrak{g}$  ist ein Automorphismus  $\tau$  von  $\mathfrak{g}$  mit  $\tau^2 = \text{id}$  und so, daß  $\kappa$  auf den Eigenräumen zu  $+1$  negativ und zu  $-1$  positiv definit ist.

### 9.2 Theorem. Cartan-Zerlegung.

Sei  $G$  eine reelle halbeinfache zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann existiert eine Cartan-Involution  $\tau$  von  $\mathfrak{g}$ . Sei  $\mathfrak{k} := \{X \in \mathfrak{g} : \tau(X) = X\}$ ,  $\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} : \tau(X) = -X\}$  und  $K := \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$ . Dann ist  $(k, P) \mapsto k \exp(P)$  ein Diffeomorphismus  $K \times \mathfrak{p} \cong G$  und  $K = N_G(K)$ . Jede kompakte Untergruppe ist in einer zu  $K$  konjugierten Untergruppe enthalten.

Für einen Beweis siehe [\[HN91, III.6.7 und III.6.21\]](#).

### 9.3 Theorem. Iwasawa-Zerlegung.

Sei  $\mathfrak{g}$  eine reelle halbeinfache Lie-Algebra,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  eine Cartan-Zerlegung,  $\mathfrak{a}$  eine maximal Abelsche Teilalgebra von  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{g}_{\lambda} := \{X \in \mathfrak{g} : [Z, X] = \lambda(Z)X \forall Z \in \mathfrak{a}\}$  für  $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ ,  $\Delta := \{0 \neq \lambda \in \mathfrak{a}^* : \mathfrak{g}_{\lambda} \neq 0\}$  die Wurzeln,  $\Delta^+$  die positiven Wurzeln,  $\mathfrak{n} := \sum_{\lambda \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\lambda}$  und  $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ . Dann ist  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{n}$  nilpotent,  $\mathfrak{b}$  auflösbar.

Sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ ,  $K := \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$ ,  $A := \exp \mathfrak{a}$  und  $N := \exp \mathfrak{n}$ . Dann ist  $(k, a, n) \mapsto kan$  ein Diffeomorphismus  $K \times A \times N \rightarrow G$  und  $A$  und  $N$  sind einfach zusammenhängende Gruppen.

Sei  $B := \langle \exp \mathfrak{b} \rangle$ ,  $P := \exp \mathfrak{p}$  und  $\vartheta : G \rightarrow G$ ,  $k \exp(P) \mapsto k \exp(-P)$  die Cartan-Involution von  $G$ . Dann ist  $b \mapsto \vartheta(b)b^{-1}$ ,  $B \rightarrow P$  ein Diffeomorphismus.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.6.32 und III.6.33]

#### 9.4 Definition. Kompakte Lie-Algebren.

In umgekehrter Vorgehensweise zu halbeinfachen Objekten übersetzt man die Eigenschaft kompakt zu sein von Lie-Gruppen auf Lie-Algebren durch:

Ein Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt KOMPAKT, wenn eine positiv definite invariante Form existiert.

Ein Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt REDUKTIV, wenn sie direkte Summe einer Abelschen und einer halbeinfachen Lie-Algebra ist.

Kompakte Lie-Algebren sind reduktiv, siehe [HN91, III.5.2].

Wir haben bereits erwähnt, daß kompakte reelle Formen der halbeinfachen Lie-Algebren eine besondere Rolle spielen. Einige Sätze in diesen Zusammenhang sind z.B.:

#### 9.5 Satz.

Für Lie-Algebren  $\mathfrak{g}$  sind äquivalent:

1.  $\mathfrak{g}$  ist kompakt;
2.  $\mathfrak{g} = \mathcal{L}G$  für eine kompakte Lie-Gruppe  $G$ ;

Für einen Beweis siehe [HN91, III.5.4].

#### 9.6 Theorem.

Sei  $G$  eine zusammenhängende halbeinfache Lie-Gruppe und  $\mathcal{L}G$  kompakt. Dann ist  $G$  kompakt und  $Z(G)$  endlich.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.5.13].

#### 9.7 Lemma.

Die Cartan-Algebren einer kompakten Lie-Algebra sind genau die maximal Abelschen Unterhalbgebren. Je zwei Cartan-Algebren sind zueinander konjugiert.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.5.15].

#### 9.8 Proposition. Maximale Tori kompakter Lie-Gruppen.

Sei  $G$  eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe.

1. Die Lie-Algebren der maximalen Tori sind genau die Cartan-Algebren von  $\mathcal{L}G$ .
2. Je zwei maximale Tori sind zueinander konjugiert.
3. Die maximalen Tori überdecken  $G$ .

Für einen Beweis siehe [HN91, III.5.16].

#### 9.9 Folgerung.

Für zusammenhängende Lie-Gruppen mit kompakter Lie-Algebra ist  $\exp$  surjektiv.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.5.17].

**9.10 Folgerung.**

Das Zentrum jeder zusammenhängenden kompakten Lie-Gruppe ist der Durchschnitt der maximalen Tori.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.5.18].

**9.11 Satz von Scheerer.**

Jede zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe besitzt einen Torus  $A \subseteq G$  so, daß  $G = G' \times A$ .

Für einen Beweis siehe [HN91, III.5.19].

**9.12 Hauptsatz über maximal kompakte Untergruppen.**

Jede zusammenhängende Lie-Gruppe  $G$  enthält eine kompakte Untergruppe  $K$  so, daß jede kompakte Untergruppe in einer zu  $K$  konjugierten Gruppe enthalten ist.  $K$  ist zusammenhängend und maximal kompakt.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.7.3].

**9.13 Folgerung.**

Die maximalen Tori jeder zusammenhängenden Lie-Gruppe sind zueinander konjugiert.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.7.4].

**9.17 Theorem.**

Sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe,  $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$  eine maximal kompakt eingebettete Teil-Lie-Algebra,  $K := \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$  und  $T \subseteq K$  eine maximal kompakte Untergruppe in  $K$ . Dann ist  $T$  maximal kompakt in  $G$  und es existiert eine abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^m \cong M \subseteq G$  so, daß  $(x, y) \mapsto xy$  ein Diffeomorphismus  $M \times T \cong G$  ist.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.7.21].

Eine Antwort auf die Frage welche Lie-Gruppen denn Matrizen Gruppen sind liefert:

**9.18 Proposition.**

Eine zusammenhängende Lie-Gruppe  $G$  besitzt genau dann eine endlich-dimensionale treue Darstellung, wenn  $G \cong B \times H$  mit einfach zusammenhängenden auflösbaren  $B$  und reductiven  $H$  ist.

Für einen Beweis siehe [HN91, III.10.8].

Wie wir bei den halbeinfachen Objekten schon gesehen haben spielen Darstellungen eine große Rolle, siehe dazu [FH91].

In Analogie zur Kohomologie von Gruppen, die wir in [A.7] und [A.10] angerissen haben, kann man die (Chevalley-)KOHOMOLOGIE EINER LIE-ALGEBREN bzgl. einer Darstellung definieren und dafür u.a. folgendes zeigen:

**9.19 Lemmas von Whitehead.**

Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Lie-Algebra und  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow L(V)$  eine Darstellung. Dann gilt:

1.  $H_\rho^1(\mathfrak{g}) = 0$ .
2.  $H_\rho^2(\mathfrak{g}) = 0$ .

Für einen Beweis siehe [HN91, II.5.13 und II.5.14].

