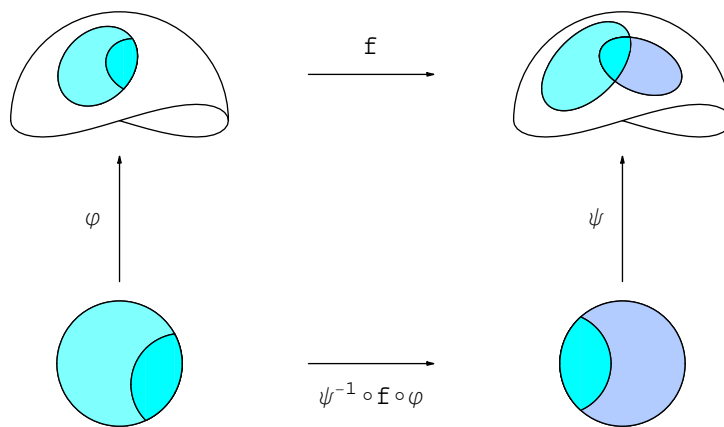


# Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Andreas Kriegl

email:andreas.kriegl@univie.ac.at

250096-1, SS 2018, Mo.-Do. 9<sup>45</sup>-10<sup>30</sup>, SR 9



Dies ist das Skriptum zu meiner gleichnamigen Vorlesung im Sommersemester 2015. Es besteht aus ausgewählten Teilen des viel umfassenderen Skriptums zur Differentialgeometrie, welches ebenfalls als PDF-Datei unter <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/diffgeom.pdf> downloadbar ist.

Bei der Auswahl des Inhalts habe ich mich an die Studienpläne gehalten. Demnach sollten insbesondere aus 'Höhere Analysis und elementare Differentialgeometrie' folgende Themen bekannt sein:

- Kurven (siehe [81, 5.5] und [86, Kapitel I]), Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  (siehe [2.4]), Partitionen der Eins (siehe [82, 7.6.2]),
- Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale (siehe [82, 7.5.10]),
- Multilinearformen (siehe [82, 8.2]), Differentialformen (siehe [82, 8.3]), orientierte Untermannigfaltigkeiten und Integration von Differentialformen (siehe [82, 8.6]), Satz von Stokes (siehe [82, 8.7.3]) und klassische Integralsätze (siehe [82, 8.1.2, 8.1.5, 8.1.7]).

Und in dieser Vorlesung sollen behandelt werden:

- abstrakte Mannigfaltigkeiten,
- Tangentialbündel, Vektorfelder und Flüsse, Lie Klammer,
- Differentialformen, äußere Ableitung und Cartan Kalkül,
- Integration und Satz von Stokes,
- Anwendungen (z. B. symplektische Geometrie, Differentialtopologie).

Der Aufbau des Skriptums ist somit der folgende:

Im Kapitel II erinnern wir zuerst an Mannigfaltigkeiten als Teilmengen eines Euklidischen Raums und führen sie danach als abstrakte Objekte ein, welche durch Verkleben von Euklidischen Räumen entstehen.

Im Kapitel III wird das Konzept der Ableitung auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Das führt zu Tangentialraum und Tangentialabbildung und wird benutzt, um einen Begriff von Teil- und Quotientenobjekten von Mannigfaltigkeiten zu bekommen.

Gewöhnliche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten werden im Kapitel IV eingeführt. Dazu werden die Tangentialräume zum Tangentialbündel vereinigt und Vektorfelder als Schnitte dieses Bündels untersucht.

Kapitel VI ist den Differentialformen und ihrer algebraischen Struktur gewidmet und dient auch als Vorbereitung für die Integration auf Mannigfaltigkeiten in Kapitel VII.

Ich werde am Ende des Semesters eine Liste der im Detail behandelten Abschnitte unter <https://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/2018SS-hist.html> online stellen.

Natürlich wird die aufmerksame LeserIn (Tipp-)Fehler finden können. Ich möchte hier gleich die Bitte aussprechen, mir diese mitzuteilen (Geteiltes Leid ist halbes Leid). Zukünftige Generationen von StudentInnen werden es zu schätzen wissen.

Andreas Kriegl, Wien im Februar 2018



# Inhaltsverzeichnis

II. Mannigfaltigkeiten	1
1. Beispiele zweidimensionaler Flächen	1
2. Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$	8
3. Beispiele von Teilmannigfaltigkeiten	12
4. Beispiele von Lie-Gruppen	24
5. Glatte Abbildungen	32
6. Abstrakte Mannigfaltigkeiten	34
7. Produkte und Summen von Mannigfaltigkeiten	43
8. Zerlegungen der Eins	45
9. Topologisches über Mannigfaltigkeiten	48
III. Tangentialraum	57
10. Tangentialraum und Derivationen	57
11. Immersionen	68
12. Submersionen	80
13. Faserbündel	80
IV. Vektorfelder	83
14. Tangentialbündel	83
15. Vektorfelder	88
16. Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung	92
17. Lie-Klammer	95
18. Integralmannigfaltigkeiten	106

VI. Differentialformen	115
19. Konstruktion und 1-Formen	115
20. Motivation für Formen höheren Grades	122
21. Multilineare Algebra, Tensoren	125
22. Vektorbündel-Konstruktionen	131
23. Differentialformen	133
24. Differentialformen auf Riemann MF	136
25. Graduierte Derivationen	139
26. Kohomologie	154
VII. Integration	163
27. Orientierbarkeit	163
28. Integration und der Satz von Stokes	188
29. Anwendungen der Integration auf die Kohomologie	193
Literaturverzeichnis	213
Index	219

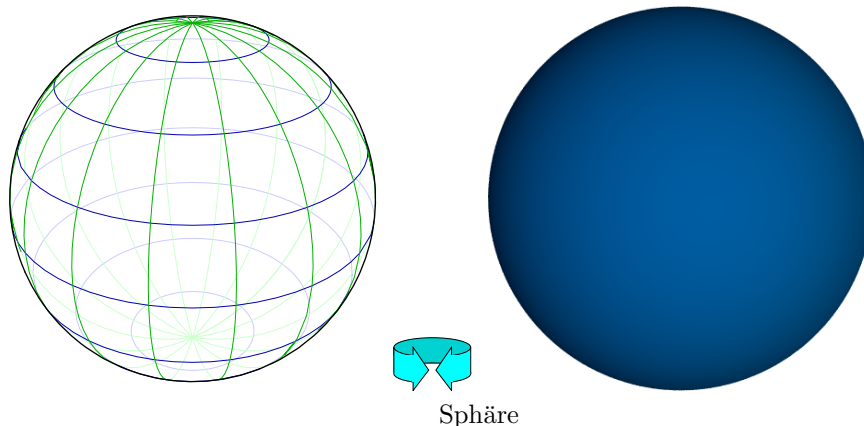
## II. Mannigfaltigkeiten

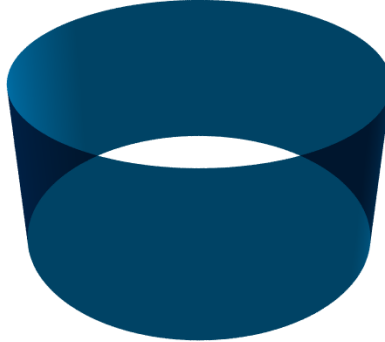
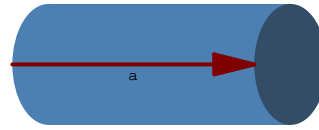
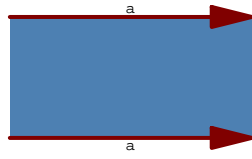
In diesem Kapitel führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Wir beginnen dabei spielerisch mit zweidimensionalen Teilmannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^3$ , sogenannten Flächen, verallgemeinern diese dann im zweiten Abschnitt zu Teilmannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ , und präzisieren im dritten Abschnitt die spielerischen Beispiele vom Anfang. Danach behandeln wir die klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten, die eine glatte Gruppenstruktur tragen, also von sogenannten Lie-Gruppen. Nach Einführung des Begriffs der glatten Abbildung haben wir genügend Einsicht, um uns abstrakten Mannigfaltigkeiten zuzuwenden, damit meine ich solche Mannigfaltigkeiten die nicht (von vornherein) in einem umgebenden Euklidischen Raum sitzen. Nach Produkten und disjunkten Vereinigungen von Mannigfaltigkeiten gehen wir dann noch auf die Reichhaltigkeit der glatten Funktionen auf ihnen ein, insbesondere betrifft das Trennungsaxiome wie etwa jenes von Hausdorff, Lokalkompaktheit und vor allem Parakompaktheit und die damit äquivalente Existenz von Partitionen der Eins, die das zentrale Hilfsmittel darstellen um von lokalen Konstruktionen (also z.B. solchen aus der Analysis) zu globalen übergehen zu können.

### 1. Beispiele zweidimensionaler Flächen

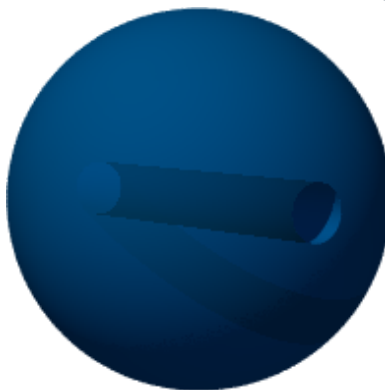
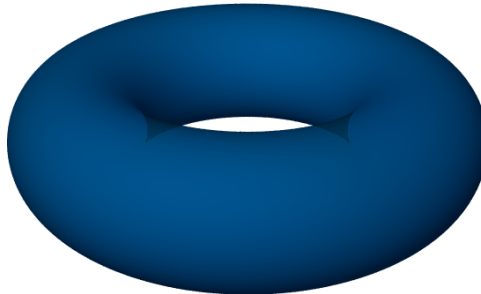
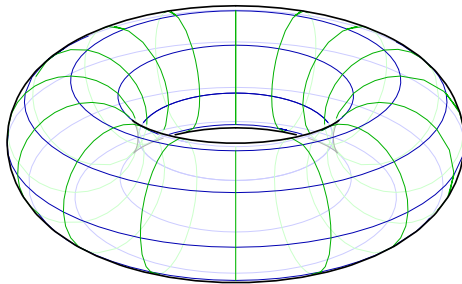
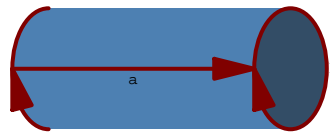
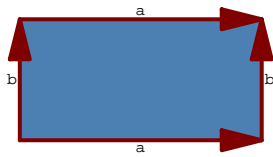
Wir wollen uns in diesem Abschnitt vorerst spielerisch mit zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vertraut machen. Das sind Objekte, die lokal, bis auf Verbiegungen und Dehnungen, wie eine Scheibe im  $\mathbb{R}^2$  aussehen.

#### 1.1 Beispiele orientierbarer Flächen.

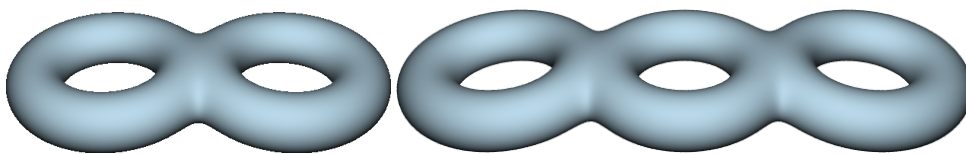




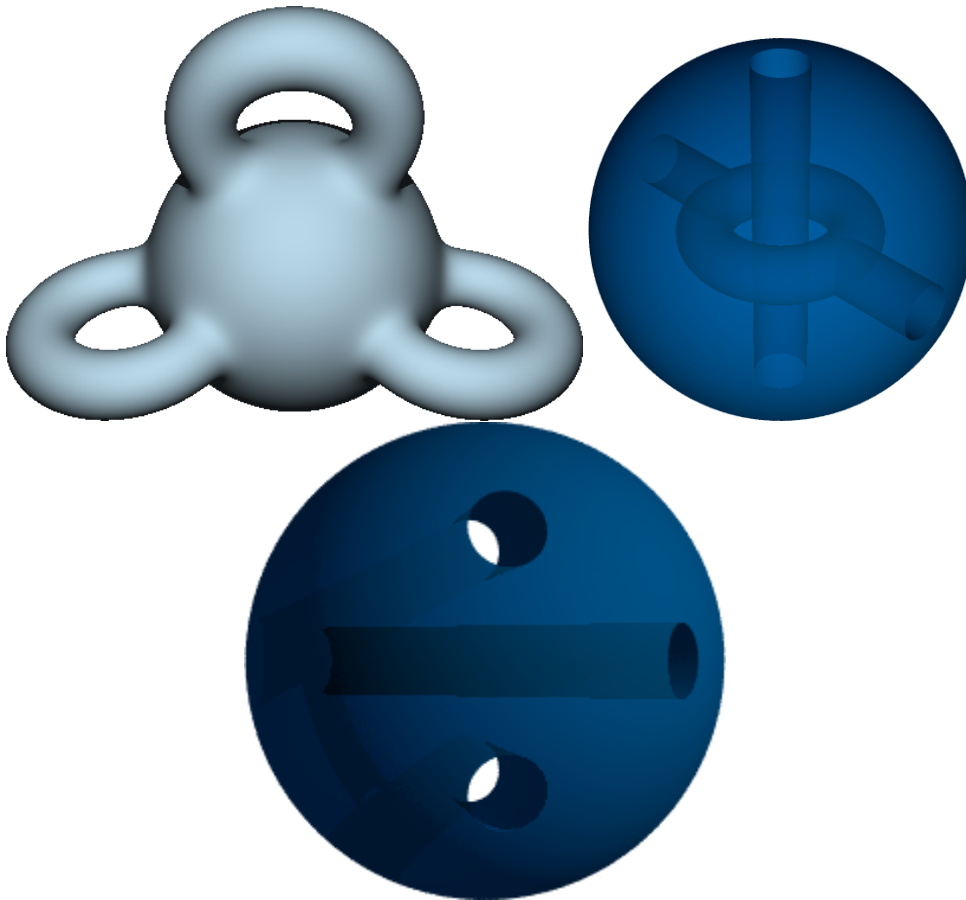
Zylinder



Torus



Orientierbare kompakte Flächen vom Geschlecht 2 und 3



Orientierbare kompakte Fläche vom Geschlecht 3

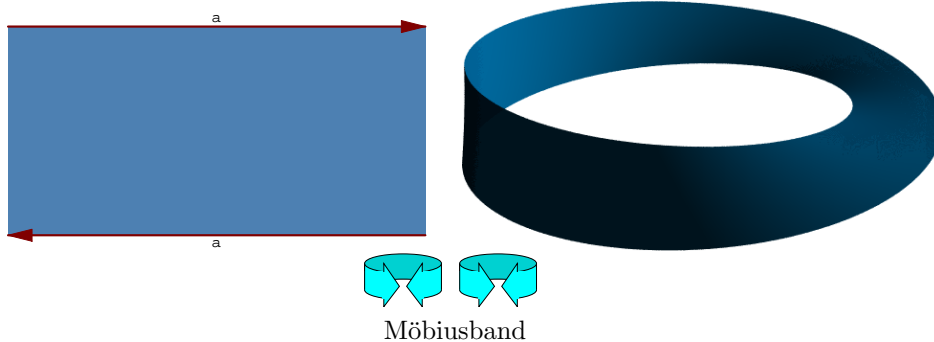
### 1.2 Klassifikationssatz für orientierbare Flächen.

Jede kompakte, zusammenhängende Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist homöomorph zu einer Fläche von Geschlecht  $g$ , d.h. entsteht aus der Sphäre durch Ankleben von  $g$  Zylinder.

Ohne Beweis, siehe z.B. [65, 9.3.5]. Einen Indizienbeweis geben wir in [1.4].

### 1.3 Beispiele nicht-orientierbarer Flächen.

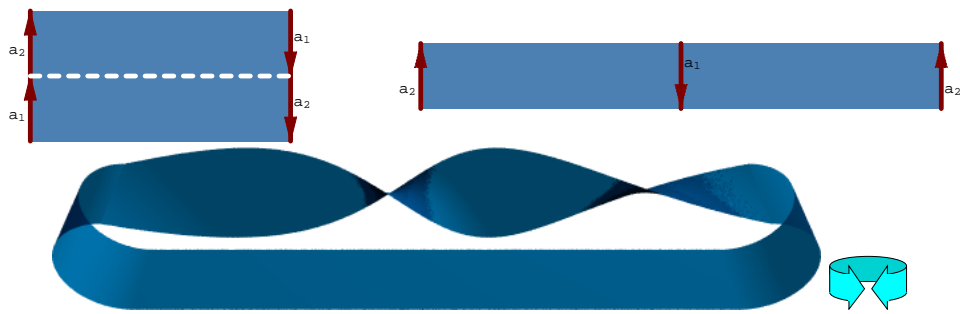
Beispiele von zweidimensionalen, zusammenhängenden, nicht orientierbaren Flächen:



Möbiusband

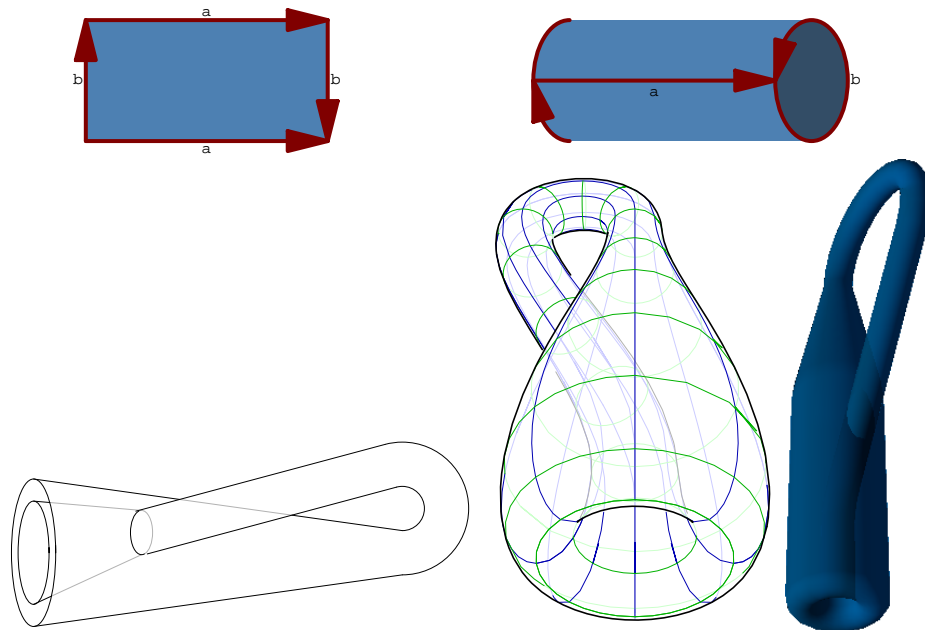
Schneidet man das Möbiusband der Länge nach auf, so erhält man ein zweifach verdrehtes Band, das man im  $\mathbb{R}^4$  aufdrehen kann (siehe [3.10]).





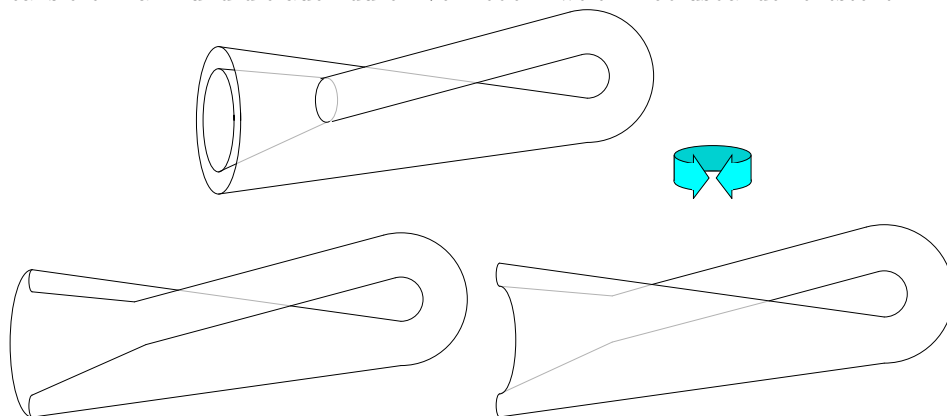
2-fach verdrehtes Möbiusband

Beispiele von zweidimensionalen, zusammenhängenden, kompakten, nicht orientierbaren Flächen:



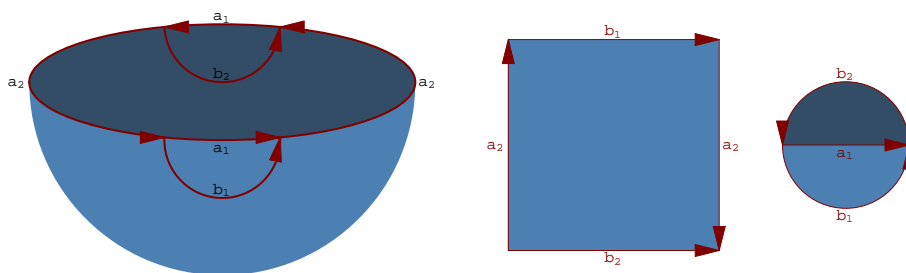
Klein'sche Flasche

Das nennt man die KLEIN'SCHE FLASCHE, die man im  $\mathbb{R}^4$  ohne Doppelpunkte realisieren kann und die auch durch Verkleben zweier Möbiusbänder entsteht.



Klein'sche Flasche zerschnitten

Ein anderes Beispiel ist die PROJEKTIVE EBENE  $\mathbb{P}^2$ , dies ist die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt im  $\mathbb{R}^3$ . Man kann die projektive Ebene aus der Sphäre auf folgende Weise erhalten: Die antipodalen Punkte auf der Sphäre erzeugen die gleiche Gerade und müssen miteinander identifiziert werden. Dazu kleben wir die nördliche Hemisphäre antipodal auf die südliche. Wir müssen noch die gegenüberliegenden Punkte am Äquator miteinander identifizieren. Hierzu verformen wir die Halbkugel zu einer Scheibe, von der wir auf beiden Seiten einen Halbkreis ausschneiden und erhalten nach Verkleben der antipodalen Punkte am Äquator ein Möbiusband und eine Scheibe. Nun muß man nur mehr den Rand der Scheibe mit dem des Möbiusbandes verkleben.

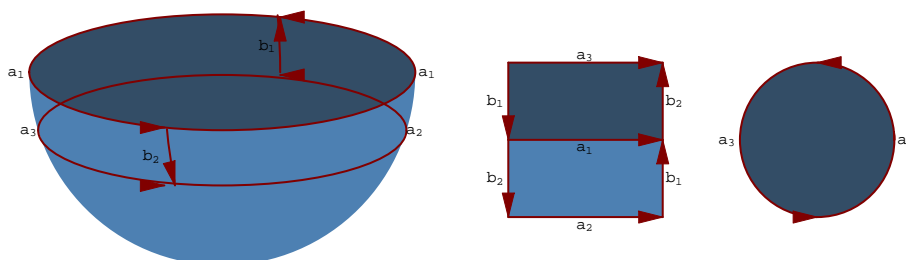


Projektive Ebene

Man kann sich das auf drei Arten vorstellen:

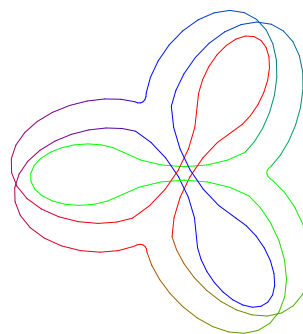
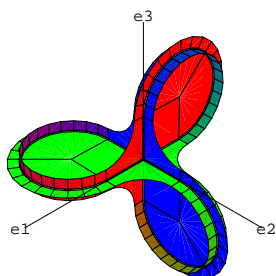
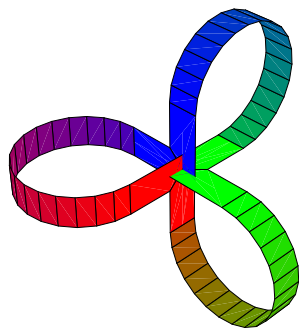
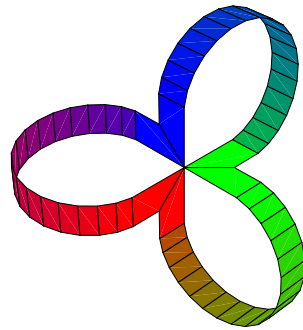
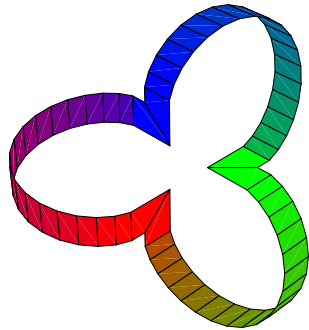
1) Man zeichnet das Möbiusband und klebt die Scheibe (mit Selbstdurchdringung) an.

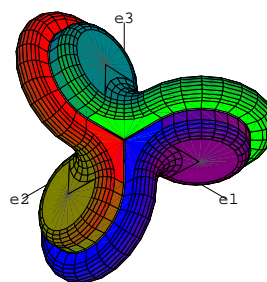
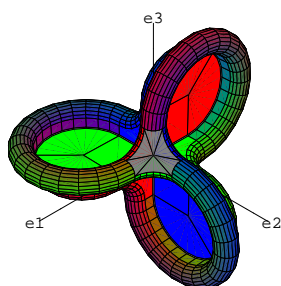
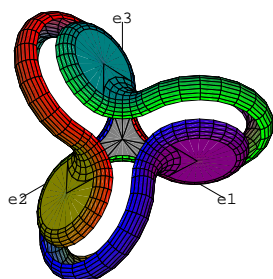
2) Man zeichnet die Scheibe und klebt das Möbiusband (mit Selbstdurchdringung) an. Das nennt man auch die KREUZHAUBE.



Kreuzhaube

3) Auch hier kleben wir an ein Möbiusband (dreifach verdreht und selbstdurchdrungen) eine Scheibe. Das nennt man auch BOY'S SURFACE.





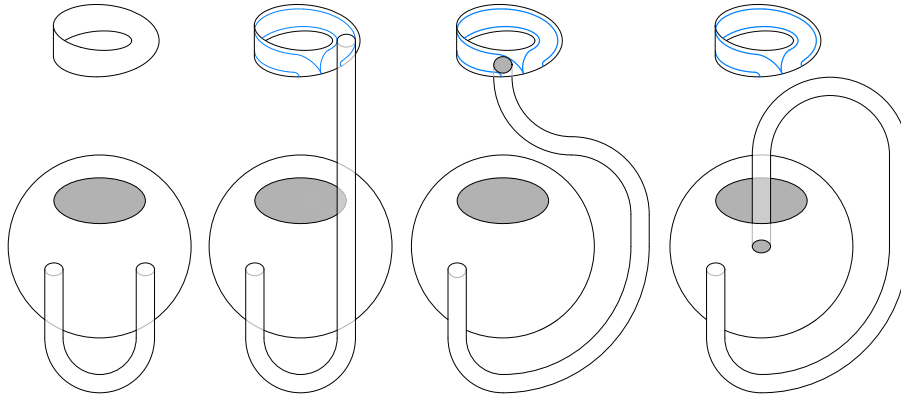
Konstruktion von Boys Fläche

#### 1.4 Klassifikationssatz nicht-orientierbarer Flächen.

Jede nicht orientierbare, zusammenhängende, kompakte Fläche entsteht aus einer Sphäre durch Ankleben von endlich vielen ( $\geq 1$ ) Kreuzhauben. Die Anzahl der angeklebten Kreuzhauben heißt Geschlecht der Fläche.

**Ohne Beweis**, siehe z.B. [65, 9.3.10]. Ein Indizienbeweis dafür und für [1.2] geht mittels Chirurgie wie folgt: Man sucht eine einfach geschlossene Kurve auf der Fläche  $M$ , welche  $M$  nicht in zwei Teile zerschneidet, und verbreitert diese Kurve zu einem Band, also einem am Ende verklebten Rechteck. Je nachdem ob dieses verdreht verklebt ist oder nicht, ist es ein Möbiusband oder ein Zylinder. Wir entfernen dieses Band und kleben an den/die beiden Schnittkreise eine/zwei Kreisscheiben und erhalten eine neue Fläche  $M'$ . Umgekehrt entsteht also  $M$  aus  $M'$  durch Ankleben eines Kreuzhaube oder eines Henkels. Wir fahren mit diesem Prozeß fort, bis die entstandene Fläche längs jeder einfach geschlossenen Kurve in zwei Teil zerfällt. Man überzeugt sich, daß diese dann homöomorph zur Sphäre ist, denn jede solche Schnittlinie läßt sich zu einem Zylinder erweitern und klebt man an die beiden Restteile Scheiben, so haben die kleineren entstandenen Flächen die selbe Eigenschaft. Also

entsteht  $M$  aus der Sphäre durch Ankleben von Henkeln und Kreuzhauben. Allerdings ist auch nicht offensichtlich, daß obiger Prozeß wirklich nach endlich vielen Schritten abbricht. Weiters bleibt noch zu zeigen, daß es genügt nur ausschließlich Henkel oder ausschließlich Kreuzhauben anzukleben. Dazu genügt es zu zeigen, daß wenn man in einen Torus ein Loch schneidet und daran ein Möbiusband klebt, so ist das das Gleiche, wie wenn man in eine Klein'sche Flasche ein Loch schneidet und daran ein Möbiusband klebt. Dies zeigt folgende Zeichnung:



Umwandlung von Torus in Klein'sche Flasche

## 2. Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt wollen wir Mannigfaltigkeiten als hinreichend "reguläre" Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  definieren. Wir werden sehen, daß diese auf verschiedenste Weise beschrieben werden können.

### 2.1 Definition (reguläre Abbildungen).

Zuerst verallgemeinern wir den Begriff der Regularität von Kurven aus [86, 1.2]. Eine glatte Abbildung  $f : U \rightarrow V$ , wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen sind, heißt REGULÄR, falls der Rang der Ableitung  $f'(x)$  in jedem Punkt  $x \in U$  so groß wie möglich, also gleich  $\min\{n, m\}$  ist.

Beachte, daß eine in einem Punkt reguläre Abbildung lokal um diesen Punkt regulär ist, denn der Rang kann lokal nicht fallen.

Falls also  $m \leq n$  ist, so bedeutet die Regularität, daß die Ableitung in jedem Punkt surjektiv ist.

Aus der linearen Algebra kennen wir folgende Beziehungen für den Rang einer linearen Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :

$$\text{rang}(A) := \dim(\text{Bild}(A)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Ker}(A))$$

Also bedeutet Regularität im Fall  $m \geq n$ , daß die Ableitung in jedem Punkt injektiv ist.

Für die Äquivalenz der in [2.4] zu gebende Beschreibung "schöner" Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  benötigen wir die folgenden zwei zentralen Sätze aus der mehrdimensionalen Analysis:

### 2.2 Inverser Funktionensatz.

Sei  $U$  offen im  $\mathbb{R}^n$  und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatt, mit  $f(0) = 0$ , und invertierbarer Ableitung  $f'(0)$  an der Stelle  $0$ . Dann ist  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. es gibt offene Umgebungen  $V, V'$  von  $0$ , sodaß  $f : V \rightarrow V'$  bijektiv und  $f^{-1}$  glatt ist.

Ohne Beweis, siehe reelle Analysis, z.B. [81, 6.2.1] und [81, 6.3.15].

### 2.3 Impliziter Funktionensatz.

Sei  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatt mit  $f(0, 0) = 0$  und  $\partial_2 f(0, 0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  invertierbar. Dann gibt es lokal eine eindeutige Lösung  $y(x)$  von  $f(x, y(x)) = 0$  und  $x \mapsto y(x)$  ist  $C^\infty$ . Genauer gesagt existiert eine offene  $0$ -Umgebung  $U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  so, daß für  $(x, y) \in U \times V$  gilt:  $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ .

**Beweis.** Siehe auch [81, 6.2.3] und [81, 6.3.15]. Wir definieren  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  mit  $F(x, y) := (x, f(x, y))$ . Diese Funktion ist glatt, und  $F(0, 0) = 0$ . Abgeleitet ergibt das eine  $(n + m) \times (n + m)$ -Matrix:

$$F'(0, 0) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ * & \partial_2 f(0, 0) \end{pmatrix}$$

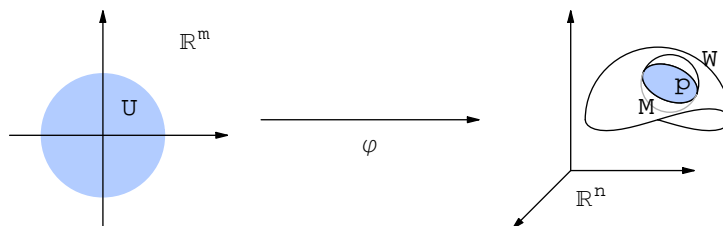
Diese ist invertierbar, also folgt aus dem inversen Funktionensatz [2.2], daß  $F^{-1}$  lokal existiert und glatt ist. Da  $F$  in der ersten Variable die Identität ist, gilt gleiches auch für  $F^{-1}$ , also sei  $(u, g(u, v)) := F^{-1}(u, v)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow F(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) = F^{-1}(x, 0) = (x, g(x, 0)) \Leftrightarrow y = g(x, 0) \quad \square \end{aligned}$$

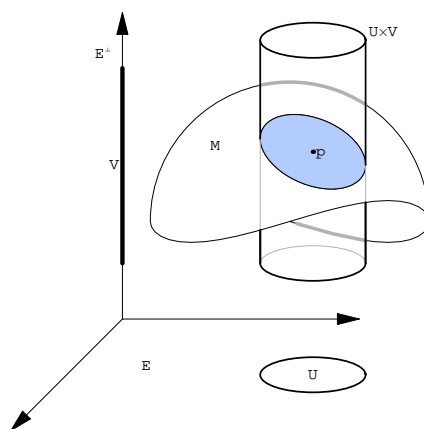
### 2.4 Satz (Charakterisierung von Teilmannigfaltigkeiten).

Für eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $p \in M$  und  $m \leq n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

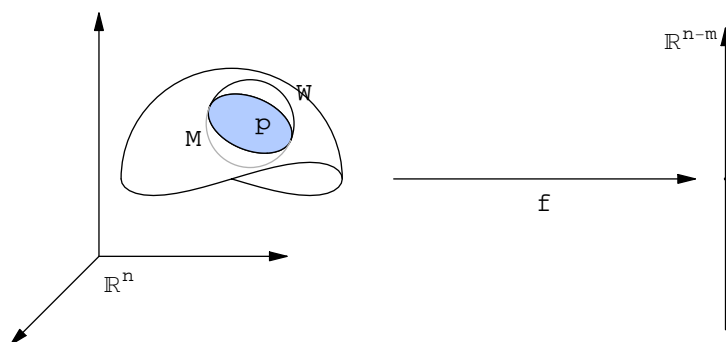
- (LOKALE PARAMETRISIERUNG) Es gibt eine glatte, bei  $0$  reguläre Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $U$  offen im  $\mathbb{R}^m$  ist mit  $0 \in U$  und  $\varphi(0) = p$ , so daß für jede offene Umgebung  $U_1 \subseteq U$  von  $0$  eine offene Umgebung  $W$  von  $p$  in  $\mathbb{R}^n$  existiert mit  $\varphi(U_1) = M \cap W$ .



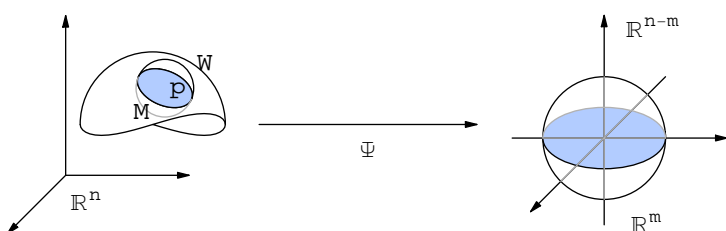
- (LOKALER GRAPH) Es gibt eine glatte Abbildung  $g : U \rightarrow V$ , wobei  $U$  offen in einem  $m$ -dimensionalen Teilraum  $E$  des  $\mathbb{R}^n$  und  $V$  offen in  $E^\perp$  ist, mit  $p \in M \cap (U \times V) = \text{Graph}(g) := \{(x, g(x)) : x \in U\} \subseteq E \times E^\perp \cong \mathbb{R}^n$ .



3. (LOKALE GLEICHUNG) Es gibt eine glatte, bei  $p$  reguläre Abbildung  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ , wobei  $W$  offen im  $\mathbb{R}^n$  ist mit  $p \in M \cap W = f^{-1}(0)$ .



4. (LOKALE TRIVIALISIERUNG) Es gibt einen Diffeomorphismus  $\Psi : W \rightarrow W'$ , wo  $W'$  offen in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  und  $W$  offen im  $\mathbb{R}^n$  ist, mit  $p \in M \cap W = \Psi^{-1}(W' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}))$ .



**Beweis.** O.B.d.A. sei  $p = 0$ , denn für eine affine Abbildung  $\alpha$  gelten die Aussagen für  $p \in M$  genau dann, wenn sie für  $\alpha(M)$  anstelle von  $M$  und  $\alpha(p)$  anstelle von  $p$  gelten, wobei wir die behaupteten regulären Abbildungen mit  $\alpha$  und/oder  $\alpha^{-1}$  zusammensetzen.

(**1**  $\Rightarrow$  **4**) Es sei  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung wie in **1**. Analog zu **[86, 2.3]** wollen wir  $\varphi$  zu einem lokalen Diffeomorphismus  $\Phi$  erweitern. Sei  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  das Bild von  $\varphi'(0)$ . Wegen der Regularität von  $\varphi$  ist  $\dim(E) = m$  und bezüglich  $E \times E^\perp \cong E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^n$  sei  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  und  $\varphi'(0) = (\varphi'_1(0), \varphi'_2(0))$ . Folglich ist  $\varphi'_2(0) = 0$  und  $\varphi'_1(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow E$  ist injektiv (also bijektiv).

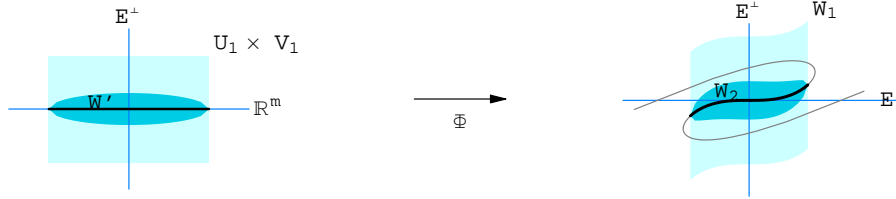
Sei  $\Phi : \mathbb{R}^m \oplus E^\perp \supseteq U \oplus E^\perp \rightarrow E \oplus E^\perp$  definiert durch

$$\Phi(u, v) := \varphi(u) + v = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) + v).$$

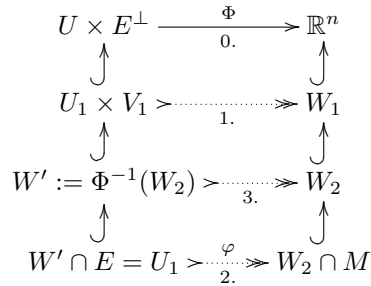
Die Jacobimatrix von  $\Phi$  bei  $(0, 0)$  hat Blockgestalt:

$$\Phi'(0, 0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(0) & 0 \\ \varphi_2'(0) & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Sie ist invertierbar, da  $\varphi_1'(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow E$  bijektiv ist! Aus dem Inversen-Funktionensatz [2.2] folgt, daß  $\Phi$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, d.h.  $\exists U_1 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $\exists V_1 \subseteq E^\perp$  offen und  $\exists W_1 \subseteq W$  offen, sodaß  $\Phi : U_1 \times V_1 \rightarrow W_1$  ein Diffeomorphismus ist.



Insbesondere ist  $\varphi(U_1) = \Phi(U_1 \times \{0\}) \subseteq W_1 \subseteq W$ . Wegen der Eigenschaft [1] von  $\varphi$  existiert ein offenes  $W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ , und o.B.d.A. ist  $W_2 \subseteq W_1$ , sodaß  $\varphi(U_1) = W_2 \cap M$ . Dann ist  $U_1 \times \{0\} \subseteq W' := \Phi^{-1}(W_2) \subseteq U_1 \times V_1$ , denn  $\Phi(U_1 \times \{0\}) = \varphi(U_1) = W_2 \cap M$ , und weiters ist  $\Phi : W' \rightarrow W_2$  ein Diffeomorphismus mit inverser Abbildung  $\Psi := \Phi^{-1} : W_2 \rightarrow W'$ . Somit gilt  $\Psi(W_2 \cap M) = U_1 \times \{0\} = W' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ .



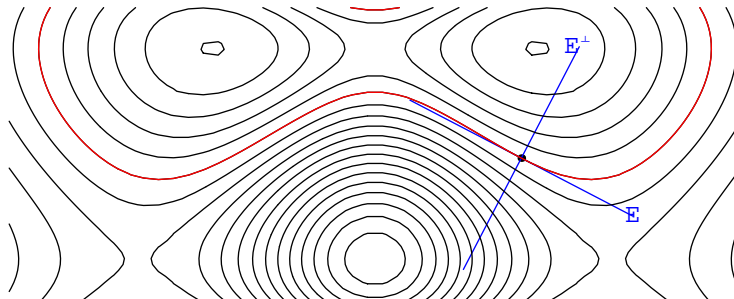
Insbesondere ist  $\varphi$  auf  $U_1$  die Einschränkung des Homöomorphismuses  $\Phi : W' \rightarrow W_2$ , also  $\varphi : U_1 \rightarrow M$  eine topologische Einbettung auf die offene Teilmenge  $W_2 \cap M$  von  $M$ .

([4]  $\Rightarrow$  [3]) Sei  $\Psi$  eine lokale Trivialisierung wie in [4] und  $f := \text{pr}_2 \circ \Psi$ , wobei  $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  die Projektion auf den 2. Faktor ist. Da  $f'(z) = \underbrace{\text{pr}_2 \circ \Psi'(z)}_{\text{surj.}}$   $\underbrace{\quad}_{\text{bij.}}$

surjektiv ist, ist  $f$  regulär. Sei  $z \in W$  dann gilt:

$$z \in M \Leftrightarrow \Psi(z) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \Leftrightarrow 0 = (\text{pr}_2 \circ \Psi)(z) = f(z).$$

([3]  $\Rightarrow$  [2]) Sei  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  eine lokale Gleichung wie in [3].



Wir definieren  $E := \text{Ker } f'(0)$  und verwenden  $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$ . Wegen

$$\underbrace{\dim \text{Ker } f'(0)}_E + \underbrace{\dim \text{Bild } f'(0)}_{n-m} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_n,$$

ist  $\dim E = m$  und  $\dim E^\perp = n - m$ . Gesucht ist eine Funktion  $g : E \rightarrow E^\perp$ , welche implizit gegeben ist als Lösung  $g(x) := y$  von  $f(x, y) = 0$  (d.h.  $(x, y) \in M$ ). Um



den impliziten Funktionensatz [2.3](#) anzuwenden, betrachten wir die zweite partielle Ableitung von  $f$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \partial_2 f(0,0) : E^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}.$$

Diese ist surjektiv, da wegen  $f'(0)(v_1, v_2) = \partial_1 f(0)(v_1) + \partial_2 f(0)(v_2)$  für  $(v_1, 0) \in E \times \{0\} \cong E = \text{Ker } f'(0)$  folgendes gilt:  $\partial_1 f(0)(v_1) = f'(0)(v_1, 0) = 0$ . Da  $f'(0) = \partial_2 f(0) \circ \text{pr}_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow E^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  surjektiv ist, ist also auch  $\partial_2 f(0) : E^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  surjektiv und wegen  $\dim(E^\perp) = n - m$  somit bijektiv. Aus dem impliziten Funktionensatz [2.3](#) folgt die Existenz einer offenen 0-Umgebung  $U \times V \subseteq W \subseteq E \times E^\perp$  und eine glatte Abbildung  $g : U \rightarrow V$ , mit  $g(x) = y \Leftrightarrow f(x, y) = 0$  für alle  $(x, y) \in U \times V$ .

(2  $\Rightarrow$  1) Sei  $M$  lokal als Graph von  $g : E \supseteq U \rightarrow V \subseteq E^\perp$  beschrieben. Wir definieren die glatte Abbildung  $\varphi : U \rightarrow E \times E^\perp \cong \mathbb{R}^n$  durch  $x \mapsto (x, g(x))$ . Bleibt zu zeigen, daß  $\varphi$  die Menge  $M$  lokal beschreibt. Dazu schließen wir für  $(x, y) \in U \times V =: W$  wie folgt:

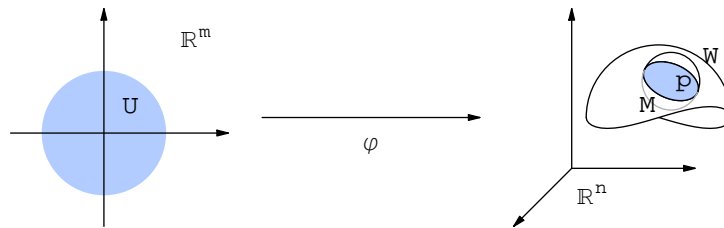
$$(x, y) \in M \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Graph}(g) \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow (x, y) = (x, g(x)) = \varphi(x).$$

Die Abbildung  $\varphi$  ist lokal eine topologische Einbettung, denn  $(x, y) \mapsto y$  beschreibt eine Linksinverse.  $\square$

### Definition (Konkrete Mannigfaltigkeit).

Eine Teilmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^n$  mit einer der obigen äquivalenten Eigenschaften für all ihre Punkte  $p \in M$  heißt  $C^\infty$ -(TEIL-)MANNIGFALTIGKEIT (DES  $\mathbb{R}^n$ ) der Dimension  $m$ . Im Gegensatz zu Kurven dürfen diese Mannigfaltigkeiten selbst für  $m = 1$  keine Doppelpunkte besitzen.

Eine glatte reguläre Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  mit offenen  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $\varphi(0) = p$ , die eine topologische Einbettung auf eine offene Teilmenge von  $M$  ist, heißt lokale (bei  $p$  ZENTRIERTE) PARAMETRISIERUNG von  $M$ . In ([1](#)  $\Rightarrow$  [4](#)) haben wir gezeigt, daß ein  $\varphi$ , welches [1](#) erfüllt, lokal eine Parametrisierung (auf einer kleineren 0-Umgebung) ist.



Die Komponenten  $u^1, \dots, u^m$  der Umkehrabbildung  $(u^1, \dots, u^m) = u = \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$  zu einer lokalen Parametrisierung  $\varphi$  heißen **LOKALE KOORDINATEN** von  $M$ . Punkte  $p \in M$  können also lokal nach Vorgabe einer Parametrisierung  $\varphi$  durch  $m$  Zahlen  $u^1(p), \dots, u^m(p)$  beschrieben werden.

## 3. Beispiele von Teilmannigfaltigkeiten

In diesen Abschnitt geben wir nun eine Reihe von Beispielen von Teilmannigfaltigkeiten  $M$  und machen damit auch die Flächen aus [1](#) präzise.

### 3.1 Kreis.

1. Gleichung:  $x^2 + y^2 = R^2$ .  
D.h.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) := x^2 + y^2 - R^2$  beschreibt eine Gleichung für  $M$ , die auf ganz  $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  regulär ist.
2. Parametrisierung:  $\varphi \mapsto (x, y) := (R \cdot \cos \varphi, R \cdot \sin \varphi)$ .  
Für alle  $(x_0, y_0) \in M$  existiert ein  $\varphi_0 \in \mathbb{R}$  (gegeben durch  $e^{i\varphi_0} = (x_0, y_0)$ ), sodaß  $\varphi \mapsto (x, y)$  eine lokale Parametrisierung von  $U := ]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[$  auf  $W \cap M$  mit  $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(-x_0, -y_0)\}$  ist.
3. Graph:  $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$  oder  $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$   
Sei z.B.  $E := \mathbb{R} \times \{0\}$ ,  $U := ]-R, +R[ \subset E$  und  $V := ]0, +R[ \subset E^\perp$ . Dann ist  $M \cap (U \times V) = \{(x, \sqrt{R^2 - x^2}) : x \in U\}$  eine lokale Darstellung von  $M$  als Graph von  $g : U \rightarrow V$ .
4. Trivialisierung:  $\Psi^{-1} : (r, \varphi) \mapsto (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi)$  also  $\Psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\Psi(M) = \{R\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ . Dies sind gerade Polarkoordinaten.

### 3.2 Zylinder.

1. Gleichung:  $x^2 + y^2 + 0 \cdot z = R^2$ .  
Beachte, daß dies die gleiche Gleichung wie jene vom Kreis ist, allerdings nun aufgefaßt als Gleichung am  $\mathbb{R}^3$ .
2. Parametrisierung:  $(\varphi, z) \mapsto (R \cdot \cos \varphi, R \cdot \sin \varphi, z)$ . Wir erhalten diese Parametrisierung indem wir einen Erzeuger des Zylinders vermöge  $z \mapsto (R, 0, z)$  nach Bogenlänge parametrisieren und diese mittels Winkel  $\varphi$  vermöge

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

um die  $z$ -Achse drehen also

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

betrachten.

3. Graph:  $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$  oder  $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ .
4. Trivialisierung:  $(\varphi, r, z) \leftrightarrow (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi, z)$ , das sind die Zylinderkoordinaten.

Eine Parametrisierung  $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist (per Definition) genau dann LÄNGEN-BEWAHREND, wenn die Länge jeder Kurve  $c : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$  gleich jener der Bildkurve  $f \circ c : [a, b] \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, also

$$\int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b |(f \circ c)'(t)| dt = \int_a^b |f'(c(t))(c'(t))| dt$$

gilt. Die ist genau dann erfüllt, wenn  $f'(p)$  für alle  $p \in U$  eine Isometrie ist, also

$$|f'(p)(v)| = |v| \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^m$$

erfüllt: Sei nämlich  $f$  Längen-bewahrend,  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $c_s : t \mapsto p + t s v$ . Dann ist  $c_s : [0, 1] \rightarrow U$  für alle  $s > 0$  nahe  $p$  und somit

$$s |v| = \int_0^1 |c'_s(t)| dt = \int_0^1 |f'(c_s(t))(s v)| dt = s \int_0^1 |f'(c_s(t))(v)| dt$$

und da  $c_s \rightarrow c_0$  für  $s \rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $[0, 1]$  konvergiert ist auch

$$|v| = \int_0^1 |f'(c_0(t))(v)| dt = \int_0^1 |f'(p)(v)| dt = |f'(p)(v)|.$$


Die Umkehrung ist offensichtlich.