Die Lie-Algebra von Matrizen­gruppen haben wir in [3.9](#) über den Kommutator der assoziativen Algebra  $L(n)$  beschrieben. Es drängt sich also die Frage auf, ob jede Lie-Algebra auf diese Weise durch eine assoziative Lie-Algebra beschrieben werden kann, d.h. man sucht einen universellen Pfeil für den Funktor, der assoziative Algebren zu Lie-Algebren mittels Kommutator macht. Die Lösung dieses universellen Problems existiert und heißt UNIVERSELLE EINHÜLLENDE. Für sie gilt:

**9.20 Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt.**

*Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra und  $\{X_1, \dots, X_n\}$  eine Basis des Vektorraums  $X$ . Dann ist  $\{X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n} : \mu_i > 0\}$  eine Basis der universell einhüllenden (assoziativen) Algebra.*

Für einen Beweis siehe [HN91, II.6.8].

Zur weiterführenden Literatur über Lie-Algebren und Lie-Gruppen seien die folgenden Bücher empfohlen: [Hel78], [HN91], [Tit83], [Var84] und [War71].

## A. Appendix über Gruppenerweiterungen

Wir werden im nächsten Abschnitt eine Vielzahl von Beispielen von Lie-Gruppen geben. Einige dieser Gruppen werden wir aus Gruppenerweiterungen erhalten und dazu rekapitulieren wir in diesem Abschnitt diese Konstruktionen aus der Gruppentheorie.

### A.1 Erweiterungen und Schnitte

Unter einer GRUPPENERWEITERUNG versteht man eine KURZE EXAKTE SEQUENZ VON GRUPPEN

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1,$$

d.h. alle Pfeile sind Gruppenhomomorphismen und für je zwei aufeinanderfolgende Pfeile  $\bullet \xrightarrow{f_i} \bullet \xrightarrow{f_{i+1}} \bullet$  gilt  $\text{Bild}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$ . Im Detail bedeutet also Exaktheit bei

- (N) Die Abbildung  $i$  ist injektiv (wir können also  $N$  als Untergruppe  $i(N)$  von  $G$  auffassen);
- (G) Es gilt  $\text{Ker}(p) = \text{Im}(i)$ , d.h. diese Untergruppe  $i(N)$  ist sogar ein Normalteiler und nach dem Homomorphiesatz ist  $\text{Bild}(p) \cong G/\text{Ker}(p) = G/i(N)$ ;
- (H) Die Abbildung  $p$  ist surjektiv, d.h.  $H = \text{Bild}(p) \cong G/i(N)$ .

Bis auf die Isomorphismen  $i : N \cong i(N)$  und  $\text{Bild}(p) \cong G/\text{Ker}(p)$  ist eine kurze exakte Sequenz also nichts anderes als eine Gruppe  $G$  mit Normalteiler  $i(N)$  und Quotient  $G/i(N)$ .

Sei  $s : H \rightarrow G$  eine rechtsinverse Abbildung zu  $p : G \rightarrow H$  (erhalten z.B. durch Wahl von Urbildern und somit o.B.d.As(e)=e). Dann ist  $G \cong N \times H$  als Menge vermöge der Abbildungen

$$\begin{aligned} G &\rightarrow N \times H, & g &\mapsto (g \cdot s(p(g)))^{-1}, p(g) && \text{und} \\ N \times H &\rightarrow G, & (n, h) &\mapsto i(n) \cdot s(h). \end{aligned}$$

In der Tat zeigt eine einfache Rechnung, daß die beiden Abbildungen invers zueinander sind. Wir wollen nun die Gruppenmultiplikation von  $G$  in  $N \times H$  ausdrücken, d.h. durch das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (N \times H) \times (N \times H) & \xrightarrow{\quad} & N \times H \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ G \times G & \xrightarrow{\quad} & G \end{array}$$

Also gilt:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (i(n_1) \cdot s(h_1) \cdot i(n_2) \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1}, h_1 \cdot h_2).$$

Wir bezeichnen  $N \times H$  mit dieser Gruppenstruktur als  $N \times_s H$  und haben somit folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & H \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \uparrow \cong & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\text{incl}_1} & N \times_s H & \xrightarrow{\text{pr}_2} & H \longrightarrow 1 \end{array}$$

Wenn wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} c : H \times H &\rightarrow N, & c(h, h') &:= s(h) \cdot s(h') \cdot s(h \cdot h')^{-1} && \text{und} \\ \rho : H &\rightarrow \text{Aut}(N), & \rho(h)(n) &:= s(h) \cdot n \cdot s(h)^{-1}, \end{aligned}$$

verwenden (wobei wir mit  $\text{Aut}(N)$  die Gruppe aller Gruppenisomorphismen  $N \rightarrow N$  (also Gruppenautomorphismen von  $N$ ) mit der Komposition als Operation bezeichnen), dann können wir die Multiplikation auf  $N \times_s H$  auch wie folgt aufschreiben

$$(n, h) \cdot (n', h') = (n \cdot \rho(h)(n') \cdot c(h, h'), h \cdot h').$$

Eine weitere Abbildung  $s' : H \rightarrow G$  ist genau dann ebenfalls ein Schnitt, wenn eine (eindeutig bestimmte) Abbildung  $\tau : H \rightarrow N$  existiert mit  $s'(h) = \tau(h) \cdot s(h)$  für alle  $h \in H$ ; denn  $\tau(h) := s'(h) \cdot s(h)^{-1}$  hat genau dann Werte in  $N$ , falls  $p(\tau(h)) = p(s'(h) \cdot s(h)^{-1}) = p(s'(h)) \cdot p(s(h))^{-1} = h \cdot h^{-1} = 1$  gilt. Für die assoziierten Abbildungen  $c' : H \times H \rightarrow N$  und  $\rho' : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  heißt das

$$\begin{aligned} \rho'(h)(n) &= \tau(h) \cdot \rho(h)(n) \cdot \tau(h)^{-1} \\ c'(h, h') &= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) \cdot c(h, h') \cdot \tau(h \cdot h')^{-1}. \end{aligned}$$

Falls zwei exakte Sequenzen isomorph sind, d.h. ein Gruppenisomorphismus  $\varphi$  existiert, der folgendes Diagramm kommutativ macht,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \uparrow \varphi \cong & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & G' & \xrightarrow{p'} & H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

dann ist für Schnitte  $s : H \rightarrow G$  von  $p : G \rightarrow H$  und  $s' : H \rightarrow G'$  von  $p' : G' \rightarrow H$  auch  $\varphi \circ s' : H \rightarrow G' \rightarrow G$  ein Schnitt von  $p : G \rightarrow H$  und somit von der Form  $\varphi \circ s' = i \circ \tau \cdot s$  für eine Abbildung  $\tau : H \rightarrow N$ . Mittels  $\tau$  können wir  $\varphi$  als Abbildung von  $N \times_{s'} H \cong G'$  nach  $N \times_s H \cong G$  nun wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi(n, h) &\hat{=} \varphi(i'(n) \cdot s'(h)) = \varphi(i'(n)) \cdot \varphi(s'(h)) \\ &= i(n) \cdot i(\tau(h)) \cdot s(h) = i(n \cdot \tau(h)) \cdot s(h) \hat{=} (n \cdot \tau(h), h). \end{aligned}$$

Wir werden in den folgenden Abschnitten nun untersuchen, welche Eigenschaften  $c : H \times H \rightarrow N$ ,  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  und  $\tau : H \rightarrow N$  in diversen Spezialfällen besitzen müssen.

## A.2 Triviale Erweiterungen

Gehen wir als erstes der Frage nach, wann die Gruppenstruktur  $N \times_s H$  genau die des Produktes ist, d.h.

$$i(n_1) \cdot i(n_2) = i(n_1 \cdot n_2) \stackrel{?}{=} i(n_1) \cdot s(h_1) \cdot i(n_2) \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1},$$

gilt. Wählen wir  $n_1 = 1$ , so verkürzt sich die Bedingung auf

$$i(n_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2) \cdot s(h_2)^{-1} = s(h_1) \cdot i(n_2).$$

Dies impliziert, daß  $s : H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus ist (setze  $n_2 = 1$ ) und  $s(h)$  mit  $i(n)$  für alle  $h \in H$  und  $n \in N$  kommutiert (setze  $h_2 = 1$ ). In diesem Fall ist also sowohl  $c(h, h') = 1$  als auch  $\rho(h) = 1$ . Die Umkehrung gilt klarerweise.

In den nächsten beiden Abschnitten betrachten wir nun die Fälle, wo nur eine der beiden Bedingungen  $c = 1$  oder  $\rho = 1$  erfüllt ist.

### A.3 Semidirekte Produkte

Sei der Schnitt  $s : H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus (dies läßt sich nicht immer erreichen, betrachte z.B.  $2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). Dann ist  $c = 1$  und die Multiplikation auf  $N \times H$  somit durch

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \cdot \rho(h_1)(n_2), h_1 \cdot h_2)$$

Dabei ist  $\rho_s : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ,  $h \mapsto (n \mapsto i^{-1}(s(h) \cdot i(n) \cdot s(h)^{-1}))$  nun ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Andererseits liefert jeder Gruppenhomomorphismus  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  auf diese Weise eine Gruppenstruktur  $G$  auf  $N \times H$  und eine kurze exakte Sequenz  $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$ , wobei  $i : N \rightarrow N \times H$  die Inklusion auf den ersten Faktor und  $p : N \times H \rightarrow H$  die Projektion auf den zweiten Faktor ist. Als Schnitt  $s$  können wir die Inklusion auf den zweiten Faktor verwenden. Man sagt in dieser Situation, daß  $G$  das SEMIDIREKTE PRODUKT  $N \rtimes_{\rho} H$  mit Normalteiler  $N$  und Untergruppe  $H$  ist: Damit  $(1, 1)$  das neutrale Element ist, muß  $\rho(1)(n) = n$  und  $\rho(h)(1) = 1$  gelten. Für das Assoziativgesetz benötigt man

$$\rho(h)(n') \cdot \rho(hh')(n'') = \rho(h)(n' \cdot \rho(h')(n''))$$

und wenn wir  $n' = 1$  wählen, folgt  $\rho(hh')(n'') = \rho(h)(\rho(h')(n''))$ , und mit  $h' = 1$  folgt  $\rho(h)(n') \cdot \rho(h)(n'') = \rho(h)(n' \cdot n'')$ . Es ist also notwendig und hinreichend dafür daß  $N \rtimes_{\rho} H$  eine Gruppe wird, daß  $\rho$  eine Darstellung von  $H$  auf  $N$  (d.h. Gruppenhomomorphismus  $H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ) ist.

Es ist  $(n, h)^{-1} = (\rho(h)^{-1}(n^{-1}), h^{-1})$  und somit ist

$$(1, h) \cdot (n, 1) \cdot (1, h)^{-1} = (1 \cdot \rho(h)(n), h \cdot 1) \cdot (\rho(h)^{-1}(1), h^{-1}) = (\rho(h)(n), 1),$$

d.h.  $\rho$  ist gerade die vom Schnitt  $s : h \mapsto (1, h)$  induzierte Darstellung.

### A.4 Getwistete Homomorphismen

Sei nun  $s' := \tau \cdot s : H \rightarrow G$  ein zweiter Schnitt, der auch ein Gruppenhomomorphismus ist. Aus  $s'(h \cdot h') = s'(h) \cdot s'(h')$  folgt  $\tau(h \cdot h') \cdot s(h) \cdot s(h') = s'(h \cdot h') = s'(h) \cdot s'(h') = \tau(h) \cdot s(h) \cdot \tau(h') \cdot s(h')$ , und somit  $\tau(h \cdot h') \cdot s(h) = \tau(h) \cdot s(h) \cdot \tau(h')$ , oder äquivalent

$$\tau(h \cdot h') = \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h'))$$

Also ist  $\tau : H \rightarrow N$  ein bezüglich  $\rho$  GETWISTETER GRUPPENHOMOMORPHISMUS mit

$$\begin{aligned} \rho'(h)(n) &= s'(h) \cdot n \cdot s'(h)^{-1} = \tau(h) \cdot s(h) \cdot n \cdot s(h)^{-1} \cdot \tau(h)^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot \rho(h)(n) \cdot \tau(h)^{-1}. \end{aligned}$$

Umgekehrt definiert jeder bezüglich  $\rho$  getwistete Gruppenhomomorphismus  $\tau : H \rightarrow N$  eine neue Darstellung  $\rho'$  durch

$$\rho'(h)(n) := \tau(h) \cdot \rho(h)(n) \cdot \tau(h)^{-1},$$

denn

$$\begin{aligned} \rho'(h \cdot h')(n) &= \tau(h \cdot h') \cdot \rho(h \cdot h')(n) \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) \cdot \rho(h)(\rho(h')(n)) \cdot \rho(h)(\tau(h'))^{-1} \cdot \tau(h)^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) \cdot \rho(h')(n) \cdot \tau(h')^{-1} \cdot \tau(h)^{-1} \\ &= \rho'(h)(\rho'(h')(n)). \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß wir genau dann zwei isomorphe exakte Sequenzen erhalten, wenn  $\rho$  und  $\rho'$  mittels so einem  $\tau$  in Beziehung stehen. Es existiere also ein Gruppenisomorphismus  $\varphi : G' \rightarrow G$ , der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \uparrow \varphi \cong & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & G' & \xrightarrow{p'} & H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Dann ist sowohl  $s : H \rightarrow G := N \rtimes_{\rho} H$ , gegeben durch  $h \mapsto (1, h)$ , als auch die Zusammensetzung  $\varphi \circ s' : H \rightarrow G' \rightarrow G$  ein Schnitt für  $G$ , wobei  $s' : H \rightarrow G' := N \rtimes_{\rho'} H$  der Schnitt  $h \mapsto (1, h)$  sei. Also existiert nach Obigem ein bezüglich  $\rho$  getwisteter Gruppenhomomorphismus  $\tau : H \rightarrow N$  (d.h.  $\tau(h \cdot h') = \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h'))$ ) mit  $\varphi(s'(h)) = \tau(h) \cdot s(h)$  und somit ist

$$\begin{aligned} \rho'(h)(n) &= \varphi(\rho'(h)(n)) = \varphi(s'(h) \cdot n \cdot s'(h)^{-1}) \\ &= \varphi(s'(h)) \cdot n \cdot \varphi(s'(h))^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot s(h) \cdot n \cdot s(h)^{-1} \cdot \tau(h)^{-1} \\ &= \tau(h) \cdot \rho(h)(n) \cdot \tau(h)^{-1}, \end{aligned}$$

da  $\varphi$  nach Voraussetzung auf  $N$  als Identität wirkt. Insbesondere besagt die Getwistetheit auch, daß

$$\begin{aligned} \tau(h \cdot h') &= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) = \tau(h) \cdot \tau(h)^{-1} \cdot \rho'(h)(\tau(h')) \cdot \tau(h) \\ &= \rho'(h)(\tau(h')) \cdot \tau(h). \end{aligned}$$

Nach [A.1](#) können wir  $\varphi$  mittels  $\tau$  als  $\varphi(n, h) = (n \cdot \tau(h), h)$  darstellen.