Obige Parametrisierung  $f : (\varphi, z) \mapsto (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$  ist nicht Längen-bewahrend für  $R \neq 1$ , denn

$$|f'(\varphi, z)(1, 0)| = \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi, z) \right| = |R(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)| = R \neq |(1, 0)|.$$

Dies kann aber leicht korrigiert werden, wenn wir die neue Parametrisierung  $f : (\varphi, z) \mapsto (R e^{i\varphi/R}, z)$  betrachten. Deren Ableitung ist

$$f'(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\varphi}{R}) & 0 \\ \cos(\frac{\varphi}{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Spalten bilden nun ein Orthonormalsystem, also ist  $f'(\varphi, z)$  eine Isometrie und somit  $f$  Längenbewahrend. 

### 3.3 Kegel.

Drehung einer Geraden durch Null mit Anstieg  $\alpha$  um die  $z$ -Achse.

1. Gleichung:  $\tan \alpha = z/\sqrt{x^2 + y^2}$  oder  $(x^2 + y^2) \tan^2 \alpha = z^2$ . Ersters beschreibt den Kegel, letzteres den Doppelkegel. Die Gleichung ist nicht regulär bei  $(0, 0, 0)$ , also müssen wir die Spitze entfernen, denn dort ist der (Doppel-)Kegel keine Mannigfaltigkeit.

2. Parametrisierung:  $(\varphi, s) \mapsto (s \cos \alpha \cos \varphi, s \cos \alpha \sin \varphi, s \sin \alpha)$ .

Diese Parametrisierung erhalten wir, indem wir eine Erzeuger der Kegels nach Bogenlänge als  $s \mapsto (s \cos \alpha, 0, s \sin \alpha)$  parametrisieren und diese mittels Winkel  $\varphi$  vermöge

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

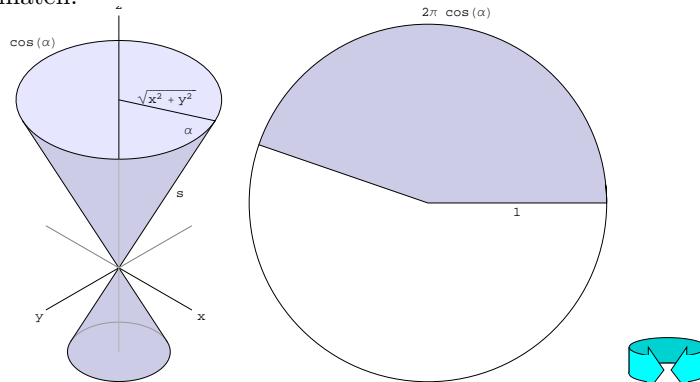
um die  $z$ -Achse drehen also

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \cos \alpha \\ 0 \\ s \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \alpha \cos \varphi \\ s \cos \alpha \sin \varphi \\ s \sin \alpha \end{pmatrix}$$

betrachten.

3. Graph:  $z = \pm \tan \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$

4. Trivialisierung:  $(\varphi, \alpha, s) \leftrightarrow (s \cos \alpha \cos \varphi, s \cos \alpha \sin \varphi, s \sin \alpha)$ , das sind die Kugelkoordinaten.



Eine bessere Parametrisierung erhält man durch Aufrollen des Kegels in eine Ebene:

$$(x, y) \mapsto (r, \psi) \mapsto \left( s := r, \varphi := \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ r \cos \alpha \sin \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ r \sin \alpha \end{pmatrix},$$

wobei  $(x, y)$  kartesische und  $(\psi, r)$  Polarkoordinaten in der Ebene sind.

Die Ableitung dieser Parametrisierung ist die Zusammensetzung von

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & -r \cos \alpha \cdot \sin \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cdot \sin \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & r \cos \alpha \cdot \cos \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \sin \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -r \sin \psi \\ \sin \psi & r \cos \psi \end{pmatrix}^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \psi \cos \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) - \sin \psi \sin \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & \cos \alpha \sin \psi \cos \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) - \cos \psi \sin \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cos \psi \sin \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) + \sin \psi \cos \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & \cos \alpha \sin \psi \sin \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) + \cos \psi \cos \left( \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cos \psi & \sin \alpha \sin \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

von der man mit längerer direkter Rechnung zeigen kann, daß sie isometrisch ist.

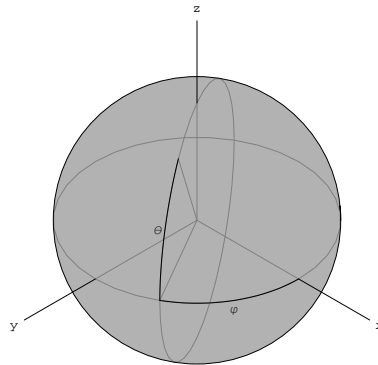
### 3.4 Sphäre.

1. Gleichung:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

2. Parametrisierung:  $(\varphi, \vartheta) \mapsto (R \cos \vartheta \cos \varphi, R \cos \vartheta \sin \varphi, R \sin \vartheta)$  mit Längengrade  $\varphi$  und Breitengrade  $\vartheta$ . Wieder erhalten wir diese Fläche indem wir die Schnittkurve mit der  $x$ - $z$ -Ebene betrachten, dem vermöge  $\vartheta \mapsto R(\cos \vartheta, 0, \sin \vartheta)$  parametrisierten (Halb-)Kreis und diesen mittels Winkel  $\varphi$  um die  $z$ -Achse drehen um

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \\ 0 \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

zu erhalten.



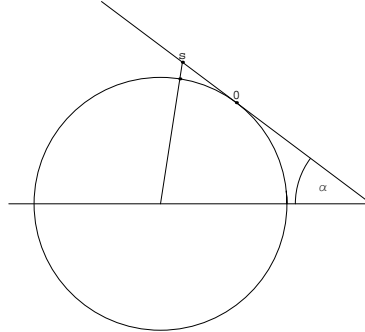
3. Graph:  $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

4. Trivialisierung: Kugelkoordinaten.

Man kann eine Sphäre auch parametrisieren, indem man auf den berührenden Kegel mit Anstieg  $\alpha$  projiziert:

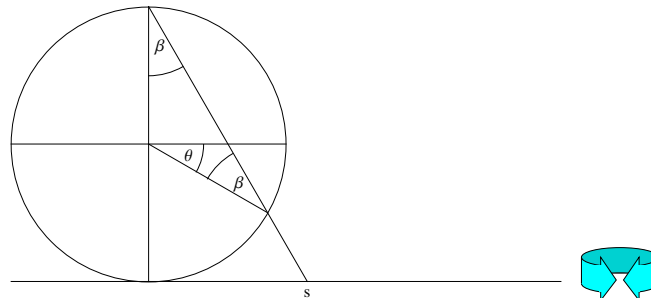
$$(x, y) \mapsto (\varphi, s) \mapsto (\varphi, \vartheta(s)) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix},$$

dabei sind  $(\varphi, s)$  die Parameter der obigen Parametrisierung des Kegels und  $(\varphi, \vartheta)$  die Parameter der Sphäre sind.



Spezielle Wahlen der Funktion  $\vartheta$  liefern die Radialprojektion, bzw. die Normalprojektion auf die Erzeugenden des Kegels, siehe Aufgabe [86, 72.42]. Insbesondere ist man an Flächen- bzw. an Winkel-erhaltenden Abbildungen interessiert, denn wie wir noch sehen werden ist eine Längen-erhaltende Abbildung nicht möglich – man kann die Sphäre nicht durch Aufwickeln eines Blatt Papiers erzeugen.

Besonders wichtig ist die stereographische Projektion: Man projiziert von einem Punkt der Sphäre (o.B.d.A. dem Nordpol) auf die Tangentialebene im antipodalen Punkt.



Es ist  $2\beta + (\frac{\pi}{2} - \vartheta) = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}$  und somit ist

$$\frac{s}{2} = \tan \beta = \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{1 + \tan(\vartheta/2)}{1 - \tan(\vartheta/2)}.$$

Diese Projektion ist winkelerhaltend und Kreise werden auf Kreise oder Geraden abgebildet, siehe Aufgabe [86, 72.41].

Für die Seefahrt ist diese Darstellung der Sphäre allerdings nicht optimal: Dort ist man besonders an den Loxodromen interessiert, daß sind jene Kurven auf der Sphäre, welche die Längengrade unter einen fixen Winkel schneiden, denn das sind gerade die Bahnen die man zurücklegt wenn man bezüglich Norden (Polarstern oder Kompass) konstanten Kurs hält. In der stereographischen Projektion sind die Bilder der Längengrade Geraden durch 0, also die Loxodrome (logarithmische) Spiralen. Projiziert man hingegen auf den längs des Äquators berührenden Zylinder, dann werden die Längengrade parallele Geraden und wenn man die Projektion Winkel-erhaltend wählt (die sogenannte Mercator-Projektion) dann sind auch die Loxodrome Geraden, also der Kurs sehr leicht durch Einzeichnen der Verbindungsgerade zwischen Start- und Zielort zu bestimmen.

### 3.5 $n$ -Sphäre.

$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Die Funktion  $f : x \mapsto |x|^2 - 1$  ist eine reguläre Gleichung für  $S^n$ , denn  $f'(x)(x) = 2|x|^2 = 2$  für  $x \in S^n$ . Als lokale Koordinaten verwenden wir die stereographische Projektion (aber diesmal auf die Äquatorialebene, was einen Faktor  $1/2$  bzgl. der gerade Besprochenen ergibt), d.h. wir suchen zu  $x \in S^n$  jenes  $y \in \mathbb{R}^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$  welches auf der Geraden durch den gewählten Pol  $p \in S^n$  und  $x$  liegt, also  $y = p + \lambda(x - p)$  mit  $\lambda > 0$  s.d.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, p + \lambda(x - p) \rangle = |p|^2 - \lambda \langle p, p - x \rangle \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{\langle p, p - x \rangle} = \frac{1}{1 - \langle p, x \rangle} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= (1 - \lambda)p + \lambda x = \frac{1}{1 - \langle p, x \rangle} (x - \langle p, x \rangle p). \end{aligned}$$

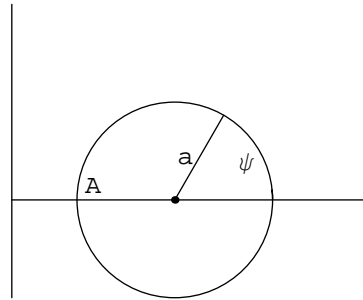
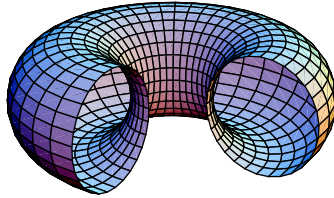
Umgekehrt

$$\begin{aligned} x &= p + \mu(y - p) \text{ mit } |x| = 1 \\ \Rightarrow 1 &= \langle x, x \rangle = \langle p + \mu(y - p), p + \mu(y - p) \rangle \\ &= 1 + 2\langle p, \mu(y - p) \rangle + \mu^2 \langle y - p, y - p \rangle \\ \Rightarrow 0 &= \mu^2 |y - p|^2 + 2\mu \langle p, y - p \rangle = \mu(\mu |y - p|^2 - 2\langle p, y - p \rangle). \end{aligned}$$

Aus  $\mu = 0$  erhalten wir die uninteressante Lösung  $x = p$ . Andernfalls ist

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2(1 - \langle p, y \rangle)}{|y|^2 - 2 \underbrace{\langle y, p \rangle}_0 + 1} = \frac{2}{|y|^2 + 1} \text{ und damit} \\ x &= \frac{1}{|y|^2 + 1} (2y + (|y|^2 - 1)p) \end{aligned}$$

### 3.6 Torus.



1. Gleichung:  $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - A)^2 = a^2$
2. Parametrisierung:

$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} (A + a \cos \psi) \cos \varphi \\ (A + a \cos \psi) \sin \varphi \\ a \sin \psi \end{pmatrix},$$

mit Längengrade  $\varphi$  und Breitengrade  $\psi$ . Dies ist nicht Längen-bewahrend.

Für den speziellen Torus  $a^2 := A^2 - 1$  mit  $A > 1$  berechnen wir das Urbild unter der stereographischen Projektion  $\mathbb{R}^4 \supset S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  bezüglich des Punktes  $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$  wie folgt:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \frac{1}{1 - y_2} (x_1, y_1, x_2, 0) \text{ da } z \mapsto \frac{z - \langle z, p \rangle p}{1 - \langle z, p \rangle} \text{ ist.}$$

Diesem Torus entspricht folgende Teilmenge des  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \\ \left(\frac{x_2}{1-y_2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1-y_2} - A\right)^2 = A^2 - 1 \end{cases}$$

Unter Verwendung der ersten Gleichung formen wir die zweite wie folgt um:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{x_2}{1-y_2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1-y_2} - A\right)^2 - A^2 + 1 \\ &= \frac{x_2^2}{(1-y_2)^2} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{(1-y_2)^2} - 2A \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1-y_2} + 1 \\ &= \frac{1-y_2^2}{(1-y_2)^2} - 2A \frac{\sqrt{1-(x_2^2 + y_2^2)}}{1-y_2} + 1 \\ &\Leftrightarrow 2A \sqrt{1-(x_2^2 + y_2^2)} = 1 + y_2 + (1-y_2) = 2 \end{aligned}$$

Also wird der Torus durch folgendes Gleichungssystem beschrieben:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \\ 1 - (x_2^2 + y_2^2) = \frac{1}{A^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{A^2} \dots \text{Kreis im } \mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\} \\ x_2^2 + y_2^2 = \frac{A^2 - 1}{A^2} = \frac{a^2}{A^2} \dots \text{Kreis im } \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

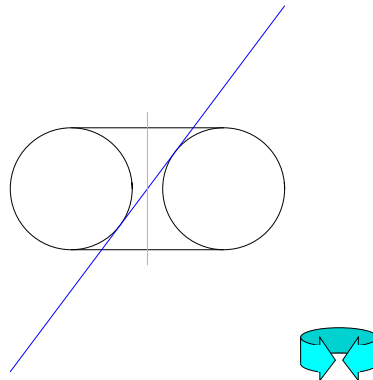
Der Torus ist also das kartesische Produkt  $S^1 \times S^1$  von zwei aufeinander normalstehenden Kreisen.

Die Parametrisierung

$$(\varphi, \psi) \mapsto \left(\frac{1}{A} \cos(A\varphi), \frac{1}{A} \sin(A\varphi), \frac{a}{A} \cos\left(\frac{A\psi}{a}\right), \frac{a}{A} \sin\left(\frac{A\psi}{a}\right)\right)$$

ist dann Längen-bewahrend, also läßt sich ein Torus im  $\mathbb{R}^4$  durch Einrollen einer Ebene erzeugen.

Bemerkung: Folgender spezielle Schnitt durch den Torus im  $\mathbb{R}^3$  ergibt zwei einander schneidende Kreise:



Wir verwenden auf der Schnittebene  $z = \frac{a}{\sqrt{A^2 - a^2}}x$  die Basis mit den orthonormalen Vektoren  $(\frac{\sqrt{A^2 - a^2}}{A}, 0, \frac{a}{A})$  sowie  $(0, 1, 0)$  und bezeichnen mit  $(s, y)$  die entsprechenden

Koordinaten. Dann ist  $x = \frac{\sqrt{A^2 - a^2}}{A} \cdot s$  und  $z = \frac{a}{A} \cdot s$ . Setzen wir dies in die Torusgleichung  $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - A)^2 = a^2$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{A}s\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{A^2 - a^2}{A^2}s^2 + y^2} - A\right)^2 &= a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2(A^2 - s^2) &= \left(\sqrt{(A^2 - a^2)s^2 + A^2y^2} - A\right)^2 \\ &= (A^2 - a^2)s^2 + A^2y^2 + A^4 - 2A^2\sqrt{(A^2 - a^2)s^2 + A^2y^2} \\ \Leftrightarrow s^2 + y^2 + (A^2 - a^2) &= 2\sqrt{(A^2 - a^2)s^2 + A^2y^2} \\ \Leftrightarrow (s^2 + y^2 + (A^2 - a^2))^2 &= 4(A^2 - a^2)s^2 + 4A^2y^2 \\ \Leftrightarrow (A^2 - (s^2 + (y + a)^2)) \cdot (A^2 - (s^2 + (y - a)^2)) &= 0, \end{aligned}$$

und das ist die Gleichung zweier Kreise mit Mittelpunkte  $(0, \pm a)$  in den  $(s, y)$ -Koordinaten und Radius  $A$ .

### 3.7 Hopffaserung $S^3 \rightarrow S^2$ .

Sie ist definiert durch folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\text{Hopffaserung}} & S^2 \\ \downarrow & & \downarrow \text{stereogr. Proj.} \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \frac{z_2}{z_1} \end{array}$$

Da die Inverse zur stereographischen Projektion um  $p = (0, 0, 1)$  die Abbildung  $y \mapsto \frac{2y + (|y|^2 - 1)p}{|y|^2 + 1} = \frac{1}{|y|^2 + 1}(2y, |y|^2 - 1)$  ist, bekommen wir folgende Formel für die Hopffaserung:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) &\mapsto \frac{1}{|z_2/z_1|^2 + 1} \left( 2 \frac{z_2}{z_1}, \left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 - 1 \right) = \\ &= \frac{z_1 \bar{z}_1}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \left( 2 \frac{z_2}{z_1}, \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{z_1 \bar{z}_1} \right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{|z_1|^2 + |z_2|^2}}_{1 \text{ weil } (z_1, z_2) \in S^3} \left( 2z_2 \bar{z}_1, |z_2|^2 - |z_1|^2 \right) \in S^2 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Urbilder in der  $S^3$  eines Breitenkreises auf der  $S^2$ , dabei sind  $\vartheta$  die Breitengrade.

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) \in S^3, \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = r (= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right)) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = r|z_1| \\ (z_1, z_2) \in S^3 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2|^2 = r^2|z_1|^2 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = r|z_1| \\ |z_1|^2(1 + r^2) = 1 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2|^2 = r^2 \frac{1}{1 + r^2} \\ |z_1|^2 = \frac{1}{1 + r^2} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Das entspricht nach [3.6](#) unter der stereographischen Projektion  $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  einem Torus im  $\mathbb{R}^3$ , wo  $A = \sqrt{r^2 + 1}$  und  $a = r$  ist.



Wir betrachten das Urbild in  $S^3$  des Südpols auf der  $S^2$ :

$$(0, 0, -1) \in S^2 \stackrel{\wedge}{=} (r = 0) \in \mathbb{R}^2 \stackrel{\wedge}{=} (|z_1| = 1, z_2 = 0) \subset S^3,$$

bzw. des Nordpols auf der  $S^2$ :

$$(0, 0, +1) \in S^2 \stackrel{\wedge}{=} (r = \infty) \subset \mathbb{R}^2 \stackrel{\wedge}{=} (z_1 = 0, |z_2| = 1) \subset S^3.$$

Wir behaupten allgemein: das Urbild jedes Punktes auf der  $S^2$  (welcher bzgl. der stereographischen Projektion  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $r := |z_0|$ ) gegeben ist, ist ein Kreis in der  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ , den man als Schnitt der Sphäre  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  mit der Ebene  $z_2 = z_1 z_0$  erhält:

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_1, z_2) \in S^3 \\ \frac{z_2}{z_1} = z_0 \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2|^2 + |z_1|^2 = 1 \\ z_2 = z_1 z_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_1|^2 = \frac{1}{1+r^2} \\ |z_2|^2 = r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ z_2 = z_1 z_0 \end{array} \right\}$$

d.h.  $z_1$  durchläuft einen Kreis, gleichzeitig durchläuft  $z_2$  ebenso einen Kreis.

In stereographischen Koordinaten entspricht den ersten beiden Gleichungen im  $\mathbb{R}^3$  der Torus  $T : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{r^2 + 1})^2 = r^2$ . O.B.d.A. sei  $r = z_0 \in \mathbb{R}$ , ansonsten drehen wir  $z_0$  um  $e^{-i\vartheta}$ , was einer Drehung um die  $z$ -Achse in  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  entspricht.

$$\text{Auf der } S^3 : \left\{ \begin{array}{l} z_2 = r z_1 \\ |z_2|^2 = r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 = \frac{1}{1+r^2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 = r x_1, y_2 = r y_1 \\ |z_2|^2 = r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 = \frac{1}{1+r^2} \end{array} \right\}$$

$$\text{Entspricht im } \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} z = r x \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 2r y \\ z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{r^2 + 1})^2 = r^2 \end{array} \right\}$$

Wobei wir  $z_1 = x_1 + i y_1$ ,  $z_2 = x_2 + i y_2$  gesetzt haben und die Formeln für die stereographische Projektion verwendeten:

$$x_1 = \frac{2x}{1 + |(x, y, z)|^2} \quad y_1 = \frac{2y}{1 + |(x, y, z)|^2}$$

$$x_2 = \frac{2z}{1 + |(x, y, z)|^2} \quad y_2 = \frac{|(x, y, z)|^2 - 1}{1 + |(x, y, z)|^2}.$$

Also ist das Urbild eines Punktes in den beiden Schnittkreisen des Torus mit der Ebene  $z = rx$  erhalten. Eine genauere Analyse liefert, daß es genau der vorne bzgl.  $y$  liegende der beiden ist.

Das Äußere des Volltorus in der  $S^3$  ist wieder ein Torus, wobei das Innere das Urbild der Südhalbkugel und das Äußere das Urbild der Nordhalbkugel ist.



### 3.8 Mannigfaltigkeit der linearen Abbildungen fixen Ranges.

Der Raum  $L_r(n, m)$  aller  $T \in L(n, m)$  von fixen Rang  $r$  ist eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension  $r(n + m - r)$ .

Für maximales  $r = \min\{n, m\}$  ist diese Dimension  $n \cdot m = \dim(L(n, m))$ , also ist in diesem Fall  $L_r(n, m)$  offen in  $L(n, m)$ .

**Beweis.** Wir beschreiben  $L_r(n, m)$  lokal als Graph. Sei dazu  $T_0 \in L_r(n, m)$ , d.h.  $\text{rang}(T_0) = \dim \text{Bild } T_0 = r$ . Es sei  $F := \text{Bild } T_0$  und  $E := (\text{Ker } T_0)^\perp$ . Dann ist  $T_0|_E : E \rightarrow F$  injektiv, und wegen  $\dim E = n - \dim \text{Ker } T_0 = \dim \text{Bild } T_0 = \dim F = r$  sogar bijektiv. Bezüglich der orthogonal-Zerlegungen  $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$  und  $\mathbb{R}^m = F \oplus F^\perp$  hat also  $T_0$  folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \text{ mit } B_0 = 0, C_0 = 0, D_0 = 0 \text{ und } A_0 \text{ invertierbar.}$$

Sei nun  $U$  die (wegen  $GL(E) \subseteq L(E, E)$  offen) offene Umgebung aller Matrizen  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  mit  $A$  invertierbar. Dann liegt  $T$  in  $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  genau dann wenn,  $\dim \text{Bild } T = r$ . Es ist

$$T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + Bw \\ Cv + Dw \end{pmatrix}.$$

Somit ist  $T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$  genau dann, wenn  $v = -A^{-1}Bw$  und  $Cv + Dw = 0$ , d.h.  $\text{Ker } T = \{(-A^{-1}Bw, w) \in E \times E^\perp : CA^{-1}Bw = Dw\}$ . Es ist also  $r = \text{rang } T = \dim \text{Bild } T = \dim \text{Dom } T - \dim \text{Ker } T = n - \dim \text{Ker } T$  genau dann, wenn alle  $w \in E^\perp$  die Gleichung  $CA^{-1}Bw = Dw$  erfüllen, d.h.  $D = CA^{-1}B$  ist.

Die Abbildung

$$g : \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in L(n, m) : A \text{ invertierbar} \right\} \rightarrow L(E^\perp, F^\perp), \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \mapsto CA^{-1}B$$

ist auf der Spur der offenen Teilmenge  $U$  am linearen Teilraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, m) : D = 0 \right\}$$

definiert und glatt und ihr Graph beschreibt  $L_r(n, m)$  in der offenen Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, m) : A \in GL(E, F) \right\}$$

Die Dimension von  $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  ist somit  $nm - (n-r)(m-r) = r(n+m-r)$ .  $\square$

### 3.9 Graßmannmannigfaltigkeiten $G(r, n)$ .

Die Graßmannmannigfaltigkeit  $G(r, n)$  (nach Hermann Graßmann, 1809-1877) der  $r$ -Ebenen durch 0 im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmannigfaltigkeit von  $L(n, n)$  der Dimension  $r(n-r)$ .

Wenn wir  $r = 1$  wählen, dann erhalten wir als Spezialfall die projektiven Räume  $\mathbb{P}^{n-1} = G(1, n)$  der Geraden durch 0 in  $\mathbb{R}^n$ .

**Beweis.** Wir identifizieren die linearen Teilräume des  $\mathbb{R}^n$  mit den orthogonal-Projektionen auf sie. Damit ist  $G(r, n)$  eine Teilmenge der Mannigfaltigkeit  $L_r(n, n)$ . Sei  $E_0$  ein Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  der Dimension  $r$  und  $P_0$  die ortho-Projektion auf  $E_0$ . Bezüglich der Zerlegung  $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_0^\perp$  ist  $P_0$  dann durch  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  gegeben. Eine Umgebung von  $P_0$  in  $L_r(n, n)$  ist dann durch die Matrizen  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$  mit invertierbaren  $A$  gegeben. Eine lineare Abbildung  $P$  ist genau dann eine ortho-Projektion, wenn sie idempotent ( $P^2 = P$ ) und selbstadjungiert ( $P = P^t$ ) ist, oder äquivalent mit einer Gleichung, wenn  $P^tP = P$  ist. In der Tat: Daß  $P$  eine Projektion ist, bedeutet  $P|_{\text{Bild } P} = \text{id}$ , d.h.  $P^2 = P$ , und eine Orthogonalprojektion zu sein bedeutet  $\text{Ker}(P) = \text{Bild}(P)^\perp$ . Aus  $P^2 = P$  folgt aber  $\text{Ker}(P) = \text{Bild}(1-P)$ , denn  $P(1-P) = 0$  und  $Px = 0 \Rightarrow x = x - Px = (1-P)x$ . Somit ist  $\text{Ker}(P) \perp \text{Bild}(P)$  genau dann, wenn  $0 = \langle (1-P)x, Py \rangle = \langle x, (1-P^t)Py \rangle$  für alle  $x, y$ , d.h.  $P = P^tP$ . Umgekehrt folgt  $P^t = (P^tP)^t = P^tP = P$  und somit  $P = P^tP = P^2$ .

Für die Matrix  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$  ist das genau dann der Fall, wenn  $A = A^t$  und  $B^t = C$  (dann ist auch  $(CA^{-1}B)^t = B^t(A^t)^{-1}C^t = CA^{-1}B$ ) und

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A^tA + C^tC & A^tB + C^tCA^{-1}B \\ B^tA + B^t(A^t)^{-1}C^tC & B^tB + B^t(A^t)^{-1}C^tCA^{-1}B \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & B^t(A^t)^{-1}C^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder äquivalent  $A^tA + C^tC = A$  ( $\Rightarrow A^t = A$ ) und damit

$$\begin{aligned} A^tB + C^tCA^{-1}B &= A^tB + (A - A^tA)A^{-1}B = B, \\ B^tA + B^t(A^t)^{-1}C^tC &= B^tA + B^t(A^t)^{-1}(A - A^tA) = B^t(A^t)^{-1}A = C, \\ B^tB + B^t(A^t)^{-1}C^tCA^{-1}B &= B^tB + B^t(A^t)^{-1}(A - A^tA)A^{-1}B \\ &= B^t(A^t)^{-1}B = CA^{-1}B \end{aligned}$$

Zusammen sind die Gleichungen also  $A^tA + C^tC = A$ ,  $B = C^t$  und  $D = CA^{-1}B$ . Dies sind  $r^2 + r(n-r) + (n-r)^2$  unabhängige Gleichungen, und folglich sollte die Dimension von  $G(r, n)$  gerade  $n^2 - (r^2 + n^2 - 2nr + r^2 + nr - r^2) = nr - r^2 = r(n-r)$  sein. Diese Gleichungen beschreiben  $G(r, n)$  lokal als Graph von  $(A, C) \mapsto (B, D) = (C^t, CA^{-1}C^t)$  über der Teilmenge  $\{(A, C) \in L(E_0, \mathbb{R}^n) : A \in GL(E_0), A^tA + C^tC = A\}$

Es bleibt also zu zeigen, daß die Gleichungen regulär sind und dafür ist es genug die Regularität der ersten Gleichung  $A^tA + C^tC - A = 0$  zu zeigen. Ihr Differential in Richtung  $(X, Y)$  ist  $(X, Y) \mapsto X^tA + A^tX - X + Y^tC + C^tY$ . Wir müssen also die Gleichung  $X^tA + A^tX - X + Y^tC + C^tY = Z$  für  $(A, C) = (\text{id}, 0)$  also  $X^t = Z$  nach  $(X, Y)$  lösen. Offensichtlich ist  $(Z^t, 0)$  eine Lösung.  $\square$

### 3.10 Aufdrehen eines 2-fach verdrehten Bandes.

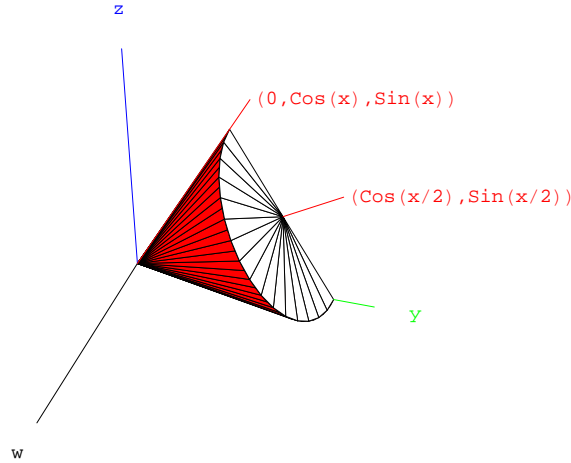
Ein unverdrehtes Stück eines Bandes ist parametrisiert durch

$$\varphi_0 : [0, 2\pi] \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad (\vartheta, r) \mapsto (\vartheta, r, 0, 0).$$

Ein zweifach verdrehtes Band ist parametrisiert durch

$$\varphi_\pi : [0, 2\pi] \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad (\vartheta, r) \mapsto (\vartheta, r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, 0).$$

Wir wollen nun eine Diffeotopie  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  des  $\mathbb{R}^4$  finden (d.h. eine glatt parametrisierte Familie  $t \mapsto F(t; \cdot)$  von Diffeomorphismen des  $\mathbb{R}^m$  mit  $F(0, \cdot) = \text{id}$  und  $F(\pi, \cdot)$  der gesuchte Diffeomorphismus), welche das nicht verdrehte Band in das 2-fach verdrehte Band überführt, d.h.  $F(\pi, \varphi_0(\vartheta, r)) = \varphi_\pi(\vartheta, r)$ . Dazu bezeichnen wir die Koordinaten im  $\mathbb{R}^4$  mit  $(x, y, z, w)$ . Diese Diffeotopie  $F(t; \cdot)$  soll die Hyperebenen normal auf die  $x$ -Achse invariant lassen, und dort als Drehung wirken. Wir bezeichnen diese Drehung in der Hyperebenen  $x + \{0\} \times \mathbb{R}^3$  zum Zeitpunkt  $t$  mit  $R(t, x) \in SO(\mathbb{R}^3)$ . Und zwar soll dies gerade eine Drehung um den Winkel  $-t$  um die Achse  $\ell = (\cos \frac{x}{2}, \sin \frac{x}{2}, 0)$  sein. Wir erhalten  $R(t, x)$  indem wir zuerst um die  $w$ -Achse die Achse  $\ell$  in die  $y$ -Achse drehen, sodann um die  $y$ -Achse um den Winkel  $t$  drehen, und danach die  $y$ -Achse zurück auf die  $\ell$ -Achse um die  $w$ -Achse drehen.



Die Matrizen-Darstellung von  $R(t, x)$  bezüglich der Koordinaten  $(y, z, w)$  sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 [R(t, x)] &= \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & -\sin \frac{x}{2} & 0 \\ \sin \frac{x}{2} & \cos \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} & 0 \\ -\sin \frac{x}{2} & \cos \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & -\sin \frac{x}{2} & 0 \\ \sin \frac{x}{2} & \cos \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} & 0 \\ -\cos t \sin \frac{x}{2} & \cos t \cos \frac{x}{2} & \sin t \\ \sin t \sin \frac{x}{2} & -\sin t \cos \frac{x}{2} & \cos t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{x}{2} + \cos t \sin^2 \frac{x}{2} & (1 - \cos t) \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} & -\sin t \sin \frac{x}{2} \\ (1 - \cos t) \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} & \sin^2 \frac{x}{2} + \cos t \cos^2 \frac{x}{2} & \sin t \cos \frac{x}{2} \\ \sin t \sin \frac{x}{2} & -\sin t \cos \frac{x}{2} & \cos t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

In den Randpunkten  $x = 0$  und  $x = 2\pi$  ist

$$[R(t, 0)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$[R(t, 2\pi)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

hält also die  $y$ -Achse fix.

Unsere gesuchte Diffeotopie ist somit

$$F(t; x, y, z, w) := (x, R(t, x)(y, z, w))$$

und die entsprechende Isotopie

$$\begin{aligned}
 \varphi_t(\vartheta, r) &:= F(t; \varphi_0(\vartheta, r)) = (\vartheta, R(t, \vartheta)(r, 0, 0)) \\
 &= \left( \vartheta, \frac{r}{2}(1 + \cos \vartheta + \cos t(1 - \cos \vartheta)), \frac{r}{2}(1 - \cos t) \sin \vartheta, r \sin t \sin \frac{\vartheta}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Klarerweise ist  $\varphi_t(\vartheta, r) = (\vartheta, r, 0, 0)$  für  $\vartheta = 0$  und für  $\vartheta = 2\pi$ . Weiters sind  $\varphi_0$  und  $\varphi_\pi$  die gewünschten Randwerte. Und nach Konstruktion sind alle  $\varphi_t$  Einbettungen von  $[0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ .



## 4. Beispiele von Lie-Gruppen

Etliche der klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten sind sogar Lie-Gruppen, tragen also zusätzlich eine glatte Gruppenstruktur. Dazu gibt es auch eigene Vorlesungen, siehe z.B. <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/2010WS.pdf>.

### 4.1 Allgemeine lineare Gruppe.

Der Vektorraum  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = L(n, m) := \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ linear}\}$  ist  $nm$ -dimensional.

Die ALLGEMEINE LINEARE GRUPPE (engl. GENERAL LINEAR GROUP) (siehe auch [86, 1.2])

$$GL(\mathbb{R}^n) = GL(n) := \{T \in L(n, n) : \det T \neq 0\} \subset L(n, n)$$

ist eine offene (und somit  $n^2$ -dimensionale) Teilmannigfaltigkeit in  $L(n, n)$ , denn sie ist durch eine stetige strikte Ungleichung gegeben. Bezüglich der Komposition ist  $GL(n)$  eine Gruppe.

### 4.2 Spezielle lineare Gruppe.

Diese ist definiert durch

$$SL(n) := \{T \in L(n, n) : \det(T) = 1\} \subseteq GL(n).$$

Also ist sie durch die Gleichung  $\det(T) = 1$ , bzw.  $f(T) = 0$  gegeben, wobei  $f : L(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $f(T) := \det(T) - 1$  ist. Wir behaupten, daß diese Gleichung regulär ist, d.h. die Ableitung der Determinantenfunktion surjektiv ist. Da die Determinante multilinear in den Spalten (oder auch polynomial in den Koeffizienten) ist, folgt ihre Glattheit. Die Richtungsableitung an der Stelle  $A$  in Richtung  $B$  ist:

$$\begin{aligned} \det'(A)(B) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(A + tB) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(A \cdot (1 + tA^{-1}B)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(tA) \cdot \det\left(\frac{1}{t} + A^{-1}B\right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} t^n \det(A) \cdot \left( \frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} \operatorname{spur}(A^{-1}B) + \dots + \det(A^{-1}B) \right) \\ &= \det(A) \operatorname{spur}(A^{-1}B). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Surjektivität von  $\det'(A)$  und damit auch die Regularität von  $\det$ . Ohne die gesamte Ableitung  $\det'(A) : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  zu berechnen, kann man kürzer auch so vorgehen:

$$\det'(A)(A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \underbrace{\det((1+t)A)}_{(1+t)^n \det A} = n(1+t)^{n-1} \Big|_{t=0} \det A = n \det A.$$

Folglich ist  $\det'(A)$  surjektiv und  $SL(\mathbb{R}^n)$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n^2 - 1$ .

### 4.3 Orthogonale Gruppe.

Sie ist definiert durch (siehe auch [86, 1.2]):

$$O(n) := \{T \in GL(n, n) : T^t \circ T = \operatorname{id}\} = \{T \in GL(n, n) : \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y\}.$$

So wie in Beispiel 4.2 wollen wir nun zeigen, daß die Gleichung  $T^t \circ T = \operatorname{id}$  eine reguläre ist. Zu diesem Zweck berechnen wir die Ableitung der quadratischen –

daher auch glatten – Funktion  $f : GL(n) \rightarrow L(n, n)$ , gegeben durch  $f(T) := T^t \circ T = \text{komp}(T^t, T)$ :

$$f'(T) \cdot S = \text{komp}(S^t, T) + \text{komp}(T^t, S) = S^t \circ T + T^t \circ S.$$

Da  $f(T)$  sichtlich symmetrisch ist, also  $f$  Werte im linearen Teilraum  $L_{\text{sym}}(n, n) \subseteq L(n, n)$  der symmetrischen Matrizen hat, können wir Surjektivität nur für  $f'(T) : L(n, n) \rightarrow L_{\text{sym}}(n, n)$  erhoffen. Die Dimension von  $L_{\text{sym}}(n, n)$  ist offensichtlich  $\frac{(n+1)n}{2}$ . Für ein  $R \in L_{\text{sym}}(n, n)$  existiert ein  $S \in L(n, n)$  mit  $R = S^t \circ T + T^t \circ S = (S^t \circ T) + (S^t \circ T)^t$ , denn  $S^t \circ T = \frac{1}{2}R$  hat die Lösung  $S = (S^t)^t = (\frac{1}{2}R \circ T^{-1})^t = (T^t)^{-1} \frac{1}{2}R$ . Folglich ist  $f'(T)$  surjektiv, und somit  $O(n)$  eine Teilmannigfaltigkeit von  $L(n, n)$  der Dimension  $\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ .

Beachte, daß  $\det(T) = \pm 1$  aus  $1 = \det(1) = \det(T^t T) = \det(T)^2$  für  $T \in O(n)$  folgt. Somit ist  $O(n) \cong SO(n) \rtimes \mathbb{Z}_2$ , wobei  $SO(n) := O(n) \cap SL(n) = O(n) \cap GL_+(n)$  eine offene Untergruppe von  $O(n)$  ist.

Allgemeiner können wir die STIEFELMANNIGFALTIGKEIT (nach Eduard Stiefel, 1909–1978)

$$V(k, n) := \{T \in L(k, n) : T^t T = \text{id}\}$$

betrachten (siehe auch [86, 70.6]). Die Elemente von  $V(k, n)$  sind somit die isometrische Abbildungen von  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , und diese können äquivalent durch ihre Werte auf der standard-Basis des  $\mathbb{R}^k$  also durch  $k$ -Tupel orthonormaler Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ , sogenannte orthonormale  $k$ -Beine im  $\mathbb{R}^n$ , beschrieben werden.

Die Funktion  $f : L(k, n) \rightarrow L_{\text{sym}}(k, k)$ ,  $T \mapsto T^t T - \text{id}$ , ist glatt und erfüllt  $f'(T)(S) = T^t S + S^t T$ . Also ist sie regulär, denn für symmetrisches  $R$  können wir  $f'(T)(S) = R$  wie zuvor durch  $S := \frac{1}{2} T R$  lösen, was direktes Einsetzen beweist.

#### 4.4 Gruppen invarianter Automorphismen, $O_b$ .

Wir wollen nun die orthogonale Gruppe verallgemeinern, indem wir eine beliebige Bilinearform  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem euklidischen Raum  $E$  betrachten. Mit

$$O_b(E) := \{T \in GL(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y \in E\}$$

bezeichnen wir die Gruppe aller invertierbaren linearen Abbildungen, die die Bilinearform  $b$  invariant lassen. Bekanntlich stehen die Bilinearformen  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  in bijektiver Beziehung zu den linearen Abbildungen  $B : E \rightarrow E$ , vermöge

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle = \langle x, B^t y \rangle :$$

Denn  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  können wir genauso gut als Abbildung  $\check{b} : E \rightarrow L(E, \mathbb{R}) =: E^*$  auffassen, welche durch  $x \mapsto (y \mapsto b(x, y))$  gegeben ist. Das skalare Produkt  $\langle \_, \_ \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  entspricht dabei einer Abbildung  $\iota : E \rightarrow E^*$ , welche ein Isomorphismus ist, denn  $\text{Ker}(\iota) = \{x : \langle x, y \rangle = 0 \forall y\} = \{0\}$ , und da  $\dim(E) = \dim(E^*)$ , ist  $\iota$  bijektiv. Die Zusammensetzung  $B := \iota^{-1} \circ \check{b} : E \rightarrow E^* \rightarrow E$  ist dann die gesuchte lineare Abbildung, denn

$$b(x, y) = \check{b}(x)(y) = (\iota \circ B)(x)(y) = \iota(B(x))(y) = \langle Bx, y \rangle.$$

Die Gleichung  $b(Tx, Ty) = b(x, y)$  ist somit mit  $\langle T^t B T x, y \rangle = \langle B T x, T y \rangle = \langle Bx, y \rangle$  äquivalent, und damit ist

$$O_b(E) = \{T \in GL(E) : T^t B T = B\}.$$

Wir sollten also zeigen, daß dies eine reguläre Gleichung ist. Für die Ableitung der Funktion  $f : GL(E) \rightarrow L(E)$ , welche durch  $f(T) = T^t B T - B$  definiert ist, erhalten wir  $f'(T)(S) = S^t B T + T^t B S$ . Wie bei  $O(E)$  können wir nicht erwarten, daß sie surjektiv nach  $L(E, E)$  ist, sondern wir brauchen einen linearen Teilraum  $F \subseteq L(E, E)$  in welchem  $f$  Werte hat und auf welchen  $f'(T)$  surjektiv ist.

Wenn  $B$  (schief)symmetrisch ist, dann gilt das gleiche auch für  $f(T)$  und wir sollten also für  $F$  den Teilraum  $L_{\pm}(E, E)$  der (schief)symmetrischen linearen Abbildungen verwenden. Dieser hat als Dimension  $n(n+1)/2$  (bzw.  $n(n-1)/2$ ), wenn  $n$  die Dimension von  $E$  ist. Wenn  $U \in F$  und  $T$  die Identität ist, so ist  $U = f'(T)(S) = S^t B + BS$  dann nach  $S$  auflösbar, wenn wir ein  $S$  mit  $BS = \frac{1}{2}U$  in  $S$  finden können, denn dann ist auch  $S^t B = \pm(BS)^t = \pm\frac{1}{2}U^t = \frac{1}{2}U$ . Falls  $B$  invertierbar ist, so ist  $S := \frac{1}{2}B^{-1}U$  die Lösung. Falls  $T \in GL(E)$  beliebig und  $B$  invertierbar ist, dann hat die Gleichung  $U = f'(T)(S) = S^t BT + T^t BS$  die Lösung  $S = \frac{1}{2}B^{-1}(T^{-1})^t U$ , denn dann gilt  $T^t BS = \frac{1}{2}U$  und  $S^t BT = \pm S^t B^t T = \pm(T^t BS)^t = \pm\frac{1}{2}U^t = \frac{1}{2}U$ . Falls also  $B$  injektiv ist, d.h.  $b$  nicht degeneriert ist, oder äquivalent  $x = 0 \Leftarrow \forall y : b(x, y) = 0$ , dann ist  $O_b(E)$  eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim O_b(E) := \begin{cases} n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 & \text{falls } b \text{ symmetrisch ist} \\ n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 & \text{falls } b \text{ schief-symmetrisch ist.} \end{cases}$$

Man beachte, daß für invertierbares  $B$  und  $T \in O_b(E)$  automatisch  $\det(T) = \pm 1$  gilt, denn  $0 \neq \det(B) = \det(T^t BT) = \det(T)^2 \det(B)$ .

#### 4.5 Der symmetrische Fall, $O(n, k)$ .

Im symmetrischen Fall können wir nach dem Spektralsatz (Hauptachsentransformation) eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren  $e_j$  mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  für  $B$  finden. Es ist dann

$$B(x) = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j$$

und somit

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle \langle y, e_j \rangle$$

Da  $\text{Ker}(B) = \{0\}$  vorausgesetzt ist, müssen alle Eigenwerte  $\lambda_j \neq 0$  sein, und somit sieht  $b$  in der Orthogonalbasis  $f_j := \sqrt{|\lambda_j|} e_j$  wie folgt aus

$$b(x, y) = \sum_{\lambda_j > 0} x^j y^j - \sum_{\lambda_j < 0} x^j y^j,$$

wobei  $x^j := \langle x, f_j \rangle$  die Koordinaten von  $x$  bezüglich der Basis  $(f_j)$  bezeichnet.

Man nennt so ein  $b$  auch PSEUDOEUKLIDISCHES PRODUKT. Solche sind für die Relativitätstheorie von Bedeutung. Beachte, daß es Vektoren  $x \neq 0$  gibt, welche Norm  $b(x, x) = 0$  haben und auch solche mit negativer Norm. Man nennt die mit verschwindender Norm LICHTARTIG, d.h.  $\sum_{j>k} (x^j)^2 = \sum_{j\leq k} (x^j)^2$  (dies beschreibt einen "Kegel"), und die mit positiver Norm RAUMARTIG und die mit negativer Norm ZEITARTIG. Betrachte z.B. die Form

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Dann sind die Vektoren im Inneren des Doppelkegels mit der  $x_3$ -Achse die zeitarartigen, die im Äußeren die raumartigen und die am Doppelkegel die lichtartigen.

Die Gruppe  $O_b(E)$  hängt also bis auf Isomorphie nur von der Signatur, d.h. der Anzahl  $k$  der negativen Eigenwerte von  $b$ , ab und wird daher auch mit  $O(n, k)$  (und z.T. auch mit  $O(n-k, k)$ ) bezeichnet, wobei  $n = \dim(E)$  ist. Man beachte, daß  $O(n, k) = O(n, n-k)$  ist (ersetze dazu  $b$  durch  $-b$ ). Die offene Untergruppe  $SL(n) \cap O(n, k)$  wird mit  $SO(n, k)$  bezeichnet. Die  $O(4, 1)$  wird (in der Physik) auch als die LORENTZ-GRUPPE bezeichnet.

#### 4.6 Der schiefsymmetrische Fall, $Sp(2n)$ .

Im schiefsymmetrischen Fall können wir eine Normalform wie folgt finden. Sei dazu  $b$  eine nichtdegenerierte schiefsymmetrische Bilinearform, eine sogenannte SYMPLEKTISCHE FORM. Diese sind für die klassischen Mechanik von Bedeutung (siehe Abschnitt [86, 45]). Für eine Teilmenge  $A \subseteq E$  bezeichnen wir mit

$$A^\perp := \{x \in E : x \perp y \forall y \in A\}$$

das ORTHOGONALE KOMPLEMENT. Wobei  $x \perp y$  heißt, daß  $b(x, y) = 0$  ist. Da  $b$  schiefsymmetrisch ist, ist  $x \perp x$  für alle  $x$ . Für jeden Teilraum  $F$  gilt  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$  (in der Tat:  $i^* \circ \check{b} : E \rightarrow E^* \rightarrow F^*$  ist surjektiv, wobei  $i : F \rightarrow E$  die Inklusion bezeichnet, denn  $\check{b} : E \rightarrow E^*$  ist nach Voraussetzung bijektiv, und  $i^* : E^* \rightarrow F^*$  ist klarerweise surjektiv (wähle ein linksinverses  $p$  zu  $i$ , dann gilt  $i^* \circ p^* = \text{id}$ ) und somit ist  $\dim E = \dim(\text{Ker}) + \dim(\text{Bild}) = \dim(F^\perp) + \dim(F)$ ). Beachte für Teilräume  $A$  und  $B$  die Gleichungen  $A^{\perp\perp} = A$  ( $\Leftarrow A \subseteq A^{\perp\perp}$  und Dimensionsgründen), sowie  $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$  (trivial) und schließlich  $A^\perp + B^\perp = (A^\perp + B^\perp)^{\perp\perp} = (A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp})^\perp = (A \cap B)^\perp$ .

Eine Teilmenge  $A \subseteq E$  heißt ISOTROP, falls  $A \subseteq A^\perp$ , d.h.  $b|_{A \times A} = 0$ . Es sei  $F$  so eine maximale isotrope Teilmenge. Für solche gilt  $F = F^\perp$ , denn andernfalls können wir ein  $y \in F^\perp \setminus F$  zu  $F$  hinzufügen und erhalten eine größere isotrope Teilmenge  $F \cup \{y\}$ . Wegen der Bilinearität von  $b$  ist  $A^\perp$  ein Teilraum für jede Teilmenge  $A \subseteq E$  und somit auch  $F = F^\perp$ , ein sogenannter LAGRANGE TEILRAUM. Für diese ist folglich  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp = 2 \dim F$ , also folgt aus der Existenz von Lagrange Teilräumen, daß  $E$  geradedimensional sein muß.

Wir wählen nun einen Lagrange Teilraum  $F$  und dazu einen komplementären Lagrange Teilraum  $F'$ . Das ist möglich, denn wenn für einen isotropen Teilraum  $G$  mit  $G \cap F = \{0\}$  noch  $G + F \subset E$  gilt, dann ist  $G^\perp + F = G^\perp + F^\perp = (G \cap F)^\perp = \{0\}^\perp = E \supset G + F$  und somit können wir ein  $y \in G^\perp \setminus (G + F)$  wählen. Es ist dann  $G_1 := \mathbb{R}y + G$  ein größerer isotroper Teilraum mit  $G_1 \cap F = \{0\}$ . Es sei  $i' : F' \hookrightarrow E$  die Inklusion. Dann ist  $i^* \circ \check{b} \circ i' : F' \hookrightarrow E \xrightarrow{\cong} E^* \rightarrow F^*$  injektiv, denn der Kern von  $i^* \circ \check{b}$  ist  $F^\perp = F$  und  $F \cap F' = \{0\}$ , und somit aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Wir behaupten, daß der induzierte Isomorphismus  $E \cong F' \times F \cong F^* \times F$  die symplektische Form  $b$  in die Form  $(y_1^*, y_1; y_2^*, y_2) \mapsto y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$  übersetzt. Sei also  $x_j = y_j' + y_j$  mit  $y_j \in F$  und  $y_j' \in F'$ . Da  $F$  und  $F'$  isotrop sind, ist dann  $b(x_1, x_2) = b(y_1', y_2) + b(y_1, y_2') = b(y_1', y_2) - b(y_2', y_1)$ . Mit  $y_j^* := (i^* \circ \check{b} \circ i')(y_j')$  ist  $b(y_1', y_2) = b(i' y_1', i y_2) = \check{b}(i' y_1')(i y_2) = (i^* \circ \check{b} \circ i')(y_1')(y_2) = y_1^*(y_2)$  und somit ist  $b(x_1, x_2) = y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$ .

Wählen wir nun in  $F$  eine Basis  $(e_j)_{k < j \leq 2k}$  (mit  $2k = n := \dim E$ ) und in  $F^*$  die duale Basis  $(e^j)_{j > k}$ . Mit  $(e_j := e'_{k+j})_{j \leq k}$  bezeichnen wir die entsprechende Basis in  $F'$ , also  $i^* \circ \check{b} \circ i' : e_j \mapsto e^{k+j}$ . Dann ist  $(e_j)_{j \leq 2k=n}$  eine Basis von  $E$ , die jener von  $F^* \times F$  entspricht, und weiters ist  $y^*(y) = \sum_{j > k} y_j y^j$ , wobei  $y_j$  die Koordinaten von  $y^* \in F^*$  bzgl.  $e^j$  und  $y^j$  jene von  $y \in F$  bzgl.  $e_j$  bezeichnet. Also ist die STANDARD SYMPLEKTISCHE FORM AM  $\mathbb{R}^{2k}$

$$b(x_1, x_2) = \sum_{j \leq k} x_1^j x_2^{j+k} - x_1^{j+k} x_2^j = \langle J x_1, x_2 \rangle, \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id}_k \\ \text{id}_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Gruppe wird mit  $Sp(2k)$  bezeichnet, und heißt REELLE SYMPLEKTISCHE GRUPPE. Da  $Sp(n)$  für ungerades  $n$  nicht existiert, wird  $Sp(2k)$  in der Literatur bisweilen auch als  $Sp(k)$  bezeichnet!

#### 4.7 Spiegelungen .

Wir wollen nun spezielle Abbildungen  $T \in O_b(E)$  für symmetrische und schiefsymmetrische  $b$  beschreiben, und zwar solche, die eine Hyperebene als Fixpunktmenge



$\{x \in E : Tx = x\}$  besitzen. Sei  $F$  diese Hyperebene und  $0 \neq y \in F^\perp$ , d.h.  $F = \{y\}^\perp$ . Sei  $y' \notin F$  mit  $b(y', y) = 1$  (möglich, da  $b(y', y) = 0 \Rightarrow y' \in \{y\}^\perp = F$ ), dann läßt sich jedes  $x \in E$  als  $x = b(x, y)y' + (x - b(x, y)y')$  schreiben, und  $b(x - b(x, y)y', y) = 0$ , d.h.  $x - b(x, y)y' \in F$ . Das gesuchte  $T$  muß also folgende Gestalt haben:

$$T(x) = b(x, y)T(y') + (x - b(x, y)y') = x + b(x, y)(T(y') - y') =: x + b(x, y)y''.$$

Damit  $T$  die Form  $b$  erhält, muß

$$\begin{aligned} b(x_1, x_2) &= b(T(x_1), T(x_2)) = b(x_1 + b(x_1, y)y'', x_2 + b(x_2, y)y'') = \\ &= b(x_1, x_2) + b(x_1, y)b(y'', x_2) + b(x_2, y)b(x_1, y'') + b(x_1, y)b(x_2, y)b(y'', y'') \end{aligned}$$

gelten, d.h.  $b(x_1, y)b(y'', x_2) + b(x_2, y)b(x_1, y'') + b(x_1, y)b(x_2, y)b(y'', y'') = 0$ . Wenn wir  $x_2 := y'$  setzen und  $x_1 \perp y$  wählen, dann folgt  $b(x_1, y'') = 0$ , also ist  $y'' \in \{y\}^{\perp\perp} = \mathbb{R}y$ . Sei also  $y'' = \lambda y$  (mit  $\lambda \neq 0$ , da  $T$  nicht die Identität sein kann). Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda b(x_1, y)b(y, x_2) + \lambda b(x_2, y)b(x_1, y) + b(x_1, y)b(x_2, y)\lambda^2 b(y, y) \\ &= \lambda b(x_1, y)b(x_2, y)(\pm 1 + 1 + \lambda b(y, y)) \end{aligned}$$

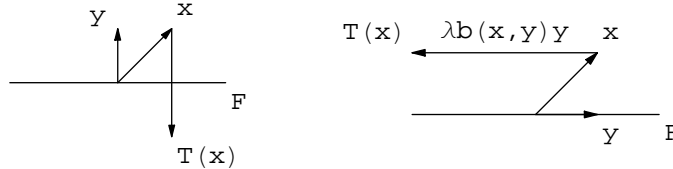
für alle  $x_1$  und  $x_2$  genau dann, wenn  $1 + \lambda b(y, y) = \mp 1$  (wähle dazu  $x_1 = x_2 := y'$ ).

Im symmetrischen Fall ist dies äquivalent zu  $\lambda b(y, y) = -2$  (also  $b(y, y) \neq 0$  und  $\lambda := -\frac{2}{b(y, y)}$ ) ist und im schiefsymmetrischen ist es immer erfüllt.

Die  $T \in O_b(E)$  mit einer Hyperebene  $F = \{y\}^\perp$  als Fixpunktmenge sind also genau

$$T(x) := \begin{cases} x - 2\frac{b(x, y)}{b(y, y)}y & \text{mit } b(y, y) \neq 0 \text{ im symmetrischen Fall,} \\ x + \lambda b(x, y)y & \text{mit } 0 \neq \lambda \in \mathbb{R} \text{ im schiefsymmetrischen Fall.} \end{cases}$$

Diese  $T$  heißen auch SPIEGELUNGEN, in Analogie zum Fall, wo  $b$  eine euklidische Metrik ist. Eine einfache Rechnung zeigt, daß  $T^2 = \text{id}$  gilt.



Im symplektischen Fall ist jede Spiegelung orientierungserhaltend, denn  $T(y') = y' + \lambda y$  liegt auf der gleichen Seite von  $F$  wie  $y'$  und (wegen  $y \in F$ ) ist somit  $\begin{pmatrix} \text{id} & \lambda y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Komponentendarstellung von  $T$  bzgl. der Zerlegung  $E = F \oplus \mathbb{K}y' \cong F \times \mathbb{K}$ , und im symmetrischen Fall orientierungsvertauschend, denn  $T(y) = y - 2y = -y$  und somit ist  $\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  die Komponentendarstellung von  $T$  bzgl. der Zerlegung  $E = F \oplus \mathbb{K}y \cong F \times \mathbb{K}$ .

Es läßt sich für  $x \neq x'$  genau dann eine Spiegelung  $T : x \mapsto x + \lambda b(x, y)y$  finden mit  $Tx = x'$ , wenn  $b(x, x) = b(x', x')$  und  $b(x, x') \neq b(x, x)$  ist: Denn  $x' - x = \lambda b(x, y)y$  gilt genau dann, wenn  $y = \mu(x' - x)$  mit  $1 = \lambda b(x, y)\mu = \lambda\mu^2(b(x, x') - b(x, x))$  gilt. Diese Spiegelung  $T$  läßt  $y^\perp = (x' - x)^\perp$  fix. Die im symmetrischen Fall notwendige Gleichung  $\lambda b(y, y) = \lambda\mu^2 b(x' - x, x' - x) = -2$  ist erfüllt. Beachte, daß für positiv definites  $b$  wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz die Situation  $b(x, x') = b(x, x)$  nicht eintreten kann. Im symplektischen Fall ist  $b(x, x) = 0 = b(x', x')$  immer erfüllt.

### Proposition.

Für jede (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Bilinearform  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  wird die Gruppe  $O_b(E)$  von den Spiegelungen erzeugt.

Man kann zeigen, daß im symmetrischen Fall  $n = \dim E$  viele Spiegelungen genügen und im symplektischen sind mindestens  $n + 1$  notwendig (siehe [35, Sur les Groups Classique, Hermann, Paris 1967]).

**Beweis.** Im **symmetrischen Fall** wählen wir eine Orthonormalbasis von  $E$  (d.h.  $b(e_i, e_j) = 0$  und  $b(e_i, e_i) = \pm 1$ ) Die Bilder  $e'_i := T(e_i)$  sind dann ebenfalls eine Orthonormalbasis. Wir zeigen nun mit Induktion, daß  $T$  bis auf Zusammensetzung mit Spiegelungen die Menge  $\{e_1, \dots, e_k\}$  fix läßt:

In der Tat, wenn  $T$  nach Induktionsannahme die Menge  $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  fix läßt, und  $b(e_k, e'_k) \neq b(e_k, e_k)$  ist, dann bildet die Spiegelung  $S$  am orthogonalen Komplement zu  $e'_k - e_k$  den Vektor  $e_k$  auf  $e'_k$  ab und läßt  $(e'_k - e_k)^\perp \supseteq (e'_k)^\perp \cap (e_k)^\perp \supseteq \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  fix, also läßt  $S^{-1}T$  sogar  $\{e_1, \dots, e_k\}$  fix. Ist andererseits  $b(e_k, e'_k) = b(e_k, e_k)$ , dann spiegeln wir zuerst am orthogonalen Komplement zu  $e_k$  (mit  $b(e_k, e_k) = \pm 1 \neq 0$ ) und danach an jenem zu  $e'_k + e_k$  (mit  $b(e_k + e'_k, e_k + e'_k) = 2(b(e_k, e_k) + b(e_k, e'_k)) = 4b(e_k, e_k) \neq 0$ ). Diese Spiegelungen lassen  $(e_k)^\perp \cap (e_k + e'_k)^\perp \supseteq \{e_1 = e'_1, \dots, e_{k-1} = e'_{k-1}\}$  invariant und ihre Zusammensetzung bildet  $e_k$  auf  $-e_k$  und weiter auf  $e'_k$  ab, also läßt  $T$  bis auf diese Spiegelungen  $\{e_1, \dots, e_k\}$  invariant.

Im **symplektischen Fall** beweisen wir die Aussage mittels Induktion nach  $j := n - \dim F$ , wo  $F := \{x : Tx = x\}$ . Für  $j = 0$  ist  $T = \text{id}$ . Sei also  $j > 0$ . Für jedes  $y \in E$  ist  $b(y, x) = b(Ty, Tx) = b(Ty, x)$  für alle  $x \in F$ , d.h.  $Ty - y \in F^\perp$ .

Falls  $b(Ty, y) \neq 0$  für ein  $y \in E$  ist ( $\Rightarrow y \notin F$ ), dann existiert eine Spiegelung, welche  $y$  auf  $Ty$  abbildet und die  $(Ty - y)^\perp \supseteq F$  fix läßt. Bis auf diese Spiegelung läßt also  $T$  auch  $F \oplus \mathbb{R}y$  fix.

Andernfalls ist  $b(Ty, y) = 0$  für alle  $y$ . Sei vorerst  $F \cap F^\perp \neq \{0\}$ . Dann wählen wir ein  $0 \neq x \in F \cap F^\perp$  und ein  $y \in E$  mit  $b(y, x) = 1$  (geht wie in der Beschreibung von Spiegelungen). Es ist dann  $y \notin F$ , da  $x \in F^\perp$ . Weiters ist  $b(Ty, x) = b(Ty, Tx) = b(y, x) = 1$  und somit existieren Spiegelungen die  $y$  auf  $x + y$ , bzw.  $Ty$  auf  $x + y$  abbilden (denn  $b(y, x + y) = b(y, x) \neq 0$  und  $b(Ty, x + y) = b(Ty, x) \neq 0$ ), und  $(x + y - y)^\perp \cap (x + y - Ty)^\perp \supseteq F$  fix lassen. Also läßt  $T$  bis auf diese Spiegelungen  $F \oplus \mathbb{R}y$  fix, und wir können die Induktionsannahme anwenden.

Ist  $F = \{0\}$ , dann wähle  $y \neq 0$  und erweitere die isotrope Menge  $\{y, Ty\}$  zu einer Basis eines Lagrange Teilraums und setze  $x := e^1 + e^2$  in Termen der dualen Basis  $(e^i)_{i=1}^k$ . Dann ist  $b(x, y) = 1 = b(x, Ty)$  und wir können wie gerade zuvor verfahren. Ist schließlich  $F \neq \{0\}$  und  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , dann ist  $E = F \oplus F^\perp$  und  $b$  induziert auf  $F^\perp$  eine symplektische Form, denn für  $y' \in F^\perp$  mit  $b(y', y) = 0 \forall y \in F^\perp$  gilt  $y' \in (F^\perp)^\perp = F$  und somit  $y' = 0$ . Weiters läßt  $T \in O_b(E)$  den Raum  $F^\perp$  invariant, denn  $b(Ty', y) = b(Ty', Ty) = b(y', y) = 0$  für alle  $y \in F$  und  $y' \in F^\perp$ . Da  $T|_{F^\perp}$  nur 0 als Fixpunkt hat, folgt aus dem vorigen Fall, daß  $T|_{F^\perp}$  eine Zusammensetzung von Spiegelungen längs Vektoren in  $F^\perp$  ist. Solche Spiegelungen lassen aber  $F = F^{\perp\perp}$  fix und somit ist  $T$  auf ganz  $E$  die Zusammensetzung dieser Spiegelungen.  $\square$

### Folgerung.

Es gilt  $Sp(2k) \subseteq SL(2k)$ .  $\square$

## 4.8 Niedere Dimensionen.

Die Elemente der Abelsch'en unter den folgenden Gruppen  $G$  werden wir gemeinsam diagonalisieren. D.h. für jedes  $T \in G$  werden wir die Eigenwerte  $\lambda_\pm^T$  und zugehörige (von  $T$  unabhängige) Eigenvektoren  $e_\pm$  bestimmen. Wenn  $\Lambda^T$  die Diagonalmatrix mit Eintragungen  $\lambda_+^T$  und  $\lambda_-^T$  ist, und  $U$  die Matrix mit Spalten  $e_+$  und  $e_-$  ist, d.h.  $U(e_1) = e_+$  und  $U(e_2) = e_-$ , dann ist  $T \cdot U = U \cdot \Lambda^T$ , d.h.  $U^{-1} \cdot T \cdot U = \Lambda^T$ .

Die Konjugation mit  $U$  bildet also die Gruppe  $G$  isomorph auf eine Gruppe von Diagonalmatrizen in  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  ab.

$$SO(\mathbf{2}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} : \lambda \in S^1 \right\} \cong S^1,$$

$$\text{denn } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & a^2 + c^2 = 1 & (b(e_1, e_1) = 1) \\ (2) & b^2 + d^2 = 1 & (b(e_2, e_2) = 1) \\ (3) & ab + cd = 0 & (b(e_1, e_2) = 0) \\ (4) & ad - bc = 1 & (\det = 1) \end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} d \cdot (3) - b \cdot (4) &: -b = c(d^2 + b^2) = c, \\ b \cdot (3) + d \cdot (4) &: d = a(b^2 + d^2) = a \end{aligned}$$

und somit  $a^2 + b^2 = 1$ . Kürzer folgt das alles auch aus der Matrixgleichung  $BT = (T^t)^{-1}B$ , mit  $B = \text{id}$ .

Die Eigenwerte von  $T$  sind  $\lambda_{\pm} = a \pm ib$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $e_{\pm} = (1, \pm i)$ . Also bildet die Konjugation mit  $U = \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}$  die Gruppe  $SO(2)$  isomorph auf die Diagonalmatrizen mit konjugiert komplexen Eintragungen vom Betrag 1 ab.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} SO(\mathbf{2}, \mathbf{1}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = 1 \right\} \cong \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

Analog wie bei der  $SO(2)$  folgt die erste Gleichung aus der Matrixgleichung mit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Der erste Isomorphismus ist dann analog durch Konjugation mit der Matrix  $U = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$  der Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_{\pm} := a \pm b$  gegeben. Konjugieren mit  $U$  liefert

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$$

mit  $(a + b)(a - b) = 1$ .

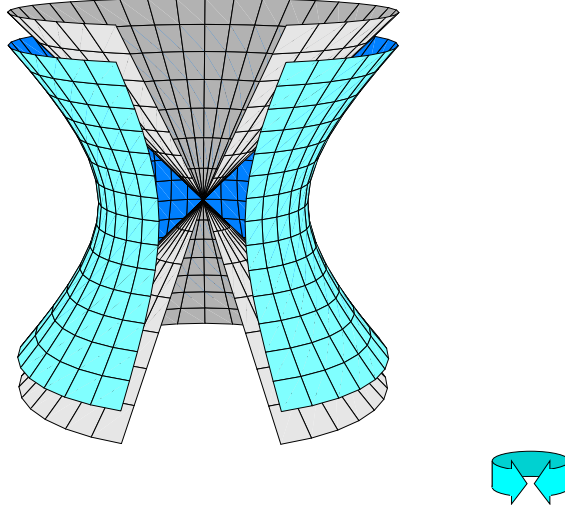
$$\begin{aligned} SL(\mathbf{2}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \cong \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}, \end{aligned}$$

wobei der Isomorphismus durch Konjugation mit  $U := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ & i \end{pmatrix}$  gegeben ist, siehe [86, 34.5] und [86, 72.62], denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 - i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ -\alpha_2 - \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{a+d}{2}, \alpha_2 = \frac{b-c}{2}, \beta_1 = \frac{a-d}{2}, \beta_2 = -\frac{b+c}{2} \end{aligned}$$

Beachte daß die Quadrik  $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$  vermöge  $(a, b) \mapsto (\frac{a}{|a|}, b) =$

$(\frac{a}{\sqrt{1+|b|^2}}, b)$  diffeomorph zum ‘‘Zylinder’’  $S^1 \times \mathbb{C}$  ist. Allerdings sieht die induzierte Gruppenstruktur auf  $S^1 \times \mathbb{C}$  sehr kompliziert aus.



$$Sp(2) = SL(2),$$

$$\begin{aligned} \text{denn } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cb - ad \\ ad - bc & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow ad - bc = 1 \end{aligned}$$

$SO(3) = PSU(2) = PS^3$ , wobei  $PG := G/Z(G)$  für jede Gruppe  $G$  und  $Z(G) := \{g \in G : \forall h \in G : g \cdot h = h \cdot g\}$  das Zentrum von  $G$  bezeichnet. Jede Einheitsquaternion  $q = a + ib + jc + kd$  (siehe [86, 14.16]) wirkt orthogonal auf  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  durch Konjugation und läßt die Zerlegung  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  invariant, denn  $q^{-1} \cdot 1 \cdot q = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \cdot q = 1$  und

$$\begin{aligned} |q^{-1} \cdot p \cdot q|^2 &= \overline{(q^{-1} \cdot p \cdot q)} \cdot (q^{-1} \cdot p \cdot q) = \bar{q} \cdot \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot q^{-1} \cdot p \cdot q \\ &= q^{-1} \cdot |p|^2 \cdot q = |p|^2 \end{aligned}$$

also wirkt sie orthogonal am  $\mathbb{R}^3 \cong \{0\} \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{H}$ . Der Kern dieses Gruppenhomomorphismuses  $\mathbb{H} \supseteq S^3 \rightarrow O(3)$  ist offensichtlich  $Z(S^3) = Z(\mathbb{H}) \cap S^3 = \{\pm 1\}$ . Damit ist  $S^3 \twoheadrightarrow PS^3 := S^3/Z(S^3)$  eine (Gruppen-)Überlagerung (siehe [86, 24.19]) und folglich  $PS^3$  eine kompakte zusammenhängende 3-dimensionale Lie-Gruppe die somit in  $SO(3)$  offen eingebettet ist. Da  $SO(3)$  zusammenhängend ist (denn sie besteht aus Drehungen), folgt  $SO(3) \cong S^3/Z(S^3) = PS^3$ .

Geometrisch haben wir das in [86, 1.3] auch so gesehen: Eine Drehung ist durch Drehachse und Drehwinkel festgelegt, also durch einen Vektor  $u \in D^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$  welcher der Drehung mit der Achse  $u/|u| \in S^2$  und dem Drehwinkel  $\pi|u| \in [-\pi, \pi]/\sim = S^1$  entspricht (Beachte, daß  $(x_1, \varphi_1) \neq (x_2, \varphi_2)$  genau dann die gleiche Drehung beschreiben, wenn  $\varphi_1 = 0 = \varphi_2$  oder  $(x_1, \varphi_1) = -(x_2, \varphi_2)$  ist). Also erhalten wir eine 2-blättrige Überlagerung  $S^3 \rightarrow S^3/\sim = D^3/\sim \cong SO(3)$  auch

aus folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S^2 \times [-1, 1] & \xrightarrow{\text{id} \times e^{i\pi \cdot}} & S^2 \times S^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D^3 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & D^3 / \sim \xrightarrow{\quad \quad \quad} SO(3),
 \end{array}$$

wobei die linke vertikale Abbildung durch  $(x, t) \mapsto tx$ , die rechte durch  $(v, \varphi) \mapsto$  "Drehung um  $v$  mit Winkel  $\varphi$ " gegeben sind und  $\sim$  die von  $v \sim -v$  für  $v \in S^2$  erzeugte Äquivalenzrelation ist, siehe dazu auch [86, 24.40]. Allerdings erhalten wir so nicht die Homomorphie-Eigenschaft von  $S^3 \rightarrow SO(3)$ .

## 5. Glatte Abbildungen

Um verschiedene Mannigfaltigkeiten miteinander in Beziehung zu setzen, benötigen wir natürlich auch den Begriff der glatten Abbildungen zwischen ihnen und den geben wir jetzt.

### 5.1 Definition (glatte Abbildung).

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt GLATT ( $C^\infty$ )  $\Leftrightarrow$  lokal läßt sie sich zu einer glatten Abbildung  $\tilde{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  erweitern, d.h.

$$\forall p \in M \exists U \subseteq \mathbb{R}^m \underset{\text{off.}}{\exists} \tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ glatt mit } p \in U \text{ und } \tilde{f}|_{M \cap U} = f|_{M \cap U}.$$

Die konstante Abbildung, die Identität und die Zusammensetzung glatter Abbildungen sind glatt: Seien  $f : M_1 \rightarrow M_2$  sowie  $g : M_2 \rightarrow M_3$  glatt und  $\tilde{f} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  bzw.  $\tilde{g} : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_3}$  lokale, glatte Fortsetzungen, dann ist  $(g \circ f)^\sim = \tilde{g} \circ \tilde{f} : \tilde{f}^{-1}(U_2) \rightarrow \mathbb{R}^{n_3}$  eine lokale, glatte Fortsetzung von  $g \circ f$ , also ist  $g \circ f$  glatt.

### 5.2 Beispiele glatter Abbildungen.

1. Für die klassischen Liegruppen  $G$  aus Abschnitt 4 ist die Multiplikation  $\text{mult} : G \times G \rightarrow G$  glatt, denn für die offene Teilmenge  $GL(E)$  von  $L(E, E)$  ist dies die Einschränkung der bilinearen Abbildung  $(T, S) \mapsto TS$ , und die anderen klassischen Liegruppen  $G$  sind Teilmannigfaltigkeiten in  $GL(E)$ . Gleiches gilt für die Inversion  $\text{inv} : G \rightarrow G$ , denn für  $GL(E)$  ist sie die Lösung der impliziten Gleichung  $\text{mult}(A, \text{inv}(A)) = \text{id}$ , auf die der inverse Funktionensatz anwendbar ist. Die Ableitung ist dabei durch

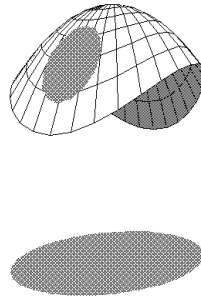
$$\text{inv}'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$$

gegeben.

2. Orthogonales-Komplement-Nehmen  $\perp : G(k, n) \rightarrow G(n - k, n)$  ist eine glatte Abbildung zwischen Graßmannmannigfaltigkeiten (siehe 3.9) als Einschränkung der affinen, durch  $P \mapsto 1 - P$  gegebenen Abbildung  $L(n, n) \rightarrow L(n, n)$  auf  $G(k, n) \subseteq L(n, n)$ .
3. Die Bild-Abbildung  $\text{Bild} : V(k, n) \rightarrow G(k, n)$  ist eine glatte Abbildung auf der Stiefelmannigfaltigkeit (siehe 4.3), denn als Abbildung  $V(k, n) = \{T \in L(k, n) : T^t T = \text{id}\} \rightarrow G(k, n) \subseteq L_k(n, n)$  ist sie durch  $T \mapsto TT^t$  gegeben: Offensichtlich ist  $TT^t$  die ortho-Projektion ( $(TT^t)^t(TT^t) = T^{tt}T^tTT^t = T \text{id} T^t = TT^t$ ) mit  $\text{Bild } T \supseteq \text{Bild } TT^t \supseteq \text{Bild } TT^t T = \text{Bild } T$ .

**5.3 Lemma (Karten sind Diffeomorphismen).**

Sei  $\varphi : U \rightarrow M$  eine lokale Parametrisierung der Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann ist  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus.



**Beweis.** Nach Voraussetzung ist  $\varphi$  glatt. Im Beweis der Richtung (1  $\Rightarrow$  4) von Satz 2.4 haben wir  $\varphi$  zu einem lokalen Diffeomorphismus  $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  erweitert. Aus der Bijektivität von  $\varphi : U \rightarrow M \cap V$  (ist Voraussetzung) folgt, daß

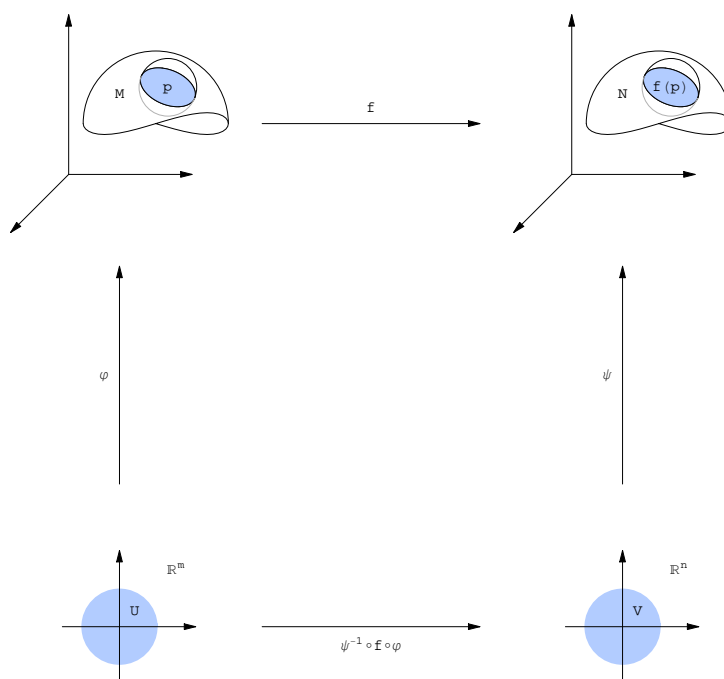
$$\varphi^{-1} : M \cap V \rightarrow U$$

als Abbildung existiert. Sie ist sogar glatt, denn lokal läßt sie sich zu der glatten Abbildung  $\Phi^{-1}$  erweitern.  $\square$

**5.4 Lemma (Glatte Abbildungen).**

Für eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen zwei Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist glatt.
2. Für jede lokale Parametrisierung  $\varphi$  von  $M$  und jede lokale Parametrisierung  $\psi$  von  $N$  gilt: Die Abbildung  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  ist glatt wo sie definiert ist.
3. Für jedes  $p \in M$  existiert eine lokale Parametrisierung  $\varphi$  von  $M$  um  $p$  und existiert eine lokale Parametrisierung  $\psi$  um  $f(p)$ , sodaß die Kartendarstellung  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  glatt ist.



**Beweis.** (1)  $\Rightarrow$  (2) Seien nun  $\varphi : U_1 \rightarrow V_1 \cap M$  und  $\psi : U_2 \rightarrow V_2 \cap N$  lokale Parametrisierungen. Die Abbildung  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  ist genau für jene  $x \in U_1$  definiert, welche  $f(\varphi(x)) \in V_2$  erfüllen. Das ist aber die offene Menge  $U_1 \cap (f \circ \varphi)^{-1}(V_2)$ . Obige Abbildung ist glatt, da sie nur aus glatten Funktionen zusammengesetzt ist.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Wenn die Aussage für alle lokalen Parametrisierungen gilt, dann erst recht für eine spezielle.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Zu zeigen ist, daß  $f$  glatt ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft, und lokal läßt sich  $f$  folgendermaßen als Komposition von glatten Abbildungen darstellen:

$$f = \psi \circ \underbrace{(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)}_{\text{glatt nach (3)}} \circ \varphi^{-1}. \quad \square$$

## 6. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Unsere vorläufige Definition einer Mannigfaltigkeit ist nicht zufriedenstellend: Bisher verwendeten wir ganz wesentlich die Eigenschaften des umgebenden Raumes, der mit dem Objekt, das wir beschreiben wollen, begrifflich nichts zu tun hat.

In diesen Abschnitt wollen wir nun den umgebenden Euklidischen Raum loswerden, und kommen so zum Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit.

Die Relevanz dieses Ansatzes zeigen bereits folgende

### 6.1 Beispiele.

(Siehe auch Abschnitt 1).

1. Das Möbiusband entsteht “topologisch”, wenn man zwei Seiten eines Rechtecks miteinander identifiziert und das Ganze mit der Quotiententopologie versieht. Denkt man sich dieses Gebilde im  $\mathbb{R}^3$  realisiert und zerschneidet es längs der Mittellinie, so entsteht bekanntlich ein mehrfach verdrehtes Band. Führen wir dasselbe aber “topologisch” durch, entsteht ein einfaches, nicht verdrehtes Band. Die beiden Figuren lassen sich aber im  $\mathbb{R}^3$  nicht stetig ineinander überführen, das geht erst im  $\mathbb{R}^4$  wie wir in [3.10](#) gesehen haben.
2. Der “Klein’schen Flasche” oder vor allem der “projektiven Ebene” sieht man gar nicht ohne weiteres an, in welchen  $\mathbb{R}^n$  sie “passen”, in den  $\mathbb{R}^3$  jedenfalls nicht.

Wir erweitern nun die Definition von Teilmannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  zu einer solchen für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

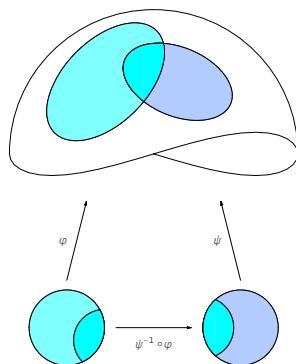
### 6.2 Definition (Abstrakte Mannigfaltigkeit).

Sei  $X$  eine beliebige Menge. Eine KARTE (oder auch LOKALE PARAMETRISIERUNG) von  $X$  ist eine injektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow X$ , definiert auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ .

Zwei Karten  $\varphi_1, \varphi_2$  heißen  $C^\infty$ -KOMPATIBEL oder VERTRÄGLICH, falls der KARTENWECHSEL

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_2(U_2)) \rightarrow \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1))$$

ein Diffeomorphismus **offener** Mengen ist. Die Idee dahinter ist, daß jede Karte  $\varphi_1$  glatt sein soll, und nach [5.4](#) sollte dazu  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  dort wo es definiert ist glatt sein.



Ein  $C^\infty$ -ATLAS einer Menge  $X$  ist eine Familie  $C^\infty$ -kompatibler Karten, deren Bilder ganz  $X$  überdecken. Zwei  $C^\infty$ -Atlanten heißen ÄQUIVALENT, wenn alle ihre Karten miteinander  $C^\infty$ -kompatibel sind, d.h. ihre Vereinigung ein  $C^\infty$ -Atlas ist.

Eine ABSTRAKTE  $C^\infty$ -MANNIGFALTIGKEIT ist eine Menge zusammen mit einer Äquivalenzklasse glatter Atlanten.

### 6.3 Definition (Topologie einer Mannigfaltigkeit).

Auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit  $M$  erhält man die finale TOPOLOGIE bezüglich der Karten indem man definiert:

$$U \subseteq M \text{ heißt offen} : \Leftrightarrow \varphi^{-1}(U) \text{ ist offen im } \mathbb{R}^m \text{ für jede Karte des Atlas.}$$

Die Karten  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  werden dann zu Homöomorphismen: Denn stetig sind sie nach Konstruktion der Topologie auf  $M$  und falls  $U_1 \subseteq U$  offen ist, so ist es auch  $\varphi(U_1) \subseteq M$  denn  $\varphi^{-1}(\varphi(U_1)) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(U_1)$  ist das Urbild unter dem Homöomorphismus  $\varphi^{-1} \circ \varphi$ .



Man verlangt nun üblicherweise, daß diese Topologie HAUSDORFF ist, d.h.: je zwei disjunkte Punkte lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen, denn Eindeutigkeit von Limiten ist für die Analysis von zentraler Bedeutung und für die meisten (aber keineswegs alle, siehe z.B. [86, 30.15]) in den Anwendungen auftretenden Mannigfaltigkeiten ist sie es.

Die folgende Proposition zeigt, daß diese Definition wirklich eine Erweiterung von Definition 2.4 ist.

#### 6.4 Proposition.

*Jede  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit  $M$  eines  $\mathbb{R}^n$  ist in natürlicher Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und ihre Topologie ist die Teilraumtopologie.*

**Beweis.** Einen Atlas auf  $M$  erhält man aus allen lokalen injektiven Parametrisierungen mittels 2.4. Die Kartenwechsel sind dann glatt nach 5.3 und die Topologie von  $M$  ist die induzierte Topologie des umgebenden  $\mathbb{R}^n$ , da die Parametrisierungen lokale Homöomorphismen sind, siehe den Beweis von 2.4.  $\square$

#### 6.5 Proposition (Maximaler Atlas).

*Sei  $\mathcal{A}$  ein  $C^\infty$ -Atlas für  $M$ , dann ist*

$$\mathcal{A}_{\max} := \{\varphi : \varphi \text{ Karte für } M \text{ und } \varphi \text{ verträglich mit allen } \psi \in \mathcal{A}\}$$

*der eindeutig bestimmte maximale Atlas, der  $\mathcal{A}$  umfaßt.*

**Beweis.** Wir zeigen zuerst  $\mathcal{A}_{\max}$  ist ein  $C^\infty$ -Atlas: Seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_{\max}$ , dann ist zu zeigen, daß  $\varphi^{-1} \circ \psi$  glatt ist. Sei  $x \in \psi^{-1}(\text{Bild } \varphi)$  also  $\psi(x) \in \text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi$ . Da  $\mathcal{A}$  ein Atlas ist, folgt die Existenz eines  $\chi \in \mathcal{A}$  mit  $\psi(x) \in \text{Bild } \chi$ . Somit ist  $\varphi^{-1} \circ \chi \circ \chi^{-1} \circ \psi = (\chi^{-1} \circ \varphi)^{-1} \circ (\chi^{-1} \circ \psi)$  lokal um  $x$  definiert. Die beiden geklammerten Teile sind laut Definition von  $\mathcal{A}_{\max}$  glatt und folglich ist auch  $\varphi^{-1} \circ \psi$  glatt.

Sei nun  $\mathcal{B}$  ein  $C^\infty$ -Atlas, der  $\mathcal{A}$  umfaßt, dann ist z.z.:  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{B}$ , dann ist  $\varphi$  verträglich mit allen  $\psi \in \mathcal{B}$ . Da  $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ , ist  $\varphi$  verträglich mit allen  $\psi \in \mathcal{A}$ , also ist nach Konstruktion  $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$ .  $\square$

#### 6.6 Mannigfaltigkeiten via Kartenwechsel.

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß die Kartenwechsel, also eine Familie von lokalen Abbildungen  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , schon die ganze Information über  $M$  enthalten. Sei dazu  $\{g_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A\}$  eine Familie von Diffeomorphismen offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume, sodaß  $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$  und  $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \subseteq g_{\alpha\gamma}$  gilt (Das sind offensichtlich Eigenschaften von Kartenwechseln). Es sei  $U_\alpha := \text{Dom } g_{\alpha\alpha}$  und wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung  $\bigsqcup_\alpha U_\alpha = \bigcup_\alpha \{\alpha\} \times U_\alpha$  durch:  $(\alpha, x) \sim (\beta, y) :\Leftrightarrow x = g_{\alpha\beta}(y)$ . Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation:

**Reflexivität:** Es ist  $g_{\alpha\alpha} = \text{id}_{U_\alpha}$ , denn aus  $g_{\alpha\alpha}^{-1} = g_{\alpha\alpha}$  folgt  $\text{Bild } g_{\alpha\alpha} = \text{Dom } g_{\alpha\alpha} = U_\alpha$  und aus  $g_{\alpha\alpha} \circ g_{\alpha\alpha} \subseteq g_{\alpha\alpha}$  folgt, da  $g_{\alpha\alpha}$  als Diffeomorphismus injektiv ist,  $g_{\alpha\alpha} \subseteq \text{id}$ . Somit ist  $(\alpha, x) \sim (\alpha, x)$ .

**Symmetrie:** Es sei  $(\alpha, x) \sim (\beta, y)$  also  $x = g_{\alpha\beta}(y)$ , d.h.  $y = g_{\alpha\beta}^{-1}(x) = g_{\beta\alpha}(x)$ , also  $(\beta, y) \sim (\alpha, x)$ .

**Transitivität:** Es sei  $(\alpha, x) \sim (\beta, y) \sim (\gamma, z)$ , also  $g_{\alpha\beta}(y) = x$  und  $g_{\beta\gamma}(z) = y$ . Somit ist  $g_{\alpha\gamma}(z) = (g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma})(z) = g_{\alpha\beta}(y) = x$ , also  $x \sim z$ .

Nun sei  $M := \left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) / \sim$  und  $g_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  durch  $x \mapsto [(\alpha, x)]_\sim$  definiert. Dann ist  $g_\alpha$  injektiv, denn aus  $(\alpha, x) \sim (\alpha, y)$  folgt  $x = g_{\alpha\alpha}(y) = y$ .

Aus  $\text{id}_{U_\alpha} = g_{\alpha\alpha} \supseteq g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}^{-1} \circ g_{\beta\alpha} = \text{id}_{\text{Dom } g_{\beta\alpha}}$  folgt  $\text{Dom}(g_{\beta\alpha}) \subseteq U_\alpha$  und Bild  $g_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}(\text{Dom}(g_{\beta\alpha})) \subseteq \text{Dom}(g_{\alpha\beta}) \subseteq U_\beta$ .

Weiters sind die Kartenwechsel  $g_\beta^{-1} \circ g_\alpha$  durch  $y = (g_\beta^{-1} \circ g_\alpha)(x)$  mit  $x \in U_\alpha$  und  $y \in U_\beta \Leftrightarrow g_\beta(y) = g_\alpha(x) \Leftrightarrow (\alpha, x) \sim (\beta, y) \Leftrightarrow x = g_{\alpha\beta}(y) \Leftrightarrow y = g_{\beta\alpha}(x)$  mit  $x \in \text{Dom } g_{\beta\alpha}$  und  $y \in \text{Bild } g_{\beta\alpha}$  gegeben. Somit ist  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und Kartenwechselabbildungen  $g_{\beta\alpha} = g_\beta^{-1} \circ g_\alpha$ .

**6.7 Definition (Topologische Mannigfaltigkeit).**

Ein topologischer Raum  $M$  heißt TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT  $\Leftrightarrow$  es gibt eine Familie von Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen eines endlichdimensionalen Vektorraums und offenen Teilmengen von  $M$ , deren Bilder  $M$  überdecken.

Solche Homöomorphismen heißen KARTEN von  $M$ .

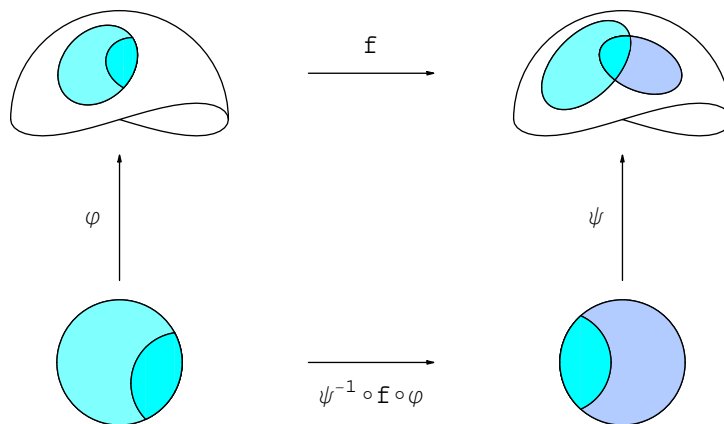
**Bemerkungen.**

1. Falls  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A}$  die Menge aller Karten der topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  ist, so sind deren Kartenwechsel automatisch Homöomorphismen auf offenen Teilen des  $\mathbb{R}^m$ . Man braucht also “nur” genügend viele unter ihnen zu finden, so daß die entsprechenden Kartenwechsel differenzierbar sind, um einen glatten Teilatlas zu erhalten, und somit  $M$  als glatte Mannigfaltigkeit zu erkennen.
2. Nicht jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt aber einen  $C^\infty$ -Atlas. Das erste Beispiel [72] war 10-dimensional. Heute ist 4 die niedrigste Dimension, für die es ein Beispiel gibt.

Wir wollen nun unseren Differenzierbarkeitsbegriff für Abbildungen zwischen Teilmannigfaltigkeiten auf abstrakte Mannigfaltigkeiten übertragen. Das Lemma 5.4 legt folgende Definition nahe:

**6.8 Definition (Glatte Abbildung).**

Seien  $(M, \mathcal{A})$  und  $(N, \mathcal{B})$  zwei  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt GLATT  $\Leftrightarrow f$  ist stetig, und für jeden Punkt  $x \in M$  existieren Karten  $\varphi \in \mathcal{A}$  und  $\psi \in \mathcal{B}$ , sodaß  $x \in \text{Bild } \varphi$ ,  $f(x) \in \text{Bild } \psi$  und die KARTENDARSTELLUNG  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  von  $f$  glatt ist. Das gilt dann ebenso für beliebige Karten  $\varphi \in \mathcal{A}$  und  $\psi \in \mathcal{B}$ .



Insbesondere ist die Identität  $\text{id} : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{B})$  genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die beiden Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  äquivalent sind.

### 6.9 Bemerkungen.

1. Die Stetigkeit von  $f$  setzt man voraus, damit die Kartendarstellung auf einer offenen Menge definiert ist.
2. Da der Kartenwechsel glatt ist, genügt es, obige Eigenschaft bei jedem  $x$  für eine Karte aus  $\mathcal{A}$  und für eine aus  $\mathcal{B}$  um  $f(x)$  zu fordern, sie überträgt sich dann auf alle Karten.
3. Wenn man  $\mathbb{R}$  als topologische Mannigfaltigkeit auffaßt, lassen sich sehr leicht zwei  $C^\infty$ -Strukturen angeben:  $\mathcal{A}_1 := \{\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , und  $\mathcal{A}_2 := \{\varphi(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Diese sind nicht verträglich, da  $\varphi^{-1} \circ \text{id} : x \rightarrow \sqrt[3]{x}$  nicht glatt ist (denn  $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})$  existiert nicht bei 0), definieren also zwei verschiedene  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeitsstrukturen auf  $\mathbb{R}$ . Allerdings sind die beiden Strukturen diffeomorph, also doch gewissermaßen gleich:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \text{id} \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{hier Mannigfaltigkeiten} \\
 \\
 \text{hier Vektorräume}
 \end{array}$$

Die Abbildung  $f = \sqrt[3]{x}$  ist ein Diffeomorphismus:  $f, f^{-1}$  sind bijektiv und klarerweise stetig. Ebenso ist  $f$  glatt, da  $(\text{id}^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) = f(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$  glatt ist. Analog ist  $f^{-1}$  glatt, da  $(\varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \text{id})(x) = \varphi^{-1}(x^3) = x$  glatt ist.

4. Ab  $\dim M = 4$  gilt nicht mehr allgemein, daß zwei  $C^\infty$ -Atlanten einer topologischen Mannigfaltigkeit bis auf Diffeomorphismus gleich sind. Für Dimension kleiner als 4 wurde es hingegen in [121] gezeigt. Nach [115] trägt zum Beispiel die  $S^7$  mindestens 15 nicht diffeomorphe  $C^\infty$ -Strukturen; die  $S^{31}$  mehr als  $16 \cdot 10^6$ . Genauer gilt:

$n = \dim(S^n)$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
Strukturen auf $S^n$	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16	...

Für den topologischen Raum  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \neq 4$  gibt es genau eine glatte Struktur. Für  $n > 4$  wurde das in [137] bewiesen. Ganz überraschend konnte Kirby 1982 beweisen, daß für den  $\mathbb{R}^4$  eine exotische  $C^\infty$ -Struktur existiert. In [139] wurde gezeigt, daß es sogar überabzählbar viele gibt.

5. Die Klasse der  $C^\infty$ -Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten bilden eine KATEGORIE. Dabei versteht man unter einer Kategorie eine Klasse von Räumen (Objekten) und Abbildungen (Morphismen), sodaß zu jedem Objekt die Identität ein Morphismus und die Zusammensetzung von Morphismen wieder ein solcher ist. Es ist also für drei  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  $M, N, P$  und glatte Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow P$  zu zeigen:

- $g \circ f : M \rightarrow P$  ist glatt.
- $\text{id} : M \rightarrow M$  ist glatt.

### 6.10 Lemma (Offene Teilmannigfaltigkeit).

Sei  $(M, \mathcal{A})$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, und  $U$  offen in  $M$ . Dann ist  $U$  in natürlicher Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ein Atlas auf  $U$  ist durch die Einschränkungen von Karten von  $M$  gegeben und die Topologie dieser Mannigfaltigkeit ist die Spurtopologie von  $M$ .

**Beweis.** Es ist  $\mathcal{A}_U := \{\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi \in \mathcal{A}\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas für  $U$ , denn die Kartenwechsel

$$(\psi|_{\psi^{-1}(U)})^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = (\psi^{-1} \circ \varphi)|_{\varphi^{-1}(U)}$$

sind als Einschränkungen von  $C^\infty$ -Funktionen selbst  $C^\infty$ . Die Topologie der Mannigfaltigkeit  $U$  ist die Spurtopologie, denn eine Menge  $W \subseteq U$  ist genau dann in der Mannigfaltigkeit  $U$  offen, wenn  $(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)})^{-1}(W) = \varphi^{-1}(W) \subseteq \varphi^{-1}(U)$  offen ist für alle Karten  $\varphi$ .  $\square$

### 6.11 Bemerkungen.

1. Es ist also sinnvoll, von  $C^\infty$ -Abbildungen zu sprechen, die nur auf offenen Teilmengen einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit definiert sind.
2. Die Karten  $\varphi$  einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit sind Diffeomorphismen

$$\varphi : \mathbb{R}^m \underset{\text{off.}}{\supseteq} \text{Dom } \varphi \rightarrow \text{Bild } \varphi \underset{\text{off.}}{\subseteq} M.$$

Insbesondere besteht  $\mathcal{A}_{\max}$  aus all jenen Karten  $\varphi$ , die Diffeomorphismen auf ihr Bild sind, d.h.  $\varphi^{-1} \circ \psi$  ist ein Diffeomorphismus offener Mengen für alle Karten  $\psi \in \mathcal{A}$ .

### 6.12 Beispiele von Atlanten.

1.  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$

Wir konstruieren Karten durch radial-Projektionen auf die Tangentialebenen ("Radialprojektion").

$$\begin{aligned} \alpha + v &= \lambda x \text{ mit } |x| = 1 \text{ und } \langle \alpha, v \rangle = 0 \\ \Rightarrow x &\mapsto v := \langle x, \alpha \rangle^{-1} \cdot x - \alpha, \\ v &\mapsto x := (\alpha + v) \cdot |\alpha + v|^{-1}. \end{aligned}$$

Eine Karte zentriert bei  $\alpha$  ist also

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \mathbb{R}^n &\cong \alpha^\perp \rightarrow \{x \in S^n : \langle x, \alpha \rangle > 0\} \subseteq M \\ \varphi_\alpha(v) &:= (\alpha + v) \cdot |\alpha + v|^{-1} \\ \varphi_\alpha^{-1}(x) &= \langle x, \alpha \rangle^{-1} \cdot x - \alpha. \end{aligned}$$

Die Menge  $\{\varphi_\alpha : \alpha \in S^n\}$  bildet einen  $C^\infty$ -Atlas für  $S^n$ . Allerdings überdecken auch schon die Bilder der Karten  $\varphi_{\pm e_i}$  für  $i = 1, \dots, n+1$  die  $S^n$ . Da sowohl  $\varphi_\alpha$  als auch  $\varphi_\alpha^{-1}$  glatt auf offener Umgebung  $\{v : v \neq -\alpha\}$  und  $\{x : \langle x, \alpha \rangle > 0\}$  im  $\mathbb{R}^{n+1}$  sind, sind klarerweise alle Kartenwechsel glatt.