Umgekehrt können wir durch diese Formel mittels  $\tau$  nun einen Gruppenisomorphismus  $\varphi : G' \rightarrow G$  definieren, denn

$$\begin{aligned} \varphi(n, h) \cdot \varphi(n', h') &= (n \cdot \tau(h), h) \cdot (n' \cdot \tau(h'), h') \\ &= (n \cdot \tau(h) \cdot \rho(h)(n' \cdot \tau(h')), h \cdot h') \\ &= (n \cdot \tau(h) \cdot \tau(h)^{-1} \cdot \rho'(h)(n' \cdot \tau(h')) \cdot \tau(h), h \cdot h') \\ &= (n \cdot \rho'(h)(n' \cdot \tau(h')) \cdot \tau(h), h \cdot h') \\ &= (n \cdot \rho'(h)(n') \cdot \tau(h \cdot h'), h \cdot h') \\ &= \varphi(n \cdot \rho'(h)(n'), h \cdot h') = \varphi((n, h) \cdot (n', h')). \end{aligned}$$

Also stehen die Isomorphieklassen von Gruppenerweiterungen, die einen Gruppenhomomorphismus als Schnitt zulassen, in bijektiver Beziehung zu

$$\text{Hom}(H, \text{Aut}(N)) / \sim,$$

wobei zwei Darstellungen  $\rho'$  und  $\rho$  äquivalent heißen, wenn ein bezüglich  $\rho$  getwisteter Gruppenhomomorphismus  $\tau : H \rightarrow N$  existiert, welcher sie wie oben beschrieben ineinander überführt.

### Beispiele.

Wir haben folgende kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \rightarrow GL_+(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow GL(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{sign} \circ \det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1,$$

wobei wir  $\mathbb{Z}_2$  als  $\{\pm 1\}$  multiplikativ schreiben. Ein Schnitt  $s : \mathbb{Z}_2 \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$  ist z.B. durch

$$\pm 1 \mapsto \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \text{id}_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{pmatrix}$$

gegeben. Somit ist  $GL(\mathbb{R}^n) \cong GL_+(\mathbb{R}^n) \rtimes \mathbb{Z}_2$  ein semidirektes Produkt.

Sei  $G$  die Gruppe der affinen Bijektionen  $x \mapsto A \cdot x + b$  (mit  $A \in GL(E)$  und  $b \in E$ ) des euklidischen Raums  $E$ . Diese wird auch als  $Ax + b$ -GRUPPE bezeichnet, siehe [1.4](#). Sie hat als Untergruppe die Gruppe  $E$  der Translationen  $x \mapsto x + b$  mit  $b \in E$ , welche der Kern des Gruppen-Epimorphismus  $G \rightarrow GL(E)$  gegeben durch  $(x \mapsto Ax + b) \mapsto A$  ist. Ein Schnitt zu diesem Epimorphismus ist die Inklusion  $GL(E) \hookrightarrow G$ . Somit ist auch  $G \cong E \rtimes GL(E)$  ein semidirektes Produkt.

### A.5 Zentrale Erweiterungen

Betrachten wir nun den zweiten Fall, wo für den Schnitt  $s : H \rightarrow G$  folgendes (also  $\rho = 1$ ) gilt:

$$i(n) \cdot s(h) = s(h) \cdot i(n) \text{ für alle } n \in N, h \in H$$

Damit das unabhängig von  $s$  gilt, fordern wir, daß  $i(N)$  im Zentrum  $Z(G) := \{g \in G : g \cdot g' = g' \cdot g \forall g' \in G\}$  von  $G$  enthalten ist. So eine Erweiterung  $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$  (mit  $i(N)$  in  $G$  zentral) heißt eine ZENTRALE ERWEITERUNG. Insbesondere ist dann  $N$  abelsch. Die Gruppenmultiplikation auf  $N \times H$  ist also nach Ausnutzen der Zentralität durch

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot n_2 \cdot c(h_1, h_2), h_1 \cdot h_2)$$

gegeben, wobei  $c : H \times H \rightarrow N$  definiert ist durch

$$c(h_1, h_2) := s(h_1) \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1}.$$

Die beiden Seiten des Assoziativgesetzes sind nun:

$$\begin{aligned} ((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) \cdot (n_3, h_3) &= (n_1 \cdot n_2 \cdot c(h_1, h_2), h_1 \cdot h_2) \cdot (n_3, h_3) \\ &= (n_1 \cdot n_2 \cdot c(h_1, h_2) \cdot n_3 \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3), h_1 \cdot h_2 \cdot h_3) \\ (n_1, h_1) \cdot ((n_2, h_2) \cdot (n_3, h_3)) &= (n_1, h_1) \cdot (n_2 \cdot n_3 \cdot c(h_2, h_3), h_2 \cdot h_3) \\ &= (n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot c(h_2, h_3) \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3), h_1 \cdot h_2 \cdot h_3) \end{aligned}$$

Es liefert also  $c$  genau dann eine assoziative Struktur, wenn die folgende ‘‘Kozykel’’-Gleichung erfüllt ist

$$c(h_1, h_2) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3) = c(h_2, h_3) \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3),$$

oder nach Ausnutzung der Kommutativität

$$\partial c(h_1, h_2, h_3) := c(h_2, h_3) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3)^{-1} \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3) \cdot c(h_1, h_2)^{-1} = 1.$$

Da wir  $s(1) = 1$  immer erreichen können, indem wir  $s$  durch  $s'(h) := s(h) \cdot s(1)^{-1}$  setzen, dürfen wir annehmen, daß  $c(1, 1) = s(1) = 1$  gilt und weiters:

$$1 = \partial c(1, 1, h) = c(1, h) \cdot c(1, h)^{-1} \cdot c(1, h) \cdot c(1, 1)^{-1} = c(1, h)$$

$$1 = \partial c(h, 1, 1) = c(1, 1) \cdot c(h, 1)^{-1} \cdot c(h, 1) \cdot c(h, 1)^{-1} = c(h, 1)^{-1}$$

$$1 = \partial c(h, h^{-1}, h) = c(h^{-1}, h) \cdot c(1, h)^{-1} \cdot c(h, 1) \cdot c(h, h^{-1})^{-1} = c(h^{-1}, h) \cdot c(h, h^{-1})^{-1}$$

Dies zeigt, daß eine Abbildung  $c : H \times H \rightarrow N$  in eine Abelsche Gruppe  $N$ , welche die Kozykelgleichung und  $c(1, 1) = 1$  erfüllt eine Gruppenstruktur auf  $G := N \times H$  durch

$$\begin{aligned} (n, h) \cdot (n', h') &:= (n \cdot n' \cdot c(h, h'), h \cdot h') \\ (n, h)^{-1} &= (n^{-1} \cdot c(h, h^{-1})^{-1}, h^{-1}) \end{aligned}$$

festlegt, und zwar so, daß  $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$  eine Erweiterung ist, wobei  $i : N \rightarrow G$  durch  $n \mapsto (n, 1)$  und  $p$  durch  $(n, h) \mapsto h$  gegeben sind. Dies ist eine zentrale Erweiterung, denn  $(n, 1) \cdot (n', h') = (n \cdot n' \cdot c(1, h'), h') = (n' \cdot n \cdot c(h', 1), h') =$

$(n', h') \cdot (n, 1)$ . Weiters ist  $s : H \rightarrow N \times H$  gegeben durch  $h \mapsto (1, h)$  ein Schnitt und es gilt

$$\begin{aligned} s(h) \cdot s(h') \cdot s(h \cdot h')^{-1} &= (1, h) \cdot (1, h') \cdot (1, h \cdot h')^{-1} \\ &= \left( c(h, h') \cdot c(h \cdot h', (h \cdot h')^{-1})^{-1} \cdot c(h \cdot h', (h \cdot h')^{-1}), 1 \right) \\ &= (c(h, h'), 1) \end{aligned}$$