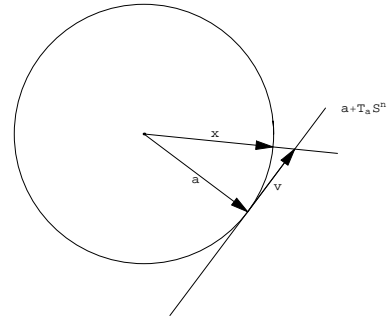
2. Der Atlas der stereographischen Projektion für  $S^n$  hat als Karten  $\psi_\alpha$  mit  $\alpha \in S^n$ :

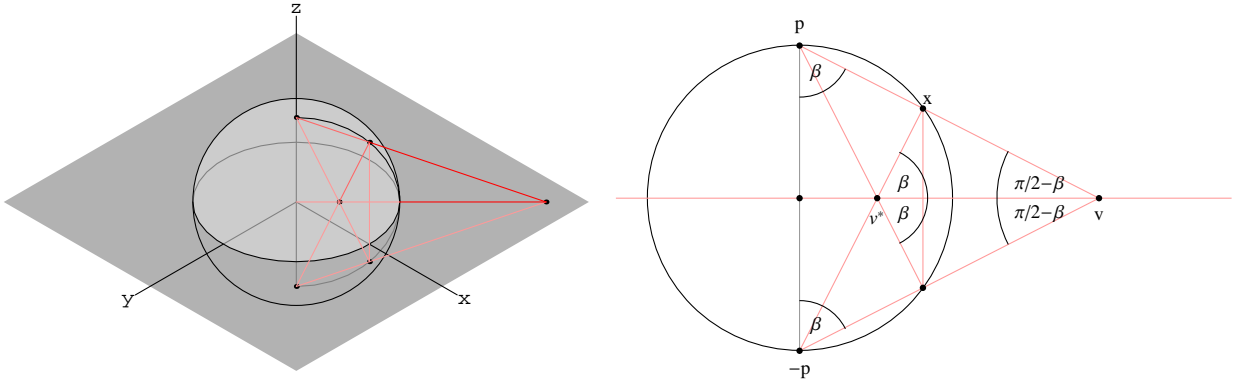
$$\psi_\alpha : \alpha^\perp \rightarrow S^n \setminus \{\alpha\}, \quad v \mapsto \alpha + 2(v - \alpha) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}$$

(siehe [3.5](#)) mit der Umkehrabbildung

$$\psi_\alpha^{-1}(x) = (x - \langle x, \alpha \rangle \cdot \alpha) \cdot (1 - \langle x, \alpha \rangle)^{-1}.$$

Die Karte  $\psi_\alpha$  hat  $S^n \setminus \{\alpha\}$  als Bild. Für einen Atlas genügt es also, eine zusätzliche Karte zentriert bei  $\alpha$  zu finden, etwa  $\psi_{-\alpha}$ . Den Kartenwechsel für diese beiden Karten erhält man aus elementaren geometrischen Überlegungen: Es seien  $v$  und  $v^*$  die Bilder von  $x$  unter  $\psi_\alpha^{-1}$  und  $\psi_{-\alpha}^{-1}$ . Die Dreiecke  $(\alpha, 0, v)$  und  $(\alpha, x, -\alpha)$  haben zwei gleiche Winkel, je einen rechten und jenen bei  $\alpha$ , also sind sie ähnlich. Die Dreiecke  $(\alpha, x, -\alpha)$  und  $(0, v^*, -\alpha)$  sind aus entsprechenden Gründen ebenfalls ähnlich.





Aus dem Strahlensatz erhält man:

$$\frac{|v|}{1} = \frac{1}{|v^*|} \Rightarrow |v| = |v^*|^{-1} \Rightarrow (\psi_{-\alpha}^{-1} \circ \psi_{\alpha})(v) = v^* = v \cdot |v|^{-2}.$$

3. Die naheliegende Frage, wie die beiden durch [1](#) und [2](#) gegebenen Strukturen auf  $S^n$  zusammenpassen, ist so zu beantworten: Die Karten sind verträglich (d.h. erzeugen denselben maximalen Atlas), denn

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^{-1} &: x \mapsto x \cdot \langle x, \alpha \rangle^{-1} - \alpha \\ \psi_{\beta} &: v \mapsto \beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1} \\ \varphi_{\alpha}^{-1} \circ \psi_{\beta} &: v \mapsto \frac{\beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}}{\langle \beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}, \alpha \rangle} - \alpha \end{aligned}$$

ist ein – wenn auch komplizierter –  $C^{\infty}$ -Diffeomorphismus. Die Verträglichkeit der Karten kann auch daran erkannt werden, daß die Karten als lokale Diffeomorphismen des umgebenden Raums aufgefaßt werden können.

4. EINPUNKTKOMPACTIFIZIERUNG des  $\mathbb{R}^n$ :

Wir definieren auf  $\mathbb{R}_{\infty}^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  einen Atlas durch  $\chi_0$  und  $\chi_{\infty}$ , diese sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \chi_0 &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}^n \\ \chi_0(x) &= x \\ \chi_{\infty} &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}^n \\ \chi_{\infty}(0) &= \infty \text{ und } \chi_{\infty}(x) = x \cdot |x|^{-2} \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Die Kartenwechsel  $\chi_0^{-1} \circ \chi_{\infty}$  und  $\chi_{\infty}^{-1} \circ \chi_0$  von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  errechnen sich als:  $x \mapsto x \cdot |x|^{-2}$ . Dieser Kartenwechsel ist uns schon in [2](#), bei der Sphäre, begegnet. Also ist  $\mathbb{R}_{\infty}^n$  diffeomorph zu  $S^n$ . Explizit kann ein Diffeomorphismus  $f$  wie folgt beschrieben werden.

**Behauptung:**  $\mathbb{R}_{\infty}^n \cong S^n$  mittels  $f(\infty) = e_1$  und  $f(x) = \psi_{e_1}(x)$ .

Es ist klar, daß  $f$  bijektiv ist. Bleibt zu zeigen, daß sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  glatt ist. Die dafür zu untersuchenden Fälle sind:

- $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$
- $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_{\infty} = \chi_0^{-1} \circ \chi_{\infty}$
- $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_{\infty}^{-1} \circ \chi_0$
- $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_{\infty} = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$

Dies sind alles Diffeomorphismen, also ist  $f$  ein Diffeomorphismus.

## 5. PROJEKTIVE RÄUME

$$\mathbb{P}^n := \{ \text{Geraden durch } 0 \text{ im } \mathbb{R}^{n+1} \} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

wobei  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , sodaß  $\lambda x = y$ . Als Karten wählt man etwa für  $0 \leq i \leq n$ :

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \\ (y^1, \dots, y^n) \mapsto [(y^1, \dots, y^i, (-1)^i, y^{i+1}, \dots, y^n)] \end{cases}$$

Das Vorzeichen ist dabei so gewählt, daß  $\mathbb{P}^n$  so orientiert wie möglich wird, siehe [27.42.3](#). Die  $\varphi_i$  gehen bijektiv von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^{i+1} \neq 0\} / \sim$  mit Umkehrabbildung

$$\varphi_i^{-1} : [(x^0, \dots, x^n)] \mapsto \frac{(-1)^i}{x^i} (x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n).$$

Der Kartenwechsel berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(y^1, \dots, y^n) &= \varphi_j^{-1} [(y^1, \dots, y^i, (-1)^i, y^{i+1}, \dots, y^n)] \stackrel{\text{(O.B.d.A. } j > i)}{=} \\ &= \frac{(-1)^j}{y^j} (y^1, \dots, y^i, (-1)^i, y^{i+1}, \dots, y^{j-1}, y^{j+1}, \dots, y^n). \end{aligned}$$

Das ist ein Diffeomorphismus (seines Definitionsbereiches) und für ungerades  $n$  zusätzlich Orientierungs-erhaltend. Also ist  $\mathbb{P}^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ganz analoges Vorgehen liefert  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  (komplexe Geraden in  $\mathbb{C}^{n+1}$ ) mit  $\dim \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = 2n$  und  $\mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n$  mit  $\dim \mathbb{P}_{\mathbb{H}}^n = 4n$ .

In [3.9](#) hatten wir eine weitere Beschreibung der projektiven Räume  $\mathbb{P}^n$  als Graßmannmannigfaltigkeit  $G(1, n+1) \subseteq L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$  gegeben. Dabei hatten wir Geraden durch 0 im  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit den orthogonal-Projektionen auf sie identifiziert. Wir wollen nun zeigen, daß dies diffeomorphe Räume beschreibt. Sei dazu  $\bar{\varphi}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  durch  $(y^1, \dots, y^n) \mapsto (y^1, \dots, y^i, (-1)^i, y^{i+1}, \dots, y^n)$  gegeben. Dann ist  $\varphi_i = \pi \circ \bar{\varphi}_i$ , wobei  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n := \mathbb{R}^{n+1} / \sim$  die kanonische Projektion  $x \mapsto [x]$  bezeichnet. Für  $a, b \in E := \mathbb{R}^{n+1}$  sei  $a \otimes b \in L(E, E)$  definiert durch  $(a \otimes b)(x) := \langle a, x \rangle b$  (Für eine Erklärung dieser Notation siehe [21.3.1](#)). Dann ist  $(a, b) \mapsto a \otimes b$  bilinear und

- $(a \otimes b)^t = b \otimes a$ , denn  $\langle (a \otimes b)x, y \rangle = \langle a, x \rangle \cdot \langle b, y \rangle = \langle x, (b \otimes a)y \rangle$ ,
- $(a_1 \otimes b_1) \circ (a_2 \otimes b_2) = \langle a_1, b_2 \rangle a_2 \otimes b_1 : x \mapsto \langle a_1, b_2 \rangle \langle a_2, x \rangle b_1$ .

Die Rang 1 linearen Operatoren  $P$  sind genau jene der Form  $P = a \otimes b \neq 0$  (denn  $\text{codim Ker } P = 1 \Rightarrow \text{Ker } P = a^\perp$  für ein  $|a| = 1 \Rightarrow x - \langle a, x \rangle a \in \text{Ker } P \Rightarrow P(x) = \langle a, x \rangle P(a) = (a \otimes P(a))(x)$ ) und die ortho-Projektion unter ihnen sind jene der Form  $P = a \otimes a$  with  $|a| = 1$ : Aus  $P = P^t \circ P = (P(a) \otimes a) \circ (a \otimes P(a)) = |P(a)|^2 a \otimes a$  folgt  $P(a) = |P(a)|^2 |a|^2 a$  und damit  $|P(a)| = 1/|a|^3 = 1$ , also  $P(a) = a$ .

Die glatte Abbildung  $a \mapsto \frac{a}{|a|} \otimes \frac{a}{|a|}$  ist somit eine surjektive glatte (da  $\otimes$  bilinear ist) Abbildung  $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow G(1, n+1)$  und faktorisiert zu einer glatten Bijektion  $\tilde{f} : \mathbb{P}^n \rightarrow G(1, n+1)$ . Lokal erhalten wir eine glatte (da  $P \mapsto P(a)$  linear ist) inverse Abbildung, indem wir Projektionen  $P = b \otimes b$  mit  $|b| = 1$  nahe  $a \otimes a$  den Punkt  $\pi(P(a)) \in \mathbb{P}^n$  zuordnen: Es ist nämlich  $P(a) = \langle b, a \rangle b$  und somit  $\tilde{f}(\pi(P(a))) = \tilde{f}(\pi(b)) = f(b) = b \otimes b = P$ . Umgekehrt ist  $\pi(f(b)(a)) =$

$\pi(\frac{\langle b, a \rangle}{|b|^2} b) = \pi(b)$ . Also ist  $\tilde{f}$  der gesuchte Diffeomorphismus.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{x \mapsto \frac{x}{|x|}} & S^n \\
 \searrow \varphi_i & & \downarrow \pi & \searrow f & \downarrow x \mapsto x \otimes x \\
 & & \mathbb{P}^n & \xrightarrow[\tilde{f}]{\cong} & G(1, n+1) \hookrightarrow L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})
 \end{array}$$

**6.13 Bemerkung.**

Zwischen niedrigdimensionalen projektiven Räumen und Sphären gibt es einige Beziehungen:

1. Die projektive Gerade  $\mathbb{P}^1 \cong S^1$ .

Als Karten für die  $S^1$  wählen wir  $\psi_+ := \psi_{(0,1)}$  und  $\psi_- := \psi_{(0,-1)}$ , die stereographischen Projektionen zu den Punkten  $(0, 1)$  und  $(0, -1)$  (vgl. Bsp. [6.12](#)). Für den Kartenwechsel erhielten wir:

$$(\psi_{(0,1)}^{-1} \circ \psi_{(0,-1)})(x) = (\psi_{(0,-1)}^{-1} \circ \psi_{(0,1)})(x) = \frac{1}{x} \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Als Karten für  $\mathbb{P}^1$  ordnen wir jeder Ursprungsgeraden den Schnittpunkt mit den Geraden  $y = 1$  (bzw.  $x = 1$ ) zu, siehe [6.12.5](#):

$$\varphi_- : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus [(0, 1)] \\ x \mapsto [(1, x)] \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_+ : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus [(1, 0)] \\ x \mapsto [(x, 1)] \end{cases}$$

Mit der Karte  $\varphi_-$  erhalten wir alle Klassen bis auf  $[(0, 1)]$  (das entspricht der  $y$ -Achse). Diesen Mangel behebt die Karte  $\varphi_+$ . Wir berechnen die Umkehrabbildungen:

$$\begin{aligned}
 \varphi_-^{-1} : [(x, y)] = [(1, \frac{y}{x})] &\mapsto \frac{y}{x} \\
 \varphi_+^{-1} : \mathbb{P}^1 \setminus [(1, 0)] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ mit} \\
 \varphi_+^{-1} : [(x, y)] &\mapsto \frac{x}{y}
 \end{aligned}$$

Nun zum Kartenwechsel:

$$(\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-)(x) = \varphi_+^{-1}([(1, x)]) = \frac{1}{x}, \quad (\varphi_-^{-1} \circ \varphi_+)(x) = \varphi_-^{-1}([(x, 1)]) = \frac{1}{x},$$

jeweils auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sei  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow S^1$  gegeben durch:

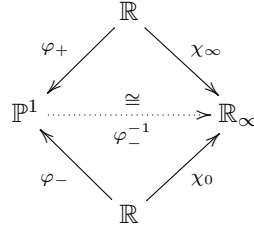
$$f := \begin{cases} \psi_- \circ \varphi_-^{-1} \text{ auf } \mathbb{P}^1 \setminus [(0, 1)] \\ \psi_+ \circ \varphi_+^{-1} \text{ auf } \mathbb{P}^1 \setminus [(1, 0)]. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da aus  $\psi_-^{-1} \circ \psi_+ = \varphi_-^{-1} \circ \varphi_+$  folgt, daß  $\psi_- \circ \varphi_-^{-1} = \psi_+ \circ \varphi_+^{-1}$  auf  $\mathbb{P}^1 \setminus \{[(1, 0)], [(0, 1)]\}$ . Sie ist aber auch ein Diffeomorphismus. Dies müssen wir nur für Kartendarstellungen zeigen. Auf  $\mathbb{P}^1 \setminus [(0, 1)]$  ist wegen  $f(\text{Bild } \varphi_-) = \text{Bild } \psi_-$  die Kartendarstellung  $\psi_-^{-1} \circ f \circ \varphi_- = \psi_-^{-1} \circ \psi_- \circ \varphi_-^{-1} \circ \varphi_- = \text{id}$  ein Diffeomorphismus.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\
 \uparrow \varphi_{\pm} & & \uparrow \psi_{\pm} \\
 \mathbb{R} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Analog für  $x \in \mathbb{P}^1 \setminus [(1, 0)]$ .

Einfacher sieht man  $\mathbb{P}^1 \cong S^1$  auch mittels 6.12.4:



2.  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$ : Geometrisch läßt sich das wie folgt veranschaulichen: Man parametrisiert  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  durch die eindeutigen Schnitte dieser komplexen Geraden durch 0 mit der komplexen affinen Gerade  $g := \{(z, 1) : z \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{R}^2$ . Nur die komplexe Gerade  $h$  parallel zu  $g$ , d.h.  $h = \{(z, 0) : z \in \mathbb{C}\} \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ , wird nicht erwischt. Jene Geraden, die nahe bei  $h$  liegen, haben ihre Schnittpunkte weit draußen auf  $g$ . Also entspricht der noch fehlenden Gerade  $h$  der Punkt  $\infty$  in der Einpunktkompaktifizierung  $\mathbb{R}^2_{\infty}$  von  $\mathbb{R}^2$ . Daß  $\mathbb{R}^2_{\infty}$  und  $S^2$  diffeomorph sind wissen wir aber (siehe Beispiel 6.12).

## 7. Produkte und Summen von Mannigfaltigkeiten

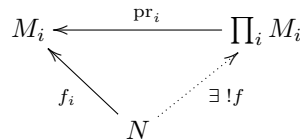
Die einfachste Möglichkeit, aus Mannigfaltigkeiten neue zu basteln, ist die Bildung von Produkten und Summen, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

### 7.1 Proposition (Produkte).

Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $(M_i, \mathcal{A}_i)$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist  $\prod_{i=1}^n M_i$  in natürlicher Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Der Atlas auf  $\prod M_i$  ist gegeben durch

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i := \{\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n : \varphi_i \in \mathcal{A}_i\}.$$

Das Produkt  $\prod M_i$  hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $N$  und  $C^\infty$ -Abbildungen  $f_i : N \rightarrow M_i$  existiert eine eindeutige  $C^\infty$ -Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , sodaß  $\text{pr}_i \circ f = f_i$ . Dabei bezeichnet  $\text{pr}_i : \prod M_i \rightarrow M_i$  die  $C^\infty$ -Abbildung  $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$ . Die universelle Eigenschaft kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:



Die auf  $\prod_i M_i$  induzierte Topologie ist gerade die Produkttopologie.

**Beweis.** Offensichtlich ist durch den Atlas  $\prod_i \mathcal{A}_i$  induzierte Topologie gerade die Produkttopologie, denn das Produkt von Homöomorphismen  $\varphi_i$  ist ebenso ein Homöomorphismus

$$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n : \text{Dom } \varphi_1 \times \dots \times \text{Dom } \varphi_n \rightarrow \text{Bild } \varphi_1 \times \dots \times \text{Bild } \varphi_n \subseteq \prod M_i.$$

Die Kartenwechsel

$$(\psi_1 \times \dots \times \psi_n)^{-1} \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n) = (\psi_1^{-1} \circ \varphi_1) \times \dots \times (\psi_n^{-1} \circ \varphi_n).$$

sind als Produkte von Diffeomorphismen  $(\psi_i^{-1} \circ \varphi_i)$  selbst Diffeomorphismen, und somit ist  $\prod M_i$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.



Wir behaupten nun  $\text{pr}_i : \prod M_i \rightarrow M_i$  ist glatt.

Sei  $(x^1, \dots, x^n) \in \prod M_i$  und  $\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n$  eine Karte um diesen Punkt. Dann ist  $\varphi_i$  Karte um  $x^i$ . Somit ist

$$\varphi_i^{-1} \circ \text{pr}_i \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n) : \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_n} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}, \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$$

eine lineare Projektion, also glatt. Seien  $f_i \in C^\infty(N, M_i)$ , dann ist  $f : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$  die einzige Abbildung mit  $\text{pr}_i \circ f = f_i$ . Diese ist  $C^\infty$ : Sei  $\varphi$  dazu eine Karte von  $N$ , dann ist

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n)^{-1} \circ f \circ \varphi &= (\varphi_1^{-1} \times \dots \times \varphi_n^{-1}) \circ (f_1 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi) \\ &= (\varphi_1^{-1} \circ f_1 \circ \varphi, \dots, \varphi_n^{-1} \circ f_n \circ \varphi). \end{aligned}$$

Laut Voraussetzungen sind die  $\varphi_i^{-1} \circ f_i \circ \varphi$  glatt (da die  $f_i$  glatt sind), also auch  $f$ .  $\square$

## 7.2 Beispiele von Produkten.

1. Der Zylinder ist eine Teilmenge im  $\mathbb{R}^3$ , nämlich das kartesische Produkt aus der  $S^1$  und einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , also  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.
2. Der  $n$ -dimensionale Torus im  $\mathbb{R}^{2n}$  entsteht durch das  $n$ -fache kartesische Produkt der  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ :

$$S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = \prod_{i=1}^n S^1 = (S^1)^n = T^n.$$

Für  $n = 2$  ergibt sich der uns schon bekannte "Fahrradschlauch" (vgl. [3.6](#)), allerdings als Teilmenge von  $\mathbb{R}^4$  anstelle von  $\mathbb{R}^3$ .

## 7.3 Proposition (Summen).

Seien  $(M_i, \mathcal{A}_i)$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten. Dann ist die disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup_i M_i$  in natürlicher Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ein Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $\bigsqcup_i M_i$  ist gegeben durch  $\bigcup_i \mathcal{A}_i$  (hier ist keine Beschränkung der Indermenge nötig).

Zusätzlich hat  $\bigsqcup M_i$  folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $N$  und für alle  $C^\infty$ -Abbildungen  $f_i : M_i \rightarrow N$  existiert eine eindeutige glatte Abbildung  $f$  mit

$$f := \bigsqcup_i f_i : \bigsqcup M_i \rightarrow N, \quad \text{sodaf } f|_{M_i} = f_i.$$

Dies kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \hookrightarrow & \bigsqcup_i M_i \\ & \searrow f_i & \swarrow \exists! f \\ & & N \end{array}$$

**Beweis.** Für  $\varphi, \psi \in \bigcup \mathcal{A}_i$  ist entweder  $\varphi^{-1} \circ \psi = \emptyset$  oder ein  $i$  existiert mit  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_i$  und somit ist  $\psi^{-1} \circ \varphi$  glatt. Offene Mengen in  $\bigsqcup M_i$  sind Vereinigungen offener Mengen in  $M_i$ . Die universellen Eigenschaft ist nun offensichtlich.  $\square$

## 8. Zerlegungen der Eins

Um aus lokalen Konstruktionen (wie sie z.B. in der Analysis behandelt werden) auch globale zu erhalten benötigen wir eine Methode, diese lokal zu verkleben. Wir brauchen dazu “Gewichts”-Funktionen, d.h. Funktionen, die nur lokal nicht verschwinden, größer oder gleich 0 sind und zusammen sich auf 1 summieren. Das sind die sogenannten Partitionen der Eins, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

### 8.1 Definition (Partition der Eins).

Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Eine  $\mathcal{U}$  unterordnete GLATTE PARTITION DER EINS ist eine Menge  $\mathcal{F}$  von glatten Abbildungen  $M \rightarrow \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$  mit den Eigenschaften:

1. Die Familie  $\{\text{Trg}(f) : f \in \mathcal{F}\}$  ist eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ ,  
d.h.  $\forall f \in \mathcal{F} \exists U_f \in \mathcal{U} : \text{Trg}(f) \subseteq U_f$ .  
Dabei ist  $\text{Trg}(f)$  der Abschluß von  $\{x : f(x) \neq 0\}$ .
2. Die Familie  $\{\text{Trg}(f) : f \in \mathcal{F}\}$  ist lokal endlich,  
d.h.  $\forall p \in M \exists U(p)$  sodaß  $\{f \in \mathcal{F} : \text{Trg}(f) \cap U(p) \neq \emptyset\}$  endlich ist.
3.  $\sum_{f \in \mathcal{F}} f = 1$ .

### 8.2 Satz (Partition der Eins).

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann gibt es eine  $C^\infty$ -Partition der Eins, die  $\mathcal{U}$  untergeordnet ist.

**Beweis. Beh.:**  $X$  (und in der Tat jeder separable metrische Raum) ist LINDELÖF, d.h. jede offene Überdeckung von  $X$  besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung. Sei also  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Es sei

$$X_0 := \left\{ (r, x) : 0 < r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}^n \cap X, \exists U \in \mathcal{U} : U_r(x) := \{y : \|y - x\| < r\} \subseteq U \right\}.$$

Dann ist  $X_0$  abzählbar und nach Definition existiert für jedes  $(r, x) \in X_0$  eine Menge  $U_{r,x} \in \mathcal{U}$  mit  $U_r(x) \subseteq U_{r,x}$ . Wir können durch Auswahl also eine Funktion  $\Psi : X_0 \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $(r, x) \mapsto U_{r,x}$  definieren. Wir behaupten, daß das Bild  $\mathcal{U}_0 := \Psi(X_0)$  von  $\Psi$  eine abzählbare Teilüberdeckung zu  $\mathcal{U}$  ist. Abzählbarkeit ist klar. Sei also  $x \in X$  beliebig. Da  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung von  $X$  ist existiert ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U$ . Da  $U$  offen ist existiert ein  $\delta > 0$  mit  $U_\delta(x) \subseteq U$ . Sei  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $0 < 2r < \delta$ . Da  $\mathbb{Q}^n \cap X$  in  $X$  dicht liegt existiert ein  $x_0 \in \mathbb{Q}^n \cap X$  mit  $d(x_0, x) < r$  und somit ist  $x \in U_r(x_0) \subseteq U_\delta(x) \subseteq U$ , also  $x \in U_r(x_0) \subseteq U_{r,x_0}$  mit  $(r, x_0) \in X_0$ .

**Beh.:** Es gibt glatte Funktionen mit beliebig kleinem Träger. Betrachten wir dazu die glatte Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$h(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} > 0 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

Wenn wir für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$  nun eine glatte Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch

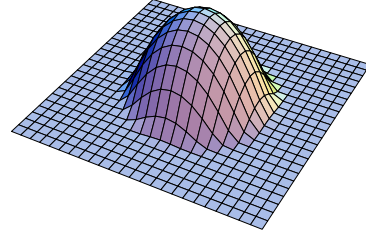
$$\varphi(x) := h(r^2 - \|x - x_0\|^2)$$

definieren, dann ist  $\varphi(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(x) &:= h(r^2 - \|x - x_0\|^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r^2 - \|x - x_0\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \notin U_r(x_0). \end{aligned}$$

Das heißt also, der Träger von  $\varphi$  ist gegeben durch

$$\text{Trg } \varphi = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}.$$



**Beh.:** Es gibt eine abzählbare lokal endliche Verfeinerung  $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$  von  $\mathcal{U}$ . Sei  $\mathcal{U}$  die gegebene offene Überdeckung von  $X$ . Zu jedem  $x \in U \in \mathcal{U}$  wählen wir ein  $r > 0$  mit  $\overline{U_r(x)} \subseteq U$ . Nach obigem wissen wir, daß es ein  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  gibt mit

$$U_r(x) = \{y : \varphi(y) \neq 0\} =: U_\varphi.$$

Diese Mengen bilden eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ . Da  $X$  Lindelöf ist, existieren abzählbar viele Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  s.d.  $\{U_{\varphi_n} : n \in \mathbb{N}\}$  eine Überdeckung von  $X$  und eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  ist.

Diese muß noch nicht lokal endlich sein, darum definieren wir  $W_n$  wie folgt:

$$W_n := \left\{x : \varphi_n(x) > 0 \wedge \varphi_i(x) < \frac{1}{n} \text{ für } 1 \leq i < n\right\} \subseteq U_{\varphi_n}.$$

Es ist klar, daß die  $W_n$  offen sind (durch stetige Ungleichung gegeben), und Teilmengen von  $U_{\varphi_n}$  sind.

Die  $W_n$  bilden eine Überdeckung von  $X$ , denn zu jedem  $x \in X$  existiert ein minimales  $n_0$  mit  $\varphi_{n_0}(x) > 0$  und somit ist  $x \in W_{n_0}$ .

Um zu beweisen, daß  $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$  lokal endlich ist definieren wir eine offene Umgebung um  $x$ :

$$U(x) := \left\{y : \varphi_{n_0}(y) > \frac{1}{2}\varphi_{n_0}(x)\right\}.$$

Falls  $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$ , dann sei  $y$  im Durchschnitt dieser beiden Mengen gewählt und es folgt:

$$\varphi_i(y) < \frac{1}{k} \text{ für alle } i < k \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y).$$

Falls  $k > n_0$  ist, und zwar so groß, daß  $\frac{1}{k} < \frac{1}{2}\varphi_{n_0}(x)$  ist, dann erhalten wir durch

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y) < \frac{1}{k}$$

einen Widerspruch. Also existieren nur endlich viele  $k$  mit  $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$ .

**Beh.:** Es gibt eine Partition der Eins  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  mit  $\{x : f_n(x) \neq 0\} = W_n$ . Wir definieren vorerst glatte Funktion  $\psi_n : X \rightarrow \{t : 0 \leq t\}$  durch

$$\psi_n(x) := h(\varphi_n(x)) \cdot h\left(\frac{1}{n} - \varphi_1(x)\right) \cdot \dots \cdot h\left(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x)\right).$$

Dann ist

$$\psi_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow (\varphi_n(x) > 0) \wedge \left(\frac{1}{n} - \varphi_1(x) > 0\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x) > 0\right) \Leftrightarrow x \in W_n.$$

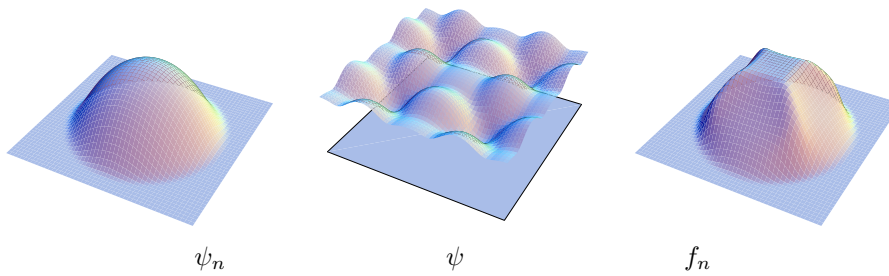
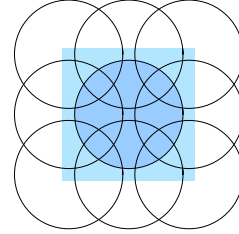
Da  $\{W_n : n\}$  lokal endlich ist, sind in der Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$  lokal nur endlich viele Summanden ungleich 0, und somit ist  $\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ . Diese Funktion  $\psi$  verschwindet nirgends, da die  $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine Überdeckung bilden.

Nun definieren wir  $f_n := \frac{\psi_n}{\psi} \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ . Dann ist

$$\sum f_n = \frac{\sum \psi_n}{\psi} = \frac{\psi}{\psi} = 1$$

und damit haben wir Punkt (3) von [8.1](#) gezeigt.

(1) und (2) folgt nun aus:  $\text{Trg}(f_n) \subseteq \bar{W}_n \subseteq \bar{U}_{\varphi_n} \subseteq U$  für ein  $U \in \mathcal{U}$ .

 $\psi_n$  $\psi$  $f_n$ 

□

### Bemerkung.

Dieser Beweis funktioniert für Lindelöf-Räume  $X$ , in denen die Mengen der Gestalt  $\{x : f(x) \neq 0\}$  mit  $f \in C^\infty$  eine Basis der Topologie bilden.

### 8.3 Folgerung (Fortsetzung glatter Funktionen).

Sei  $M$  eine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Eine Abbildung  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann glatt, wenn es eine offene Teilmenge  $\tilde{M}$  des  $\mathbb{R}^n$  gibt, die  $M$  umfaßt, und eine glatte Abbildung  $\tilde{g} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $g$  fortsetzt, d.h.  $\tilde{g}|_M = g$ .

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) ist trivial.

( $\Rightarrow$ ) Es existiert für jedes  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U_p \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine glatte Fortsetzung  $\tilde{g}^p : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $\mathcal{U} := \{U_p : p \in M\}$  und  $\tilde{M} := \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{p \in M} U_p$ . Dann ist  $\tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $M \subseteq \tilde{M}$ . Nach [8.2](#) existiert eine Partition  $\mathcal{F}$  der Eins, welche  $\mathcal{U}$  untergeordnet ist, also existiert insbesondere für jedes  $f \in \mathcal{F}$  ein  $p(f) \in M$  mit  $\text{Trg}(f) \subseteq U_{p(f)}$ . Die Abbildung  $\tilde{g}$  definieren wir nun folgendermaßen:

$$\tilde{g} := \sum_{f \in \mathcal{F}} f \cdot \tilde{g}^{p(f)},$$

wobei  $f \cdot \tilde{g}^{p(f)}$  auf  $\tilde{M} \setminus \text{Trg}(f)$  durch 0 fortgesetzt zu denken ist (beachte, daß eine auf einer offenen Überdeckung stückweise glatt definierte Funktion selbst glatt ist). In dieser Summe sind die einzelnen Summanden glatt, aber nur endlich viele sind  $\neq 0$ . Das heißt aber gerade, daß  $\tilde{g} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls glatt ist. Um auch die letzte Gleichung zu zeigen, schränken wir  $\tilde{g}$  auf  $M$  ein und rechnen für ein  $x \in M$ :

$$\tilde{g}(x) = \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) \cdot \underbrace{\tilde{g}^{p(f)}(x)}_{g(x)} = \underbrace{\left( \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) \right)}_1 \cdot g(x) = g(x). \quad \square$$

### 8.4 Folgerung (Partition der Eins für Mannigfaltigkeiten).

Jede Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  besitzt für jede offene Überdeckung eine untergeordnete  $C^\infty$ -Partition der Eins.

**Beweis.** Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . O.B.d.A. Seien die  $U \in \mathcal{U}$  so klein gewählt, daß sie Bilder von Parametrisierungen sind und somit es offene Teilmengen  $\tilde{U}$  des  $\mathbb{R}^n$  gibt, die  $M$  lokal trivialisieren, also insbesondere  $\tilde{U} \cap M = U$  erfüllen (und für die  $\tilde{U} \cap M$  in  $\tilde{U}$  abgeschlossen ist). Es ist  $X := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  offen (und  $M$  ist abgeschlossen in  $X$ : Sei nämlich  $x \in X \setminus M$ , dann  $\exists U \in \mathcal{U} : x \in \tilde{U} \setminus M$  und somit folgt  $\exists U(x) \subseteq \tilde{U} : U(x) \cap M = \emptyset$ ).

Nach [8.2] existiert eine Partition  $\mathcal{F}$  der Eins auf  $X$ , welche  $\tilde{\mathcal{U}} := \{\tilde{U} : U \in \mathcal{U}\}$  untergeordnet ist. Also ist  $\{f|_M : f \in \mathcal{F}\}$  eine Partition der Eins, welche  $\mathcal{U}$  untergeordnet ist.  $\square$

### 8.5 Proposition (Nullstellenmengen).

Jede abgeschlossene Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ist Nullstellenmenge einer  $C^\infty$ -Abbildung.

Vergleiche das mit dem Satz [2.4] über Nullstellenmengen regulärer Abbildungen.

**Beweis.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und sei  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ , dann gibt es ein glattes  $f_x \geq 0$  mit  $x \in \text{Trg } f_x \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ , kompakt. Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $\mathbb{R}^n \setminus A$  mit Mengen der Gestalt  $U_x = \{y : f_x(y) > 0\}$ , wobei  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . Da  $\mathbb{R}^n \setminus A$  Lindelöf ist, besitzt  $\mathcal{U}$  eine abzählbare Teilüberdeckung. Seien  $f_1, f_2, \dots$  die entsprechenden Funktionen. O.B.d.A. sei

$$\left| \frac{\partial f_k^{t_1 + \dots + t_n}}{\partial x_1^{t_1} \dots \partial x_n^{t_n}}(x) \right| \leq \frac{1}{2^k} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t_1 + \dots + t_n \leq k.$$

Dies erreicht man durch Multiplikation von  $f_k$  mit einer genügend kleinen Zahl. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  konvergiert dann in allen (partiellen) Ableitungen gleichmäßig und definiert somit eine glatte Funktion  $f \geq 0$ . Für diese gilt:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_k(x) = 0$  für alle  $k \Leftrightarrow x \notin U_{f_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in A$ .  $\square$

## 9. Topologisches über Mannigfaltigkeiten

### 9.1 Lemma (Topologie von Hausdorff Mannigfaltigkeiten).

Sei  $M$  eine Hausdorff  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, dann gilt:

1.  $M$  ist lokalkompakt (d.h.  $\forall x \in M \exists U_x$ , sodaß  $\overline{U_x}$  kompakt ist; anders gesagt: es gibt relativ-kompakte Umgebungen).
2. Die  $C^\infty$ -Funktionen  $M \rightarrow \mathbb{R}$  trennen Punkte. Sie trennen sogar Punkte von abgeschlossenen Mengen (d.h. für  $x \notin A$ , wo  $A$  abgeschlossen ist, existiert ein glattes  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , sodaß  $f(x) = 1$  und  $f(y) = 0$  für alle  $y \in A$ ). Insbesondere ist  $M$  also vollständig regulär.

**Beweis.** [1] Sei  $x \in M$  und  $\varphi$  ein Karte um  $x$  mit  $\text{Dom } \varphi \subseteq \mathbb{R}^m$  offen. O.B.d.A. gelte  $\varphi(0) = x$ . Sei  $B_x \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Kugel um 0, wobei  $\overline{B_x} \subseteq \text{Dom } \varphi$  kompakt ist. Dann ist  $\varphi(B_x)$  eine offene Umgebung von  $x$ , und  $\varphi(\overline{B_x})$  ist kompakt in  $M$ , da  $\varphi$  stetig ist, und somit abgeschlossen, da  $M$  Hausdorff ist. Also ist  $\overline{\varphi(B_x)} = \varphi(\overline{B_x})$  und somit kompakt.

[2] Sei  $x \notin A$  und  $A$  abgeschlossen, dann existiert eine relativ-kompakte Umgebung  $W_x$  von  $x$ , deren (kompakte) Abschluß ganz in einer bei  $x$  zentrierten Karte  $\varphi$

liegt. Somit ist  $\varphi^{-1}(\overline{W_x})$  kompakt und  $\varphi^{-1}(W_x)$  eine offene Umgebung von offen  $0 = \varphi^{-1}(x) \notin \varphi^{-1}(A)$ . Somit gibt es ein  $r$ , sodaß

$$B_r := \{y \in \mathbb{R}^m : |y| \leq r\} \subseteq \varphi^{-1}(W_x) \text{ und} \\ B_r \cap \varphi^{-1}(A) = \emptyset, \text{ folglich } \varphi(B_r) \subseteq M \setminus A.$$

Aus Satz [8.5](#) wissen wir, daß es eine glatte Abbildung  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodaß

$$f(0) = 1 \text{ und } \text{Trg } f \subseteq B_r.$$

Setzen wir nun  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(z) = \begin{cases} f(\varphi^{-1}(z)) & \text{für } z \in \text{Bild } \varphi \\ 0 & \text{für } z \in M \setminus \varphi(B_r). \end{cases}$$

Diese Definition liefert eine wohldefinierte glatte Abbildung, denn  $f(\varphi^{-1}(z)) = 0$  für alle  $z \in \text{Bild } \varphi \setminus \varphi(B_r)$ . Weiters ist  $g(x) = f(0) = 1$  und  $A \subseteq (M \setminus \text{Trg } g)$ , also  $g = 0$  auf  $A$ . Da  $f$  und  $\varphi$  beide glatt sind und  $g|_{M \setminus \overline{W_x}} = 0$  ist, ist auch  $g$  glatt. Das war die Behauptung.  $\square$

### 9.2 Definition (Parakompaktheit).

Ein topologischer Raum  $X$  heißt PARAKOMPAKT, falls es für jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  eine lokal-endliche Verfeinerung  $\mathcal{V}$  gibt. D.h.  $\mathcal{V}$  ist eine offene Überdeckung von  $X$  mit den Eigenschaften:

1. Für alle  $V \in \mathcal{V}$  gibt es ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $V \subseteq U$  ("Verfeinerung").
2. Für alle  $x \in X$  gibt es ein  $U_x$ , sodaß höchstens für endlich viele  $V \in \mathcal{V}$  gilt:  $U_x \cap V \neq \emptyset$  (d.h. ist lokal-endlich).

### 9.3 Satz (Parakompakte Mannigfaltigkeiten).

Sei  $M$  eine Hausdorff  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, so sind äquivalent:

1.  $M$  besitzt  $C^\infty$ -Partitionen der Eins.
2.  $M$  ist METRISIERBAR, d.h. es existiert eine Metrik, welche die Topologie erzeugt.
3.  $M$  ist parakompakt, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine lokal-endliche offene Verfeinerung die  $M$  überdeckt.
4. Jede Zusammenhangskomponente ist  $\sigma$ -KOMPAKT, d.h. sie ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen.
5. Jede Zusammenhangskomponente ist LINDELÖF, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine abzählbare Teilüberdeckung.

### Bemerkung (andere topologische Eigenschaften).

Es besitzt nicht jede (zusammenhängende) Hausdorff  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit die oben genannten Eigenschaften wie z.B. der folgende "lange Halbstrahl" zeigt: Sei  $\Omega$  die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen (also die kleinste überabzählbare Ordinalzahl),

$$\Omega = \left\{ 0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, 2\omega, \dots, \omega^2, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots \right\}.$$

Betrachtet man  $\Omega \times [0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$ , versehen mit der lexikographischen Ordnung, d.h.  $((\alpha, t) \leq (\beta, s)) \Leftrightarrow (\alpha < \beta \text{ oder } (\alpha = \beta \text{ und } t \leq s))$ . Diese "Linie" kann mit der Ordnungstopologie zu einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit gemacht werden, die zwar Hausdorff, aber nicht parakompakt ist, siehe [\[136, Vol.I, Appendix A\]](#).

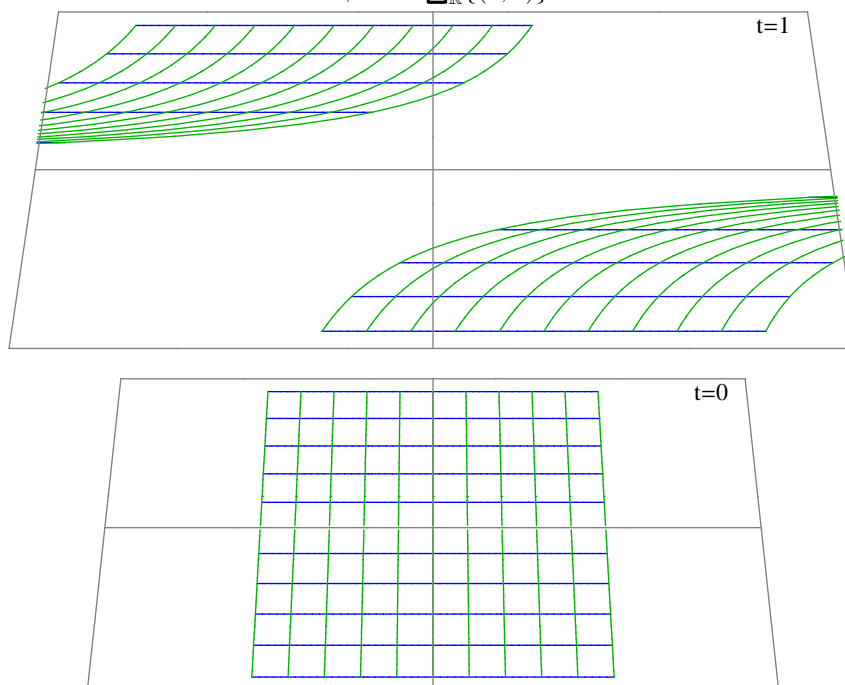
Für metrische Räume sind bekanntlich die Eigenschaften Lindelöf, separabel und das 2. Abzählbarkeitsaxiom (d.h. Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie) äquivalent (siehe [79, 3.3.1]).

Oft wird bei Mannigfaltigkeiten schwächer nur **Separabilität** vorausgesetzt (z.B. [5] und [113]), allerdings wurde in [23] durch Modifikation der Fläche von Prüfer gezeigt, daß es nicht-metrisierbare separable analytische Flächen gibt:

Die modifizierte Fläche  $S$  von Prüfer ist der Quotient von  $\bigsqcup_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 / \sim$ , wobei

$$(x, y; t) \sim (x', y'; t') : \Leftrightarrow y = y' \text{ und } \begin{cases} x = x' & \text{falls } t = t' \\ xy + t = x'y' + t' & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Dies ist eine separable ( $\mathbb{Q}^2$  liegt dicht) Hausdorff'sche analytische Fläche, die das 2. Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt, denn  $\bigsqcup_{\mathbb{R}} \{(0, 0)\}$  ist überabzählbar und diskret.



Andererseits wird bisweilen (z.B. [147], [74] und [19]) stärker das **zweite Abzählbarkeitsaxiom** für die ganze Mannigfaltigkeit vorausgesetzt. Dies impliziert aber, daß nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten vorliegen und somit z.B. Satz 18.9 falsch wird, wie die Blätterung des Torus mit irrationalen Anstieg zeigt.

**Beweis des Satzes 9.3.** ( $1 \Rightarrow 2$ ) Mittels  $C^\infty$ -Partitionen der 1 können wir lokale Riemann-Metriken zu einer globalen Riemann-Metrik verkleben. Nach [89, 32.3] liefert diese eine die Topologie erzeugende Metrik  $d$  auf den Zusammenhangskomponenten von  $M$ . Durch

$$\tilde{d}(x, y) := \begin{cases} \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} & \text{für } x \text{ und } y \text{ in der gleichen Zusammenhangskomponente} \\ 1 & \text{für } x \text{ und } y \text{ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten} \end{cases}$$

ist dann eine die Topologie erzeugende Metrik auf ganz  $M$  definiert.

( $2 \Rightarrow 3$ ) Sei  $\mathcal{W}$  eine offene Überdeckung. Mittels Auswahlaxiom (siehe [79, 1.3.9]) versehen wir  $\mathcal{W}$  mit einer Wohlordnung  $\prec$ . Für  $W \in \mathcal{W}$  und  $n \in \mathbb{N}$  sei  $W_n :=$

$\bigcup_{x \in M_{W,n}} U_{1/2^n}(x)$  wobei  $U_r(x)$  den offenen Ball um  $x$  mit Radius  $r$  bezeichnet und

$$M_{W,n} := \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \forall V \prec W : x \notin V \\ x \in X : (ii) \quad \forall j < n \forall V \in \mathcal{W} : x \notin V_j \\ (iii) \quad U_{3/2^n}(x) \subseteq W \end{array} \right\}$$

Dann ist  $\{W_n : W \in \mathcal{W}, n \in \mathbb{N}\}$  eine lokal-endliche Verfeinerung von  $\mathcal{W}$ :

*Verfeinerung:*  $W_n \subseteq W$ , da  $U_{1/2^n}(x) \subseteq U_{3/2^n}(x) \subseteq W$  für  $x \in M_{W,n}$ .

*Überdeckung:* Sei  $x \in X$ ,  $V := \min\{W \in \mathcal{W} : x \in W\}$ ,  $\exists n \in \mathbb{N} : U_{3/2^n}(x) \subseteq V \Rightarrow$  entweder (ii) und somit  $x \in M_{V,n} \subseteq V_n$  oder  $x \in W_j$  für ein  $j < n$  und ein  $W \in \mathcal{W}$ .

*Lokal-endlich:* Sei  $x \in X$  und  $V := \min\{W \in \mathcal{W} : \exists n : x \in W_n\}$ , d.h.  $\exists n : x \in V_n$  und somit  $\exists j : U_{2/2^j}(x) \subseteq V_n$ .

**Beh.:**  $i \geq n + j \Rightarrow \forall W \in \mathcal{W} : U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i = \emptyset$ .

Wegen  $i > n$  ist  $\forall y \in M_{W,i} : y \notin V_n$  nach (ii) und somit  $d(y, x) \geq 2/2^j$  wegen  $U_{2/2^j}(x) \subseteq V_n$ . Aus  $n + j \geq j$  und  $i \geq j$  folgt somit

$$U_{1/2^{n+j}}(x) \cap U_{1/2^i}(y) \subseteq U_{1/2^j}(x) \cap U_{1/2^i}(y) = \emptyset, \text{ also } U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i = \emptyset.$$

**Beh.:**  $i < n + j \Rightarrow U_{1/2^{n+j}}(x) \cap W_i \neq \emptyset$  für höchstens ein  $W \in \mathcal{W}$ .

Sei  $p \in W_i$  und  $p' \in W'_i$  für  $W, W' \in \mathcal{W}$ , o.B.d.A.  $W \prec W'$ ; d.h.  $\exists y \in M_{W,i} : p \in U_{1/2^i}(y)$  und somit  $U_{3/2^i}(y) \subseteq W$  nach (iii) und  $\exists y' \in M_{W',i} : p' \in U_{1/2^i}(y')$  und somit  $y' \notin W$  nach (i).  $\Rightarrow d(y, y') \geq 3/2^i \Rightarrow d(p, p') \geq d(y', y) - d(p, y) - d(p', y') > 1/2^i \geq 2/2^{n+j}$  im Widerspruch zu  $p, p' \in U_{1/2^{n+j}}(x)$ .

Folglich wird  $U_{1/2^{n+j}}(x)$  nur von endlich vielen  $W_j$  getroffen.

( $\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$ ) Sei  $M_0$  eine Zusammenhangskomponente von  $M$ . Es existiert eine Überdeckung mit relativ-kompakten Mengen (vgl. Lemma  $\boxed{9.1}$ ). Diese kann, da  $M_0$  parakompakt ist, als lokal-endlich angenommen werden. Sei  $\mathcal{U}$  so eine Überdeckung, dann gilt sogar:

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\} \text{ ist endlich für jedes } W \in \mathcal{U},$$

denn zu jedem  $x \in \overline{W}$  existiert ein  $V_x$ , sodaß  $V_x$  nur endlich viele  $U \in \mathcal{U}$  trifft. Da  $\overline{W}$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung  $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$  von  $\overline{W}$ . Sei  $U \in \mathcal{U}$  mit  $U \cap W \neq \emptyset$ . Somit existiert ein  $i$ , sodaß  $U \cap V_{x_i} \neq \emptyset$ . Für die endlich vielen  $i$  tritt dieser Fall jeweils nur für endlich viele  $U \in \mathcal{U}$  ein, also ist auch

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich.

Wir wählen nun ein  $W_1 \in \mathcal{U}$ . Sei  $W_2$  die Vereinigung über jene endlich vielen  $U \in \mathcal{U}$ , deren Schnitt mit  $W_1 \neq \emptyset$  ist.

Induktiv sei nun  $W_n$  die Vereinigung über jene  $U \in \mathcal{U}$ , deren Schnitt mit  $W_{n-1} \neq \emptyset$  ist. Jedes  $W_i$  ist Vereinigung endlich vieler relativ-kompakter Mengen, also selbst relativ-kompakt. Ist  $W := \bigcup_n W_n$ , so ist  $W$  offen. Wir wollen zeigen, daß  $W = M_0$ . Dafür genügt es zu zeigen, daß  $M_0 \setminus W$  offen ist. Sei also  $x \notin W$ , dann existiert ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U$ . Klarerweise gilt  $U \cap W = \emptyset$ , sonst gäbe es ein  $n$ , sodaß  $U \cap W_n \neq \emptyset$ , also  $x \in U \subseteq W_{n+1} \subseteq W$ . Dies ist ein Widerspruch.

Nun ist also  $M_0 = W \cup (M_0 \setminus W)$ , und sowohl  $W$  als auch  $M_0 \setminus W$  sind beide offen. Da  $M_0$  zusammenhängend ist, muß  $W$  oder  $M_0 \setminus W$  leer sein. Aber  $W \neq \emptyset$ , also  $M_0 \setminus W = \emptyset$ , und somit ist  $M_0 = W$ . Die Gleichung  $M_0 = \bigcup_n \overline{W_n}$  zeigt die  $\sigma$ -Kompaktheit von  $M_0$ .

( $\boxed{4} \Rightarrow \boxed{5}$ ) Sei  $X$  eine Zusammenhangskomponente, also  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  mit kompakten  $K_n$ . Jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  besitzt somit eine endliche Teilüberdeckung  $\mathcal{U}_n$  von  $K_n$ . Und somit ist  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$  eine abzählbare Teilüberdeckung von  $X$ , d.h.  $X$  ist Lindelöf.