### A.6 Gruppen-Kozykeln

Wieder fragen wir danach, welche Kozykeln  $c$  isomorphe Gruppen liefern. Sei dazu vorerst  $s'$  ein zweiter Schnitt (mit  $s'(1) = 1$ ). Dann ist  $s'(h) = \tau(h) \cdot s(h) = s(h) \cdot \tau(h)$  für eine Abbildung  $\tau : H \rightarrow N$ , welche  $\tau(1) = 1$  erfüllt. Eine direkte Rechnung (siehe [A.9](#)) für die assoziierten Kozykel  $c$  und  $c'$  ergibt

$$\begin{aligned} c'(h, h') &= \partial\tau(h, h') \cdot c(h, h'), \text{ mit} \\ \partial\tau(h, h') &:= \tau(h') \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \cdot \tau(h). \end{aligned}$$

Sei nun  $\varphi : G' \rightarrow G$  ein Gruppenisomorphismus, welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & H \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \uparrow \varphi \cong & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & G' & \xrightarrow{p'} & H \longrightarrow 1 \end{array}$$

wobei  $G = N \times H$  die vom Kozykel  $c$  induzierte Gruppenstruktur, und  $G' = N \times H$  die von  $c'$  induzierte Struktur sei. Wieder erhalten wir zwei Schnitte  $s$  und  $\varphi \circ s'$  für  $p : G \rightarrow H$ , welche durch ein  $\tau : H \rightarrow N$  wie folgt ineinander umgerechnet werden können:

$$\varphi(s'(h)) = \tau(h) \cdot s(h).$$

Für die Kozykeln liefert eine kurze Rechnung:

$$c'(h, h') = \partial\tau(h, h') \cdot c(h, h').$$

Umgekehrt läßt sich mittels  $\tau : H \rightarrow N$  ein Gruppenisomorphismus  $\varphi : G' \rightarrow G$  wie bei semidirekten Produkten durch  $\varphi(n, h) := (n \cdot \tau(h), h)$  definieren, denn

$$\begin{aligned} \varphi(n, h) \cdot \varphi(n', h') &= (n \cdot \tau(h) \cdot n' \cdot \tau(h'), c(h, h'), h \cdot h') \\ &= (n \cdot \tau(h) \cdot n' \cdot \tau(h') \cdot \partial\tau(h, h')^{-1} \cdot c'(h, h'), h \cdot h') \\ &= (n \cdot n' \cdot \tau(h \cdot h') \cdot c(h, h'), h \cdot h') \\ &= \varphi((n, h) \cdot (n', h')) \end{aligned}$$

Wir erhalten also, daß die Isomorphieklassen von zentralen Erweiterungen in bijektiver Beziehung zu  $\{c \in N^{H \times H} : \partial c = 0\} / \{\partial\tau : \tau \in N^H\}$  stehen. Dieser Quotient macht Sinn, da  $\partial^2\tau = 0$  für alle  $\tau : H \rightarrow N$ . Man beachte, daß die Bedingungen  $c(1, 1) = 1$  und  $\tau(1) = 1$  weggelassen werden können, da  $\partial\tau(1, 1) = \tau(1)$  und  $\partial c' = \partial c$ , wobei  $c'(h, h') := c(h, h') \cdot c(1, 1)^{-1} = c(h, h') \cdot \partial\tau(h, h')$  ist mit  $\tau : h \mapsto c(1, 1)^{-1}$ .

#### Beispiel.

Die Heisenberggruppe  $H$  (siehe [1.6](#)) ist durch die zentrale Erweiterung

$$1 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow 1$$

bezüglich des Kozykels  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , welcher eine symplektische (d.h. bilineare, schief-symmetrische und nicht degenerierte, siehe [1.14](#)) Form ist, gegeben. Wir

werden in [1.14](#) zeigen, daß dazu  $E$  gerade dimensional (also  $E = F \times F$ ) sein muß und jede symplektische Form  $b$  von der Gestalt  $b(x_1, y_1; x_2, y_2) := \langle x_1, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle$  ist.

### A.7 Kohomologie von $H$ mit Werten in einer Abelschen Gruppe

Man kann das  $\partial$ , welches bei zentralen Erweiterungen aufgetaucht ist auch verallgemeinern, indem man für eine Gruppe  $H$  und eine Abelsche Gruppe  $N$  (die wir der Einfachheit halber additiv schreiben) wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} C^k(H, N) &:= \{c : H^{k+1} \rightarrow N\} \\ \partial : C^{k-1}(H, N) &\rightarrow C^k(H, N) \\ \partial c(h_1, \dots, h_{k+1}) &:= \\ &= c(h_2, \dots, h_{k+1}) + \sum_{j=1}^k (-1)^j c(h_1, \dots, h_j \cdot h_{j+1}, \dots, h_{k+1}) + (-1)^{k+1} c(h_1, \dots, h_k) \end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung zeigt  $\partial^2 = 0$  und somit können wir die KOHOMOLOGIE von  $H$  mit Werten in  $N$  als

$$\begin{aligned} H^k(H; N) &:= \\ &= \text{Ker}(\partial : C^k(H, N) \rightarrow C^{k+1}(H, N)) / \text{Bild}(\partial : C^{k-1}(H, N) \rightarrow C^k(H, N)) \end{aligned}$$

definieren. Es beschreibt also  $H^1(H; N)$  die Isomorphieklassen von zentralen Erweiterungen von  $H$  mit zentraler Untergruppe  $N$  nach [A.6](#) und es ist

$$H^0(H; N) = \text{Ker}(\partial : C^0(H, N) \rightarrow C^1(H, N)) = \text{Hom}(H, N)$$

### A.8 Abelsche Erweiterungen

Betrachten wir nun den Fall, wo  $N$  abelsch ist, aber nicht notwendig im Zentrum von  $G$  liegt, also sogenannte ABELSCHER ERWEITERUNGEN  $N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow H$ . Dann können wir eine Wirkung  $\rho$  von  $H$  auf  $N$  durch

$$\rho(p(g))(n) := g \cdot n \cdot g^{-1}$$

definieren, d.h. das in [A.1](#) definierte  $\rho$  hängt nun nicht vom Schnitt  $s$  ab. In der Tat folgt aus  $p(g) = p(g')$ , daß  $g^{-1} \cdot g' \in N$  und somit ist  $g' \cdot n \cdot (g')^{-1} = g \cdot g^{-1} \cdot g' \cdot n \cdot (g')^{-1} \cdot g \cdot g^{-1} = g \cdot n \cdot g^{-1}$  und folglich macht die Definition von  $\rho$  Sinn und ist eine Darstellung, da  $\text{konj} : G \rightarrow \text{Aut}(N)$  eine ist.

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & G & \xrightarrow{p} & H \\ & & \downarrow \text{konj} & \swarrow \rho & \\ & & \text{Aut}(N) & & \end{array}$$

Ist nun  $s : H \rightarrow G$  irgendein Schnitt, dann ist die Gruppenmultiplikation auf  $N \times H$  durch

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \rho(h_1)(n_2) \cdot c(h_1, h_2), h_1 \cdot h_2)$$

gegeben, wobei  $c : H \times H \rightarrow N$  wie bei zentralen Erweiterungen in [A.5](#) oder wie in [A.1](#) definiert ist durch

$$c(h_1, h_2) := s(h_1) \cdot s(h_2) \cdot s(h_1 \cdot h_2)^{-1}.$$

Die beiden Seiten des Assoziativgesetzes sind nun:

$$\begin{aligned}
& ((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) \cdot (n_3, h_3) = \\
& \quad = (n_1 \cdot \rho(h_1)(n_2) \cdot c(h_1, h_2), h_1 \cdot h_2) \cdot (n_3, h_3) \\
& \quad = (n_1 \cdot \rho(h_1)(n_2) \cdot c(h_1, h_2) \cdot \rho(h_1 \cdot h_2)(n_3) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3), h_1 \cdot h_2 \cdot h_3) \\
& (n_1, h_1) \cdot ((n_2, h_2) \cdot (n_3, h_3)) = \\
& \quad = (n_1, h_1) \cdot (n_2 \cdot \rho(h_2)(n_3) \cdot c(h_2, h_3), h_2 \cdot h_3) \\
& \quad = (n_1 \cdot \rho(h_1) \left( n_2 \cdot \rho(h_2)(n_3) \cdot c(h_2, h_3) \right) \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3), h_1 \cdot h_2 \cdot h_3)
\end{aligned}$$

Es liefert also  $c$  (zusammen mit  $\rho$ ) genau dann eine assoziative Struktur, wenn (nach Ausnützung der Kommutativität von  $N$ ) die folgende ‘‘Kozykel’’-Gleichung erfüllt ist

$$c(h_1, h_2) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3) = \rho(h_1) \left( c(h_2, h_3) \right) \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3),$$

bzw.

$$\partial_\rho c(h_1, h_2, h_3) := \rho(h_1) \left( c(h_2, h_3) \right) \cdot c(h_1 \cdot h_2, h_3)^{-1} \cdot c(h_1, h_2 \cdot h_3) \cdot c(h_1, h_2)^{-1} = 1.$$

Da wir  $s(1) = 1$  immer erreichen können, indem wir  $s$  durch  $s'(h) := s(h) \cdot s(1)^{-1}$  setzen, dürfen wir annehmen, daß  $c(1, 1) = s(1) = 1$  gilt und weiters:

$$\begin{aligned}
1 &= \partial_\rho c(1, 1, h) = \rho(1)(c(1, h)) \cdot c(1, h)^{-1} \cdot c(1, h) \cdot c(1, 1)^{-1} = c(1, h) \\
1 &= \partial_\rho c(h, 1, 1) = \rho(h)(c(1, 1)) \cdot c(h, 1)^{-1} \cdot c(h, 1) \cdot c(h, 1)^{-1} = c(h, 1)^{-1} \\
1 &= \partial_\rho c(h, h^{-1}, h) = \rho(h)(c(h^{-1}, h)) \cdot c(1, h)^{-1} \cdot c(h, 1) \cdot c(h, h^{-1})^{-1} \\
&= \rho(h)(c(h^{-1}, h)) \cdot c(h, h^{-1})^{-1}
\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß eine Abbildung  $c : H \times H \rightarrow N$ , welche die Kozykelgleichung und  $c(1, 1) = 1$  erfüllt, eine Gruppenstruktur auf  $G := N \times H$  durch

$$\begin{aligned}
(n, h) \cdot (n', h') &:= (n \cdot \rho(h)(n') \cdot c(h, h'), h \cdot h') \\
(n, h)^{-1} &= (c(h^{-1}, h)^{-1} \cdot \rho(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})
\end{aligned}$$

definiert und zwar so, daß  $1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$  eine abelsche Erweiterung ist, wobei  $i : N \rightarrow G$  durch  $n \mapsto (n, 1)$  und  $p$  durch  $(n, h) \mapsto h$  gegeben sind. Es ist  $s : H \rightarrow N \times H$  gegeben durch  $h \mapsto (1, h)$  ein Schnitt und es gilt

$$s(h) \cdot s(h') \cdot s(h \cdot h')^{-1} = (1, h) \cdot (1, h') \cdot (1, h \cdot h')^{-1} = (c(h, h'), 1).$$

### A.9 Isomorphieklassen abelscher Erweiterungen

Wieder fragen wir danach, welche Kozykeln  $c$  bei gleicher Wirkung  $\rho$  isomorphe Gruppen liefern. Sei dazu vorerst  $s'$  ein zweiter Schnitt (mit  $s'(1) = 1$ ). Dann ist  $s'(h) = \tau(h) \cdot s(h)$  für eine Abbildung  $\tau : H \rightarrow N$ , welche  $\tau(1) = 1$  erfüllt. Die folgende direkte Rechnung für die assoziierten Kozykeln  $c$  und  $c'$  ergibt

$$\begin{aligned}
c'(h, h') &= s'(h) \cdot s'(h') \cdot s'(h \cdot h')^{-1} \\
&= \tau(h) \cdot s(h) \cdot \tau(h') \cdot s(h') \cdot s(h \cdot h')^{-1} \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \\
&= \tau(h) \cdot s(h) \cdot \tau(h') \cdot s(h)^{-1} \cdot s(h) \cdot s(h') \cdot s(h \cdot h')^{-1} \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \\
&= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) \cdot c(h, h') \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \\
&= \tau(h) \cdot \rho(h)(\tau(h')) \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \cdot c(h, h') \\
&= \partial_\rho \tau(h, h') \cdot c(h, h')
\end{aligned}$$

wobei  $\partial_\rho \tau(h, h') := \rho(h) \left( \tau(h') \right) \cdot \tau(h \cdot h')^{-1} \cdot \tau(h)$  ist.

Sei nun  $\varphi : G' \rightarrow G$  ein Gruppenisomorphismus, welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \uparrow \cong & & \parallel & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & G' & \xrightarrow{p'} & H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

wobei  $G = N \times H$  die vom Kozykel  $c$  induzierte Gruppenstruktur, und  $G' = N \times H$  die von  $c'$  induzierte Struktur sei. Wieder erhalten wir zwei Schnitte  $s$  und  $\varphi \circ s'$  für  $p : G \rightarrow H$ , welche durch ein  $\tau : H \rightarrow N$  wie folgt ineinander umgerechnet werden können:

$$\varphi(s'(h)) = \tau(h) \cdot s(h).$$

Für die Kozykeln liefert eine kurze Rechnung erneut:

$$c'(h, h') = \partial_\rho \tau(h, h') \cdot c(h, h').$$

Umgekehrt läßt sich mittels  $\tau : H \rightarrow N$  ein Gruppenisomorphismus  $\varphi : G' \rightarrow G$  wie bei semidirekten Produkten durch  $\varphi(n, h) := (n \cdot \tau(h), h)$  definieren, denn

$$\begin{aligned} \varphi(n, h) \cdot \varphi(n', h') &= (n \cdot \tau(h) \cdot \rho(h)(n' \cdot \tau(h')), c(h, h'), h \cdot h') \\ &= (n \cdot \rho'(h)(n') \cdot \rho'(h)(\tau(h')) \cdot \tau(h) \cdot \partial_\rho \tau(h, h')^{-1} \cdot c'(h, h'), h \cdot h') \\ &= \varphi((n, h) \cdot (n', h')) \end{aligned}$$

Wir erhalten also, daß die Isomorphieklassen von Abelschen Erweiterungen bzgl. einer Darstellung  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  in bijektiver Beziehung zu  $\{c \in N^{H \times H} : \partial_\rho c = 0\} / \{\partial_\rho \tau : \tau \in N^H\}$  stehen. Dieser Quotient macht Sinn, da  $\partial_\rho^2 \tau = 0$  für alle  $\tau : H \rightarrow N$ . Man beachte, daß die Bedingungen  $c(1, 1) = 1$  und  $\tau(1) = 1$  weggelassen werden können wie in [A.6](#).