( $\boxed{5} \Rightarrow \boxed{1}$ ) In  $\boxed{8.2}$  wurde ein Beweis für die Existenz von  $C^\infty$ -Partitionen der Eins gegeben, der als Voraussetzung Lindelöf und die Existenz von  $C^\infty$ -Funktionen mit beliebig kleinen Trägern verwendet. Letzteres ist wegen  $\boxed{9.1.2}$  ebenfalls gegeben.  $\square$

Dieses Theorem ist eigentlich ein Satz über lokalkompakte Hausdorff-Räume (wenn man  $C^\infty$ -Partitionen durch stetige Partitionen in  $\boxed{1}$  ersetzt). Allerdings kann man den Beweis von ( $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ ) in dieser Allgemeinheit so nicht führen, sondern ( $\boxed{5} \Rightarrow \boxed{2}$ ) folgt unmittelbar aus dem Metrisierungssatz [ $\boxed{79}$ ,  $\boxed{3.3.10}$ ] von Nagata und Smirnov und ( $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{3}$ ) gilt offensichtlich: Sei nämlich  $\mathcal{U}$  offene Überdeckung und  $\mathcal{F}$  zugehörige Partition der Eins. Dann existiert für jedes  $x \in M$  eine Umgebung  $U_x$  sodaß  $I := \{f \in \mathcal{F} : \text{Trg } f \cap U_x \neq \emptyset\}$  endlich ist (dies entspricht der 2. Bedingung für eine Partition der Eins). Somit ist  $(\{x : f(x) > 0\})_{f \in \mathcal{F}}$  eine lokalendliche Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ .

Zum Abschluß dieses Exkurses in die Topologie noch einige Bemerkungen zur Dimensionstheorie (Für detailliertere Ausführungen siehe [ $\boxed{38}$ ]):

#### 9.4 Definition (Überdeckungsdimension).

Sei  $X$  ein parakompakter Hausdorff-Raum. Man sagt die ÜBERDECKUNGSDIMENSION von  $X$  ist höchstens  $n$  (kurz:  $\ddot{\text{ÜD-dim}} X \leq n$ ), falls es zu jeder offenen Überdeckung von  $X$  eine offene Verfeinerung der Ordnung  $n + 1$  gibt. ( $\mathcal{U}$  heißt VON ORDNUNG  $n + 1$ , wenn der Durchschnitt über  $n + 2$  verschiedene Mengen aus  $\mathcal{U}$  immer leer ist.) Per Definition ist  $\ddot{\text{ÜD-dim}} X = n \Leftrightarrow \ddot{\text{ÜD-dim}} X \leq n$ , aber nicht  $\ddot{\text{ÜD-dim}} \leq n - 1$ .

#### 9.5 Satz (Eigenschaften der Überdeckungsdimension).

Es gilt:

1.  $\ddot{\text{ÜD-dim}} [0, 1]^n = n$ .
2. Wenn  $A$  abgeschlossen in  $X$  ist, dann gilt

$$\ddot{\text{ÜD-dim}} A \leq \ddot{\text{ÜD-dim}} X.$$

3. Für eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung  $\mathcal{A}$  von  $X$  gilt:

$$\ddot{\text{ÜD-dim}} X \leq \sup\{\ddot{\text{ÜD-dim}} A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Ohne Beweis, siehe [ $\boxed{38}$ , S.295,268,278]

#### 9.6 Folgerung.

Für jede  $m$ -dimensionale parakompakte Hausdorff Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $\ddot{\text{ÜD-dim}} M = m$ .

**Beweis.**  $M$  besitzt eine offene Überdeckung durch Mengen  $\varphi((0, 1)^m)$ , wobei  $\varphi$  eine Karte für  $M$  ist welche auf einer Umgebung von  $[0, 1]^m$  definiert ist. Da  $M$  parakompakt ist, existiert eine lokal-endliche Verfeinerung  $\mathcal{U}$ . Sei  $\mathcal{U}^- := \{\bar{V} : V \in \mathcal{U}\}$ , so ist  $\mathcal{U}^-$  eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung.  $\varphi^{-1}(\bar{V}) \subseteq [0, 1]^m$ . Da  $\varphi$  Homöomorphismus ist und somit die  $\ddot{\text{ÜD-dim}}$  bewahrt, gilt unter Verwendung von  $\boxed{9.5}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\text{ÜD-dim}} \bar{V} &= \ddot{\text{ÜD-dim}} \varphi^{-1}(\bar{V}) \stackrel{(2)}{\leq} \ddot{\text{ÜD-dim}} [0, 1]^m \stackrel{(1)}{=} m, \\ \ddot{\text{ÜD-dim}} M &\stackrel{(3)}{\leq} \sup\{\ddot{\text{ÜD-dim}} \bar{V} : \bar{V} \in \mathcal{V}\}, \end{aligned}$$

also  $\ddot{\text{U}}\text{D-dim } M \leq m$ . Umgekehrt gilt: Ist  $\varphi : [0, 1]^m \rightarrow M$  Karte, so ist  $\varphi([0, 1]^m)$  abgeschlossen in  $M$ , also ist nach [9.5](#):

$$\ddot{\text{U}}\text{D-dim } M \stackrel{(2)}{\geq} \ddot{\text{U}}\text{D-dim } \varphi([0, 1]^m) = \ddot{\text{U}}\text{D-dim } [0, 1]^m \stackrel{(1)}{=} m.$$

Zusammen folgt die Behauptung:  $\ddot{\text{U}}\text{D-dim } M = m$ . □

### 9.7 Folgerung.

*Sei  $M$  eine parakompakte und zusammenhängende Hausdorff-Mannigfaltigkeit. Sei  $\mathcal{O}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , dann existiert ein  $p \leq \dim(M) + 1$  und eine Verfeinerung von  $\mathcal{O}$  folgender Gestalt:*

$$\mathcal{V} = \{V_i^n : i \leq p, n \in \mathbb{N}\},$$

sodaß  $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset, \forall n \neq m$ .

**Beweis.** Nach [9.6](#) ist die Überdeckungsdimension von  $M$  gleich  $\dim M$ , also existiert zur offenen Überdeckung  $\mathcal{O}$  eine Verfeinerung  $\mathcal{O}'$  der Ordnung  $p \leq \ddot{\text{U}}\text{D-dim } M + 1$ . Da  $M$  parakompakt ist, existiert eine lokal endliche Verfeinerung  $\mathcal{O}''$  und da  $M$  nach [9.3](#) Lindelöf ist, können wir annehmen, daß diese Überdeckung  $\mathcal{O}''$  abzählbar ist. O.B.d.A. ist also  $\mathcal{O}$  eine abzählbare lokal endliche Überdeckung der Ordnung  $p$ .

Wir zeigen nun mittels Induktion nach  $p$ , daß jede solche Überdeckung eine Verfeinerung der gewünschten Form besitzt.

Dazu schrumpfen wir die Mengen in  $\mathcal{O}$  zu einer kleineren Überdeckung  $\mathcal{U}$ . Das soll heißen, wir konstruieren für jedes  $O \in \mathcal{O}$  ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $\bar{U} \subseteq O$  derart, daß die  $U$  noch immer eine Überdeckung bilden.

Dies kann induktiv geschehen: Sei  $\mathcal{O} := \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Zwischen  $M \setminus \bigcup_{n \geq 2} O_n$  und  $O_1$  (erstere ist abgeschlossen, zweitere offen) schalten wir  $U_1$  und  $\bar{U}_1$  und erhalten eine Überdeckung  $\{U_1\} \cup \{O_n : n > 1\}$ . (Dies kann geschehen, da nach [8.5](#) eine  $C^\infty$ -Funktion  $f$  existiert mit Träger in  $\bar{O}_1$ , die auf  $M \setminus \bigcup_{n \geq 1} O_n$  identisch 1 ist. Nun erhält man  $U_1$  etwa durch  $U_1 := \{x : f(x) > 1/2\}$ .) Im zweiten Schritt finden wir genauso ein  $U_2$  zwischen  $M \setminus U_1 \cup \bigcup_{n > 2} O_n$  und  $O_2$ ; und so weiter.

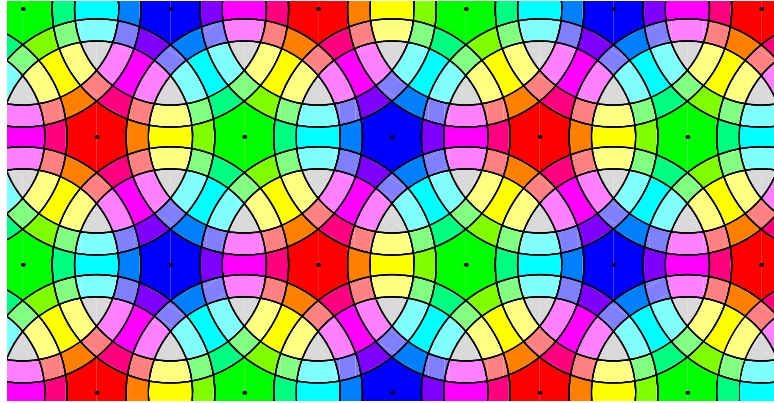
Nun betrachten wir die beiden Familien:

$\mathcal{V}_p :=$  die Menge der Durchschnitte von je  $p$  der  $O \in \mathcal{O}$ ,

$\mathcal{A}_p :=$  die Menge der Durchschnitte von je  $p$  der  $\bar{U}$  für  $U \in \mathcal{U}$

und bezeichnen ihre Vereinigungen mit  $V_p := \bigcup \mathcal{V}_p$  und  $A_p := \bigcup \mathcal{A}_p$ .

Im folgenden Bild sind die großen Scheiben die Mengen in  $\mathcal{O}$ , die kleinen Scheiben jene in  $\mathcal{U}$ , die dunklen (rot/grün/blau färbigen) "6-Ecke" sind die Punkte die in genau einem  $O \in \mathcal{O}$  liegen, die Punkte in den nächst helleren Streifen liegen in genau 2 der  $O$ 's, die größeren "3-Ecke" liegen in genau 3 der  $O$ 's (sind also die Elemente von  $\mathcal{V}_p$ ) und die weißen kleinen "Dreiecke" sind die Elemente von  $\mathcal{A}_p$ .



Es ist  $\mathcal{V}_p$  eine Familie offener disjunkter Mengen, denn angenommen zwei verschiedene Mitglieder von  $\mathcal{V}_p$  hätten nichtleeren Durchschnitt, so hätten zumindest  $p+1$  der  $O \in \mathcal{O}$  nichtleeren Durchschnitt, und das ist ein Widerspruch. Folglich ist  $V_p \subseteq M$  offen.

Die Familie  $\mathcal{A}_p$  besteht aus abgeschlossenen Mengen und ist lokal endlich, da die entsprechenden Elemente von  $\mathcal{V}_p$  disjunkt sind. Somit ist  $A_p$  als lokal endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen und es gilt  $A_p \subseteq V_p$ .

Wir behaupten nun, daß  $\mathcal{U}$  eine abzählbare lokal endliche Überdeckung von  $M \setminus A_p$  der Ordnung kleiner als  $p$  ist.

Angenommen, es gibt  $p$  Mengen in  $\mathcal{U}$ , deren Durchschnitt – eingeschränkt auf  $M \setminus A_p$  – nicht-leer ist, so ist ebendieser Durchschnitt auch im Durchschnitt der nicht eingeschränkten Abschlüsse enthalten und liegt also nach Konstruktion in  $A_p$ . Das ist ein Widerspruch.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert also eine Verfeinerung der Gestalt  $\{V_i^n : i < p, n \in \mathbb{N}\}$  von  $\mathcal{U}$ , welche  $M \setminus A_p$  überdeckt und sodaß  $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset \forall i < p \forall n \neq m$ .

Zusammen mit der disjunkten Familie  $\mathcal{V}_p =: \{V_p^n : n \in \mathbb{N}\}$  bilden diese Mengen dann die gewünschte Verfeinerung von  $\mathcal{O}$ .  $\square$

### 9.8 Folgerung (Endlicher Atlas).

*Jede zusammenhängende, parakompakte,  $m$ -dimensionale, glatte Hausdorff Mannigfaltigkeit von Dimension  $m$  besitzt einen Atlas mit höchstens  $m+1$  Karten.*

**Beweis.** Sei  $\mathcal{O}$  eine offene Überdeckung einer solchen Mannigfaltigkeit  $M$  mit Bildern  $\varphi(U)$  von Karten  $\varphi : U \rightarrow M$  mit offenen  $U$  im  $\mathbb{R}^m$ . O.B.d.A. sei  $\mathcal{O}$  abzählbar ( $M$  ist Lindelöf), d.h.

$$\mathcal{O} = \{\varphi_i(U_i) : i \in \mathbb{N}\},$$

wobei wir die  $U_i$  als disjunkt annehmen können. Es gibt nach [9.7](#) eine Verfeinerung der Gestalt:

$$\{O_i^n : i \leq p, n \in \mathbb{N}\}$$

mit  $m \neq n : O_i^n \cap O_i^m = \emptyset$ , wobei  $p \leq \dim M + 1$ . Zu  $O_i^n$  gibt es ein diffeomorphes  $U_i^n \subseteq \mathbb{R}^m$ , mittels einer gewissen Karte  $\varphi_i^n$ . Wir definieren nun

$$\varphi_i : \begin{cases} \bigcup_n U_i^n \rightarrow \bigcup_n O_i^n \\ x \mapsto \varphi_i^n(x) \in O_i^n \text{ für } x \in U_i^n. \end{cases}$$

So sind die  $\varphi_i$  Diffeomorphismen, deren Bilder  $M$  überdecken, d.h.:  $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq p\}$  ist ein  $C^\infty$ -Atlas.  $\square$

Als einfache Folgerung werden wir in [11.11](#) zeigen, daß jede solche Mannigfaltigkeit bis auf einen Diffeomorphismus als Teilmannigfaltigkeit eines  $\mathbb{R}^n$  realisiert werden kann.



### III. Tangentialraum

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der Ableitung auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten übertragen. Da Ableitungen Richtungsvektoren ineinander überführen, wirken sie nicht zwischen den Mannigfaltigkeiten sondern den ebenso zu besprechenden Tangentialräumen. Als Anwendung werden wir dann erste einfache infinitesimale Eigenschaften wie Immersivität und Submersivität von Abbildungen besprechen. Unter zusätzlichen lokalen bis globalen Eigenschaften erhalten wir dann Einbettungen, Faserbündel und als Spezialfall Überlagerungen.

#### 10. Tangentialraum und Derivationen

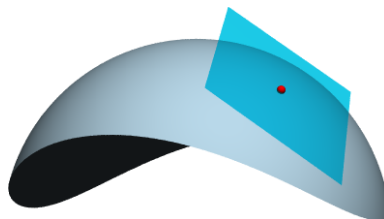
Die Ableitung  $f'(x)$  einer Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an der Stelle  $x$  ist definiert als die lineare Approximation an die nach 0 verschobene Funktion  $f$ . Auf Mannigfaltigkeiten läßt sich das nun nicht ohne weiteres übertragen, denn um von einer linearen Abbildung  $f'(x)$  sprechen zu können, muß diese zwischen Vektorräumen (und nicht zwischen Mannigfaltigkeiten wie  $f$  es macht) laufen. Wir benötigen also zuallererst eine lineare Approximation an eine Mannigfaltigkeit  $M$  im Punkt  $x \in M$ . Diese soll dann der Definitionsbereich bzw. Wertebereich der linearen Approximation von  $f$  bei  $x$  werden.

##### 10.1 Satz (Beschreibung des Tangentialraums).

Sei  $M$  eine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $p \in M$ . Dann sind folgende Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  ident:

1. Bild  $\varphi'(0)$ , wobei  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  mit  $\varphi(0) = p$  ist.
2.  $\{c'(0) : c : I \rightarrow M \text{ glatt, } c(0) = p, I \text{ ein offenes Intervall mit } 0 \in I\}$ .
3.  $\text{Ker } f'(p)$ , wobei  $f$  eine reguläre Gleichung ist, die  $M$  lokal um  $p$  beschreibt.
4.  $\text{Graph } g'(\bar{p})$ , wobei  $M$  lokal um  $p$  als Graph der Funktion  $g$  beschrieben wird mit  $p = (\bar{p}, g(\bar{p}))$ .

Insbesondere ist diese Teilmenge wegen [1](#) oder [3](#) ein linearer Teilraum und wegen [2](#) unabhängig von der gewählten Parametrisierung, Gleichung und der Darstellung des Graphens.



**Beweis.** ( $\boxed{1} \subseteq \boxed{2}$ ) Sei  $\varphi'(0)(v) \in \text{Bild}(\varphi'(0))$ , wobei  $v \in \mathbb{R}^n$  ist. Wenn wir die lokal in  $M$  glatte Kurve  $c$  durch

$$c(t) := \varphi(0 + tv)$$

definieren, erhalten wir  $c'(0) = \varphi'(0)(v)$ .

( $\boxed{2} \subseteq \boxed{3}$ ) Wir betrachten nun ein  $c'(0)$  für eine Kurve  $c \in C^\infty(I, M)$  mit  $c(0) = p$  und eine lokal reguläre Gleichung  $f$  für  $M$ ,

$$f'(\underbrace{p}_{c(0)})(c'(0)) = \underbrace{(f \circ c)'}_0(0) = 0.$$

d.h.  $c'(0) \in \text{Ker } f'(p)$

( $\boxed{3} \subseteq \boxed{1}$ ) Da wir bereits  $\boxed{1} \subseteq \boxed{2} \subseteq \boxed{3}$  gezeigt haben, genügt zu zeigen, daß die Teilräume in  $\boxed{1}$  und  $\boxed{3}$  gleiche Dimension haben:

$$\begin{aligned} \dim \text{Bild } \varphi'(0) &= \dim \mathbb{R}^m = m \\ \dim \text{Ker } f'(p) &= n - \underbrace{\dim \text{Bild } f'(p)}_{\mathbb{R}^{n-m}} = m. \end{aligned}$$

( $\boxed{1} = \boxed{4}$ ) Eine Parametrisierung von  $M$  ist durch  $\varphi(u) = (u, g(u))$  gegeben.

$$\text{Bild } \varphi'(\bar{p}) = \text{Bild}(\text{id}, g'(\bar{p})) = \{(v, g'(\bar{p})(v)) : v \in \mathbb{R}^m\} = \text{Graph } g'(\bar{p}). \quad \square$$

## 10.2 Definition (Tangentialraum und Tangentialabbildung).

Den in  $\boxed{10.1}$  beschriebenen Teilraum des  $\mathbb{R}^n$  nennt man den TANGENTIALRAUM an  $M$  im Punkt  $p$  und bezeichnet ihn mit  $T_p M$ . Seine Elemente heißen TANGENTIALVEKTOREN.

Für  $f : M \rightarrow N$  definiert

$$T_p f : \begin{cases} T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \\ c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0) \text{ für } c \in C^\infty(I, M) \text{ mit } c(0) = p \end{cases}$$

die TANGENTIALABBILDUNG von  $f$  im Punkte  $p \in M$ .

Diese Definition ist sinnvoll, d.h. hängt nicht von der Wahl von  $c$  ab, sondern nur von  $c'(0)$ . Seien  $c_1$  und  $c_2$  zwei solche Kurven mit  $c_1'(0) = c_2'(0)$ . Zu  $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow N \subseteq \mathbb{R}^n$  existiert eine glatte Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^m \overset{\text{offen}}{\supseteq} U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \tilde{f}|_M = f|_{U(p)}.$$

Dazu rechnen wir nun:

$$(f \circ c_1)'(0) = (\tilde{f} \circ c_1)'(0) = \tilde{f}'(p)(c_1'(0)) = \tilde{f}'(p)(c_2'(0)) \stackrel{\text{analog}}{=} (f \circ c_2)'(0).$$

Die Tangentialabbildung  $T_p f$  ist linear, denn  $(T_p f)(c'(0)) = (f \circ c)'(0) = \tilde{f}'(p)(c'(0))$  also ist

$$T_p f = \tilde{f}'(p)|_{T_p M}, \text{ wobei } \tilde{f} \text{ eine lokale Erweiterung von } f \text{ ist.}$$

## 10.3 Beispiel (Quadriken).

Es sei  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine quadratische (d.h.  $f(tx) = t^2 f(x)$  und insbesondere  $f(0) = 0$ ) glatte Form und  $c \neq 0$ . Dann ist die Quadrik  $M := f^{-1}(c) = \{x \in E : f(x) = c\}$  eine Teilmannigfaltigkeit von  $E$ , denn Differenzieren der Homogenitätsgleichung liefert  $f'(tx)(tv) = t^2 f'(x)(v)$ , also  $f'(tx)(v) = t f'(x)(v)$  und weiters  $f''(tx)(tw, v) = t f''(x)(w, v)$ , also  $f''(x) = f''(tx) = f''(0)$  für  $t \rightarrow 0$ . Nach dem

Taylor'schen Lehrsatz ist somit  $f(x) = b(x, x)$ , wobei  $b := \frac{1}{2}f''(0)$  eine symmetrische quadratische Form ist.

Die Ableitung von  $f$  ist  $f'(x)(v) = b(x, v) + b(v, x) = 2b(x, v)$  und somit surjektiv bezüglich  $v$  für  $x \in M$ , denn  $2b(x, x) = f(x) = c \neq 0$ . Der Tangentialraum von  $M$  bei  $x$  ist also

$$T_x M = \{v \in E : b(x, v) = 0\} =: x^\perp.$$

Ein erstes Beispiel einer Quadrik ist die Sphäre  $S^n = f^{-1}(1)$ , wobei  $f(x) := |x|^2$ .

Die spezielle lineare Gruppe  $SL(E) := \{T \in L(E) : \det(T) = 1\}$  (siehe [4.2](#)) hat als Tangentialraum bei  $\text{id} \in SL(E)$  den Teilraum  $\{T \in L(E) : 0 = \det'(\text{id})(T) = \text{spur}(T)\}$  der spurfreien linearen Abbildungen.

Die orthogonale Gruppe  $O(E) := \{T \in L(E) : T^t T = \text{id}\}$  (siehe [4.3](#)) hat als Tangentialraum bei  $\text{id}$  den Teilraum  $\{T \in L(E) : 0 = f'(\text{id})(T) = T^t + T\}$  der schiefssymmetrischen (d.h. antiselbstadjungierten) linearen Abbildungen, wobei  $f$  die quadratische Abbildung  $f : T \mapsto T^t T$  ist.

Allgemeiner ist für eine bilineare nicht-degenerierte Form  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  der Tangentialraum der in [4.4](#) behandelten Gruppe  $O_b(E) := \{T \in L(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y \in E\} = \{T \in L(E) : T^t B T = B\}$  (mit  $b(x, y) = \langle Bx, y \rangle$ ) bei  $\text{id}$  gerade der Teilraum  $\{T \in L(E) : T^t B + B T = 0\}$ , der bezüglich  $B$  schiefssymmetrischen linearen Abbildungen.

Für die in [4.4](#)–[4.8](#) behandelten Gruppen  $G$  erhalten wir auf entsprechende Weise (unter Verwendung von  $\det'(A)(B) = \det(A) \text{spur}(A^{-1}B)$  aus [4.2](#)) folgende Beschreibungen des Tangentialraums bei  $\text{id} \in G$ , woraus wir wieder leicht die Dimension von  $G$  ablesen können.

$G$	$T_{\text{id}}G$	$\dim_{\mathbb{R}}$
$GL(n)$	$L(n)$	$n^2$
$GL_{\mathbb{C}}(n)$	$L_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2$
$GL_{\mathbb{H}}(n)$	$L_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2$
$SL(n)$	$\{T \in L(n) : \text{spur}_{\mathbb{R}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$2(n^2 - 1)$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : \text{spur}_{\mathbb{R}}(T) = 0\}$	$4n^2 - 1$
$O(n), SO(n)$	$\{T \in L(n) : T^t + T = 0\}$	$n(n-1)/2$
$O(n, k), SO(n, k)$	$\{T \in L(n) : T^t I_k + I_k T = 0\}$	$n(n-1)/2$
$O_{\mathbb{C}}(n), SO_{\mathbb{C}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^t + T = 0\}$	$n(n-1)$
$U(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* + T = 0\}$	$n^2$
$U(n, k)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* I_k + I_k T = 0\}$	$n^2$
$SU(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* + T = 0, \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$SU(n, k)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* I_k + I_k T = 0, \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$Q(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^* + T = 0\}$	$n(2n+1)$
$Q(n, k)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^* I_k + I_k T = 0\}$	$n(2n+1)$
$Q_-(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^* i + iT = 0\}$	$n(2n-1)$
$Sp(2n)$	$\{T \in L(2n) : T^t J + J T = 0\}$	$n(2n+1)$
$Sp_{\mathbb{C}}(2n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(2n) : T^t J + J T = 0\}$	$2n(2n+1)$



Im Detail bedeutet das z.B. für die  $O(n, k)$ , daß

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in T_{\text{id}}O(n, k) \subseteq L(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 & \\ \Leftrightarrow A^t + A = 0, \quad B^t = C, \quad D^t + D = 0 & \end{aligned}$$

und für die  $Sp(2n)$ , daß

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in T_{\text{id}}Sp(2n) \subseteq L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 & \\ \Leftrightarrow C^t = C, \quad -A^t = D, \quad B^t = B. & \end{aligned}$$

#### 10.4 Lemma.

**Kettenregel:** Für drei Mannigfaltigkeiten  $M, N, P$  und zwei glatte Abbildungen  $f, g$  mit  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  gilt die Kettenregel:

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f.$$

Für die Identität  $\text{id} : M \rightarrow M$  gilt:

$$T_p(\text{id}_M) = \text{id}_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M.$$

**Produktregel:** Sind  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, so gilt die Produktregel

$$T_p(f \cdot g) = f(p) \cdot T_p g + g(p) \cdot T_p f.$$

**Satz über inverse Funktionen:** Es ist  $f$  genau dann ein lokaler Diffeomorphismus um  $p$ , wenn  $T_p f$  ein Isomorphismus ist.

**Beweis.** Indem man alle auftretenden Funktionen glatt auf Umgebungen in den umgebenden Vektorräumen erweitert, folgt die Ketten- und die Produkt-Regel aus den klassischen Versionen, siehe [81, 6.1.9] and [81, 6.1.13]. Der Satz über inverse Funktionen ist ohnehin nur lokaler Natur also ebenfalls eine Konsequenz des klassischen Satzes [2.2].  $\square$

Leider können wir die in [10.1] gegebenen Beschreibungen des Tangentialraums nicht direkt für abstrakte Mannigfaltigkeiten verwenden, da der umgebende Vektorraum wesentlich eingeht. Wir brauchen also noch andere (abstraktere) Beschreibungen. Dazu beachten wir die Wirkung von  $v \in T_p M$  auf  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  vermöge  $f \mapsto T_p f \cdot v$  und geben folgende

#### 10.5 Definition (Derivation).

Eine Abbildung  $\partial : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt DERIVATION über  $p \in M$ , wenn sie linear ist und die Produktregel erfüllt, d.h. für  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

1.  $\partial(f + g) = \partial f + \partial g$
2.  $\partial(\alpha f) = \alpha \cdot \partial f$
3.  $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g$

Mit  $\text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  bezeichnen wir die Menge aller Derivationen über  $p \in M$ . Bezüglich der punktweisen Operationen, ist dies ein Vektorraum.

**10.6 Satz (Tangentialvektoren als Derivationen).**

Die Abbildung

$$\begin{aligned} T_p M \times C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, f) &\mapsto (T_p f)(v) \end{aligned}$$

induziert einen linearen Isomorphismus

$$\Phi_p : \begin{cases} T_p M \rightarrow \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ v \mapsto \partial_v \left( : f \mapsto (T_p f)(v) \right) \end{cases}$$

Für jedes glatte  $f : M \rightarrow N$  entspricht der Tangentialabbildung  $T_p f$  von  $f$  via  $\Phi_p$  folgende Zuordnung auf der Seite der Derivation:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\Phi_p} & \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \ni \\ \downarrow T_p f & & \downarrow (f^*)^* \\ T_{f(p)} N & \xrightarrow{\Phi_{f(p)}} & \text{Der}_{f(p)}(C^\infty(N, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \ni \end{array} \quad \begin{array}{c} \partial \\ \downarrow \\ (g \mapsto \partial(g \circ f)) = \partial \circ f^* \end{array}$$

**Beweis. Wohldefiniertheit:** Die Abbildung  $T_p M \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (v, f) \mapsto (T_p f)(v)$  ist klarerweise bilinear, also induziert sie eine lineare Abbildung  $T_p M \rightarrow L(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  durch  $v \mapsto (f \mapsto (T_p f)(v))$ . Diese Abbildung hat Werte im Raum der Derivationen über  $p$ , denn seien  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  zwei glatte Funktionen und  $v \in T_p M$  dann gilt nach der Produktregel [10.4](#):

$$\partial_v(f \cdot g) = T_p(f \cdot g)(v) = f(p) \cdot (T_p g)(v) + g(p) \cdot (T_p f)(v).$$

**Kommutativität:** Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und  $p \in M$ . Dann kommutiert obiges Diagramm, denn für  $v \in T_p M$  und  $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$  ist  $(\Phi_{f(p)} \circ T_p f)(v)(g) = (T_{f(p)} g)((T_p f)(v)) = (T_p(g \circ f))(v) = \Phi_p(v)(g \circ f)$ , da  $\partial := \Phi_p(v)$  auf  $h \in C^\infty(N, \mathbb{R})$  durch  $\partial(h) = (T_p h)(v)$  wirkt.

**Lokalität von Derivationen:** Jede Derivation  $\partial$  von  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  über  $p \in M$  ist ein lokaler Operator, d.h. der Wert  $\partial(f)$  nur von  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  nahe  $p$  abhängt: Seien dazu also  $f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f_1 = f_2$  nahe  $p$  vorgegeben. Sei  $f := f_1 - f_2$  und sei  $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  so gewählt, daß  $g(p) = 1$  und daß der Träger von  $g$  in der Menge der  $x$  mit  $f(x) = 0$  enthalten ist. Dann gilt:

$$0 = \partial(0) = \partial(g \cdot f) = \underbrace{g(p)}_1 \cdot \partial(f) + \underbrace{f(p)}_0 \cdot \partial(g) = \partial(f).$$

Daraus ergibt sich auch, daß  $\partial(f) = 0$  für alle konstanten Funktionen  $f$ , denn  $\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = 1 \cdot \partial(1) + \partial(1) \cdot 1$ , also  $\partial(1) = 0$ .

**Bijektivität für offene Teilmannigfaltigkeiten:** Wir wollen zuerst für den Spezialfall  $0 = p \in M = U \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$  die Bijektivität von  $\Phi$  beweisen. Sei  $(e_i)_{i=1}^m$  die

Standardbasis im  $\mathbb{R}^m$  ist, dann kann jeder Vektor  $v \in T_p M = \mathbb{R}^m$  in der Basis als  $v = \sum_i v^i e_i$  entwickelt werden. Betrachten wir nun

$$\Phi : T_p M \ni v \mapsto \partial_v \in \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

$$\text{mit } \partial_v(f) := (T_p f)(v) = f'(p)(v) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(p) \cdot v^i,$$

wobei  $\partial_i f$  die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  ist, d.h.

$$(\partial_i f)(p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} f(p + te^i) = f'(p)(e^i).$$

Die Derivation  $\partial_v$  ist nichts anderes als ‘‘Richtungsableitung  $d_v$  in Richtung  $v$  and der Stelle  $p$  zu nehmen’’ und  $\Phi$  ist injektiv, denn die Komponenten von  $v$  können vermöge

$$\partial_v(\text{pr}_j) = \sum_{i=1}^m \underbrace{(\partial_i \text{pr}_j)(p)}_{\delta_{i,j}} \cdot v^i = v^j$$

aus  $\partial_v$  eindeutig rekonstruiert werden.

Weiters ist  $\Phi$  aber auch surjektiv, denn für  $\partial \in \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ ,  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  und  $x$  nahe 0 gilt folgendes:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 f'(tx)(x) dt = \int_0^1 \sum_i (\partial_i f)(tx) x^i dt = \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 (\partial_i f)(tx) dt}_{=: h_i(x)}$$

und weiters, da  $\partial$  ein lokaler Operator ist,

$$\begin{aligned} \partial(f) &= \partial(f(0)) + \partial\left(\sum_{i=1}^m \text{pr}^i \cdot h_i\right) = 0 + \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{\partial(\text{pr}^i)}_{=: v^i} \underbrace{h_i(0)}_{(\partial_i f)(0)} + \underbrace{\text{pr}^i(0)}_{=0} \cdot \partial(h_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m v^i \cdot (\partial_i f)(0). \end{aligned}$$

Also ist  $\partial(f) = \partial_v(f) = \Phi(v)(f)$  für alle  $f$ .

**Bijektivität im Allgemeinen:** Sei nun  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  zentriert bei  $p$ . Folgendes Diagramm zeigt, daß  $\Phi_p$  eine Isomorphismus ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m = T_0 U & \xrightarrow[\cong]{T_0 \varphi} & T_p M \hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ \Phi_0 \downarrow \cong & & \Phi_p \downarrow \\ \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow[\cong]{(\varphi^*)^*} \text{Der}_p(C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow[\cong]{(\text{incl}^*)^*} \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

Dabei ist  $T_0 \varphi$  ein Isomorphismus nach [5.3](#) und [10.4](#);  $\Phi_0$  ist einer wegen des Spezialfalls;  $(\varphi^*)^* : \partial \mapsto (f \mapsto \partial(f \circ \varphi))$  ist einer, da  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  ein Diffeomorphismus ist; und schließlich ist der rechte untere ein solcher, da Derivationen lokale Operatoren sind; Also ist auch  $\Phi_p$  ein Isomorphismus, und somit der Satz bewiesen.  $\square$

Wir können den Satz [10.6](#) nun dazu verwenden um den Tangentialraum abstrakter Mannigfaltigkeiten wie folgt zu definieren:

### 10.7 Definition (Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit).

Unter dem TANGENTIALRAUM einer abstrakten Mannigfaltigkeit  $M$  bei  $p$  versteht man den Vektorraum

$$T_p M := \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Beachte, daß wir damit für Teilmannigfaltigkeiten  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und insbesondere für offene Teilmengen den in [10.2](#) definierten Tangentialraum  $T_p M \subseteq \mathbb{R}^n$  durch einen nicht identen aber kanonisch isomorphen Vektorraum  $T_p M \subseteq L(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  ersetzt haben.

Ist  $f \in C^\infty(M, N)$  und  $p \in M$ , dann heißt die durch

$$\partial \mapsto \left( (T_p f)(\partial) : g \mapsto \partial(g \circ f) \right) \text{ für } \partial \in T_p M \text{ und } g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$$

definierte lineare Abbildung  $T_p f = (f^*)^* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , die TANGENTIALABBILDUNG von  $f$  bei  $p$ .

### 10.8 Basen des Tangentialraums.

Wenn wir wie für Abbildungen zwischen  $\mathbb{R}^m$ 's die Ableitung einer Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten als Matrix (also als Jacobi-Matrix) schreiben wollen so benötigen wir eine Basis. Aber selbst wenn wir im umgebenden Vektorraum eine Basis gewählt haben, so bekommen wir noch lange keine ausgezeichnete Basis des Tangentialraums (man denke z.B. an die Sphäre  $S^2$ ). Wir können aber wie folgt vorgehen. Sei dazu  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $\varphi$  eine Karte von  $M$  zentriert bei  $p$ . Dann ist  $T_0 \varphi : T_0 \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$  ein linearer Isomorphismus nach [6.11.2](#) und [10.4](#) falls  $M$  eine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist, aber auch im allgemeinen Fall einer abstrakten Mannigfaltigkeit, da [10.4](#) für diese ganz leicht zu zeigen ist. Die Standardbasis  $(e_i)_{i=1}^m$  des  $\mathbb{R}^m$  wird durch den Isomorphismus  $\Phi : \mathbb{R}^m \cong \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  von [10.6](#) auf die Basis der partiellen Ableitungen  $(\partial_i|_0)_{i=1}^m$  in  $T_0 U$  abgebildet. Der Isomorphismus  $T_0 \varphi$  bildet diese Basis weiter auf eine Basis  $(\partial_i^\varphi|_p)_{i=1}^m$  in  $T_p M$  ab, welche auf  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  durch

$$\partial_i^\varphi|_p(f) := (T_0 \varphi)(\partial_i|_0)(f) = (\varphi^*)^*(\partial_i|_0)(f) = \partial_i|_0(\varphi^*(f)) = \partial_i(f \circ \varphi)(0).$$

definiert ist, also durch partielles Ableiten der Kartendarstellung  $f \circ \varphi$  von  $f$  in die  $i$ -te Richtung  $e_i$  an der Stelle  $0 = \varphi^{-1}(p)$ . Zusammengefaßt also:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow[\Phi]{\cong} & T_0 U & \xrightarrow[T_0 \varphi]{\cong} & T_p M = \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ e_i & \longmapsto & \partial_i|_0 & \longmapsto & \left( \partial_i^\varphi|_p : f \mapsto \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \right) \end{array}$$

Im Fall einer Teilmannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , ist  $\partial_i^\varphi|_{\varphi(0)} := (T_0 \varphi)(\partial_i|_0) \hat{=} (\partial_i \varphi)(0) := \varphi'(0)(e_i)$  (via der Einbettung  $T_p M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ) gerade die  $i$ -te partielle Ableitung der Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Seien  $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1} : M \supseteq \varphi(U) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$  die zu  $\varphi$  gehörenden lokalen Koordinaten, dann schreiben wir für  $\partial_i^\varphi|_p \in T_p M = \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  auch

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p := \partial_i^\varphi|_p.$$

Es drückt die (unüblichere) Schreibweise  $\partial_i^\varphi$  allerdings deutlicher aus, daß diese Derivation von der Karte  $\varphi$  abhängt und nicht, wie man der Bezeichnungsweise  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  fälschlicherweise entnehmen könnte, nur von der  $i$ -ten Komponente  $u^i$  der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$  (siehe [10.10](#)). Die Bezeichnung  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  ist jedoch die üblichere und macht auch keine Probleme, falls man sie nur als  $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_i$  und nicht als  $\frac{\partial}{\partial(u^i)}$  interpretiert.

Ist  $\varphi$  nicht bei  $p$  zentriert, dann ist allgemeiner

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (f) = \partial_i^\varphi \Big|_p (f) := \partial_i (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \text{ f\"ur } f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

und insbesondere ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) = \partial_i (u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i (\text{pr}^j)(\varphi^{-1}(p)) = \delta_i^j,$$

da wegen der Lokalität von  $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p$  die vorige Formel auch für  $f := u^i \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$  gilt.

### 10.9 Transformationsverhalten von Tangentialvektoren.

Für  $g \in C^\infty(M, N)$  und  $p \in M$  seien  $\varphi^{-1} = u = (u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten von  $M$  bei  $p$  sowie  $\psi^{-1} = v = (v^1, \dots, v^n)$  lokale Koordinaten von  $N$  bei  $g(p)$ . Wir wissen, daß  $T_p g : T_p M \rightarrow T_{g(p)} N$  linear ist nach [10.5] und  $(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p)$  eine Basis von  $T_p M$  sowie  $(\frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{g(p)})$  eine von  $T_{g(p)} N$  ist nach [10.8]. Wie sieht nun die Matrixdarstellung  $[T_p g]$  von  $T_p g$  bezüglich dieser Basen aus?

Sei  $\bar{g} := \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$  die Kartendarstellung von  $g$ . Da nach Definition von  $T_p g$  und wegen [10.4] und [10.6] das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\bar{g}} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(\bar{g})'(0)} & \mathbb{R}^n \\ \Phi \downarrow \cong & & \downarrow \Phi \cong \\ \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{T_0 \bar{g}} & \text{Der}_0(C^\infty(V, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ T_0 \varphi \downarrow \cong & & \downarrow T_0 \psi \cong \\ \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{T_p g} & \text{Der}_{g(p)}(C^\infty(N, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

werden die entsprechenden Basen wie folgt abgebildet:

$$\begin{array}{ccc} e_i \mapsto \xrightarrow{(\bar{g})'(0)} \bar{g}'(0)(e_i) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot e_j & & \\ \Phi \downarrow \cong & & \downarrow \Phi \cong \\ \partial_i \mapsto \xrightarrow{T_0 \bar{g}} (T_0 \bar{g})(\partial_i) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j & & \\ T_0 \varphi \downarrow \cong & & \downarrow T_0 \psi \cong \\ \partial_i^\varphi \mapsto \xrightarrow{T_p g} (T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi & & \end{array}$$

Für die Komponenten  $\xi^i$  von Tangentialvektoren  $\xi = \sum_i \xi^i \cdot \partial_i^\varphi \in T_p M$  erhalten wir also folgendes:

$$\begin{aligned} (T_p g)(\xi) &= (T_p g) \left( \sum_i \xi^i \cdot \partial_i^\varphi \right) = \sum_i \xi^i \cdot (T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_i \xi^i \cdot \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi \\ &= \sum_j \left( \sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar{g}^j(0) \right) \cdot \partial_j^\psi \end{aligned}$$

Die Komponenten  $\eta^j$  von  $\eta = \sum_j \eta^j \cdot \partial_j^\psi := (T_p g)(\xi) \in T_{g(p)} N$  sind somit durch

$$\eta^j = \sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar{g}^j(0)$$

geben, bzw. in Matrizen-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{g}^1(0) & \cdots & \partial_m \bar{g}^1(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \bar{g}^n(0) & \cdots & \partial_m \bar{g}^n(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix},$$

also gerade durch Multiplikation mit der Jacobi-Matrix der Koordinatendarstellung  $\bar{g} = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$  von  $g$ .

Wählen wir insbesondere  $g = \text{id}_M$  und zwei Karten  $\varphi$  und  $\psi$  zentriert bei  $p \in M$ , dann ist  $\bar{g}$  der Kartenwechsel  $\psi^{-1} \circ \varphi$  von den Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$  zu den Koordinaten  $(v^1, \dots, v^m) = \psi^{-1}$ . Wenn wir obige Formel  $\partial_i^\varphi = (T_p \text{id})(\partial_i^\varphi) = (T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi$  formal als Multiplikation von Matrizen auffassen, dann ist

$$\begin{pmatrix} \partial_1^\varphi \\ \vdots \\ \partial_m^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{g}^1(0) & \cdots & \partial_m \bar{g}^1(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \bar{g}^m(0) & \cdots & \partial_m \bar{g}^m(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1^\psi \\ \vdots \\ \partial_m^\psi \end{pmatrix}$$

also erhalten wir die Basis  $(\partial_i^\varphi)$  formal aus der Basis  $(\partial_j^\psi)$  indem wir mit der transponierten Jacobi-Matrix des inversen Kartenwechsels  $\psi^{-1} \circ \varphi = (\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1}$  von  $\varphi$  zu  $\psi$  multiplizieren.

Wenn wir nun die Schreibweise  $\frac{\partial}{\partial u^i} := \partial_i^\varphi$ ,  $\frac{\partial}{\partial v^j} := \partial_j^\psi$  und  $\frac{\partial f}{\partial u^i} := \frac{\partial f}{\partial u^i}$  verwenden und beachten, daß  $\partial_i^\varphi(f)(p) = (\partial_i^\varphi)|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))$  ist und somit

$$\begin{aligned} \partial_i \bar{g}^j(0) &= \partial_i((\psi^{-1} \circ g \circ \varphi)^j)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(v^j \circ g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \\ &= \partial_i^\varphi(v^j \circ g)(p) = \frac{\partial}{\partial u^i}(v^j \circ g)(p) \end{aligned}$$

gilt, dann besagt obige Formel für  $g = \text{id}$ , daß

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \partial_i^\varphi = (T_p \text{id})(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi = \sum_j \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial v^j}$$

(beachte den memotechnischen Vorteil dieser Notation) bzw. in (formaler) Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial v^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^m} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial v^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^m}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial v^m}{\partial u^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix}.$$

### 10.10 Beispiel.

Sei  $M = \mathbb{R}^3$ . Wir wählen 3 verschiedene Koordinatensysteme:

1. KARTESISCHE KOORDINATEN  $(x, y, z)$  mit zugehörigen Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ .
2. ZYLINDERKOORDINATEN  $(r, \varphi, z)$  mit zugehörigen Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ .
3. KUGELKOORDINATEN  $(R, \varphi, \vartheta)$  mit zugehörigen Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial R}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ .

Für den Kartenwechsel und die Jacobimatrizen der Kartenwechsel erhalten wir für (2)  $\rightarrow$  (1):  $x = r \cdot \cos \varphi$ ,  $y = r \cdot \sin \varphi$ ,  $z = z$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für (3)  $\rightarrow$  (2):  $r = R \cdot \cos \vartheta$ ,  $z = R \cdot \sin \vartheta$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial R} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -R \cdot \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & R \cdot \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

und schließlich für (1)  $\rightarrow$  (3):

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\varphi = \arctan(y/x)$ ,  $\vartheta = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2})$ . Das Ausrechnen der Jacobi-Matrix dieses Kartenwechsels überlassen wir dem Leser als Übung.

Wenn wir am  $\mathbb{R}^2$  neben den kartesischen Koordinaten  $x, y$  neue Koordinaten  $\bar{x} := x$ ,  $\bar{y} := x + y$  verwenden, dann stimmen die jeweils ersten Koordinaten überein, nicht aber die entsprechenden Derivationen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \neq \frac{\partial}{\partial \bar{x}}.$$

Also hängt  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  nicht nur von  $u^i$  sondern von ganz  $u = (u^1, \dots, u^m)$  ab!

Es gibt auch die Möglichkeit, den Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit geometrischer zu beschreiben.

### 10.11 Lemma (Tangentialvektoren via Kurven).

Sei  $C_x^\infty(\mathbb{R}, M) := \{c \in C^\infty(\mathbb{R}, M) : c(0) = x\}$  die Menge der glatten Kurven durch  $x \in M$ . Für eine solche glatte Kurve  $c$  und eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $\partial_c(f) := (f \circ c)'(0)$ . Dann definiert  $c \mapsto \partial_c$  eine surjektive Abbildung

$$\partial : C_x^\infty(\mathbb{R}, M) \rightarrow \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Wir können also  $T_x M$  mit  $C_x^\infty(\mathbb{R}, M)/\sim$  identifizieren, wobei  $\sim$  folgende Äquivalenzrelation auf  $C_x^\infty(\mathbb{R}, M)$  ist:

$$c_1 \sim c_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : (f \circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0).$$

Die Tangentialabbildung einer glatten Funktion  $g : M \rightarrow N$  sieht in dieser Beschreibung so aus:

$$(T_x g)(\partial_c) = \partial_{g \circ c}.$$

Dies entspricht also der Beschreibung von  $T_x M$  für Teilmannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  in [10.1.2](#). Sie hat allerdings den Nachteil, damit die Vektorraumstruktur von  $T_x M$  und die Linearität von  $T_x g$  nicht erkennen zu können.

**Beweis.** Die folgende Rechnung zeigt, daß  $\partial_c$  eine Derivation über  $x$  ist:

$$\begin{aligned}\partial_c(f+g) &= \left((f+g) \circ c\right)'(0) = \left((f \circ c) + (g \circ c)\right)'(0) \\ &= (f \circ c)'(0) + (g \circ c)'(0) = \partial_c f + \partial_c g \\ \partial_c(\lambda f) &= \left((\lambda f) \circ c\right)'(0) = \left(\lambda(f \circ c)\right)'(0) \\ &= \lambda(f \circ c)'(0) = \lambda \cdot \partial_c f \\ \partial_c(f \cdot g) &= \left((f \cdot g) \circ c\right)'(0) = \left((f \circ c) \cdot (g \circ c)\right)'(0) \\ &= (f \circ c)'(0) \cdot (g \circ c)(0) + (f \circ c)(0) \cdot (g \circ c)'(0) \\ &= (\partial_c f) \cdot g(x) + (\partial_c g) \cdot f(x)\end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß die Zuordnung  $c \mapsto \partial_c$  surjektiv ist, wählen wir lokale Koordinaten  $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$  zentriert um  $x \in M$ . Jedes Element von  $T_x M = \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  hat dann die Gestalt  $\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x$ . Wir definieren nun eine (lokale) Kurve  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  durch  $c(t) := \varphi(t\xi^1, \dots, t\xi^m)$ , d.h.  $u^i(c(t)) := t\xi^i$  für  $i = 1, \dots, m$ , dann gilt für  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned}(f \circ c)'(0) &= \left((f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ c)\right)'(0) = (f \circ \varphi)'(0) \left((\varphi^{-1} \circ c)'(0)\right) \\ &= (f \circ \varphi)'(0)(\xi^1, \dots, \xi^m) = \sum_{i=1}^m \partial_i(f \circ \varphi)(0)\xi^i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x (f) \xi^i = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x (f).\end{aligned}$$

Somit ist  $\partial_c$  das vorgegebene Element von  $T_x M$ , mit dem einzigen Schönheitsfehler, daß  $c$  nur lokal definiert ist. Da aber obige Rechnung nur vom Aussehen von  $c$  nahe 0 abhängt, können wir  $c$  so umparametrisieren, daß sich nahe 0 nichts ändert, aber  $c(t)$  ganz in  $\text{Dom}(\varphi)$  bleibt.

Daß  $T_x g$  die angegebene Gestalt hat, ergibt sich sofort aus:

$$\left((T_x g)(\partial_c)\right)(f) = \partial_c(f \circ g) = \left((f \circ g) \circ c\right)'(0) = \left(f \circ (g \circ c)\right)'(0) = \partial_{g \circ c}(f). \quad \square$$

Vor allem unter Physikern ist auch folgende Beschreibung des Tangentialraums üblich:

### 10.12 Lemma (Tangentialvektoren via Koordinaten).

Für jede lokale Parametrisierung  $\varphi$  von  $M$  zentriert um  $x$  seien die Koordinaten  $(\xi_\varphi^i)_{i=1}^m$  eines Vektors  $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$  so vorgegeben, daß sie sich richtig transformieren, d.h. für je zwei Karten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  mit Kartenwechsel  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  gelte  $\xi_{\varphi_2} = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)'(0) \cdot \xi_{\varphi_1}$ , oder in Koordinaten  $\xi_{\varphi_2}^i = \sum_{j=1}^m \partial_j(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^i(0) \cdot \xi_{\varphi_1}^j$ . Dann entspricht diesem Koordinaten-Schema ein eindeutiger Tangentialvektor in  $T_x M$  und umgekehrt.

Ist  $g: M \rightarrow N$  eine glatte Funktion, so bildet  $T_x g$  solch ein Schema  $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$  auf das Schema  $\eta_\psi \in \mathbb{R}^n$  ab, mit  $\eta_\psi = (\psi^{-1} \circ g \circ \varphi)'(0) \cdot \xi_\varphi$ .