### A.10 Kohomologie bezüglich einer Darstellung $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(N)$

Man kann das  $\partial_\rho$ , welches bei abelschen Erweiterungen aufgetaucht ist auch verallgemeinern, indem man für eine Gruppe  $H$  und eine Abelsche Gruppe  $N$  (die wir der Einfachheit halber additiv schreiben) und eine Darstellung  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} C^k(H, N) &:= \{c : H^{k+1} \rightarrow N\} \\ \partial_\rho : C^{k-1}(H, N) &\rightarrow C^k(H, N) \\ \partial_\rho c(h_1, \dots, h_{k+1}) &:= \rho(h_1)(c(h_2, \dots, h_{k+1})) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^k (-1)^j c(h_1, \dots, h_j \cdot h_{j+1}, \dots, h_{k+1}) + (-1)^{k+1} c(h_1, \dots, h_k) \end{aligned}$$

Eine direkte Rechnung zeigt  $\partial_\rho^2 = 0$  und somit können wir die KOHOMOLOGIE von  $H$  mit Werten in  $N$  als

$$\begin{aligned} H_\rho^k(H; N) &:= \\ &= \text{Ker}(\partial_\rho : C^k(H, N) \rightarrow C^{k+1}(H, N)) / \text{Bild}(\partial_\rho : C^{k-1}(H, N) \rightarrow C^k(H, N)) \end{aligned}$$

definieren. Es beschreibt also  $H_\rho^1(H; N)$  die Isomorphieklassen von Erweiterungen von  $H$  mit Wirkung  $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  und es ist

$$H_\rho^0(H; N) = \text{Ker}(\partial_\rho : C^0(H, N) \rightarrow C^1(H, N)) = \text{Hom}(H, N)$$

### A.11 Transitiv Gruppenwirkungen

Wir wollen zuletzt noch die Situation untersuchen, wo  $N$  nur eine Untergruppe (und nicht ein Normalteiler) von  $G$  ist. Dann können wir zwar wieder die Menge  $G/N$  der (rechten) NEBENKLASSEN  $\{g \cdot N : g \in G\}$  betrachten. Es ist  $p(g') = p(g) \Leftrightarrow g^{-1}g' \in N$ , denn aus  $g'N = gN$  folgt  $g^{-1}g'1 \in N$  und umgekehrt sei  $n := g^{-1}g' \in N$ , dann ist  $g'N = gnN = gN$ , also  $p(g') = p(g)$ .

Hier ist  $G/N$  keine Gruppe mehr, allerdings haben wir eine Wirkung von  $G$  auf  $G/N$  durch

$$g' \cdot gN := (g'g)N,$$

denn

$$(g_1g_2) \cdot gN = ((g_1g_2)g)N = (g_1(g_2g))N = g_1 \cdot (g_2g)N = g_1 \cdot (g_2 \cdot gN).$$

Offensichtlich ist diese Wirkung TRANSITIV, d.h. für je zwei Nebenklassen  $g_0N$  und  $g_1N$  existiert ein  $g \in G$  mit  $g \cdot g_0N = g_1N$  (wähle  $g := g_1g_0^{-1}$ ).

Allgemein sagt man, daß eine Gruppe  $G$  (von links) auf einer Menge  $X$  wirkt (bzw. daß  $X$  ein rechter  $G$ -Raum ist), wenn eine Abbildung  $\lambda : G \times X \rightarrow X$  (genannt LINKS-WIRKUNG) gegeben ist, die  $\lambda(e, x) = x$  für alle  $x \in X$  und  $\lambda(gh, x) = \lambda(g, \lambda(h, x))$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$  erfüllt, d.h. wo die assoziierte Abbildung  $\check{\lambda} : G \rightarrow \text{Bij}(X)$  definiert durch  $g \mapsto (x \mapsto \lambda(g, x))$  ein Gruppen-Homomorphismus ist. Unter einer RECHTS-WIRKUNG einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$  versteht man eine Abbildung  $\rho : X \times G \rightarrow X$ , welche  $\rho(x, e) = x$  für alle  $x \in X$  und  $\rho(x, gh) = \rho(\rho(x, g), h)$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$  erfüllt. Es ist  $\rho : X \times G \rightarrow X$  genau dann eine Rechts-Wirkung, wenn  $\lambda : G \times X \rightarrow X$ , definiert durch  $\lambda(g, x) := \rho(x, g^{-1})$ , eine Links-Wirkung ist, oder auch genau dann, wenn  $G^{\text{op}} \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto \rho(x, g)$  eine Links-Wirkung der Gruppe  $G^{\text{op}}$ , die als Menge  $G$  ist und die Multiplikation  $\bullet^{\text{op}}$  durch  $g \bullet^{\text{op}} h := h \bullet g$  gegeben ist. Letztere Äquivalenz folgt, da  $\nu : G \rightarrow G^{\text{op}}, g \mapsto g^{-1}$  ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Umgekehrt wirke  $G$  auf einer Menge  $H$  transitiv (das können wir immer erreichen, indem wir uns auf einen Orbit  $G \cdot h_0$  beschränken). Und sei  $h_0 \in H$  fix. Dann ist  $G_{h_0} := \{g \in G : g \cdot h_0 = h_0\}$  eine Untergruppe von  $G$ , die sogenannte ISOTROPIE(UNTER)GRUPPE bei  $h_0$ , und  $G/G_{h_0}$  ist isomorph zu  $H$  als  $G$ -Raum, d.h. es gibt eine Bijektion  $\varphi : G/G_{h_0} \rightarrow H$ , welche mit der Wirkung vertauscht ( $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$ ). In der Tat ist  $\varphi$  durch  $\varphi(gG_{h_0}) := g \cdot h_0$  gegeben und einfache Rechnungen zeigen die behaupteten Eigenschaften.

Beachte, daß je zwei Isotropiegruppen  $G_{h_1}$  und  $G_{h_0}$  konjugiert zueinander sind, denn sei  $h_1 = g_1 \cdot h_0$ , dann ist

$$G_{h_1} = \{g : g \cdot h_1 = h_1\} = \{g : g \cdot g_1 \cdot h_0 = g_1 \cdot h_0\} = \{g : g_1^{-1} \cdot g \cdot g_1 \in G_{h_0}\}$$

Weiters entsprechen den Schnitten  $s : H \rightarrow G$  mit  $s(p(1)) = 1$  von  $p : G \rightarrow H$  die Abbildungen  $q : G \rightarrow N$  mit  $q \circ i = \text{id}_N : N \rightarrow G \rightarrow N$  welche mit der rechts  $N$ -Wirkung vertauschen:

( $\mapsto$ ) Aus  $p \circ s = \text{id}_H$  folgt  $p(g) = p(s(p(g)))$  und somit existiert ein  $n_g \in N$  mit  $g = s(p(g)) \cdot n_g$ . Also ist  $q : g \mapsto n_g = s(p(g))^{-1} \cdot g$  eine wohldefinierte Abbildung  $q : G \rightarrow N$ . Es gilt  $q|_N = \text{id}_N$ , denn  $s(p(n)) = s(p(1)) = 1$ . Und weiters ist  $q(g \cdot n) = s(p(g \cdot n))^{-1} \cdot g \cdot n = s(p(g))^{-1} \cdot g \cdot n = q(g) \cdot n$ .

( $\leftarrow$ ) Umgekehrt sei  $q : G \rightarrow N$  mit  $q|_N = \text{id}_N$ . Wir definieren  $s : H = G/N \rightarrow G$  durch  $s(g \cdot N) := g \cdot q(g)^{-1}$ . Dann ist  $s$  wohldefiniert, denn

$$s(g \cdot n) = g \cdot n \cdot q(g \cdot n)^{-1} = g \cdot n \cdot (q(g) \cdot n)^{-1} = g \cdot n \cdot n^{-1} \cdot q(g)^{-1} = s(g).$$

Weiters ist  $s(1 \cdot N) = 1 \cdot q(1)^{-1} = 1$  und  $p(s(g \cdot N)) = p(g \cdot q(g)^{-1}) = p(g) = g \cdot N$ , denn  $g^{-1} \cdot g \cdot q(g) = q(g) \in N$ .



## Literaturverzeichnis

- [Die60] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Springer-Verlag, 1991.
- [Gle52] Gleason. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, 56:193–212, 1952.
- [Hel78] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Acad. Press, New York, 1978.
- [HN91] J. Hilgert and K.-H. Neeb. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [Kir08] Alexander Kirillov, Jr. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, volume 113 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. 2008.
- [KM97] Andreas Kriegl and Peter W. Michor. *The Convenient Setting of Global Analysis*. Am. Math. Soc., 1997.
- [Kob67] S. Kobayashi. *On conjugate and cut loci*. The Mathem. Assoc. Am., Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [Kri99] A. Kriegl. *Topologie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 1999.
- [Kri04] A. Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004.
- [Kri05] A. Kriegl. *Funktionalanalysis 2*. Uni.Wien, Wien, 2005.
- [Kri06] A. Kriegl. *Funktional Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2006.
- [Kri07] A. Kriegl. *Differentialgeometrie*. Univ. Wien, 2007.
- [Kri08] A. Kriegl. *Kategorien Theorie*. Vorlesung, Univ. Wien, 2008.
- [Kri10] A. Kriegl. *Proseminar Lie-Gruppen*. Univ. Wien, 2010.
- [Mic08] P. W. Michor. *Topics in Differential Geometry*. AMS, Providence, Rhode Island, 2008.
- [MZ52] Montgomery and Zippin. Small subgroups of finite dimensional groups. *Ann. of Math.*, 56:213–241, 1952.
- [Ser87] J-P. Serre. *Complex Semi-simple Lie-Algebras*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Tit83] Jacques Tits. *Liesche Gruppen und Algebren*. Springer Hochschultext, Berlin, 1983.
- [Var84] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representation*. Springer Graduate Text, Berlin, 1984.
- [War71] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Illinois, 1971.
- [Whi78] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [Yam50] H. Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a Liegroup. *Osaka M.J.*, 2:14–15, 1950.



# Index

- $Ax + b$ -Gruppe, 122
- $G$ -Hauptfaserbündel, 68
- $GL_{\mathbb{H}}(E)$ , 20
- $O(n, k)$ , 11
- $O_{\mathbb{C}}(n)$ , 18
- $Q_q(E)$ , 21
- $SO(n, k)$ , 11
- $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ , 19
- $SL_{\mathbb{H}}(E)$ , 20
- $U(n, k)$ , 17
- $U_b(E)$ , 16
- $Z(X)$ , 90
- $L_{\mathbb{C}}(E)$ , 16
- $L_{\mathbb{C}}(n)$ , 16
- $L_{\mathbb{H}}(E)$ , 20
- äquivarianten tubulären Umgebung, 72
- 1-Parameter Untergruppe, 44
  
- Abelsche Erweiterungen, 124
- absteigende Zentralreihe, 90
- adjungierte Darstellung der Lie-Algebra, 71
- adjungierte Darstellung der Lie-Gruppe, 71
- Algebra der Oktaven, 106
- allgemeine lineare Gruppe, 1
- auf lösbare Lie-Gruppe, 5
- auf lösbare Lie-Gruppe oder Lie-Algebra, 92
- aufsteigende Zentralreihe, 90
  
- Blätter, 50
- Blätterung, 50
  
- Campbell-Baker-Hausdorff Formel, 86
- Cartan-Algebren, 106
- Cartan-Involutionen, 114
- charakteristisches Ideal einer Lie-Algebra, 102
  
- Darstellung einer Gruppe auf einem Vektorraum, 71
- derivierte Reihe, 90
- Dynkin-Diagramm, 110
  
- effektiv, 80
- einfache Lie-Algebra, 102
- einfache Lie-Gruppe, 114
- einfache Wurzel, 110
- Erweiterung von Lie-Gruppen oder Lie-Algebren, 91
- Exponentialabbildung, 44
  
- Faserbündel mit Strukturgruppe, 74
- foliation, 50
- freie Gruppen-Wirkung, 60
- fundamentale Vektorfeld, 54
  
- getwisteter Gruppenhomomorphismus, 120
- Gewichte, 107
- Gewichtsvektoren, 107
- Gruppenerweiterung, 118
  
- höchstes Gewicht, 107
- halbeinfach, 99
- halbeinfache Lie-Algebra, 102
- halbeinfache Lie-Gruppe, 114
- halbeinfache Teil, 99
- Heisenberggruppe, 5
- hermitesche Form, 15
  
- Integrabilitätstheorem von Frobenius, globale Version, 49
- Integralmannigfaltigkeit eines Teilvektorbündels, 47
- isotrope Teilmenge, 12
- Isotropie(unter)gruppe, 127
  
- Killing-Form, 102
- Kohomologie einer Gruppe bzgl. Darstellungen auf einer Abelschen Gruppe, 126
- Kohomologie einer Gruppe mit Werten in einer Abelschen Gruppe, 124
- Kohomologie einer Lie-Algebra, 116
- kompakte Lie-Algebra, 115
- Kozykel-Gleichung, 122
- kurze exakte Sequenz von Gruppen, 118
  
- Lagrange Teilraum, 12
- Levi-Teilalgebra, 104
- lichtartige Vektoren, 11
- Lie-Gruppe, 1, 37
- Lie-Gruppen-(links-)Wirkung, 53
- Lie(Gruppen)-Homomorphismus, 37
- Linienbündel, 47
- Links-Wirkung, 127
- linksinvarianten Vektorfelder, 42
- lokaler Lie(Gruppen)-Homomorphismus, 37
- lokales Integrabilitätstheorem von Frobenius, 48
- Lorentzgruppe, 11
  
- maximale Integralmannigfaltigkeit, 49
  
- Nebenklassen, 127
- nilpotente Lie-Gruppe, 5
- nilpotente Lie-Gruppe oder Lie-Algebra, 92
- nilpotente Teil, 99
  
- orthogonale Gruppe, 6
- orthogonale Komplement, 11

perfekte stetige Abbildungen, 78  
 plaques, 49  
 positive Wurzeln, 110  
 propere Abbildung, 78  
 propere Wirkung, 78  
 pseudoeuklidisches Produkt, 11  
  
 quaternionischen Gruppen, 23  
  
 Radikal einer Lie-Algebra, 102  
 Rang halbeinfacher Lie-Algebren, 106  
 raumartige Vektoren, 11  
 Rechts-Wirkung, 127  
 reduktive Lie-Algebra, 115  
 reelle Form einer komplexen Lie-Algebra, 113  
 reelle symplektische Gruppe, 12  
 reguläre Karten einer Blätterung, 65  
 reguläres Element einer halbeinfachen Lie-  
 Algebra, 106  
 reguläres Teilvektorbündel, 65  
  
 Scheibe einer Gruppenwirkung, 72  
 semidirektes Produkt von Gruppen, 120  
 spezielle lineare Gruppe, 6  
 Spiegelungen, 13  
 standard hermitesche Form, 16  
 standard hermitesche Form mit Signatur, 17  
 standard symplektische Form am  $\mathbb{R}^{2k}$ , 12  
 strikt diskontinuierliche Gruppenwirkung, 60  
 symplektische Form, 11  
  
 transitive Wirkung, 127  
  
 unimodulare Gruppe, 57  
 unitäre Gruppe, 17  
 universelle Einhüllende einer Lie-Algebra, 117  
 Unter-Lie-Gruppe, 46  
  
 verallgemeinerter Eigenraum, 99  
  
 Weyl-Gruppe, 109  
 Wurzeln einer halbeinfachen Lie-Algebra, 106  
 Wurzelräume einer halbeinfachen Lie-Algebra,  
 106  
 Wurzelraum-Zerlegung, 106  
 Wurzelsystem, 109  
  
 zeitartige Vektoren, 11  
 zentrale Erweiterung, 122  
 Zentrum, 90  
 zerfallend, 99