**Beweis.** Sei  $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$  für eine lokale Parametrisierung  $\varphi$  vorgegeben und seien  $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$  die zugehörigen lokalen Koordinaten. Dann definieren wir eine Derivation  $\partial_\xi \in T_x M$  durch  $\partial_\xi := \sum_{i=1}^m \xi_\varphi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ . Diese Definition macht Sinn, d.h. ist unabhängig von der Wahl der Karte  $\varphi$ , denn die  $\xi_\varphi$  transformieren sich genauso wie die Koeffizienten einer Derivation bezüglich der Basen  $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ .



Umgekehrt bilden die Koeffizienten  $\xi_\varphi^i$  einer Derivation  $\partial \in T_x M$  bezüglich der zu  $\varphi = (u^1, \dots, u^m)^{-1}$  gehörenden Basis  $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ , genau ein richtig transformierendes Koordinaten-Schema.

Daß  $T_x g$  diese Schemata auf angegebene Weise abbildet, folgt sofort aus der Koordinatendarstellung von  $T_x g$  bezüglich der Basen  $(\frac{\partial}{\partial u^i})$  und  $(\frac{\partial}{\partial v^j})$  von  $T_x M$  und  $T_{g(x)} N$ .  $\square$

## 11. Immersionen

Wir wollen in den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels die Tangentialabbildung verwenden, um spezielle Eigenschaften von glatten Abbildungen zu studieren. Insbesondere interessieren wir uns für den richtigen Begriff von "Unterobjekten" sowie "Quotientenobjekten" von Mannigfaltigkeiten.

### 11.1 Definition (Immersionen und Submersionen).

Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$ , wo  $M, N$  Mannigfaltigkeiten sind. Dann heißt:

$f$  IMMERSIV  $:\Leftrightarrow T_x f$  ist injektiv  $\forall x \in M$ ;

$f$  SUBMERSIV  $:\Leftrightarrow T_x f$  ist surjektiv  $\forall x \in M$ ;

$f$  REGULÄR  $:\Leftrightarrow \text{rang}(T_x f)$  ist maximal (=  $\min\{\dim T_x M, \dim T_{f(x)} N\}$ )  $\forall x \in M$ .

Man beachte, daß eine Abbildung genau dann immersiv ist, wenn sie regulär ist und  $\dim M \leq \dim N$  gilt. Ebenso ist sie genau dann submersiv, wenn sie regulär ist und  $\dim M \geq \dim N$  gilt.

### 11.2 Rangsatz.

Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$  und  $r \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\text{rang}(T_x f) = r \forall x \in M$  genau dann, wenn für jedes  $x \in M$  eine Karte  $\varphi$  zentriert bei  $x$  und eine Karte  $\psi$  zentriert bei  $f(x)$  existiert, sodaß die lokal definierte Abbildung:

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

die Gestalt  $(x, y) \mapsto (x, 0)$  hat.

Beachte, daß wir folglich (durch Einschränken von  $\varphi$  auf  $\varphi^{-1}(f^{-1}(\text{Bild } \psi))$ ) o.B.d.A. voraussetzen können, daß  $f(\text{Bild } \varphi) \subseteq \text{Bild } \psi$  ist und somit folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f|_{\text{Bild } \varphi}} & \text{Bild } \psi \subseteq N \\ \uparrow \cong & & \cong \uparrow \psi \\ \mathbb{R}^m \supseteq \text{Dom } \varphi & \xrightarrow{\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & \text{Dom } \psi \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Durch weiteres Verkleinern können wir die Gestalt  $\text{Dom } \varphi = W_1 \times W_2 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$  und  $\text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^r = W_1$  (oder mittels Kompaktheitsargument sogar die Gestalt  $\text{Dom } \psi = W_1 \times W_3 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ ) erreichen.

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Es ist  $\text{rang } T_x f = \text{rang } T_0(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) = \text{rang}((x, y) \mapsto (x, 0)) = r$ .

( $\Rightarrow$ ) O.B.d.A. sei  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $N = \mathbb{R}^n$ ,  $x = 0$  und  $f(x) = 0$ . Die Idee des Beweises besteht darin, daß  $f$  lokal ungefähr wie die Ableitung  $f'(0)$  aussieht, und diese ist als lineare Abbildung vom Rang  $r$  bis auf Basiswechsel von der Form  $(x, y) \mapsto (x, 0)$ . Sei nämlich  $F_1 := \text{Bild}(f'(0))$ ,  $F_2 := F_1^\perp$ ,  $E_2 := \text{Ker}(f'(0))$  und  $E_1 := E_2^\perp$ . Es ist

$r = \text{rang}(f'(0)) = \dim(F_1)$ , weiters  $\dim(E_1) := m - \dim(E_2) = \dim(F_1)$  und die Komponenten-Darstellung von  $f'(0) : E_1 \oplus E_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2$  hat folgende Gestalt:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mit invertierbaren  $A \in L(E_1, F_1)$  und wenn wir  $f = (f_1, f_2)$  schreiben, dann ist  $A = \partial_1 f_1(0, 0)$ .

Wir versuchen nun durch lokale Diffeomorphismen die Abbildung  $f$  auf die gewünschte Form zu bringen. Dazu betrachten wir zuerst eine leicht modifizierte Variante von  $f$  nämlich die durch  $\varphi^{-1} : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), x_2)$  gegebene glatte Abbildung  $\varphi^{-1} : E_1 \oplus E_2 \rightarrow F_1 \oplus E_2$  (die Bezeichnungweise als Inverse werden wir gleich rechtfertigen). Die Jacobi-Matrix von  $\varphi^{-1}$  in 0 sieht wie folgt aus:

$$(\varphi^{-1})'(0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(0, 0) & \partial_2 f_1(0, 0) \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Also ist  $(\varphi^{-1})'(0)$  invertierbar und wegen dem inversen Funktionen Satz [2.2](#) ist  $\varphi^{-1}$  ein lokaler Diffeomorphismus. Sei  $\varphi$  der zu  $\varphi^{-1}$  inverse lokale Diffeomorphismus und sei  $g := f \circ \varphi$ , dann hat  $g = (g_1, g_2)$  folgende Gestalt:

$$g(y_1, y_2) = (y_1, g_2(y_1, 0)).$$

Denn

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2) := \varphi(y_1, y_2) \Rightarrow \\ y &= (y_1, y_2) = \varphi^{-1}(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), x_2) \Rightarrow \\ y_1 &= f_1(x_1, x_2) = f_1(\varphi(y_1, y_2)) = g_1(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Weiters gilt  $\text{Rang } g'(y) = \text{Rang } f'(\varphi(y)) = r$ , da  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Also ist in der Komponenten-Darstellung von  $g'(y)$

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \partial_1 g_2(y) & \partial_2 g_2(y) \end{pmatrix}$$

die rechte untere Ecke  $\partial_2 g_2(y) = 0$  und somit  $g_2(y_1, y_2) = g_2(y_1, 0)$ .

Um nun die zweite Komponente von  $g$  zu 0 zu machen setzen wir mit der Abbildung  $\psi^{-1} : F_1 \oplus F_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2$  (die Bezeichnungweise als Inverse werden wir ebenfalls gleich rechtfertigen) definiert durch

$$\psi^{-1}(y_1, y_2) := (y_1, y_2 - g_2(y_1, 0))$$

zusammen. Die Komponenten-Darstellung von  $(\psi^{-1})'(x)$  ist gegeben durch

$$(\psi^{-1})'(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ -\partial_1 g_2(y_1, 0) & \text{id} \end{pmatrix}$$

und somit ist  $\psi^{-1}$  ein lokaler Diffeomorphismus, also wirklich das Inverse eines  $\psi$ . Weiters gilt

$$\begin{aligned} (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(y_1, y_2) &= \psi^{-1}(y_1, g_2(y_1, 0)) \\ &= (y_1, g_2(y_1, 0) - g_2(y_1, 0)) = (y_1, 0) \quad \square \end{aligned}$$

### 11.3 Folgerung (Charakterisierung von Diffeomorphismen).

Für glatte Abbildungen  $f$  gilt:

$$f \text{ ist Diffeomorphismus} \Leftrightarrow f \text{ und alle } T_x f \text{ sind bijektiv.}$$

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Die Abbildung  $f$  ist klarerweise bijektiv. Daß auch  $T_x f$  bijektiv ist, haben wir in [10.4](#) bereits gezeigt.

( $\Leftarrow$ ) Die Abbildung  $g := f^{-1}$  ist wohldefiniert und stetig, da  $f$  als lokaler Diffeomorphismus offen ist. Nach dem Rangatz [11.2](#) existieren Karten  $\varphi$  um  $x$  und  $\psi$  um  $f(x)$ , sodaß  $f(\text{Bild}(\varphi)) \subseteq \text{Bild}(\psi)$  und  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \text{id}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f} & \text{Bild } \psi \\
 \cong \uparrow \varphi & & \psi \uparrow \cong \\
 \mathbb{R}^m \hookrightarrow \text{Dom } \varphi & \xrightarrow{\text{id}} & \text{Dom } \psi \hookrightarrow \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Es kann O.B.d.A. folglich  $\text{Dom } \psi = \text{Dom } \varphi$  gewählt werden. Somit ist  $z \mapsto f^{-1}(z) = (\varphi \circ \psi^{-1})(z)$  glatt auf  $\text{Bild } \psi$  und damit  $f$  ein Diffeomorphismus, da  $\psi^{-1}$  eingeschränkt auf  $\text{Bild } \psi$  einer ist.  $\square$

**11.4 Charakterisierung von Immersionen.**

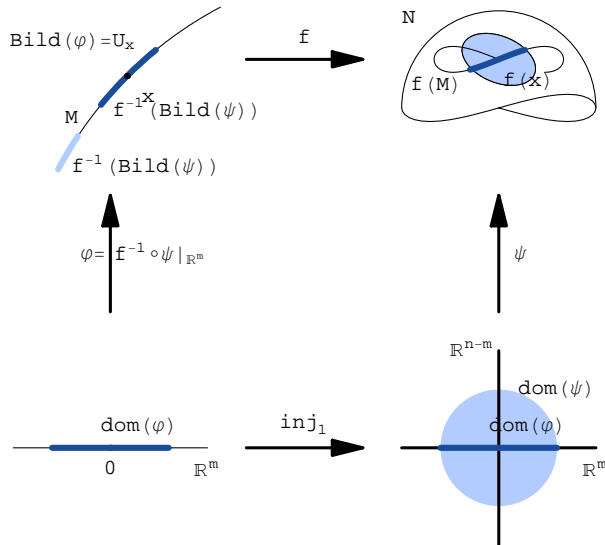
Wir wollen nun versuchen herauszubekommen welche Teilmengen  $M$  von Mannigfaltigkeiten  $N$  so zu Mannigfaltigkeiten gemacht werden können, daß die Inklusion  $f := \text{incl} : M \rightarrow N$  glatt ist und daß die Tangentialräume  $T_x M$  von  $M$  vermöge  $T_x f$  bijektiv auf Teilräume von  $T_{f(x)} N$  abgebildet werden, also  $f$  eine Immersion ist. Wir müssen dazu versuchen die Eigenschaft, daß  $f$  eine Immersion ist, mittels Karten von  $N$  auszudrücken.

Nach dem Rangatz [11.2](#) sehen Immersionen bzgl. geeigneter Karten  $\varphi$  zentriert bei  $x \in M$  und  $\psi$  zentriert bei  $f(x) \in N$  mit  $f(\text{Bild } \varphi) \subseteq \text{Bild } \psi$  und  $\text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m = \text{Dom } \varphi$  wie die Inklusion  $\text{incl} : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  aus, also ist  $f|_{\text{Bild } \varphi}$  bijektiv von  $\text{Bild } \varphi$  auf sein Bild

$$\text{Bild}(f|_{\text{Bild } \varphi}) = f(\text{Bild } \varphi) = \psi(\text{incl}(\text{Dom } \varphi)) = \psi(\text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m) = \psi(\mathbb{R}^m),$$

und damit

$$\varphi = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ f|_{\text{Bild } \varphi} \circ \varphi = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ \psi \circ \text{incl} = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}.$$



Wir können also durch geeignete Wahlen von Umgebungen  $U_x := \text{Bild } \varphi$  von  $x \in M$  und Karten  $\psi$  von  $N$  zentriert bei  $f(x)$  einen Atlas mit Karten  $\varphi := f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$  von  $M$  erhalten und die Kartendarstellung von  $f$  sieht dann wie die Inklusion  $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  aus. Dies zeigt die Richtung [\(1\)  \$\Rightarrow\$  \(2\)](#) von folgender

**Proposition. Charakterisierung von Immersionen.**

Für  $f \in C^\infty(M, N)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist immersiv;
2.  $\forall x \in M \exists U_x$  offene Umgebung von  $x$  in  $M$  und eine Karte  $\psi$  zentriert bei  $f(x)$  in  $N$ , sodaß  $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$  ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte von  $M$ ) ist;
3.  $f$  besitzt lokale Linksinverse, d.h.  $\forall x \in M \exists U_x$  offene Umgebung von  $x$  in  $M$  und  $\exists h : N \supseteq V_{f(x)} \rightarrow M$  glatt mit  $V_{f(x)} \supseteq f(U_x)$  offen und  $h \circ f = \text{id}_{U_x}$ .

**Beweis.** (1)  $\Rightarrow$  (2) habe wir eben gezeigt.

(2)  $\Rightarrow$  (3) sei  $U_x$  und  $\psi$  wie in (2). Wir setzen  $\varphi := f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$ . Durch Verkleinern der Karte  $\psi$  können wir erreichen, daß  $\text{Dom } \psi$  von der Form  $W_1 \times W_2 \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  ist. Nun setzen wir  $V_{f(x)} := \text{Bild } \psi$  und  $h := \varphi \circ \text{pr}_1 \circ \psi^{-1}$ , wobei  $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \supseteq W_1 \times W_2 \rightarrow W_1 \subseteq \mathbb{R}^m$  die kanonische Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet. Dann ist  $h : V_{f(x)} \rightarrow U_x$  glatt und

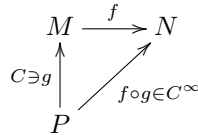
$$h \circ f \circ \varphi = \varphi \circ \text{pr}_1 \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \varphi \circ \text{pr}_1 \circ \text{incl}_1 = \varphi = \text{id} \circ \varphi,$$

also  $h \circ f = \text{id}$  auf  $\text{Bild } \varphi = U_x$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) Wegen  $h \circ f = \text{id}$  lokal um  $x$  gilt  $\text{id} = T_x \text{id} = T_{f(x)} h \circ T_x f$ , also ist  $T_x f$  injektiv und somit  $f$  eine Immersion.  $\square$

**11.5 Folgerung.**

Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$  eine Immersion und  $g : P \rightarrow M$  eine stetige Abbildung mit  $f \circ g \in C^\infty(P, N)$ . Dann ist  $g$  glatt.



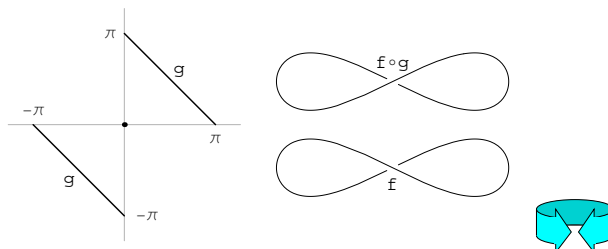
**Beweis.** Sei  $z \in P$  und  $x := g(z)$ . Es existieren  $U_x$  und  $h : f(U_x) \subseteq V_{f(x)} \rightarrow M$  wie in (11.4.3). Da  $g$  stetig ist, ist  $g^{-1}(U_x)$  eine offene Umgebung von  $z$  und darauf ist  $g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$  glatt.  $\square$

**11.6 Bemerkungen.**

1. Bei (11.5) ist die Stetigkeit von  $g$  wesentlich: Sei nämlich  $g : ]-\pi, \pi[ \rightarrow ]-\pi, \pi[$ , definiert durch

$$g : t \mapsto \begin{cases} \pi - t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -\pi - t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

und  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch  $f(t) := (\sin t, -\sin 2t)$ .



Dann ist  $f \circ g$  glatt, aber  $g$  ist nicht stetig, ergo auch nicht glatt.

2. Eine Mannigfaltigkeit  $M$ , die Teilmenge einer Mannigfaltigkeit  $N$  ist, heißt IMMERSIVE TEILMANNIGFALTIGKEIT, falls die Inklusion  $\text{incl} : M \rightarrow N$  eine Immersion ist. Eine immersive Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen keine Teilmannigfaltigkeit im Sinn von [2.4](#) oder allgemeiner von [11.10](#):  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  aus [1](#) ist eine injektive Immersion, aber die immersive Teilmannigfaltigkeit  $\text{Bild}(f) \cong (-\pi, \pi)$  ist keine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ .
3. Die Mannigfaltigkeitsstruktur einer immersiven Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen nicht durch die von  $N$  festgelegt wie [1](#) zeigt:  $f$  und  $f \circ g$  erzeugen zwei verschiedene Mannigfaltigkeitsstrukturen auf  $M = \text{Bild}(f)$ .

### 11.7 Definition (Initiale und finale Abbildungen).

Sei  $f \in C^\infty(M, N)$ . Die Abbildung  $f$  heißt INITIAL  $:\Leftrightarrow$  für jede Abbildung  $g : P \rightarrow M$  mit der Eigenschaft, daß  $f \circ g$  glatt ist,  $g$  selbst glatt ist.

Die Abbildung  $f$  heißt FINAL  $:\Leftrightarrow$  für jedes  $g : N \rightarrow P$  mit der Eigenschaft, daß  $g \circ f$  glatt ist,  $g$  selbst glatt ist.

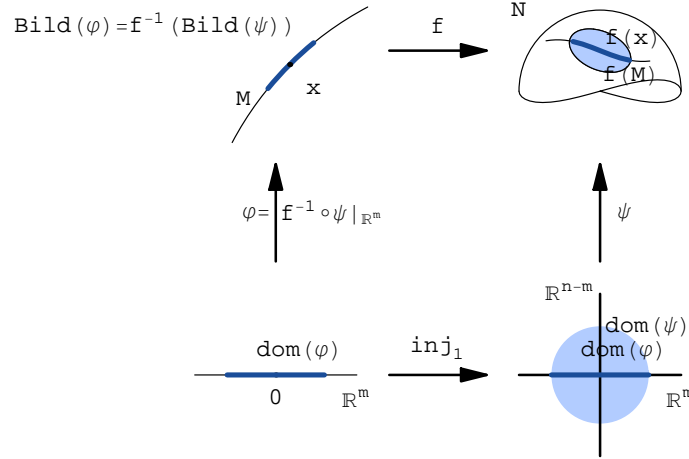
### 11.8 Definition (Einbettung).

Es sei  $f : M \rightarrow N$  glatt, dann heißt  $f$  EINBETTUNG  $:\Leftrightarrow$   $f$  ist injektive Immersion und  $f : M \rightarrow f(M)$  ist ein Homöomorphismus auf sein Bild  $f(M)$  versehen mit der Spurtopologie von  $N$ .

### 11.9 Satz (Charakterisierung von Einbettungen).

Für  $f$  in  $C^\infty(M, N)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist eine Einbettung;
2. für jedes  $x \in M$  gibt es eine Karte  $\psi$  von  $N$  zentriert bei  $f(x)$ , sodaß  $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow f^{-1}(\text{Bild } \psi)$  ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte) ist;
3.  $f$  besitzt lokale Linksinverse im folgenden Sinn:  $\forall x \in M \exists h : V_{f(x)} \rightarrow M$  glatt mit einer offenen Umgebung  $V_{f(x)}$  von  $f(x)$  in  $N$  und  $h(f(x)) = x$  sowie  $h \circ f = \text{id}$  auf  $f^{-1}(V_{f(x)})$ .



Beachte, daß der Unterschied zur Formulierung von Immersionen in 11.4 nur darin besteht, daß das Bild der konstruierten Karten  $\varphi$  nun ganz  $f^{-1}(\text{Bild } \psi)$  und nicht nur eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  ist, d.h.  $\text{Bild } \psi \cap \text{Bild } f$  nur einen wie  $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$  aussehenden Teil enthalten darf.

**Beweis.**

(1)  $\Rightarrow$  (2) Sei  $f$  eine Einbettung. Da  $f$  eine Immersion ist, existiert nach 11.4 für  $x \in M$  ein  $U_x \subseteq M$  offen und eine Karte  $\psi$  um  $f(x)$ , sodaß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$$

ein wohldefinierter Diffeomorphismus ist. Wir wollen durch Verkleinern von  $\text{Dom } \psi$  erreichen, daß  $U_x = f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ . Da  $f$  ein Homöomorphismus auf das Bild ist, gibt es  $W \subseteq \text{Bild } \psi$  offen mit  $W \cap \text{Bild } f = f(U_x)$ . O.B.d.A. sei  $\text{Bild } \psi = W$ , dann ist  $U_x = f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ , denn

$$U_x \stackrel{f \text{ inj.}}{=} (f^{-1} \circ f)(U_x) = f^{-1}(W \cap \text{Bild } f) = f^{-1}(\text{Bild } \psi \cap \text{Bild } f) = f^{-1}(\text{Bild } \psi).$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) Die selbe Definition von  $h$  wie im entsprechenden Beweisteil von 11.4 liefert nun ein Linksinverses auf  $U_x = f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) Nach 11.4 ist  $f$  immersiv.

Weiters ist  $f$  injektiv, denn andernfalls sei  $x_1 \neq x_2$  mit  $y := f(x_1) = f(x_2)$  und  $h : V_y \rightarrow M$  ein lokales Linksinverses wie in 3. Dann ist  $x_i \in f^{-1}(V_y)$  und somit  $x_i = (h \circ f)(x_i) = h(y)$  unabhängig von  $i$ , ein Widerspruch.

Schließlich ist  $f$  ein Homöomorphismus auf sein Bild: Sei dazu  $(x_i)_i$  ein Netz in  $M$  für welches  $f(x_i)$  gegen ein  $f(x_\infty)$  konvergiert. Sei  $h : V \rightarrow M$  ein lokales Linksinverses wie in 3 mit einer offenen Umgebung  $V$  von  $f(x_\infty)$ . Dann ist  $f(x_i)$  schließlich in  $V$  und somit  $x_i$  schließlich in  $f^{-1}(V)$  und damit konvergiert  $x_i = (h \circ f)(x_i) = h(f(x_i)) \rightarrow h(f(x_\infty)) = x_\infty$ .  $\square$

**11.10 Definition (Teilmannigfaltigkeit).**

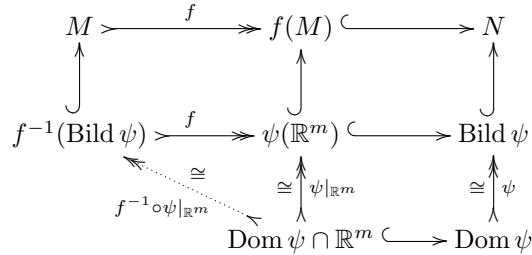
Eine Teilmenge  $M$  einer Mannigfaltigkeit  $N$ , die selbst Mannigfaltigkeit ist und die Eigenschaften aus [11.9](#) bezüglich der Inklusion  $\text{incl} : M \hookrightarrow N$  besitzt, heißt (REGULÄRE) TEILMANNIGFALTIGKEIT von  $N$ .

Jede Teilmenge  $M \subseteq N$ , die für jeden Punkt  $x \in M$  eine Karte  $\psi$  von  $N$  zentriert bei  $x$  besitzt für welche  $M \cap \text{Bild } \psi = \psi(\mathbb{R}^m)$  gilt, ist selbst eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$  mit dem glatten Atlas gebildet durch diese Einschränkungen  $\psi|_{\mathbb{R}^m}$  und die Inklusion  $\text{incl} : M \hookrightarrow N$  ist dann nach Konstruktion und [11.9.2](#) eine Einbettung, also  $M$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $N$ :

Diese zeigt, daß die Definition für reguläre Teilmannigfaltigkeiten von  $N = \mathbb{R}^n$  mit der in [2.4](#) gegebenen übereinstimmt, denn Karten  $\psi$  von  $N = \mathbb{R}^n$  wie in [11.9.2](#) (also mit  $M \cap \text{Bild } \psi = \psi(\mathbb{R}^m)$ ) sind gerade lokale Trivialisierungen im Sinn von [2.4.4](#).

Das Bild  $f(M)$  jeder Einbettung  $f : M \rightarrow N$  ist offensichtlich eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $N$  und die Einbettung induziert einen Diffeomorphismus  $f : M \rightarrow f(M)$  aufs Bild:

Nach [11.9.2](#) ist  $f(M) \cap \text{Bild } \psi = \psi(\mathbb{R}^m)$ , also  $f(M)$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit mit  $\psi|_{\mathbb{R}^m}$  als Karten und  $f^{-1}$  ist (lokal)  $C^\infty$ . Bis auf Diffeomorphismen sind also Einbettungen nichts anderes als die Inklusionen regulärer Teilmannigfaltigkeiten.



### 11.11 Whitney'scher Einbettungssatz.

Es sei  $M$  eine zusammenhängende  $\sigma$ -kompakte (und somit parakompakte)  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ , dann existiert eine Einbettung von  $M$  in einen endlichdimensionalen Vektorraum. "Jede" abstrakte Mannigfaltigkeit läßt sich also als Teilmannigfaltigkeit eines  $\mathbb{R}^n$  realisieren.

**Beweis.** Sei  $\{\psi_i : 0 \leq i \leq m\}$  ein endlicher Atlas nach [9.8](#) (für einen elementaren Beweis von [11.11](#) ohne Verwendung von Dimensionstheorie siehe z.B. [\[19, S.73\]](#)). Sei weiters  $f_i$  eine zu  $\{\text{Bild } \psi_i\}$  gehörige Partition der Eins und sei  $f : M \rightarrow \prod_{i=0}^m (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$  die glatte Abbildung

$$x \mapsto (f_i(x), f_i(x)\psi_i^{-1}(x))_{i=0}^m.$$

Um [11.9](#) anzuwenden zeigen wir die Existenz lokaler linksinverser Abbildungen  $g_i : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)^{m+1} \supseteq V_i \rightarrow M$  für eine offene Überdeckung  $\{V_i : 0 \leq i \leq m\}$  von  $f(M)$ .

Sei dazu

$$V_i := \left\{ (t, y) : t_i > 0, \frac{1}{t_i} y_i \in \text{Dom } \psi_i \right\},$$

$$g_i : V_i \rightarrow M, \quad (t, y) \mapsto \psi_i(t_i^{-1} \cdot y_i)$$

Dann ist  $g_i \circ f = \text{id}$  auf  $f^{-1}(V_i)$ , denn

$$f^{-1}(V_i) \ni x \mapsto (g_i \circ f)(x) = \psi_i \left( \frac{f_i(x)\psi_i^{-1}(x)}{f_i(x)} \right) = \psi_i(\psi_i^{-1}(x)) = x. \quad \square$$

**11.12 Bemerkungen.**

1. Nach dem Beweis von 11.11 lassen sich  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten in den  $\mathbb{R}^{(m+1)^2}$  einbetten. Das geht aber auch in niedrigere Dimensionen. Und zwar läßt sich  $M$  in den  $\mathbb{R}^n$  einbetten, wobei
  - (i) für  $n = 2m + 1$  der Beweis relativ einfach ist, siehe [65, S.55];
  - (ii) für  $n = 2m$  stammt er von [153].
 Vermutung: Das minimale  $n = 2m - \alpha(m) + 1$ , wobei  $\alpha(m)$  die Anzahl der Einsen in der Dualentwicklung von  $m$  ist.

Eine verwandte Frage ist jene nach dem minimalen  $n$  für die Existenz einer Immersion  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ?

- (i) Für  $n = 2m$  ist der Beweis relativ einfach, siehe [65, S.24].
  - (ii) Für  $n = 2m - 1$  stammt er von [153].
- Vermutung: Das minimale  $n = 2m - \alpha(m)$  um Immersionen zu erhalten. Diese Vermutung konnte schließlich bewiesen werden! Auf kompakten Mannigfaltigkeiten von [30] und allgemein von [20].
2. Der Rang-Satz liefert uns auf einfachste Weise weitere reguläre Teilmannigfaltigkeiten:  
 Sei  $f \in C^\infty(M, N)$  mit  $\text{rang}(T_x f) = r \ \forall x \in M$ . Dann ist  $f^{-1}(y)$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M$  für jedes  $y$ .

**Beweis.** Dies ist eine lokale Eigenschaft, wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, dann folgt aus 11.2, daß  $f$  lokal wie  $(x, y) \mapsto (x, 0)$  aussieht und das Urbild  $f^{-1}(0)$  somit wie  $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$ .  $\square$

**11.13 Folgerung (Retrakte sind Mannigfaltigkeiten).**

Sei  $f \in C^\infty(M, M)$  mit  $f \circ f = f$ . Dann ist  $A := f(M)$  reguläre Teilmannigfaltigkeit. D.h. glatte Retrakte von Mannigfaltigkeiten sind wieder Mannigfaltigkeiten.

**Beweis.** Man beachte, daß  $x \in A := f(M)$  genau dann, wenn  $f(x) = x$  gilt: Denn  $x = f(y) \Rightarrow f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ , und umgekehrt  $x = f(x) \in f(M)$ .

Sei  $x_0 \in A$  und  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  eine um  $x_0$  zentrierte Karte. Für alle  $y$  in der Umgebung  $V := f^{-1}(\varphi(U)) \cap \varphi(U)$  von  $x_0$  gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & M \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \\
 \varphi(U) & \xleftarrow{\varphi} V \xrightarrow{f|_V} & \varphi(U) \\
 \varphi \uparrow \cong & \varphi \uparrow \cong & \varphi \uparrow \cong \\
 U & \xleftarrow{\varphi} \varphi^{-1}(V) \xrightarrow{\bar{f}} & U
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 y \in f(M) &\Leftrightarrow f(y) = y \\
 &\Leftrightarrow (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(y)) = (\varphi^{-1} \circ f)(y) = \varphi^{-1}(y) \\
 &\Leftrightarrow (\text{id} - \bar{f})(\varphi^{-1}(y)) = 0,
 \end{aligned}$$

wobei  $\bar{f} := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \supseteq \varphi^{-1}(V) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$  die Kartendarstellung von  $f$  ist. Für  $z \in \varphi^{-1}(V)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 (\bar{f} \circ \bar{f})(z) &= (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z) = (\varphi^{-1} \circ f^2 \circ \varphi)(z) = \\
 &= (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z) = \bar{f}(z),
 \end{aligned}$$

d.h. o.B.d.A. sei  $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  erfülle  $f(0) = 0$  und  $f \circ f = f$ . Wir haben zu zeigen, daß  $\text{id} - f = 0$  eine reguläre Gleichung lokal um 0 ist: Offensichtlich ist  $\text{rang}(T_z(\text{id} - f)) \geq \text{rang}(T_0(\text{id} - f)) =: r$  für alle  $z$  nahe 0. Umgekehrt



folgt aus  $f \circ (\text{id} - f) = 0$ , daß  $T_{(\text{id} - f)(z)} f \circ (\text{id} - T_z f) = 0$  und somit  $\text{Bild}(\text{id} - T_z f) \subseteq \text{Ker}(T_{(\text{id} - f)(z)} f)$ . Also ist lokal

$$\begin{aligned} \text{rang}(T_z(\text{id} - f)) &\leq \dim \text{Ker}(T_{(\text{id} - f)(z)} f) = m - \dim \text{Bild}(T_{(\text{id} - f)(z)} f) \leq \\ &\leq m - \dim \text{Bild}(T_0 f) = \dim \text{Bild}(\text{id} - T_0 f) = r, \end{aligned}$$

wobei wir für die lineare Projektion  $T_0 f$  die offensichtliche Gleichung  $T_0 \mathbb{R}^m = \text{Bild}(T_0 f) \oplus \text{Bild}(\text{id} - T_0 f)$  verwendet haben.

Nun verwende [11.12.2](#). □

#### 11.14 Bemerkung.

Man kann umgekehrt zeigen, daß jede Teilmannigfaltigkeit  $M$  einer Mannigfaltigkeit  $N$  das Retrakt einer offenen Menge in  $N$  ist, siehe [\[86, 62.9\]](#) oder [\[65, S.110\]](#). Zusammen mit dem Einbettungssatz [11.11](#) besagt das, daß zusammenhängende  $\sigma$ -kompakte Mannigfaltigkeiten - bis auf Diffeomorphismen - genau die Retrakte offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume sind.

Für  $f \in C^\infty(M, N)$  sei der Graph von  $f$  definiert als

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times N.$$

Dann ist  $\text{Graph}(f)$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Der Beweis bleibt als Übung. Hinweis:  $\text{Graph}(f) \cong M$ .

#### 11.15 Satz von Sard.

*Die Menge der kritischen Werte einer glatten Abbildung zwischen  $\sigma$ -kompakten Mannigfaltigkeiten hat Lebesgue-Maß 0.*

#### Definition.

Dabei heißt für eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ein Punkt  $x \in M$  KRITISCH, falls  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  nicht maximalen Rang  $\min\{\dim M, \dim N\}$  hat, also  $f$  nicht regulär bei  $x$  ist. Ein Punkt  $y \in N$  heißt KRITISCHER WERT, falls ein kritischer Punkt  $x \in f^{-1}(y)$  existiert. Manchmal wird für kritische Punkte nur verlangt, daß  $T_x f$  nicht surjektiv ist, also daß  $\text{rang}(T_x f) < \dim N$  ist. Zumindestens für den Satz von Sard macht das aber keinen Unterschied, denn nur im Fall  $\dim M < \dim N$  gibt es dann mehr kritische Werte (nämlich alle im Bild). Diese bilden aber nach der Folgerung in [11.16](#) ebenfalls eine Lebesgue-Null-Menge.

Eine Menge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt LEBESGUE-NULL-MENGE, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Folge von Würfeln (oder Quadern oder Kugeln)  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  existiert mit  $N \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$  und  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| < \varepsilon$ , wobei wir  $|Q|$  für das Volumen von  $Q$  schreiben.

Eine Teilmenge  $N \subseteq M$  einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  heißt LEBESGUE-NULL-MENGE, wenn daß Urbild unter jeder Karte eine Lebesgue-Null-Menge ist.

Der Satz von Sard gilt auch noch, wenn  $f \in C^r(M, N)$  mit  $r > \min\{0, \dim M - \dim N\}$  ist. In [\[151\]](#) wurde eine  $C^1$ -Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  konstruiert, die auf einem Bogen  $I$  kritisch, aber nicht konstant ist. Der Graph von  $f$  ist also eine Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , auf welcher ein Bogen  $f(I)$  liegt, sodaß die Tangentialebene an  $S$  in jeden Punkt horizontal ist, aber dennoch hat  $f(I)$  nicht konstante Höhe. Siehe auch [\[19, S.58\]](#) und [\[65, p.68\]](#).

#### 11.16 Lemma.

*Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und  $N \subseteq U$  eine Lebesgue-Null-Menge. Weiters sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Abbildung. Dann ist auch  $f(N)$  eine Lebesgue-Null-Menge.*

**Beweis.** Da  $U$  die Vereinigung abzählbar vieler kompakter konvexer Mengen ist (z.B. der Kugeln mit rationalen Mittelpunkts-Koordinaten und rationalem Radius, die in  $U$  enthalten sind), und weil die abzählbare Vereinigung von Lebesgue-Null-Mengen wieder eine Lebesgue-Null-Menge ist, dürfen wir annehmen, daß  $N$  in einer kompakten konvexen Teilmengen  $K \subseteq U$  enthalten ist.  $K \subseteq U$  enthalten sind.

Da  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^1$  ist, ist  $\kappa := \sup\{\|f'(x)\| : x \in K\} < \infty$ . Sei  $Q \subseteq K$  ein Quader mit Seitenlänge  $a$ . Dann ist nach dem Hauptsatz

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 f'(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt \right| \leq \kappa \cdot |x_1 - x_0| \leq \kappa a \sqrt{m}.$$

für alle  $x_1, x_0 \in Q$ . Also ist  $f(Q)$  enthalten in einem Quader mit Seitenlänge  $2\kappa a \sqrt{m}$  und Volumen  $(2\kappa a \sqrt{m})^m = (2\kappa \sqrt{m})^m |Q|$ . Das Bild einer abzählbaren Überdeckung mit Quadern von Gesamt-Volumen kleiner als  $\delta := \varepsilon / (2\kappa \sqrt{m})^m > 0$  ist also in einer Überdeckung mit Quadern (von denen wir annehmen dürfen, daß sie in  $K$  enthalten sind) von Gesamt-Volumen kleiner als  $(2\kappa \sqrt{m})^m \cdot \delta = \varepsilon$  enthalten.  $\square$

Es ist also eine Teilmenge  $N \subseteq M$  einer Mannigfaltigkeit genau dann eine Lebesgue-Null-Menge, wenn die Urbilder unter den Karten eines festen Atlases Lebesgue-Null-Mengen sind.

#### Folgerung.

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^1$  und  $n < m$ , dann ist  $f(\mathbb{R}^n)$  eine Lebesgue-Null-Menge.

**Beweis.** Man wende das Lemma [11.16](#) auf  $\tilde{f} := f \circ \text{pr} : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  und die Lebesgue-Nullmenge  $N := \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$  an.  $\square$

Wir benötigen noch den

#### 11.17 Satz von Fubini.

Es sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $N \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$  eine Lebesgue-Null-Menge in  $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $N$  eine Lebesgue-Null-Menge in  $\mathbb{R}^n$ .

Für einen Beweis siehe [\[19, S.59\]](#) oder [\[82, 7.6.9\]](#).

**Beweis des Satzes von Sard** [11.15](#). Beachte, daß falls für jeden Punkt  $x$  einer Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Umgebung  $U_x$  existiert, s.d.  $f(U_x \cap X)$  eine L-Nullmenge ist, so ist  $f(X) = \bigcup_{x \in X} f(U_x \cap X)$  ebenfalls eine L-Nullmenge, denn abzählbar viele der  $U_x$  überdecken bereits  $X$ , da  $X$  nach dem Beweis von [\[8.2\]](#) Lindelöf ist.

Es genügt somit den Fall  $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu betrachten. Sei  $D$  die Menge der kritischen Punkte. Wir machen Induktion nach  $m$ . Für  $m = 0$  ist der Satz trivial.

Im Induktionsschritt wollen wir [11.17](#) anwenden, jedoch ist die Menge der kritischen Werte nicht kompakt, aber die kritischen Punkte sind eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen, denn die Menge der Punkte  $x$ , wo eine fixe  $r \times r$ -Teildeterminante von  $f'(x)$  verschwindet ist abgeschlossen, also die abzählbare Vereinigung ihrer Durchschnitte mit den kompakten Bällen  $B_n(x)$  für  $n \in \mathbb{N}$ , und die kritischen Werte somit eine abzählbare Vereinigung der kompakten Bilder all dieser kompakten Mengen (und damit [11.17](#) anwendbar).

Sei

$$D_k := \left\{ x \in U : \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = 0 \text{ für alle } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Die  $D_k$  sind abgeschlossen und erfüllen  $D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots$

Es ist  $f(D \setminus D_1)$  eine Lebesgue-Null-Menge:

Sei dazu  $x \in D \setminus D_1$ . O.B.d.A. ist  $\frac{\partial}{\partial x^1} f_1(x) \neq 0$ . Dann ist  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m, (x^1, \dots, x^m) \mapsto (f_1(x), x^2, \dots, x^m)$  ein lokaler Diffeomorphismus und  $g := f \circ h^{-1}$  hat die Gestalt

$$\begin{aligned} g : (f_1(x), x^2, \dots) &\mapsto (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ g : (t, x^2, \dots, x^m) &\mapsto (t, g^2(t, x), \dots, g^n(t, x)). \end{aligned}$$

Die Hyperebene  $\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cong \mathbb{R}^{m-1}$  wird unter  $g$  in die Hyperebene  $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  abgebildet und die Einschränkung  $g_t(x) := (g^2(t, x), \dots, g^n(t, x))$  von  $g$  auf sie hat  $x$  als kritischen Punkt genau dann, wenn  $(t, x)$  ein kritischer Punkt von  $g$  ist. Nach Induktionsvoraussetzung, sind die kritischen Werte von  $g_t$  eine Lebesgue-Null-Menge, und nach dem Satz [11.17](#) von Fubini auch jene von  $g$ , dies sind aber auch jene von  $f = g \circ h$ , da  $h$  ein Diffeomorphismus ist.

Es ist auch  $f(D_k \setminus D_{k+1})$  eine Lebesgue-Null-Menge:

Sei  $x \in D_k \setminus D_{k+1}$ . OBdA. ist  $\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial x^1 \partial x^{m_1} \dots \partial x^{m_k}}(x) \neq 0$  und sei  $w := \frac{\partial^k f_1}{\partial x^{m_1} \dots \partial x^{m_k}}$ . Dann ist  $w|_{D_k} = 0$  und  $\frac{\partial w}{\partial x^1}(x) \neq 0$ . Es sei  $h(x) := (w(x), x_2, \dots, x_m)$ . Dann ist  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein lokaler Diffeomorphismus und  $h(D_k) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$  (sagen wir zwischen  $U_x$  und  $h(U_x)$ ). Wir betrachten die Abbildung  $g := f \circ h^{-1}$  und ihre Einschränkung  $g_0 := g|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}}$ . Da alle partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq k$  auf  $D_k$  verschwinden, gilt dies insbesondere für jene der Ordnung 1 von  $g_0 = f \circ h^{-1}|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}}$  auf  $h(U_x \cap D_k)$ . Somit ist  $h(U_x \cap D_k)$  in der Menge der kritischen Punkte von  $g_0$  enthalten und nach Induktionsannahme  $f(U_x \cap D_k) = g_0(h(U_x \cap D_k))$  eine Lebesgue-Null-Menge und damit auch  $f(D^k \setminus D^{k+1})$  eine.

Für  $k > \frac{m}{n} - 1$  ist  $f(D_k)$  eine Lebesgue-Null-Menge:

Es sei  $Q$  ein Würfel der Seitenlänge  $a$ . Aus der Taylor-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(x+th)(h, \dots, h) dt \right| \\ &\leq \underbrace{\sup \left\{ \|f^{(k+1)}(x)\| : x \in Q \right\}}_{=: \tau} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} dt |h|^{k+1} \leq \tau |h|^{k+1} \end{aligned}$$

für alle  $x \in D_k \cap Q$ . Wir zerlegen  $Q$  in  $N^m$  Würfel der Seitenlänge  $\frac{a}{N}$ . Sei  $Q'$  so ein Teilwürfel, der einen Punkt  $x \in D_k$  enthält. Dann ist jeder Punkt in  $Q'$  von der Form  $x+h$  mit  $|h| \leq \frac{a}{N}$  und somit ist  $f(Q')$  enthalten in einem Würfel der Kantenlänge  $2\tau \left(\frac{a}{N}\right)^{k+1}$ . Alle diese Würfel zusammen haben Gesamtvolumen höchstens  $N^m \frac{(2\tau a^{k+1})^n}{N^{(k+1)n}}$  und für  $(k+1)n > m$  konvergiert dieser Ausdruck gegen Null für  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 11.18 Retraktionssatz.

Es gibt keine stetige Retraktion  $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} \rightarrow S^{n-1}$ .

Unter einer RETRAKTION  $f$  auf eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  versteht man eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  welche  $f|_Y = \text{id}$  erfüllt. Mehr der Anschauung entsprechend ist eine DEFORMATIONSRETRAKT von  $Y$  auf  $X$ , d.h. eine stetige Abbildung  $F : [0, 1] \times X \rightarrow X$ , mit folgenden Eigenschaften:

- $\forall t \in [0, 1] \forall y \in Y : F(t, y) = y$ .
- $\forall x \in X : F(0, x) = x$ .
- $\forall x \in X : F(1, x) \in Y$ .

Wenn wir mit  $F_t : X \rightarrow X$  die Abbildung  $F_t(x) := F(t, x)$  bezeichnen, so ist also  $F_t|_Y = \text{id}_Y$ ,  $F_0 = \text{id}_X$  und  $F_1 : X \rightarrow Y$  eine Retraktion.

Umgekehrt können wir aus einer Retraktion  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$  eine Deformationsretrakt  $F(t, x) := (1 - t)x + tf(x)$  machen.

**Beweis.** Angenommen  $f$  wäre eine Retraktion.

*Wir wollen zuerst zeigen, daß  $f$  o.B.d.A.  $C^\infty$  ist:*

Aus  $f$  erhalten wir eine Retraktion  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$ , die  $C^\infty$  in einer Umgebung von  $S^{n-1}$  ist, z.B.

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x/|x|) = x/|x| & \text{für } 1/2 \leq |x| \\ f(2x) & \text{für } |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

Nach der Aufgabe [98, EX5] (oder dem Satz von Stone-Weierstraß) existiert eine glatte Funktion  $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\|f_2 - f_1\|_\infty < 1$ . Sei nun

$$h \in C^\infty(\mathbb{R}^m, [0, 1]) \text{ mit } h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

und  $f_3(x) := (1 - h(x))f_1(x) + h(x)f_2(x)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |f_3(x) - f_1(x)| &= h(x) \cdot |f_2(x) - f_1(x)| \leq |f_2(x) - f_1(x)| < 1 = |f_1(x)| \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_3(x) \neq 0 \text{ für alle } x \text{ und } f_3(x) = f_1(x) = x/|x| \text{ für } |x| \geq 1. \end{aligned}$$

Schließlich ist  $f_4(x) := f_3(x)/|f_3(x)|$  die gesuchte  $C^\infty$ -Retraktion. Wir nennen diese wieder  $f$ .

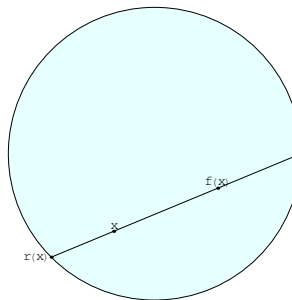
Nach dem Satz [11.15] von Sard existiert ein regulärer Wert  $y \in S^{n-1}$  von  $f$  und somit ist  $M := f^{-1}(y)$  eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und  $y \in M \cap S^{n-1}$ . Es sei  $z \in M$  ein weiterer Schnittpunkt der Zusammenhangskomponente von  $y$  in  $M$  mit  $S^{n-1}$  (Ein solcher existiert klarerweise, falls die Zusammenhangskomponente diffeomorph zu  $S^1$  ist, und andernfalls ist sie diffeomorph zu  $\mathbb{R}$  (siehe [82, 7.6.12]) muß also  $\mathbb{D}^n$  wieder verlassen, denn  $f^{-1}(y) \cap \mathbb{D}^n$  ist kompakt). Dann ist  $f(z) = z \neq y$  ein Widerspruch zu  $z \in f^{-1}(y)$ .  $\square$

**11.19 Brouwer’s Fixpunktsatz.**

*Jedes stetige  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  hat mindestens einen Fixpunkt.*

**Beweis.**

Angenommen  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  hat keinen Fixpunkt. Dann ist  $r : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$  definiert dadurch, daß  $x \in \mathbb{D}^n$  auf dem Schnittpunkt der Geraden von  $f(x)$  nach  $x$  mit  $S^{n-1}$  der  $x$  näher liegt abgebildet wird eine stetige Retraktion, im Widerspruch zu [11.18].  $\square$



Explizit ist  $r$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} r(x) &:= x - \lambda(f(x) - x), \text{ wobei } \lambda \geq 0 \text{ und} \\ 0 &= |r(x)|^2 - 1 = \lambda^2|f(x) - x|^2 - 2\lambda\langle x|f(x) - x \rangle + |x|^2 - 1, \\ \text{d.h. } \lambda &= \frac{\langle x|f(x) - x \rangle + \sqrt{\langle x|f(x) - x \rangle^2 + |f(x) - x|^2(1 - |x|^2)}}{|f(x) - x|^2}. \end{aligned}$$

## 12. Submersionen

### 12.1 Proposition (Charakterisierung von Submersionen).

Sei  $f \in C^\infty(M, N)$ , dann gilt

$f$  ist Submersion  $\Leftrightarrow f$  besitzt lokale Schnitte.

(D.h.  $\forall x \in M \exists U_{f(x)} \subseteq N \exists g^x \in C^\infty(U_{f(x)}, M) : g^x(f(x)) = x$  und  $f \circ g^x = \text{id}$  auf  $U_{f(x)}$ , also dort, wo  $g^x$  definiert ist. Lokal gibt es also ein Rechtsinverses.)

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Nach dem Rangsatz [11.2](#) existieren Karten  $\varphi$  um  $x$  und  $\psi$  um  $f(x)$ , sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f} & \text{Bild } \psi \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \cong \mathbb{R}^m \supseteq \text{Dom } \varphi & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \text{Dom } \psi \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Dabei ist  $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Projektion. Setzen wir jetzt  $U_{f(x)} := \text{Bild}(\psi)$  und  $g^x := \varphi \circ \text{incl}_1 \circ \psi^{-1}$ , dann ist  $g^x$  glatt mit  $g^x(f(x)) = x$  und

$$f \circ g^x = f \circ \varphi \circ \text{incl}_1 \circ \psi^{-1} = \psi \circ \text{pr}_1 \circ \text{incl}_1 \circ \psi^{-1} = \text{id}_{U_{f(x)}}.$$

( $\Leftarrow$ ) Seien  $U_{f(x)}$  und  $g^x$  wie vorausgesetzt, dann gilt:

$$T_{f(x)} \text{id} = \text{id}_{T_{f(x)}N} = T_{f(x)}(f \circ g^x) = T_x f \circ T_{f(x)} g^x \Rightarrow T_x f \text{ ist surjektiv.} \quad \square$$

### 12.2 Folgerung (Submersionen sind offen und final).

Jede Submersion  $f : M \rightarrow N$  ist eine offene Abbildung. Jede surjektive Submersion  $f$  ist zusätzlich final.

**Beweis.**  $f$  ist offen: Sei dazu  $U \subseteq M$  offen und  $y \in f(U)$ , also  $y := f(x)$  für ein  $x \in U$ . Nach [12.1](#)  $\exists U_y$  und  $g^x : U_y \rightarrow M$  mit  $g^x(y) = x$  und  $f \circ g^x = \text{id}_{U_y}$ . O.B.d.A. sei  $U_y \subseteq (g^x)^{-1}(U) \Rightarrow U_y = (f \circ g^x)(U_y) \subseteq f(U) \Rightarrow f(U)$  ist offen.

$f$  ist final: Sei dazu  $g : N \rightarrow P$ , sodaß  $g \circ f$  glatt ist. Da  $f$  surjektiv ist, gibt es zu  $y \in N$  ein  $x \in M$  mit  $f(x) = y$ , dazu haben wir nach [12.1](#) noch  $U_y$  und das glatte  $g^x : U_y \rightarrow M$  zur Verfügung, sodaß

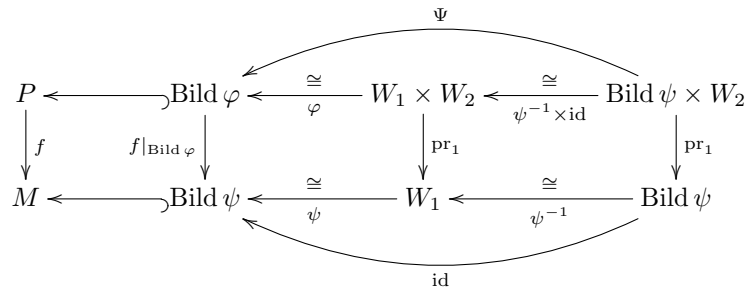
$$f \circ g^x = \text{id}_{U_y} \Rightarrow g|_{U_y} = g \circ (f \circ g^x) = (g \circ f) \circ g^x \text{ glatt ist,}$$

also ist auch  $g$  glatt.  $\square$

## 13. Faserbündel

Nach dem Rangsatz [11.2](#) lassen sich für submersive Abbildungen  $f : P \rightarrow M$  Karten  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \supseteq W_1 \times W_2 \rightarrow P$  und  $\psi : W_1 \rightarrow M$  so finden, daß die Kartendarstellung von  $f$  gegeben ist durch  $\text{pr}_1 : W_1 \times W_2 \rightarrow W_1$ . Die Zusammensetzung  $\Psi := \varphi \circ (\psi^{-1} \times \text{id}) : \text{Bild } \psi \times W_2 \rightarrow W_1 \times W_2 \rightarrow \text{Bild } \varphi$  ist dann ein

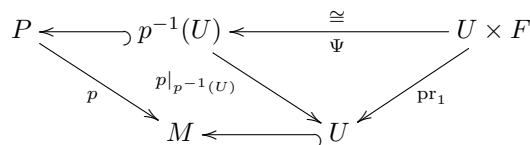
Diffeomorphismus s.d.  $f \circ \Psi = \text{pr}_1$ :



Eine stärkere Eigenschaft von Abbildungen  $f$  werden wir jetzt kennenlernen:

**13.1 Definition (Faserbündel).**

Eine glatte Abbildung  $p : P \rightarrow M$  heißt FASERBÜNDEL  $:\Leftrightarrow p$  ist lokal trivial, d.h.  $\forall y \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  und eine TRIVIALISIERUNG  $\Psi$  von  $p$  über  $U$ , d.h. eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $F$  sowie ein Diffeomorphismus  $\Psi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ , sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

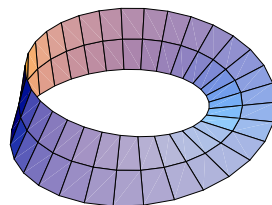


dabei heißt  $F$  TYPISCHE FASER (Auf Zusammenhangskomponenten von  $M$  sind alle Fasern diffeomorph).

Eine ÜBERLAGERUNG ist ein Faserbündel  $p$  mit diskreter typischer Faser  $F$ . Dies ist die glatte Version der Definition, die wir in [86, 3.7] und in [91, 6.1] verwendet haben.

**13.2 Beispiele von Faserbündeln.**

1. Für zwei Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $F$  ist  $\text{pr}_1 : M \times F \rightarrow M, (x, y) \mapsto x$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $F$ . So geartete Faserbündel heißen GLOBAL TRIVIAL (oder kurz trivial).
2. Die Projektion  $\text{Möb} \rightarrow S^1$  des Möbiusbandes auf die Mittellinie ist ein nicht global triviales Faserbündel mit typischer Faser  $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ .

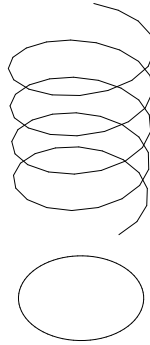


3. Die Hopffaserung:  $S^3 \rightarrow S^2$  ist ein Faserbündel mit typischer Faser  $S^1$ , siehe 3.7.



Beispiele von Überlagerungen sind:

4. Die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  gegeben durch  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  ist eine abzählbarblättrige Überlagerung.



5. Folgende Abbildung  $\mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \text{Möb}$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1 + t \cos \varphi) \cos(2\varphi) \\ (1 + t \cos \varphi) \sin(2\varphi) \\ t \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ist eine abzählbarblättrige Überlagerung. Dies faktorisiert über

$$\mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow S^1 \times (-1, 1), \quad (\varphi, t) \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi, t)$$

zu einer zweiblättrigen Überlagerung des Möbiusbandes durch den Zylinder  $S^1 \times (-1, 1)$ :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} \times (-1, 1) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ S^1 \times (-1, 1) & \xrightarrow{\quad} & \text{Möb} \\ (x, y, t) \mapsto & \left( (1 + tx)(x^2 - y^2), (1 + tx)2xy, ty \right) & \end{array}$$

6.  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ ,  $x \mapsto \mathbb{R} \cdot x$  ist eine zweiblättrige Überlagerung, siehe Aufgabe [86, 72.53].
7.  $S^3 \rightarrow SO(3)$  und  $S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$  sind zweiblättrige Überlagerungen, siehe [4.8] bzw. Aufgabe [86, 72.66] und [86, 72.67].

## IV. Vektorfelder

Gewöhnliche Differentialgleichungen werden auf Mannigfaltigkeiten durch Vektorfelder beschrieben. Um von der Glattheit jener sprechen zu können, benötigen wir das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit bzw. besser als Vektorbündel und diese beiden Dinge stellen wir in den ersten beiden Abschnitten bereit. Die nächsten beiden sind den Differentialgleichungen und ihren Lösungen, den lokalen Flüssen, gewidmet. Es wird dann die Lie-Klammer als Obstruktion gegen das Vertauschen der lokalen Flüsse zweier Vektorfelder behandelt. Schließlich folgt noch die Verallgemeinerung zu Integralmannigfaltigkeiten von Teilvektorbündeln und der zentrale Satz von Frobenius über deren Existenz.

### 14. Tangentialbündel

#### 14.1 Motivation.

Wir wollen gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung auf Mannigfaltigkeiten behandeln. Dazu betrachten wir zuerst den klassischen Fall: Ist eine Differentialgleichung  $x'(t) = f(x(t))$  gegeben, wobei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen ist, so erhält man als Lösung zur Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  eine lokal definierte differenzierbare Kurve  $x : (a, b) \rightarrow U$ .

Wir wollen nun  $U$  durch eine Mannigfaltigkeit  $M$  ersetzen. Als Lösungskurve  $x : (a, b) \rightarrow M$  sollten wir wohl eine differenzierbare Kurve in der Mannigfaltigkeit erhalten. Deren Ableitung  $x'(t)$  an der Stelle  $t$  ist ein Tangentialvektor in  $T_{x(t)}M$ . Die die Differentialgleichung konstituierende Funktion  $f$  muß folglich Punkte  $x \in M$  auf Tangentialvektoren in diesen Punkten abbilden:

$$f : M \ni p \mapsto f(p) \in T_pM, \quad \text{d.h.} \quad f : M \rightarrow \bigsqcup_{p \in M} T_pM,$$

wobei  $\bigsqcup_{p \in M} T_pM$  die disjunkte Vereinigung aller  $T_pM$  mit  $p \in M$  bezeichnet.

#### 14.2 Definition (Tangentialbündel).

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit, so ist der TANGENTIALRAUM von  $M$  definiert durch:

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM.$$

Auf  $TM$  definiert  $\pi_M : \{p\} \times T_pM \ni (p, v) \mapsto p \in M$  die sogenannte FUSSPUNKTABBILDUNG. Jedes glatte  $f : M \rightarrow N$  induziert eine Abbildung  $Tf : TM \rightarrow TN$ , die sogenannte TANGENTIALABBILDUNG von  $f$ , die durch  $(Tf)(p, v) := (f(p), T_p f(v))$  mittels der TANGENTIALABBILDUNG  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  von  $f$  bei  $p$  definiert ist. Es ist also

$$Tf|_{T_p M} = T_p f : T_p M \cong \{p\} \times T_p M \xrightarrow{Tf} \{f(p)\} \times T_{f(p)} N \cong T_{f(p)} N$$

auf den Fasern  $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_p M \cong T_p M$  von  $\pi$  linear.



Seien  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow P$  glatt, dann nimmt die Kettenregel aus [10.4](#) die sehr einfache Gestalt

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$$

an, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} (T(g \circ f))(x, v) &= \left( (g \circ f)(x), T_x(g \circ f)(v) \right) \\ &\stackrel{\text{10.4}}{=} \left( g(f(x)), T_{f(x)}g((T_x f)(v)) \right) \\ (Tg \circ Tf)(x, v) &= Tg(Tf(x, v)) = Tg(f(x), T_x f(v)) \\ &\stackrel{\text{10.4}}{=} \left( g(f(x)), T_{f(x)}g((T_x f)(v)) \right) \end{aligned}$$

Weiters gilt  $T \text{id}_M = \text{id}_{TM}$  und  $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$  für Diffeomorphismen  $f$ .

### 14.3 Bemerkungen.

Um von  $f : M \rightarrow TM$  schöne Eigenschaften (insbesondere Differenzierbarkeit) fordern zu können, brauchen wir eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$ .

Sei dazu vorerst  $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, dann ist  $T_p M = \mathbb{R}^m$  und somit

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathbb{R}^m = M \times \mathbb{R}^m.$$

Für glatte Abbildungen  $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  ist die Tangentialabbildung  $Tf : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$(Tf)(x, v) = (f(x), f'(x)(v)).$$

Sei nun  $M$  eine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow W \cap M$  eine lokale Parametrisierung. Es ist

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \subseteq M \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}.$$

und  $T\varphi : \mathbb{R}^{2m} \supseteq U \times \mathbb{R}^m = TU \rightarrow TM$ ,  $(x, v) \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x)(v))$  ist eine lokale Parametrisierung von  $TM$ : Sie ist auf der offenen Teilmenge  $TU$  des  $\mathbb{R}^{2m}$  definiert und dort klarerweise  $C^\infty$ . Weiters ist ihre Ableitung an der Stelle  $(x, v) \in TU = U \times \mathbb{R}^m$  in Richtung  $(w, h) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  gegeben durch

$$(T\varphi)'(x, v)(w, h) = (\varphi'(x)(w) + 0, \varphi''(x)(w, v) + \varphi'(x)(h)).$$

Die Jacobi-Matrix von  $T\varphi$  bei  $(x, v)$  ist somit:

$$\begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ \varphi''(x)(-, v) & \varphi'(x) \end{pmatrix}.$$

Da  $\varphi$  regulär ist, ist  $\varphi'(x)$  injektiv und somit auch die Jacobi-Matrix von  $T\varphi$ , d.h.  $T\varphi$  ist regulär.

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und seien  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow M$  sowie  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow N$  lokale Parametrisierungen und somit nach dem eben Gezeigten  $T\varphi$  und  $T\psi$  lokale Parametrisierungen von  $TM$  und  $TN$ . Die lokale Darstellung von  $Tf$  bezüglich dieser Parametrisierungen ist:

$$(T\psi)^{-1} \circ Tf \circ T\varphi = T(\psi^{-1}) \circ Tf \circ T\varphi = T(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi).$$

Da die lokale Darstellung  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  von  $f$  glatt ist, gilt gleiches auch für die von  $Tf$ , also ist auch  $Tf$  glatt.

Falls nun  $M$  schließlich eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist, dann sollten wir mittels der Karten  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow M$  von  $M$  einen glatten Atlas  $\{T\varphi : TU = U \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM\}$  von  $TM$  definieren können. In der Tat zeigt die selbe Rechnung wie eben für  $f = \text{id}_M$ , daß der Kartenwechsel  $(T\psi)^{-1} \circ T\varphi = T(\psi^{-1} \circ \varphi)$  glatt ist.

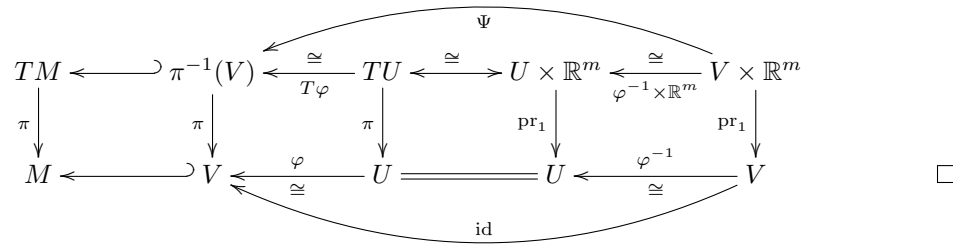
**14.4 Lemma (Tangentialbündel als Faserbündel).**

Für jede Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $TM \xrightarrow{\pi} M$  ein Faserbündel.

**Beweis.** Wir müssen lokale Trivialisierungen von  $TM \xrightarrow{\pi} M$  finden. Sei dazu  $\varphi : U \rightarrow M$  eine Karte von  $M$ . Dann ist  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von  $M$  und  $T\varphi : U \times \mathbb{R}^m = TU \rightarrow TM$  ist eine Karte von  $TM$  nach 14.3. Das Bild von  $T\varphi$  ist

$$\begin{aligned} \text{Bild}(T\varphi) &= \{(x, v) \in TM : x \in \text{Bild } \varphi =: V, v \in T_x M\} \\ &= \{(x, v) \in TM : x \in V\} = \pi_M^{-1}(V). \end{aligned}$$

Eine Trivialisierung  $\Psi := T\varphi \circ (\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m)$  von  $\pi$  über  $V$  ist nun durch folgendes Diagramm gegeben:

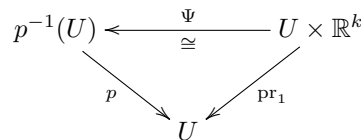


**Bemerkung.**

Wir haben noch eine zusätzliche Struktur auf  $TM$ , denn die Fasern  $T_x M = \pi^{-1}(x)$  sind Vektorräume und  $T_0\varphi : \mathbb{R}^m = T_0\mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$  ist linear.

**14.5 Definition (Vektorbündel).**

Ein Faserbündel  $p : E \rightarrow M$  heißt VEKTORBÜNDEL (VB), falls alle Fasern  $p^{-1}(x) =: E_x$  Vektorräume sind und für jedes  $x_0 \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  sowie eine lokale Trivialisierung  $\Psi$  existiert,



die faserweise linear ist, d.h.  $\Psi_x := \Psi(x, \cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$  ist linear für jedes  $x \in U$ . So eine lokale Trivialisierung heißt dann VEKTORBÜNDELKARTE.

Unter einem Vektorbündel  $E \rightarrow M$  kann man sich eine Familie  $\{E_x : x \in M\}$  von Vektorräumen vorstellen, welche durch  $M$  in einen gewissen Sinn glatt parametrisiert ist.

**14.6 Satz (Tangentialbündel als Vektorbündel).**

Das Tangentialbündel  $TM \rightarrow M$  jeder Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Vektorbündel.

**Beweis.** Sei  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \xrightarrow{\cong} V \subseteq M$  eine lokale Parametrisierung von  $M$ . Dann erhalten wir nach [14.4](#) eine lokale Trivialisierung  $\Psi$  von  $TM$  als oberste Zeile des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Psi & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 TM|_V & \xleftarrow[\cong]{T\varphi} & U \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow[\cong]{\varphi \times \text{id}} & V \times \mathbb{R}^m \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 V & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & U & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & V \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & \text{id} & & 
 \end{array}$$

Bleibt zu zeigen, daß  $v \mapsto \Psi(x, v)$  von  $\mathbb{R}^m \rightarrow \{x\} \times T_x M \cong T_x M$  linear ist. Diese Abbildung

$$v \mapsto (x, v) \xrightarrow{\varphi^{-1} \times \text{id}} (\varphi^{-1}(x), v) \xrightarrow{T\varphi} (\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{=x}, T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi \cdot v) \mapsto T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi \cdot v$$

ist aber  $T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi$  und somit klarerweise linear.  $\square$

### 14.7 Bemerkungen.

1. Zu zwei Vektorbündelkarten  $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U)$  und  $\psi_V : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(V)$  ist der Vektorbündelkartenwechsel

$$\psi_V^{-1} \circ \psi_U : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U \cap V) \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

von der Form

$$(x, v) \mapsto \left( \underbrace{(\text{pr}_1 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v)}_{=x}, \underbrace{(\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v)}_{=: \psi_{UV}(x) \cdot v} \right).$$

Die wesentliche Komponente  $(\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U) : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  haben wir dabei durch  $\psi_{UV} := (\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)^\vee : U \cap V \rightarrow L(k, k)$  beschrieben (beachte dabei, daß  $\psi_V^{-1} \circ \psi_U$  faserweise linear ist). Diese Abbildung  $\psi_{UV}$  heißt TRANSITIONSFUNKTION. Sie hat Werte in  $GL(k) \subseteq L(k, k)$ , denn die Inverse zu  $\psi_{UV}(x)$  ist  $\psi_{UV}(x)$ .

2. Im Falle des Tangentialbündels  $TM \rightarrow M$  erhalten wir Transitionsfunktionen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \psi_i(x, v) &:= (x, T_{\varphi_i^{-1}(x)}\varphi_i \cdot v) \quad \Rightarrow \\
 \psi_i^{-1}(x, w) &:= (x, (T_{\varphi_i^{-1}(x)}\varphi_i)^{-1} \cdot w) \quad \Rightarrow \\
 (x, \psi_{i,j}(x)(v)) &:= (\psi_i^{-1} \circ \psi_j)(x, v) = \psi_i^{-1}(x, T_{\varphi_j^{-1}(x)}\varphi_j \cdot v) \\
 &= \left( x, (T_{\varphi_i^{-1}(x)}\varphi_i)^{-1} \cdot T_{\varphi_j^{-1}(x)}\varphi_j \cdot v \right) \\
 &= \left( x, T_{\varphi_j^{-1}(x)}(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j) \cdot v \right) \quad \Rightarrow \\
 \psi_{i,j}(x) &= T_{\varphi_j^{-1}(x)}(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j) = (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\varphi_j^{-1}(x)) \quad \Rightarrow \\
 \psi_{i,j} &= (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)' \circ \varphi_j^{-1}.
 \end{aligned}$$

Also sind diese Transitionsfunktionen im wesentlichen die Ableitung des Kartenwechsels  $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$  von  $M$ .

3. Die Transitionsfunktionen erfüllen allgemein die Kozykel-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \psi_{U_3 U_2}(x) \circ \psi_{U_2 U_1}(x) &= \psi_{U_3 U_1}(x) \quad \text{für alle } x \in U_1 \cap U_2 \cap U_3 \\
 \psi_{UU}(x) &= \text{id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{für alle } x \in U
 \end{aligned}$$

4. Nach Konstruktion ist die Abbildung  $\hat{\psi}_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $\hat{\psi}_{UV} : (x, v) \mapsto \psi_{VU}(x) \cdot v$  glatt. Und wir behaupten nun, daß dies dazu äquivalent ist, daß  $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k) \subseteq L(k, k)$  selbst glatt ist. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit  $ev$  die glatte (da bilineare) Evaluationsabbildung  $ev : L(k, k) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k, (A, v) \mapsto A \cdot v$ .

( $\Leftarrow$ ) gilt, da

$$\hat{\psi}_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi_{VU} \times \mathbb{R}^k} L(k, k) \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{ev} \mathbb{R}^k$$

( $\Rightarrow$ ) Es ist  $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow L(k, k) C^\infty$ , falls  $ev_y \circ \psi_{VU}$  glatt ist  $\forall y \in \mathbb{R}^k$ , wobei  $ev_y : L(k, k) \rightarrow \mathbb{R}^k, T \mapsto T(y)$  bezeichnet. Das ist der Fall, denn

$$\begin{aligned} (ev_y \circ \psi_{VU})(x) &= \psi_{VU}(x) \cdot y = \hat{\psi}_{UV}(x, y) \\ \Rightarrow ev_y \circ \psi_{VU} &= \hat{\psi}_{UV}(-, y) \text{ ist } C^\infty \quad \forall y. \end{aligned}$$

5. Sei nun  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $p : E \rightarrow M$  eine auf einer Menge  $E$  definierte Abbildung so, daß eine Familie von faserstreuen (d.h.  $p \circ \psi_U = \text{pr}_1$ ) bijektiven Abbildungen  $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U)$  existiert, wobei die  $U$  eine offene Überdeckung von  $M$  bilden und die zugehörigen Transitionsfunktionen  $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k)$  wohldefiniert und glatt sind.

Dann können wir  $E$  auf eindeutige Weise zu einer Mannigfaltigkeit machen, sodaß  $p : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit Vektorbündelkarten  $\psi_U$  wird.

Als Parametrisierungen von  $E$  können wir  $\psi_U \circ (\varphi \times \mathbb{R}^k)$  verwenden, wobei die  $\psi_U$  die gegebenen faserstreuen Abbildungen und  $\varphi$  Karten von  $M$  sind.

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xleftarrow{\psi_U} & p^{-1}(U) & \xleftarrow{\psi_U} & U \times \mathbb{R}^k & \xleftarrow{\varphi \times \mathbb{R}^k} & W \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\ p \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_1 \\ M & \xleftarrow{\psi_U} & U & \xleftarrow{\psi_U} & U & \xleftarrow{\varphi} & W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m \end{array}$$

Die Kartenwechselabbildungen von  $E$  sind dann

$$(\psi_V \circ (\varphi_2 \times \mathbb{R}^k))^{-1} \circ (\psi_U \circ (\varphi_1 \times \mathbb{R}^k)) = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1, \hat{\psi}_{VU} \circ (\varphi_1 \times \mathbb{R}^k)).$$

Nach Konstruktion sind die  $\psi_U$  Faserbündelkarten und wir können die Fasern  $E_x$  vermöge diesen zu Vektorräumen machen und zwar so, daß die  $\psi_U$  faserlinear werden.

6. Aus [\[6.7\]](#) wissen wir, daß sich eine Mannigfaltigkeit aus ihren Kartenwechseln zurückgewinnen läßt. Bei Transitionsfunktionen eines VB haben wir eine ähnliche Situation: Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Ein Kozykel von Transitionsfunktionen, d.h. eine Familie von glatten Funktionen  $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k)$  für  $U, V \in \mathcal{U}$ , welche die Kozykel-Gleichungen [\(3\)](#) erfüllt, definiert ein bis auf Isomorphie eindeutiges Vektorbündel.

Um das zu zeigen, definieren wir:  $E_x := \{(U, w) : x \in U \in \mathcal{U}, w \in \mathbb{R}^k\} / \sim$ , wobei

$$(U, w) \sim (V, w') \Leftrightarrow w' = \psi_{VU}(x) \cdot w.$$

Es ist  $E_x$  ein Vektorraum mit  $\psi_U(x) : w \mapsto [(U, w)]$ , ein Vektorraum-Isomorphismus  $\mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ . Die disjunkte Vereinigung

$$E := \bigsqcup_{x \in M} E_x := \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times E_x)$$

ist ein Vektorbündel über  $M$  mit der Fußpunktabbildung  $p : E \ni (x, v) \mapsto x \in M$ , denn  $E|_U := p^{-1}(U) = \bigsqcup_{x \in U} E_x \cong U \times \mathbb{R}^k$  vermöge der Trivialisierung  $\psi_U$

definiert durch  $\psi_U(x, w) := (x, [(U, w)])$ . Für den Kartenwechsel gilt:

$$\begin{aligned}
 (\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, w) &= (x, w') \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x, [(V, w')]) = \psi_V(x, w') = \psi_U(x, w) = (x, [(U, w)]),
 \end{aligned}$$

also  $w' = \psi_{VU}(x) \cdot w$ .

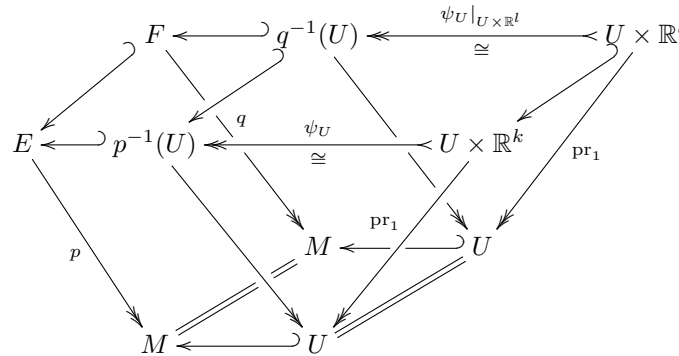
**14.8 Definition (Vektorbündelhomomorphismen).**

Sind  $p : V \rightarrow M$  und  $q : W \rightarrow N$  Vektorbündel, so heißt eine glatte Funktion  $\bar{f}$  VEKTORBÜNDELHOMOMORPHISMUS über  $f : M \rightarrow N$ , falls folgendes Diagramm kommutiert und  $\bar{f}_x : V_x \rightarrow W_{f(x)}$  linear ist  $\forall x \in M$ .

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\bar{f}} & W \\
 p \downarrow & & \downarrow q \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

**14.9 Definition (Teilvektorbündel).**

Es seien  $p : E \rightarrow M, q : F \rightarrow M$  zwei Vektorbündel, sodaß  $F_x$  Teilvektorraum von  $E_x$  ist  $\forall x \in M$ . Dann heißt  $q : F \rightarrow M$  TEILVEKTORBÜNDEL von  $p : E \rightarrow M$ , falls zu  $E$  ein VB-Atlas  $\{\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U)\}$  existiert, der  $U \times \mathbb{R}^l \subseteq U \times \mathbb{R}^k$  auf  $F|_U$  für ein  $l \leq k$  abbildet, d.h.  $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U = p^{-1}(U)$  und  $\psi|_{(U \times \mathbb{R}^l)} : U \times \mathbb{R}^l \cong F|_U = q^{-1}(U)$ .



Das bedeutet, daß  $\psi_U(x)$  den “konstanten” Teilraum  $\mathbb{R}^l$  genau auf  $F_x$  abbildet.

**15. Vektorfelder**

**15.1 Definition (Schnitte von Bündeln).**

Unter einem SCHNITT  $\sigma$  EINES VEKTORBÜNDELS (oder Faserbündels)  $E \xrightarrow{p} M$  versteht man eine Abbildung  $\sigma : M \rightarrow E$ , welche  $p \circ \sigma = \text{id}_M$  erfüllt. Die Schnitte des Tangentialbündels  $TM \rightarrow M$  heißen VEKTORFELDER (VF) auf der Mannigfaltigkeit  $M$ .

Den RAUM DER GLATTEN SCHNITTE  $\{\sigma \in C^\infty(M, E) : p \circ \sigma = \text{id}\}$  bezeichnet man mit  $C^\infty(M \xleftarrow{p} E)$  und auch mit  $\Gamma(E \xrightarrow{p} M)$  oder kurz mit  $\Gamma(E)$ , wenn die Fußpunktabbildung klar ist.

Die Menge aller GLATTEN VEKTORFELDER auf  $M$  bezeichnen wir auch mit

$$\mathfrak{X}(M) := C^\infty(M \xleftarrow{\pi_M} TM).$$

Schnitte können addiert und mit reellwertigen Funktionen  $f$  auf  $M$  punktweise multipliziert werden. Somit ist  $C^\infty(M \leftarrow^p E)$  ein Vektorraum und sogar ein MODUL über  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ , also ein “Vektorraum” über dem Ring  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  (anstatt über einem Körper), d.h. es gilt:

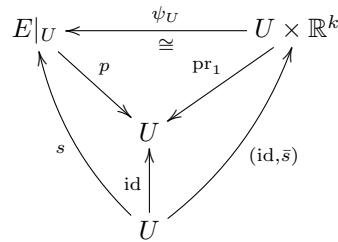
$$\begin{aligned} (f + g)\xi &= f\xi + g\xi, & f(\xi + \eta) &= f\xi + f\eta, \\ (f \cdot g)\xi &= f(g \cdot \xi), & 1 \cdot \xi &= \xi \end{aligned}$$

Wir wollen mit Vektorfeldern oder allgemeiner mit Schnitten von Vektorbündeln konkret rechnen. Dazu benötigen wir lokale Darstellungen.

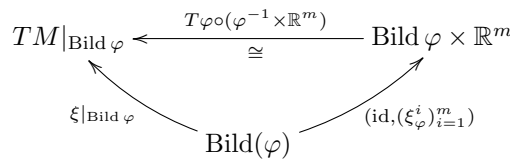
**15.2 Lokale Beschreibung von Schnitten.**

Lokal ist ein Schnitt  $s$  durch eine Abbildung  $\bar{s} = (s^1, \dots, s^k) : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  der Basis  $M$  in die typische Faser  $\mathbb{R}^k$  gegeben.

$$s(x) \longleftarrow \psi_U^{-1}(s(x)) = (x, \bar{s}(x))$$



Speziell für das Tangentialbündel erhalten wir: Dem Vektorfeld  $\xi$  entsprechen lokal Abbildungen  $(\xi_\varphi^i)_{i=1}^m : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ , deren Gestalt von der Wahl der Karte  $\varphi$  abhängt:



Wir haben in [10.8](#) gesehen, daß falls  $(u^1, \dots, u^m) = \varphi^{-1}$  lokale Koordinaten auf  $M$  sind, so ist  $(\partial_1^\varphi|_p, \dots, \partial_m^\varphi|_p = \frac{\partial}{\partial u^i}|_p)$  eine Basis von  $T_p M$  für alle  $p$  im Definitionsbereich  $U$  der Karte  $\varphi$  und der Isomorphismus  $T\varphi \circ (\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m)$  bildet die Standardbasis  $(x, e_i)$  auf  $\frac{\partial}{\partial u^i}|_x$  ab. Jedes Vektorfeld  $\xi$  läßt sich also auf  $U$  als  $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_\varphi^i \partial_i^\varphi$  schreiben, wobei  $\partial_i^\varphi$  die Vektorfelder  $p \mapsto \partial_i^\varphi|_p = \frac{\partial}{\partial u^i}|_p$  sind. Der Index  $\varphi$  der Komponenten  $\xi_\varphi^i$  von  $\xi$  bezüglich der Basis  $\partial_i^\varphi$  deutet die Abhängigkeit dieser Komponenten von der Basis an, die ja wiederum von  $\varphi$  abhängt. Zumeist werden wir diesen Index aber, wie allgemein üblich, weglassen. Wir können die Komponenten  $\xi^i$  berechnen, indem wir  $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  auf die lokale Koordinatenfunktion  $u^j$  anwenden:  $\xi(u^j) = (\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i})(u^j) = \sum_i \xi^i \delta_i^j = \xi_j$ . Also ist  $\xi = \sum_i \xi(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i}$ .

**15.3 Folgerung.**

*Ein Vektorfeld  $\xi$  ist genau dann glatt, wenn alle Komponenten  $\xi_\varphi^i$  glatt sind.*

**Beweis.** Dies folgt sofort daraus, daß die lokalen Schnitte  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  glatt sind, was wiederum aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} TM|U & \xleftarrow{T\varphi} & V \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\varphi \times \text{id}} & U \times \mathbb{R}^m \\ \pi|_U \downarrow & & \text{pr}_1 \downarrow & & \text{pr}_1 \downarrow \\ U & \xleftarrow{\varphi} & V & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

folgt, denn dem Schnitt  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  ganz links entspricht rechts der konstante Schnitt  $x \mapsto (x, e^i)$ .  $\square$

**15.4 Beispiele von global (nicht-)trivialen Vektorbündeln.**

1. Das Tangentialbündel von  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  als Teilbündel von  $T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} = S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  ist  $TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle = 0\}$ . Insbesondere ist  $TS^1 = \{(x, y, u, v) : x^2 + y^2 = 1, xu + yv = 0\}$ , also  $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$  mittels  $(x, y, t) \mapsto (x, y, -ty, tx)$ . Somit ist das Tangentialbündel der  $S^1$  trivial, und zwar ist es der Zylinder.
2. Die Projektion: Möbiusband  $\rightarrow S^1$  auf die Mittellinie ist auch ein VB, dessen Faser  $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$  ist.  
Dieses VB ist jedoch nicht trivial, denn andernfalls hätte man eine globale Trivialisierung  $\psi$ :

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow[\cong]{\psi} & \text{Möb} \\ & \searrow & \swarrow \\ & S^1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\psi(-,1)} & \text{Möb} \\ & \searrow & \swarrow \\ & S^1 & \end{array}$$

mit  $\psi(S^1, 1) \cap S^1 := \psi(S^1, 1) \cap \psi(S^1, 0) = \emptyset$ . So eine Abbildung gibt es aber nicht.

3. Auch  $TS^2$  ist ein Vektorbündel. Um die Frage, ob es auch trivial ist, beantworten zu können, nehmen wir an, es gäbe eine Trivialisierung  $\psi : S^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TS^2$ . Mit  $\psi(-, e_1)$  hätte man eine stetige Abbildung, die jedem  $x \in S^2$  einen nichtverschwindenden Tangentialvektor zuordnet, so eine Abbildung existiert aber nicht (Igelsatz 29.11).
4. Da die  $S^3$  eine glatte Gruppenstruktur trägt, ist  $TS^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$  wiederum ein triviales Vektorbündel vermöge der Tangentialabbildung der Linksmultiplikation, siehe 15.9.3.

**15.5 Definition (Linear unabhängige Vektorfelder).**

Eine Familie von Vektorfeldern  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  auf  $M$  heißt (ÜBERALL) LINEAR UNABHÄNGIG, falls  $\{\xi_i|_p : 1 \leq i \leq k\}$  linear unabhängig in  $T_pM$  ist für alle  $p \in M$ .

**15.6 Bemerkung (Parallelisierbare Mannigfaltigkeiten).**

Eine Mannigfaltigkeit  $M$  heißt PARALLELISIERBAR) wenn ihr Tangentialbündel trivial ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn sie  $m := \dim M$  überall linear unabhängige Vektorfelder besitzt: Ist  $TM$  trivial, d.h.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xleftarrow[\cong]{\psi} & M \times \mathbb{R}^m \\ \pi_M \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & M & \end{array}$$

dann sind die  $\xi_i : x \mapsto \psi(x, e_i)$  für  $1 \leq i \leq m$  linear unabhängige Vektorfelder. Umgekehrt definiert  $\psi(x, (v^i)_{i=1}^m) := \sum_i v^i \xi_i(x)$  eine Trivialisierung von  $TM$ , falls  $\{\xi_i\}_{i=1}^m$  linear unabhängig ist.

Z.B. besitzt  $S^1$  ein linear unabhängiges Vektorfeld, da ihr Tangentialbündel trivial ist. Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wieviele linear unabhängige Vektorfelder auf den höherdimensionalen Sphären existieren ("wie trivial also deren Tangentialbündel ist").

### 15.7 Satz (Linear unabhängige Vektorfelder auf den Sphären).

Auf der  $S^n$  können genau dann  $m$  linear unabhängige Vektorfelder gewählt werden, wenn  $n+1 = 2^{4a+b} \cdot c$  mit  $a \in \mathbb{N}_0$ ,  $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ , ungeraden  $c$  und  $m+1 \leq 8 \cdot a + 2^b$  ist.

**Ohne Beweis.** Das Resultat wurde durch [36], [68] und [1] erhalten.

Die Anzahl der linear unabhängigen Vektorfelder auf den Sphären hängt mit der Struktur gewisser Algebren zusammen:

### 15.8 Proposition.

Es sei  $b : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine bilineare Abbildung, sodaß

1. Aus  $b(v, x) = 0$  folgt  $v = 0$  oder  $x = 0$  (Nullteilerfreiheit),
2.  $\exists v_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$ , sodaß  $b(v_0, x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$  (Linkseinheit),

dann existieren  $k$  linear unabhängige Vektorfelder auf der  $S^n$ .

**Beweis.** Sei  $v \in \mathbb{R}^{k+1}$ , dann ist die Abbildung  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $x \mapsto b(v, x)$  linear. Mit den Abbildungen  $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$  (Radialprojektion) und  $\text{incl} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  (kanonische Inklusion), kann ein glattes Vektorfeld  $\xi_v : S^n \rightarrow TS^n$  wie folgt definiert werden:  $\xi_v = T\rho \circ b(v, \cdot) \circ \text{incl}$ . Sind  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  linear unabhängig im  $\mathbb{R}^{k+1}$ , dann sind  $\{\xi_{v_1}, \dots, \xi_{v_k}\}$  linear unabhängig überall: Sei

$$0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_{v_i}|_x = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_x \rho(b(v_i, x)) = T_x \rho \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i b(v_i, x) \right)$$

Der Kern von  $T_x \rho$  ist der von  $x$  erzeugte Teilraum im  $\mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i b(v_i, x) = -\lambda_0 x = -\lambda_0 b(v_0, x) \text{ für ein } \lambda_0 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow b \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, x \right) = 0 \xrightarrow{x \neq 0} \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = 0 \xrightarrow{v_i \text{ l.u.}} \lambda_i = 0 \ \forall i. \quad \square \end{aligned}$$

### 15.9 Folgerungen.

1. Die Sphären  $S^1$ ,  $S^3$  und  $S^7$  sind parallelisierbar:

Als bilineare Funktionen  $b : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , welche die Eigenschaften [1] und [2] von [15.8] erfüllen, können folgende  $\mathbb{R}$ -Algebra-Multiplikationen verwendet werden:

$$n = 1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$n = 3 : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$n = 7 : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}, \text{ wobei } \mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8 \text{ die Cayley-Zahlen}$$

(oder auch Oktaven oder Oktonionen) sind.



Wegen 15.7 sind dies die einzigen parallelisierbaren Sphären, denn aus  $2^{4a+b}$ .  
 $c = 8a + 2^b$  folgt  $c = 1$  und weiter  $a = 0$ , also  $n = 2^b - 1$  für  $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

2. Wenn  $n$  ungerade ist, dann besitzt  $S^n$  ein nichtverschwindendes Vektorfeld. Für  $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , wobei  $n + 1 = 2k$  für  $k \in \mathbb{N}$  ist, kann die Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen verwendet werden:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k, \quad (\lambda; \lambda^1, \dots, \lambda^k) \mapsto (\lambda \cdot \lambda^1, \dots, \lambda \cdot \lambda^k)$$

3. Wenn  $G$  eine Lie-Gruppe mit neutralem Element  $e \in G$  ist, so ist  $TG \cong G \times T_e G$ . Der Isomorphismus ist durch

$$\xi \mapsto (\pi(\xi), TL_{\pi(\xi)^{-1}} \cdot \xi) = (\pi(\xi), T\mu(0_{\pi(xs)^{-1}}, \xi))$$

gegeben, für Details siehe 86, 67.2.

## 16. Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

### 16.1 Definition (Integralkurve).

Es sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $I$  ein offenes Intervall mit  $0 \in I$ . Dann heißt  $c : I \rightarrow M$  (Lösungskurve) INTEGRALKURVE des Vektorfeldes  $\xi$  durch  $p \Leftrightarrow$

$$c(0) = p \quad \text{und} \quad c'(t) = \xi_{c(t)} \quad \text{für } t \in I.$$

Wir werden folgenden üblichen Existenz- und Eindeigkeitssatz für die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Vektorräumen benutzen.

### 16.2 Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen.

Sei  $E$  ein Euklidischer Vektorraum (oder allgemeiner ein Banachraum) und  $f : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  eine glatte Funktion. Dann existiert ein offenes Intervall  $I$  um  $0$  in  $\mathbb{R}$  und eine offene Kugel  $U$  um  $0$  in  $E$ , so daß für alle  $x \in U$  eine eindeutige Lösung  $c_x : I \rightarrow E$  der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$c'_x(t) = f(t, c_x(t)) \quad \text{mit } c_x(0) = x$$

existiert. Weiters ist  $(t, x) \mapsto c_x(t)$  glatt als Abbildung  $I \times U \rightarrow E$ .

**Ohne Beweis.** Siehe z.B. 81, 6.2.15 oder 35, 10.8.1 und 10.8.2.

Damit können wir nun folgende globale Version auf Mannigfaltigkeiten beweisen.

### 16.3 Satz über gewöhnliche Differentialglg. auf Mannigfaltigkeiten.

Sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ , dann gilt:

1. Zu jedem  $p \in M$  existiert eine eindeutig bestimmte maximale Integralkurve  $c_p : (t_-^p, t_+^p) \rightarrow M$  zu  $\xi$  durch  $p$  (d.h. jede andere Integralkurve ist eine Einschränkung von  $c_p$ ).
2. Ist  $t_+^p < \infty$ , dann gilt  $\lim_{t \nearrow t_+^p} c(t) = \infty$ , d.h. für jede kompakte Menge  $K \subseteq M$  ist  $c(t)$  nicht in  $K$  für alle  $t$  hinreichend nahe bei  $t_+^p$ .
3. Die Menge  $U = \{(t, p); t_-^p < t < t_+^p\} \subseteq \mathbb{R} \times M$  ist eine offene Umgebung von  $\{0\} \times M$ . Die Abbildung  $\text{Fl}^\xi : U \rightarrow M$ , definiert durch  $\text{Fl}^\xi(t, p) := c_p(t)$ , ist  $C^\infty$  und heißt der LOKALE FLUSS des Vektorfeldes. Falls  $q := \text{Fl}^\xi(s, p)$  existiert, so existiert  $\text{Fl}^\xi(t + s, p)$  genau dann wenn  $\text{Fl}^\xi(t, q)$  existiert, und die beiden stimmen überein. Diese Gleichung heißt auch EINPARAMETERGRUPPEN-EIGENSCHAFT, denn wenn  $\text{Fl}^\xi$  global definiert ist, dann besagt sie:  $(\text{Fl}^\xi)^\vee : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$  ist ein Gruppen-Homomorphismus.

**Beweis.** (1) **lokale Existenz und Eindeutigkeit:** O.B.d.A. sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatt. Wir suchen ein  $c$  mit  $c'(t) = \xi_{c(t)}$  und  $c(0) = x$ . Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren lokale Lösung nach 16.2 existiert und eindeutig ist, weil  $\xi$  lokal Lipschitz ist. Sie ist  $C^\infty$ , da  $\xi$  glatt ist.

**Globale Existenz und Eindeutigkeit:** Seien  $c_1, c_2$  zwei Integralkurven. Die Menge  $\{t \geq 0 : c_1(t) = c_2(t)\}$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $\text{Dom } c_1 \cap \text{Dom } c_2$ . Angenommen sie stimmt nicht mit dieser überein, dann gibt es ein  $t$  in der Differenz. O.B.d.A. sei  $t > 0$  dann existiert  $t_0 := \inf\{0 < t \in \text{Dom } c_1 \cap \text{Dom } c_2 : c_1(t) \neq c_2(t)\}$ . Klarerweise ist  $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ . Nun sind aber  $t \mapsto c_1(t_0 + t)$  und  $t \mapsto c_2(t_0 + t)$  Integralkurven durch  $c_1(t_0) = c_2(t_0)$  und stimmen somit lokal überein. Das ist ein Widerspruch zur Eigenschaft des Infimums. Somit ist  $c_p := \bigcup\{c : c \text{ ist Integralkurve durch } p\}$  die wohldefinierte eindeutig bestimmte maximale Integralkurve durch  $p$ . Wir setzen  $(t_-^p, t_+^p) := \text{Dom } c_p$ .

(3) Wegen 1 ist  $\{0\} \times M \subset U$  und  $\text{Fl}^\xi(0, p) = c_p(0) = p$ .

Einparametergruppen-Eigenschaft: Es existiere  $q := \text{Fl}(s, p)$ , d.h.  $t_-^p < s < t_+^p$ , da  $r \mapsto \text{Fl}(r, p)$  die maximale Integralkurve mit Anfangswert  $p$  ist und diese ist für  $t_-^p < r < t_+^p$  definiert. Es ist  $t \mapsto \text{Fl}(t, \text{Fl}(s, p))$  die maximale Integralkurve mit Anfangswert  $q$  und somit für  $t_-^q < t < t_+^q$  definiert. Für  $t$  mit  $t_-^p < t + s < t_+^p$  ist auch  $t \mapsto \text{Fl}(t + s, p)$  eine Lösung mit Anfangswert  $q = \text{Fl}(s, p)$ . Also gilt wegen der Maximalität und Eindeutigkeit von  $t \mapsto \text{Fl}(t, q)$  Gleichheit und  $t_-^q \leq t_-^p - s < -s < t_+^p - s \leq t_+^q$ . Insbesondere existiert also  $\text{Fl}(-s, q)$  und stimmt mit  $\text{Fl}(-s + s, p) = p$  überein. Also folgt aus Symmetriegründen, daß  $t_-^p \leq t_-^q + s$  und  $t_+^q + s \leq t_+^p$ . Zusammen ergibt daß  $t_\pm^q = t_\pm^p - s$  und somit existiert  $\text{Fl}(t + s, p)$  genau dann wenn  $\text{Fl}(t, q)$  existiert und die beiden stimmen überein.

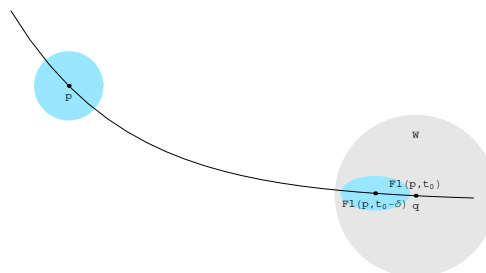
Wir zeigen jetzt, daß  $U \subseteq \mathbb{R} \times M$  offen ist und Fl darauf  $C^\infty$ : Für  $p \in M$  sei

$$I := \{t' \in [0, t_+^p) : \text{Fl ist lokal um } [0, t'] \times \{p\} \text{ definiert und glatt}\}.$$

Wir zeigen indirekt, daß  $I = [0, t_+^p)$  ist (analog geht man für  $t_-^p$  vor):

Angenommen  $I \subset [0, t_+^p)$ . Sei  $t_0 := \inf([0, t_+^p) \setminus I)$  und  $q := \text{Fl}(t_0, p)$ . Für  $p \in M$  existiert nach 16.2 eine offene Umgebung von  $(0, p) \in \mathbb{R} \times M$ , auf welcher der Fluß Fl definiert und glatt ist, somit ist  $t_0 > 0$ .

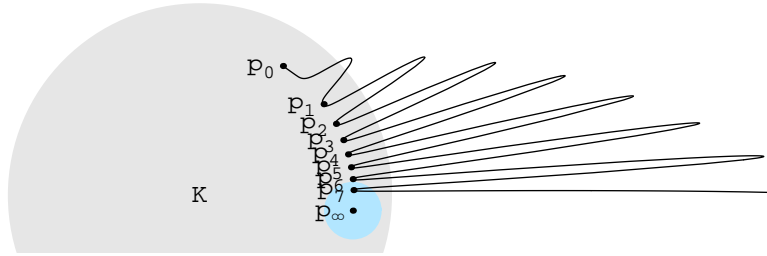
Ebenso ist Fl auf einer Umgebung  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$  von  $(0, q)$  glatt und wegen der Stetigkeit von  $t \mapsto \text{Fl}(t, p)$  bei  $t_0$  existiert ein  $0 < \delta < \varepsilon$  so, daß  $\text{Fl}(t_0 - \delta, p)$  in  $W$  enthalten ist. Nach Konstruktion von  $t_0$  ist Fl auch auf einer Umgebung von  $[0, t_0 - \delta] \times \{p\}$  glatt. Somit bildet  $x \mapsto \text{Fl}(t_0 - \delta, x)$  eine Umgebung von  $p$  glatt nach  $W$  ab und damit ist die Zusammensetzung  $(s, x) \mapsto \text{Fl}(s, \text{Fl}(t_0 - \delta, x))$  auf einer Umgebung von  $[0, \delta] \times \{p\}$  glatt. Wegen der Einparametergruppen-Eigenschaft ist  $\text{Fl}(s, \text{Fl}(t_0 - \delta, x)) = \text{Fl}(s + t_0 - \delta, x)$ , also Fl lokal um  $[t_0 - \delta, t_0] \times \{p\}$  glatt. Insgesamt ist Fl auf einer Umgebung von  $([0, t_0 - \delta] \cup [t_0 - \delta, t_0]) \times \{p\} = [0, t_0] \times \{p\}$  glatt, und damit eine Umgebung von  $t_0$  in  $I$  enthalten, ein Widerspruch zur Annahme.



(2) Sei  $K \subseteq M$  kompakt. Angenommen es existieren  $t_n \rightarrow t_+^p < \infty$ , sodaß  $p_n := c_p(t_n) \in K$  für alle  $n$ . O.B.d.A. gelte  $p_n \rightarrow p_\infty \in K$  (denn  $K$  ist kompakt). Nach (3) existiert ein  $\delta > 0$  so, daß der Fluß  $\text{Fl}(t, q)$  wohldefiniert für  $|t| \leq \delta$  und  $q$  nahe bei  $p_\infty$ . Für  $n$  genügend groß seien  $p_n$  solche Werte für  $q$ , d.h.  $\text{Fl}(t, p_n)$  ist wohldefiniert für  $|t| < \delta$ . Andererseits gilt:

$$\text{Fl}(t, p_n) = \text{Fl}(t, c_p(t_n)) = \text{Fl}(t, \text{Fl}(t_n, p)) = \text{Fl}(t + t_n, p) = c_p(t + t_n).$$

Also ist  $c_p(s)$  wohldefiniert nicht nur für  $0 \leq s < t_+^p$  sondern auch für  $s = t + t_n$  mit  $|t| < \delta$  und  $n$  hinreichend groß, d.h.  $t_n - \delta < s < t_n + \delta$ . Sei  $n$  so groß, daß  $t_n > t_+^p - \delta$ . Dann ist  $c_p$  auf  $[0, t_+^p] \cup (t_n - \delta, t_n + \delta) \supseteq [0, t_+^p]$  wohldefiniert, ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Lösungskurven nur bis vor  $t_+^p$  definiert sind.



□

#### 16.4 Beispiel (Exponentialabbildung).

Für  $T \in L(n, n)$  definiert die Matrixmultiplikation mit  $T$  von links  $T_* : S \mapsto T \circ S$  ein Vektorfeld auf  $L(n, n)$ . Gesucht ist die Lösungskurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow L(n, n)$ , die  $c'(t) = T_*(c(t)) := T \circ c(t)$  mit vorgegebenen  $c(0) = S \in L(n, n)$  erfüllt. Man definiert

$$\exp(T) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$$

und zeigt, daß die Reihe absolut konvergiert. Die Lösung obiger Differentialgleichung mit Anfangswert  $S$  lautet dann  $c(t) = \exp(tT) \circ S$ , und der globale Fluß ist  $\text{Fl}(t, S) = \exp(tT) \circ S$ , siehe Aufgabe [86, 72.50].

#### 16.5 Definition (Vollständige Vektorfelder).

Ein Vektorfeld  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  heißt VOLLSTÄNDIG, wenn  $\text{Fl}^\xi$  global (d.h. auf  $\mathbb{R} \times M$ ) definiert ist.

#### 16.6 Bemerkungen.

1. Aus (16.3.2) folgt direkt:  
Ist  $M$  kompakt, so ist jedes Vektorfeld vollständig.
2. Falls  $M$  eine nichtkompakte Zusammenhangskomponente besitzt, dann existieren nichtvollständige Vektorfelder, z.B.:  $M := \mathbb{R}$ ,  $\xi(x) := 1 + x^2$ , also  $c'(t) = 1 + c(t)^2$ . Zum Anfangswert  $c(0) = 0$  ist dann die Lösung  $c(t) = \tan(t)$  nur für  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$  definiert.

3. Sei  $M := \mathbb{R}^2$ ,  $\xi(x, y) := y \frac{\partial}{\partial x}$  und  $\eta(x, y) := (x^2/2) \frac{\partial}{\partial y}$ . Wir behaupten, daß  $\xi$  und  $\eta$  vollständig sind:

$$\text{Fl}^\xi(t; x, y) = (x + ty, y),$$

$$\text{Fl}^\eta(t; x, y) = (x, y + tx^2/2), \quad \text{denn}$$

$$\frac{d}{dt} \text{Fl}^\xi(t; x, y) = (y, 0) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \xi(\text{Fl}(t; x, y)) \quad \text{und analog für } \eta.$$

Aber  $\xi + \eta$  ist nicht vollständig: Sei  $c(t) = (x(t), y(t))$  eine Lösungskurve von  $(\xi + \eta)|_{(x,y)} = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}$ . Dann ist  $x'(t) = y(t)$  und  $y'(t) = x(t)^2/2$ , d.h.  $\frac{d}{dt} x'(t)^2 = 2x'(t)x''(t) = 2x'(t)y'(t) = x'(t)x(t)^2 = \frac{d}{dt} x(t)^3/3 \Rightarrow x'(t)^2 = x(t)^3/3 + C$ . Löst man die Differentialgleichung mittels Separation der Variablen zum Anfangswert  $y_0^2 = x_0^3/3$  mit  $x_0 > 0$  so ist  $C = 0$  und es zeigt sich, daß  $x(t) = \text{pr}_1(\text{Fl}^{\xi+\eta}(t; x_0, y_0)) = \frac{12x_0}{12-4\sqrt{3x_0t+x_0t^2}}$  nicht global definiert ist.

4. Sei  $\text{Fl}_t^\xi(p) := \text{Fl}^\xi(t, p)$ . Weil für kleine  $t$  der Fluß  $\text{Fl}_t^\xi$  lokal um  $p$  existiert und  $\text{Fl}_{-t}^\xi$  lokal um  $\text{Fl}_t^\xi(p)$  existiert, gilt wegen der 1-Parameteruntergruppen-Eigenschaft  $(\text{Fl}_t^\xi)^{-1} = \text{Fl}_{-t}^\xi$  für alle kleinen  $t$ . Der Fluß  $\text{Fl}_t^\xi$  ist also ein lokaler Diffeomorphismus.

## 17. Lie-Klammer

In [10.6](#) haben wir  $T_p M$  mit  $\text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  identifiziert. So war für lokale Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$  die Wirkung eines Tangentialvektors  $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \in T_p M$  auf  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  gegeben durch:

$$v(f) = \left( \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) (f) = \sum_i v^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (f) \quad \text{und insbesondere}$$

$$v(u^j) = \sum_i v^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) = v^j, \quad \text{denn}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) = \partial_i (u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i (\text{pr}_j)(\varphi^{-1}(p)) = \delta_i^j.$$

Wir wollen nun sehen was passiert, wenn wir den Punkt  $p$  variieren, also folgende Abbildungen betrachten:

### 17.1 Satz (Vektorfelder als Derivationen).

Es gibt eine bilineare Abbildung

$$\mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

$$(\xi, f) \mapsto \xi \cdot f = \xi(f) \quad \left( : p \mapsto \xi_p(f) \in \mathbb{R} \right).$$

Diese bilineare Abbildung induziert einen  $\mathbb{R}$ -linearen Isomorphismus von  $\mathfrak{X}(M)$  mit

$$\text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R})) := \left\{ \partial \in L(C^\infty(M, \mathbb{R})) : \partial(f \cdot g) = \partial(f) \cdot g + f \cdot \partial(g) \right\}.$$

Außerdem gilt:  $(f \cdot \xi) \cdot g = f \cdot (\xi \cdot g)$ , d.h. dieser Isomorphismus ist sogar  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear, wobei  $\text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$  durch  $(f \cdot \partial)(g) := f \cdot \partial(g)$  zu einem Modul über der kommutativen Algebra  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  gemacht wird. Beachte, daß  $\xi \cdot f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  wohingegen  $f \cdot \xi$  das punktweise Produkt in  $\mathfrak{X}(M)$  ist.

**Beweis.** Wir definieren:

$$\xi(f)(x) = (\xi(f))(x) := \xi(x)(f) = (T_x f)(\xi(x)) = (\text{pr}_2 \circ T f \circ \xi)(x).$$

Also ist  $\xi(f) = \text{pr}_2 \circ T f \circ \xi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Die Zuordnung  $(\xi, f) \mapsto \xi(f)$  ist linear in  $\xi$ , da  $T_x f$  linear ist. Sie ist linear in  $f$ , da  $\xi(x) \in \text{Der}_x$ , also linear ist.

Die induzierte Abbildung  $f \mapsto \xi(f)$  ist eine Derivation, denn

$$\begin{aligned}\xi(fg)(x) &= \xi(x)(fg) = \xi(x)(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \xi(x)(g) \\ &= \xi(f)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \xi(g)(x) \\ &= (\xi(f) \cdot g)(x) + (f \cdot \xi(g))(x) \\ &= (\xi(f)g + f\xi(g))(x).\end{aligned}$$

Die induzierte Abbildung  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$  ist surjektiv:

Sei  $\partial \in \text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$  gegeben. Wir suchen ein Vektorfeld  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ , welches  $\xi(x)(f) = \partial(f)(x)$  erfüllt. Also ist

$$\xi(x) = \text{ev}_x \circ \partial \in \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) = T_x M.$$

Verbleibt zu zeigen, daß  $\xi$  glatt ist. Beachte, daß  $\partial$  ein lokaler Operator ist, d.h.  $f|_U = 0 \Rightarrow \partial f|_U = 0$  für jede offenes  $U \subseteq M$ : Für  $x \in U$  wähle  $\rho \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $\rho(x) = 1$  und  $\text{Trg}(\rho) \subseteq U$ , dann ist  $0 = \partial(0)(x) = \partial(\rho f)(x) = \partial(\rho)(x) \cdot 0 + 1 \cdot \partial(f)(x) = \partial(f)(x)$ .

Seien nun  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten. Dann ist  $\xi(x) = \sum_i \xi(x)^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x$ , und die Komponenten

$$\xi^i(x) = \xi(x)^i = (\text{ev}_x \circ \partial)^i = (\text{ev}_x \circ \partial)(u^i) = \partial(u^i)(x)$$

sind glatt in  $x$ . Also ist  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ . Daß die beiden Abbildungen  $\xi \leftrightarrow \partial$  invers zueinander sind, ist klar, denn

$$\begin{aligned}\xi^i(x) &= (\text{ev}_x \circ \partial)(u^i) = \partial(u^i)(x) = \xi_x(u^i) = \xi^i(x) \\ \partial(f)(x) &= \xi(x)(f) = (\text{ev}_x \circ \partial)(f) = \partial(f)(x).\end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir die  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Linearität:

$$\begin{aligned}(f \cdot \xi)(g)|_p &= (f \cdot \xi)_p \cdot g = (f_p \cdot \xi_p) \cdot g = f(p) \cdot (\xi_p \cdot g) \\ &= f(p) \cdot (\xi \cdot g)_p = f(p) \cdot \xi(g)(p) = (f \cdot \xi(g))|_p. \quad \square\end{aligned}$$

### 17.2 Folgerung (Raum der Vektorfelder als Lie-Algebra).

Durch die Zuordnung:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (\xi, \eta) &\mapsto [\xi, \eta] := f \mapsto (\xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))),\end{aligned}$$

wird eine bilineare Abbildung definiert, die den Raum  $\mathfrak{X}(M)$  zu einer LIE-ALGEBRA macht. D.h. es gelten:

1. Schiefsymmetrie:  $[\xi, \eta] + [\eta, \xi] = 0$ ;
2. "Jacobi-Identität":  $[\xi, [\eta, \chi]] + [\eta, [\chi, \xi]] + [\chi, [\xi, \eta]] = 0$ ;
3. Zusätzlich gilt:  $[f\xi, g\eta] = fg \cdot [\xi, \eta] + f\xi(g) \cdot \eta - g\eta(f) \cdot \xi$ .

**Beweis.** Wir führen den Beweis für den Raum  $\text{Der}(A)$  der Derivationen einer allgemeinen assoziativen Algebra  $A$  anstelle von  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Dazu definieren wir für  $\xi, \eta \in \text{Der}(A)$  die LIE-KLAMMER von  $\xi$  mit  $\eta$  als  $[\xi, \eta] := \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$ .

Dann gilt  $[\xi, \eta] \in \text{Der}(A)$ , denn klarerweise ist  $[\xi, \eta]$  linear und für  $f, g \in A$  gilt:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta](f \cdot g) &= \xi(\eta(f \cdot g)) - \eta(\xi(f \cdot g)) \\ &= \xi(f \cdot \eta(g)) + \xi(\eta(f) \cdot g) - \eta(f \cdot \xi(g)) - \eta(\xi(f) \cdot g) \\ &= f \cdot \xi(\eta(g)) + \xi(f)\eta(g) + \eta(f)\xi(g) + \xi(\eta(f)) \cdot g \\ &\quad - f \cdot \eta(\xi(g)) - \eta(f)\xi(g) - \xi(f)\eta(g) - \eta(\xi(f)) \cdot g \\ &= f \cdot [\xi, \eta](g) + [\xi, \eta](f) \cdot g. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $(\xi, \eta) \mapsto [\xi, \eta]$  ist bilinear, denn die Komposition in  $L(A, A)$  ist bilinear und die Subtraktion in  $L(A, A)$  ist linear.

Sie ist schiefsymmetrisch, denn

$$[\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi = -(\eta \circ \xi - \xi \circ \eta) = -[\eta, \xi]$$

und erfüllt die Jacobi-Gleichung, denn:

$$\begin{aligned} &[\xi, [\eta, \chi]] + [\eta, [\chi, \xi]] + [\chi, [\xi, \eta]] \\ &= [\xi, \eta \circ \chi - \chi \circ \eta] + [\eta, \chi \circ \xi - \xi \circ \chi] + [\chi, \xi \circ \eta - \eta \circ \xi] \\ &= \xi \circ (\eta \circ \chi - \chi \circ \eta) - (\eta \circ \chi - \chi \circ \eta) \circ \xi \\ &\quad + \eta \circ (\chi \circ \xi - \xi \circ \chi) - (\chi \circ \xi - \xi \circ \chi) \circ \eta \\ &\quad + \chi \circ (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) - (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) \circ \chi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Zuletzt zeigen wir noch Punkt (3):

$$\begin{aligned} ([f \cdot \xi, g \cdot \eta])(h) &= ((f \cdot \xi) \circ (g \cdot \eta) - (g \cdot \eta) \circ (f \cdot \xi))(h) \\ &= (f \cdot \xi)((g \cdot \eta)(h)) - (g \cdot \eta)((f \cdot \xi)(h)) \\ &= (f \cdot \xi)(g \cdot \eta(h)) - (g \cdot \eta)(f \cdot \xi(h)) \\ &= f \cdot \xi(g) \cdot \eta(h) + f \cdot g \cdot \xi(\eta(h)) \\ &\quad - g \cdot \eta(f) \cdot \xi(h) - g \cdot f \cdot \eta(\xi(h)) \\ &= (f \cdot g \cdot [\xi, \eta] + f \cdot \xi(g) \cdot \eta - g \cdot \eta(f) \cdot \xi)(h). \quad \square \end{aligned}$$

### Bemerkung.

Bezüglich der VB-Kartendarstellung sieht  $[\xi, \eta]$  folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= \left[ \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_k \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right] \stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i,k} \left[ \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right] \\ &\stackrel{\text{[3]}}{=} \sum_{ik} \left( \xi^i \eta^k \left[ \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right] + \xi^i \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot \eta^k \right) \frac{\partial}{\partial u^k} - \eta^k \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \cdot \xi^i \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\ &= \sum_k \sum_i \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \eta^k - \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^k \right) \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad \text{da } \left[ \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right] = 0, \end{aligned}$$

denn

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^k} f = \frac{\partial}{\partial u^i} (\partial_k(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}) = \partial_i(\partial_k(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \partial_i \partial_k(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}.$$

Es ist also der Koeffizient von  $[\xi, \eta]$  bezüglich  $\frac{\partial}{\partial u^k}$  gerade

$$[\xi, \eta]^k = \sum_i \left( \xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} \right).$$

Man kann umgekehrt diese lokale Formel dazu verwenden, die Lieklammer zu definieren. Man muß dazu aber die Verträglichkeit mit Kartenwechsel nachrechnen. Dies geht wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \left( \xi^{\bar{i}} \frac{\partial \bar{\eta}^{\bar{j}}}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} - \bar{\eta}^{\bar{i}} \frac{\partial \xi^{\bar{j}}}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
&= \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left( \sum_j \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \eta^j \right) - \sum_i \eta^i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left( \sum_j \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
&= \sum_{\bar{j}} \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_j \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \eta^j \right) - \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_j \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
&= \sum_{\bar{j}} \left( \sum_i \xi^i \sum_j \left( \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^i \partial u^j} \eta^j + \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \eta^j \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_i \eta^i \sum_j \left( \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^i \partial u^j} \xi^j + \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
&= \sum_{i,j} \left( \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}
\end{aligned}$$

Für offenes  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt also:

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta]_x^k &= \sum_i (\xi_x^i \partial_i \eta^k|_x - \eta_x^i \partial_i \xi^k|_x) = (\eta^k)'(x)(\xi_x) - (\xi^k)'(x)(\eta_x) \\
&\text{d.h. } [\xi, \eta](x) = \eta'(x) \cdot \xi_x - \xi'(x) \cdot \eta_x.
\end{aligned}$$

### Beispiel.

Es ist  $[\xi, \eta]$  nicht vollständig, wenn  $\xi$  und  $\eta$  wie in [16.6.3](#) sind:

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] &= [y \frac{\partial}{\partial x}, \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}] = y \frac{x^2}{2} [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + y \frac{\partial}{\partial x} (\frac{x^2}{2}) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (y) \frac{\partial}{\partial x} = yx \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\
c(t) &= \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \text{ ist Lösungskurve} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} c_1(t) = -c_1^2(t)/2 \\ \frac{d}{dt} c_2(t) = c_1(t) \cdot c_2(t) \end{cases}
\end{aligned}$$

Es folgt:  $c_1(t) = \frac{2}{t+A}$  und  $c_2(t) = (t+A)^2 \cdot B$ . Aus der Anfangsbedingung  $c(0) = (x, y)$  ergibt sich  $A = \frac{2}{x}$  und  $B = \frac{x^2 y}{4}$ . Somit ist

$$c_{(x,y)}(t) = \text{Fl}^{[\xi, \eta]}(t; x, y) = \left( \frac{2x}{2+tx}, (t + \frac{2}{x})^2 \frac{x^2 y}{4} \right) = \left( \frac{x}{1+tx/2}, (1+tx/2)^2 y \right).$$

Für  $t = -\frac{2}{x}$  ist der Fluß nicht definiert, d.h.  $[\xi, \eta]$  ist nicht vollständig.

### 17.3 Definition (Verwandtschaft von Vektorfeldern).

Es sei  $f : M \rightarrow N$  glatt.

Ein Vektorfeld  $\xi \in$

$\mathfrak{X}(M)$  heißt  $f$ -VERWANDT mit einem Vektor-

feld  $\eta \in \mathfrak{X}(N) : \Leftrightarrow Tf \circ \xi = \eta \circ f$ .

Es gilt dann, daß  $\xi$  genau dann  $f$ -verwandt mit  $\eta$  ist, wenn  $\xi(g \circ f) = (\eta g) \circ f$  für alle glatten  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(\Rightarrow) \xi(g \circ f)(p) = \xi_p(g \circ f) = (T_p f \cdot \xi_p) g = \eta_{f(p)} g = \eta(g)(f(p)) = (\eta(g) \circ f)(p)$$

$$(\Leftarrow) (Tf \circ \xi)_p g = (Tf \cdot \xi_p)g = \xi_p(g \circ f) = \xi(g \circ f)(p) = (\eta g \circ f)(p) = \eta g(f(p)) = \eta_{f(p)}(g).$$

**17.4 Bemerkung (Push-forward von Vektorfeldern).**

Für allgemeines  $f$  läßt sich kein Vektorfeld finden welches  $f$ -verwandt zu einem gegebenen Vektorfeld ist. Ist jedoch  $f$  ein Diffeomorphismus, dann ist  $Tf \circ \xi \circ f^{-1}$  ein Vektorfeld  $f_*\xi$  auf  $N$  für jedes Vektorfeld  $\xi$  auf  $M$ .

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \xi \uparrow & & \uparrow f_*\xi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Das Vektorfeld  $\xi$  ist  $f$ -verwandt mit  $f_*\xi$  nach Konstruktion. Umgekehrt hat man folgende Aussage:

**17.5 Lemma (Pull-back von Vektorfeldern).**

Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine Immersion,  $\eta \in \mathfrak{X}(N)$  und  $\eta_{f(p)} \in \text{Bild}(T_p f)$  für alle  $p \in M$ , dann folgt daraus:  $\exists!$  Vektorfeld  $\xi (=: f^*\eta)$ , sodaß  $\xi$   $f$ -verwandt mit  $\eta$  ist.

**Beweis.** Da  $Tf$  injektiv ist, kann jedem  $\eta_{f(p)}$  in  $\text{Bild}(T_p f)$  ein eindeutig bestimmtes Element  $\xi_p \in T_p M$  zugeordnet werden. Bleibt zu zeigen, daß dieses Vektorfeld  $\xi : M \rightarrow TM$  glatt ist. Da  $f$  eine Immersion ist, existieren nach [11.4] Karten  $\varphi$  und  $\psi$  um  $p$  bzw.  $f_p$ , sodaß  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \text{incl}_{\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n}$ . Sei  $\xi = \sum \xi_\varphi^i \partial_i^\varphi$ . Es genügt zu zeigen, daß die  $\xi_\varphi^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt sind. Da

$$\begin{aligned} (\xi_\varphi^i)_p &= \xi_p(\text{pr}_i \circ \varphi^{-1}) = \xi_p(\text{pr}_i \circ \psi^{-1} \circ f) = (Tf \circ \xi_p)(\text{pr}_i \circ \psi^{-1}) \\ &= \eta_{f(p)}(\text{pr}_i \circ \psi^{-1}) = (\eta_\psi^i)_{f(p)} = (\eta_\psi^i \circ f)_p \text{ in } p \text{ glatt ist,} \end{aligned}$$

folgt, daß  $\xi_p$  lokal um  $p$  glatt ist. Die  $f$ -Verwandtschaft folgt unmittelbar aus der Konstruktion von  $\xi$ . □

**17.6 Bemerkung.**

Wir haben gezeigt, daß Vektorfelder mittels Diffeomorphismen  $f$  transportiert werden können:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN & & TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \xi \uparrow & & \uparrow f_*\xi & & f^*\eta \uparrow & & \uparrow \eta \\ M & \xrightarrow{f} & N & & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Dabei bezeichne  $f^*\eta := Tf^{-1} \circ \eta \circ f$  nach [17.5] und  $f_*\xi := Tf \circ \xi \circ f^{-1}$  nach [17.4]. Es gilt dann:

$$f_*(f^*\eta) = Tf \circ (f^*\eta) \circ f^{-1} = Tf \circ Tf^{-1} \circ \eta \circ f \circ f^{-1} = \eta$$

und analog  $f^*(f_*\xi) = \xi$ , d.h.  $f^* : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  und  $f_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$  sind für Diffeomorphismen  $f$  zueinander invers.

**17.7 Proposition.**

Die Vektorfelder  $\xi_i$  seien  $f$ -verwandt mit  $\eta_i$  für  $i = 1, 2$ . Dann gilt:

1.  $\xi_1 + \xi_2$  ist  $f$ -verwandt mit  $\eta_1 + \eta_2$ .
2.  $[\xi_1, \xi_2]$  ist  $f$ -verwandt mit  $[\eta_1, \eta_2]$ .
3.  $(g \circ f) \cdot \xi$  ist  $f$ -verwandt mit  $g \cdot \eta$ , wobei  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist.



**Beweis.**

1 folgt aus der Linearität von  $T_p f$ .

3 folgt analog, wegen

$$\begin{aligned} (Tf \circ ((g \circ f) \cdot \xi))(p) &= Tf(g(f(p)) \cdot \xi_p) = g(f(p)) \cdot (T_p f) \xi_p \\ &= g(f(p)) \cdot \eta_{f(p)} = ((g \cdot \eta) \circ f)(p). \end{aligned}$$

2 folgt, da

$$\begin{aligned} [\xi_1, \xi_2](g \circ f) &= \xi_1(\xi_2(g \circ f)) - \xi_2(\xi_1(g \circ f)) \\ &\stackrel{17.3}{=} \xi_1((\eta_2 g) \circ f) - \xi_2((\eta_1 g) \circ f) \\ &\stackrel{17.3}{=} (\eta_1(\eta_2 g)) \circ f - (\eta_2(\eta_1 g)) \circ f = ([\eta_1, \eta_2] g) \circ f. \quad \square \end{aligned}$$

### 17.8 Lemma.

Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$ ,  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\eta \in \mathfrak{X}(N)$ .

Dann gilt:  $\xi$  ist  $f$ -verwandt mit  $\eta \Leftrightarrow f \circ \text{Fl}^\xi = \text{Fl}^\eta \circ (\text{id} \times f)$  lokal um  $\{0\} \times M$ .

**Beweis.**

( $\Leftarrow$ ) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\text{Fl}^\xi(t, p)) &= Tf(\text{Fl}^\xi(-, p)'(0)) = Tf(\xi_p) \text{ und} \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Fl}^\eta(t, f(p)) &= \eta(\text{Fl}^\eta(0, f(p))) = \eta(f(p)). \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) Die Kurve  $\text{Fl}^\eta(-, f(p))$  ist die eindeutige Integralkurve zu  $\eta$  mit Startwert  $f(p)$ . Andererseits hat  $f \circ \text{Fl}^\xi(t, p)$  den Wert  $f(p)$  bei  $t = 0$  und durch Differenzieren folgt:

$$(f \circ \text{Fl}^\xi(-, p))'(t) = Tf((\text{Fl}^\xi(-, p))'(t)) = (Tf \cdot \xi)|_{\text{Fl}^\xi(t, p)} = \eta|_{f(\text{Fl}^\xi(t, p))}.$$

Die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt nun aus der Eindeutigkeit der Integralkurven von  $\eta$ .  $\square$

### 17.9 Definition (Lie-Ableitung).

- Für  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  ist die LIE-ABLEITUNG  $\mathcal{L}_\xi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  in Richtung  $\xi$  auf Funktionen  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  definiert durch

$$f \mapsto \left( p \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* f(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \text{Fl}_t^\xi)(t, p) \right).$$

- Für  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  ist die LIE-ABLEITUNG  $\mathcal{L}_\xi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  in Richtung  $\xi$  auf Vektorfeldern  $\eta \in \mathfrak{X}(M)$  definiert durch

$$\eta \mapsto \left( p \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* \eta(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) \right).$$

Dabei beachte man, daß  $T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi : M \rightarrow TM$  für alle  $t$  nahe 0 lokal ein Schnitt ist, und somit  $t \mapsto (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p)$  eine lokal definierte Kurve im Vektorraum  $T_p M$  für jedes  $p$  ist (wohingegen  $t \mapsto (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)$  keine wohldefinierte Kurve in  $\mathfrak{X}(M)$  ist), und somit die Ableitung  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p)$  ebenfalls in  $T_p M$  liegt.

Der folgende Satz zeigt, daß wir die Lie-Ableitung von Funktionen und Vektorfeldern schon kennen.

### 17.10 Satz (Beschreibungen der Lie-Ableitung).

1. Für  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  gilt:

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi f.$$

2. Für  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$  gilt:

$$\mathcal{L}_\xi(\eta) = [\xi, \eta].$$

**Beweis.** 1 Da  $\xi_p = c'_p(0)$  mit  $c_p := \text{Fl}^\xi(-, p)$  ist, gilt

$$(\mathcal{L}_\xi f)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* f(p) = (f \circ \text{Fl}^\xi(-, p))'(0) = (f \circ c_p)'(0) = \xi_p(f) = (\xi f)_p.$$

2 Sei  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\alpha(t, s) := (\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})(f \circ \text{Fl}_s^\xi) = T \text{Fl}_s^\xi(\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})(f) = (T \text{Fl}_s^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)_p(f)$$

lokal definiert. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha(t, 0) &= \eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)} f = (\eta f)(\text{Fl}^\xi(t, p)) \\ \alpha(0, s) &= \eta_p(f \circ \text{Fl}_s^\xi) \\ \Rightarrow \partial_1 \alpha|_{(0,0)} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\eta f)(\text{Fl}^\xi(t, p)) = \xi_p(\eta f) \\ \partial_2 \alpha|_{(0,0)} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\eta_p(f \circ \text{Fl}_t^\xi(\cdot, \cdot))) = \eta_p \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \text{Fl}_t^\xi(\cdot, \cdot)) \right) = \eta_p(\xi f), \end{aligned}$$

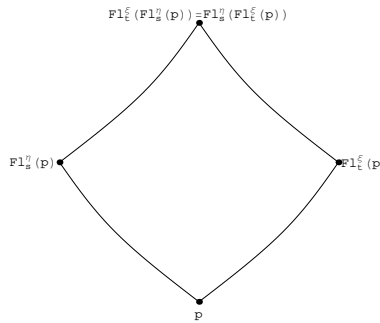
da  $\eta_p$  linear ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(t, -t) &= \partial_1 \alpha(0, 0) - \partial_2 \alpha(0, 0) = \xi_p(\eta f) - \eta_p(\xi f) = [\xi, \eta]_p f \\ \text{sowie } \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(t, -t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)_p f = \mathcal{L}_\xi(\eta)_p f. \quad \square \end{aligned}$$

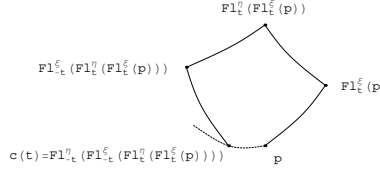
### 17.11 Satz.

Die Lie-Klammer ist eine Obstruktion gegen Kommutativität der Flüsse. Genauer heißt das:

1. Es ist  $[\xi, \eta] = 0 \Leftrightarrow \text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta = \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_t^\xi$  (Diese Abbildungen sind lokal für kleine  $t$  und  $s$  definiert).



2. Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $c(t) := (\text{Fl}_{-t}^\eta \circ \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \text{Fl}_t^\eta \circ \text{Fl}_t^\xi)_p$  lokal definiert. Dann gilt:  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = 0$ ,  $c''(0) \in T_p M$  ist wohldefiniert und  $c''(0) = 2[\xi, \eta]_p$ .



**Beweis.**

(1) ( $\Leftarrow$ ) Es gilt

$$\text{Fl}_t^\xi(\text{Fl}^\eta(s, p)) = (\text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta)(p) = (\text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) = \text{Fl}^\eta(s, \text{Fl}_t^\xi(p)),$$

d.h.  $\text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}^\eta = \text{Fl}^\eta \circ (1 \times \text{Fl}_t^\xi)$

17.8  $\Rightarrow \eta$  ist  $\text{Fl}_t^\xi$ -verwandt mit  $\eta$ , d.h.  $T \text{Fl}_t^\xi \circ \eta = \eta \circ \text{Fl}_t^\xi$ .

$\Rightarrow \eta = T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi$ , da  $(\text{Fl}_t^\xi)^{-1} = \text{Fl}_{-t}^\xi$  lokaler Diffeomorphismus ist

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi \stackrel{\text{17.10.2}}{=} [\xi, \eta].$

( $\Rightarrow$ ) Aus  $[\xi, \eta] = 0$  folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (T \text{Fl}_{-(t+s)}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_{t+s}^\xi)(p) \\ \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ T \text{Fl}_{-s}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_s^\xi \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) &= T \text{Fl}_{-t}^\xi \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (T \text{Fl}_{-s}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(\text{Fl}_t^\xi(p)) \right) \\ &\stackrel{\text{17.10.2}}{=} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ [\xi, \eta] \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) = 0 \end{aligned}$$

Also ist  $T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi = T \text{Fl}_0^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_0^\xi = \eta$  konstant in  $t$ , d.h.  $\eta \circ \text{Fl}_t^\xi = T \text{Fl}_t^\xi \circ \eta$ .  
Somit ist  $\eta$  ist  $\text{Fl}_t^\xi$ -verwandt mit  $\eta$ . Nach 17.8 ist schließlich  $\text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_t^\xi = \text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta$ .

(2) Es sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  lokal definiert und  $C^\infty$ .

Dann ist  $c' : \mathbb{R} \rightarrow TM$  der kanonische Lift von  $c$ . Die Kurve  $c'' : \mathbb{R} \rightarrow T(TM)$  kann ebenfalls als Lift von  $c$  aufgefaßt werden.

$$\left. \begin{aligned} c &= \pi_M \circ c' \\ c' &= \pi_{TM} \circ c'' \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = \pi_M \circ \pi_{TM} \circ c''$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{c''} & T(TM) \\ \parallel & & \downarrow \pi_{TM} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{c'} & TM \\ \parallel & & \downarrow \pi_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{c} & M \end{array}$$

Falls  $c'(0) = 0$ , läßt sich  $c''(0)$  aber auch als Derivation auffassen:  
 $f \mapsto c''(0)f := (f \circ c)''(0)$  ist linear und

$$\begin{aligned} c''(0)(fg) &= ((fg) \circ c)''(0) = ((f \circ c)(g \circ c))''(0) \\ &= (f \circ c)''(0)(g \circ c)(0) + 2(f \circ c)'(0)(g \circ c)'(0) + (f \circ c)(0)(g \circ c)''(0) \\ &= (c''(0)f)g(c(0)) + f(c(0))(c''(0)g). \end{aligned}$$

Also ist  $c''(0)$  eine Derivation über  $c(0) = p$ , d.h.  $c''(0) \in T_p M$ .

$$\begin{aligned} \text{Es sei } \alpha_0(t, s) &:= (\text{Fl}_t^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p) \\ \alpha_1(t, s) &:= (\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p) \\ \alpha_2(t, s) &:= (\text{Fl}_{-t}^\eta \circ \text{Fl}_{-s}^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } c(t) &= \alpha_2(t, t) \\ \alpha_2(0, s) &= \alpha_1(s, s) \\ \alpha_1(0, s) &= \alpha_0(s, s). \end{aligned}$$

Sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \partial_1(f \circ \alpha_0) &= (\eta f) \circ \alpha_0 \\ \partial_1(f \circ \alpha_1) &= -(\xi f) \circ \alpha_1 \\ \partial_1(f \circ \alpha_2) &= -(\eta f) \circ \alpha_2 \\ \partial_2(f \circ \alpha_0)(0, s) &= (\xi f)(\alpha_0(0, s)) \\ \partial_2(f \circ \alpha_1)(0, s) &= \partial_1(f \circ \alpha_0)(s, s) + \partial_2(f \circ \alpha_0)(s, s) \\ \partial_2(f \circ \alpha_2)(0, s) &= \partial_1(f \circ \alpha_1)(s, s) + \partial_2(f \circ \alpha_1)(s, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c'(0)f &= (f \circ c)'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f \circ \alpha_2)(t, t) \\ &= \partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_2)(0, 0) \\ &= -(\eta f)_p + \partial_1(f \circ \alpha_1)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_1)(0, 0) \\ &= -(\eta f)_p - (\xi f)_p + \partial_1(f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_0)(0, 0) = 0 \\ c''(0)f &:= (f \circ c)''(0) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2\bigg|_{t=0}(f \circ \alpha_2)(t, t) \\ &= \partial_1^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) + 2\partial_2\partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) + \partial_2^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_1^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_1(-(\eta f) \circ \alpha_2)(0, 0) = (-\eta(-\eta f))\alpha_2(0, 0) = (\eta(\eta f))_p \\ \partial_2\partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_2((-\eta f) \circ \alpha_2)(0, 0) \\ &= \partial_1((-\eta f) \circ \alpha_1)(0, 0) + \partial_2((-\eta f) \circ \alpha_1)(0, 0) \\ &= (\xi\eta f)_p + \partial_1(-\eta f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(-\eta f \circ \alpha_0)(0, 0) \\ &= (\xi\eta f)_p - (\eta\eta f)_p - (\xi\eta f)_p = -(\eta\eta f)_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_1^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) + 2\partial_1\partial_2(f \circ \alpha_1)(0, 0) + \partial_2^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) \\ \partial_1^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= (\xi\xi f)_p \\ \partial_2\partial_1(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= \partial_2(-\xi f \circ \alpha_1)(0, 0) \\ &= \partial_1(-\xi f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(-\xi f \circ \alpha_0)(0, 0) \\ &= -(\eta\xi f)_p - (\xi\xi f)_p \\ \partial_2^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= \partial_1^2(f \circ \alpha_0)(0, 0) + 2\partial_2\partial_1(f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2^2(f \circ \alpha_0)(0, 0) \\ &= (\eta\eta f)_p + 2(\xi\eta f)_p + (\xi\xi f)_p \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} c''(0)f &= \eta\eta f - 2\eta\eta f + \xi\xi f - 2\eta\xi f - 2\xi\xi f + \eta\eta f + 2\xi\eta f + \xi\xi f \\ &= 2(\xi\eta f - \eta\xi f) = 2[\xi, \eta]f. \quad \square \end{aligned}$$

### 17.12 Satz (Kommutierende Flüsse kommen von Karten).

Es seien  $\{\xi_i\}_{i=1}^k$  linear unabhängige Vektorfelder auf  $M$ , und  $[\xi_i, \xi_j] = 0 \quad \forall \quad i, j$ . Dann existiert eine Karte  $\varphi$ , sodaß lokal gilt:  $\xi_i = \partial_i^\varphi$  für  $i = 1 \dots k$ .

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $p = 0$  und  $\xi_i(0) = e_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Es sei

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \dots, t_n) &:= \text{Fl}^{\xi_1} \left( t_1, \text{Fl}^{\xi_2}(t_2, \dots, \text{Fl}^{\xi_k}(t_k; 0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \dots) \right) \\ &= \left( \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Es gilt  $\varphi(0) = p$  und  $\varphi$  ist ein lokaler Diffeomorphismus, da die partiellen Ableitungen für  $i \leq k$  folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi(t_1, \dots, t_n) &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left( \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left( \text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \circ \dots \circ \overline{\text{Fl}_{t_i}^{\xi_i}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &= \xi_i \left( \left( \text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \dots \circ \overline{\text{Fl}_{t_i}^{\xi_i}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \right) \\ &= \xi_i \left( \left( \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \right) \\ &= \xi_i \left( \varphi(t_1, \dots, t_n) \right), \end{aligned}$$

dabei bedeutet  $\overline{\phantom{x}}$ , daß der entsprechende Term ausgelassen wird. Also ist  $\xi_i = \partial_i^\varphi$  für  $i \leq k$ . Für  $i > k$  und  $t_1 = \dots = t_k = 0$  gilt nach Voraussetzung:

$$\partial_i|_{t_i=0} \varphi(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = \left( \frac{\partial}{\partial t_i} \right) (0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = e_i.$$

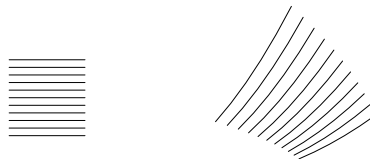
Somit ist  $\varphi'(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  und  $\partial_i^\varphi(q) = \partial_i(\varphi)(\varphi^{-1}q) = \xi_i(q)$  für  $i \leq k$ . □

### 17.13 Bemerkungen.

1. Es gilt auch die Umkehrung: Ist  $\varphi$  eine Karte, dann verschwinden die Lie-Klammern der Basisvektorfelder  $\partial_i^\varphi$ , also kommutieren ihre Flüsse paarweise.
2. Es sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\xi_p \neq 0$ . Dann existiert nach 17.12 für  $k = 1$  eine Karte  $\varphi$  mit  $\xi = \partial_1^\varphi$ . Da offensichtlich  $\partial_1 \varphi$ -verwandt mit  $\partial_1^\varphi$  ist, ist  $\varphi(\text{Fl}^{\partial_1}(t, x)) = \text{Fl}^\xi(t, \varphi(x))$  nach 17.8 und somit ist

$$\text{Fl}^\xi(t, p) = \varphi(\text{Fl}^{\partial_1}(t, \varphi^{-1}(p))) = \varphi(\varphi^{-1}(p) + te_1).$$

Der Fluß jedes nicht-stationären Vektorfelds ist also bis auf Diffeomorphismen  $\varphi$  durch die Translation  $x \mapsto x + te_1$  mit konstanten Geschwindigkeit-Vektor  $e_1$  gegeben.



3. Es sei  $\xi_p = 0$  (also  $p$  eine Nullstelle des Vektorfelds) und somit  $\text{Fl}^\xi(t, p) = p$ , d.h.  $p$  ist ein Fixpunkt (stationärer Punkt) des lokalen Flusses. O.B.d.A. ist  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\xi(0) = 0$ . Dann ist  $\xi'(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear, und die Eigenwerte von  $\xi'(0)$  bestimmen generisch das lokale Verhalten des Flusses (siehe Bücher über dynamische Systeme).

### 17.14 Proposition.

Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Fläche und  $X_1, X_2$  punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf  $M$ . Dann existiert eine lokale Parametrisierung  $\varphi$  von  $M$  mit  $\partial_i \varphi(u)$  parallel zu  $X_i(\varphi(u))$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Für Hyperflächen im  $\mathbb{R}^n$  mit  $n > 3$  ist der analoge Satz falsch!

**Direkter Beweis.** Sei  $\psi$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  und  $Y_i := \psi^{-1}(X_i)$  die lokalen Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^2$  mit  $T_v \psi \cdot Y_i(v) = X_i(\psi(v))$ . Wir suchen einen lokalen Diffeomorphismus  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(v^1, v^2) \mapsto (u^1, u^2)$  mit  $\varphi := \psi \circ h^{-1}$  wie gewünscht, d.h.  $\partial_i \varphi(u) = T_{h^{-1}(u)} \psi \cdot (h^{-1})'(u) \cdot e_i$  parallel zu  $X_i(\varphi(u)) = X_i(\psi(h^{-1}(u))) = T_{h^{-1}(u)} \psi \cdot Y_i(h^{-1}(u))$ . Dies bedeutet

$$0 = (u^j)'(v) \cdot Y_i(v) = \sum_{k=1}^2 \partial_k u^j(v) \cdot Y_i^k(v) \text{ für } j \neq i,$$

also  $h'(v) \cdot Y_i(v)$  ist proportional zu  $e_i$ , denn damit ist  $(h^{-1})'(u) \cdot e_i = h'(h^{-1}(u))^{-1} \cdot e_i$  parallel zu  $Y_i(h^{-1}(u))$ . Obige partielle Differentialgleichungen von der Form

$$\partial_1 u(v) \cdot Y^1(v) + \partial_2 u(v) \cdot Y^2(v) = 0$$

sind lösbar, denn sei  $t \mapsto v(t)$  eine Integralkurve des Vektorfelds  $Y$ , dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(v(t)) &= \partial_1 u(v(t)) \cdot (v^1)'(t) + \partial_2 u(v(t)) \cdot (v^2)'(t) \\ &= \partial_1 u(v(t)) \cdot Y^1(v(t)) + \partial_2 u(v(t)) \cdot Y^2(v(t)) = 0 \end{aligned}$$

für jede Lösung  $u$  der partiellen Differentialgleichung, also  $u \circ v$  konstant. Also ist  $u(\text{Fl}^Y(t, v)) = u(v)$ . Wenn wir somit  $u$  auf einer Kurve normal zu  $Y$  vorgeben, so ist  $u$  dadurch lokal definiert und erfüllt die partielle Differentialgleichung.  $\square$

**Beweis mittels kommutierender Vektorfelder.** Vergleiche dies mit [17.12](#). Seien  $X_1, X_2$  punktweise linear unabhängig. Dann existieren lokal Funktionen  $a_i > 0$  mit

$$\begin{aligned} 0 &= [a_1 X_1, a_2 X_2] = a_1 a_2 [X_1, X_2] + a_1 X_1(a_2) X_2 - a_2 X_2(a_1) X_1 \\ &= a_1 a_2 \left( [X_1, X_2] + \frac{X_1(a_2)}{a_2} X_2 - \frac{X_2(a_1)}{a_1} X_1 \right) \end{aligned}$$

und somit nach [17.12](#) für  $k = 2$  eine Karte  $\varphi$  mit  $\partial_i \varphi = a_i X_i$  für  $i = 1, 2$ : Denn  $[X_1, X_2] = b_1 X_1 + b_2 X_2$  mit glatten Koeffizienten-Funktionen  $b_1$  und  $b_2$  und folglich müssen wir nur die partiellen Differentialgleichung erster Ordnung  $\frac{X_1(a_2)}{a_2} = b_2$  und analog  $\frac{X_2(a_1)}{a_1} = -b_1$  lösen, was offensichtlich möglich ist, denn nach [17.12](#) für  $k = 1$  können wir zum nicht verschwindenden Vektorfeld  $X_1$  eine Karte  $\varphi$  mit  $X_1 = \partial_1^\varphi$  finden und die Differentialgleichung ist dann eine gewöhnliche mit zusätzlichen Parameter.  $\square$

## 18. Integralmannigfaltigkeiten

### 18.1 Bemerkung.

Wir haben in [16.6](#) gesehen, daß Integralkurven von Vektorfeldern nicht immer global definiert sind. Anschaulich gesprochen sind sie nicht für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert, weil sie bereits in endlicher Zeit nach “unendlich” entweichen. Es sind also die Lösungskurven “zu schnell”, d.h. die Geschwindigkeitsvektoren zu groß. Wir können aber den Fluß global machen, indem wir seine Geschwindigkeit verkleinern.

Abstrakter:

- i. An Stelle von Vektorfeldern betrachten wir eindimensionale Teilräume  $E_p \subseteq T_p M \forall p \in M$ , also Teilvektorbündel.
- ii. An Stelle von Lösungskurven betrachten wir Integralmannigfaltigkeiten, das sind 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten  $N$  von  $M$ , für die  $T_p N = E_p$  gilt. Wir können diese Begriffe auch im mehrdimensionalen Fall formulieren:

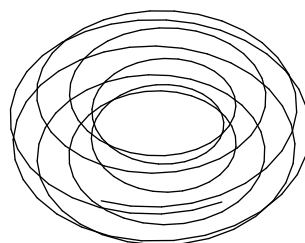
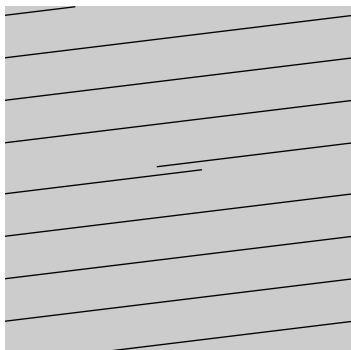
### 18.2 Definition (Integralmannigfaltigkeit).

Es sei  $E$  ein Teilvektorbündel von  $\pi : TM \rightarrow M$  (in der (älteren) Literatur auch als DISTRIBUTION bezeichnet). Dann versteht man unter einer INTEGRALMANNIGFALTIGKEIT  $N$  zu  $E$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeitsstruktur auf einer Teilmenge  $N \subseteq M$ , sodaß  $\text{incl} : N \rightarrow M$  eine Immersion ist und  $T \text{incl} : T_p N \rightarrow E_p$  für alle  $p \in N$  eine Bijektion ist.

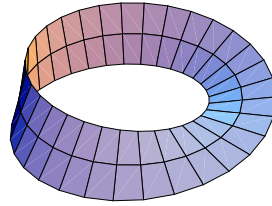
### 18.3 Beispiele.

- 1) Für eindimensionale Teilvektorbündel, die ja lokal von einem Vektorfeld aufgespannt werden, existieren immer Integralkurven zu diesem Vektorfeld, und damit auch Integralmannigfaltigkeiten des Bündels.

Z.B.: Hat ein “konstantes” Vektorfeld am Torus irrationalen Anstieg, dann liegt jede ihrer Integralmannigfaltigkeiten dicht.

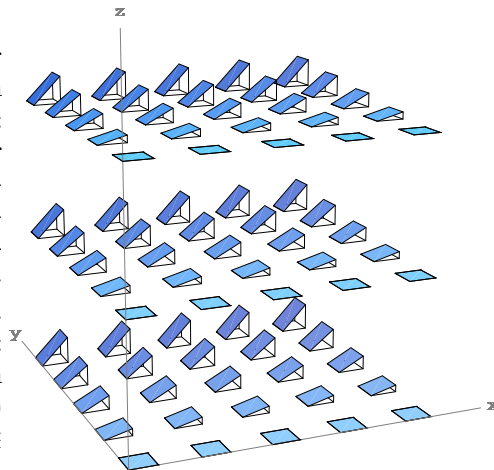


- 2) Man bemerke allerdings, daß das Teilvektorbündel  $E$  im allgemeinen nicht global durch ein VF aufgespannt wird. Ein Beispiel ist das Teilbündel  $E$  des Tangentialbündels des Möbiusbandes  $M$  bestehend aus allen Geschwindigkeitsvektoren von Kurven in den Fasern von  $M \rightarrow S^1$ .



- 3) Im mehrdimensionalen Fall gilt im allgemeinen nicht, daß jedes Teilvektorbündel eine Integralmannigfaltigkeit erzeugt. Betrachte das folgende Beispiel:  $M = \mathbb{R}^3$  mit  $E_{xyz} = \langle \{ \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \} \rangle \subseteq T_{(x,y,z)} \mathbb{R}^3$ . Angenommen es existiert eine Integralmannigfaltigkeit  $N$  durch  $(0, 0, 0)$ .

Wir betrachten vorerst den Schnitt  $N \cap \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ . Wegen  $T_0 N = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  ist dieser Schnitt lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Tangentialraum  $\langle (0, 1, 0) \rangle$  in jedem Punkt, also Teil der  $y$ -Achse. Für ein fixes  $y_0$  betrachten wir nun den Schnitt  $N \cap \{(x, y_0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ . Wie zuvor ist dieser Schnitt lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit nun mit Tangentialraum  $\langle (1, 0, y_0) \rangle$  in jedem Punkt, also Teil der Geraden  $(0, y_0, 0) + \mathbb{R} \cdot (1, 0, y_0) = \{(x, y_0, xy_0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Somit ist  $N$  lokal durch  $\{(x, y, xy) : x, y \in \mathbb{R}\}$  gegeben. Der Tangentialraum  $T_{(x,y,xy)} N$  enthält den Vektor  $(1, 0, x)$  welcher in  $E_{(x,y,z)} = \{(\lambda, \mu, \lambda y) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  nur für  $x = 0$  enthalten ist. Eine Integralmannigfaltigkeit durch  $0$  existiert also nicht.



#### 18.4 Bemerkung.

Angenommen  $E$  ist ein Teilbündel von  $TM$ , das durch jeden Punkt eine Integralmannigfaltigkeit besitzt. Sei  $p \in M$  und  $N$  die Integralmannigfaltigkeit durch  $p$  und seien  $\xi, \eta$  Vektorfelder auf  $M$  mit  $\xi_x, \eta_x \in E_x$  für alle  $x$ . Wegen Lemma 17.5 existieren Vektorfelder  $\xi_1, \eta_1$  auf  $N$ , sodaß  $\xi_1, \eta_1$  bezüglich  $\text{incl}$  verwandt sind mit  $\xi, \eta$ . Dann ist  $[\xi_1, \eta_1]$  ein Vektorfeld auf  $N$  und  $[\xi_1, \eta_1]$  ist  $\text{incl}$ -verwandt mit  $[\xi, \eta]$  nach 17.7.2. Wir erhalten  $[\xi, \eta]_p = T \text{incl} [\xi_1, \eta_1]_p \in E_p$ .

#### 18.5 Definition (Integrable Teilbündel).

Ein Teilvektorbündel  $E$  von  $TM$  heißt INTEGRABEL  $\Leftrightarrow$  für je zwei glatte Vektorfelder  $\xi, \eta$  auf  $M$  mit  $\xi_p, \eta_p \in E_p \forall p$  folgt:  $[\xi, \eta]_p \in E_p \forall p$ .

Übung: Man zeige, daß das Teilbündel von 18.3.3 nicht integrabel ist. Hinweis betrachte die beiden erzeugenden Vektorfelder.

#### 18.6 Lokales Integrabilitätstheorem von Frobenius.



Es sei  $E$  ein Teilvektorbündel von  $\pi: TM \rightarrow M$ . Dann ist  $E$  genau dann integrabel, wenn zu jedem  $p$  eine Integralmannigfaltigkeit durch  $p$  existiert (genauer: es existiert eine Karte  $\varphi$  mit  $\varphi(0) = p$ , sodaß  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  eine Integralmannigfaltigkeit für jedes  $a$  ist).

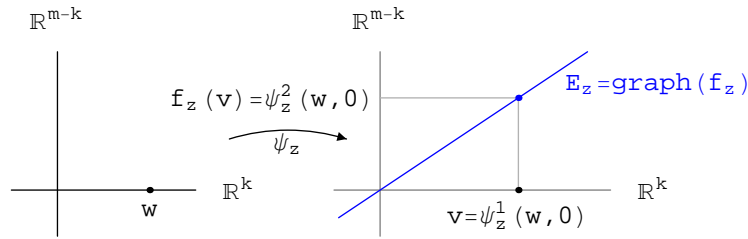
Die Bilder  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  heißen auf englisch PLAQUES, also frei übersetzt Blättchen.

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Das haben wir bereits in [18.4](#) gezeigt.

( $\Rightarrow$ ) O.B.d.A. sei  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $\psi: M \times \mathbb{R}^m \rightarrow M \times \mathbb{R}^m$  sei eine VB-Karte, die  $E$  trivialisiert, d.h.  $\psi_z := \psi(z, \cdot): \mathbb{R}^k \times \{0\} \rightarrow E_z$  ist ein Isomorphismus für jedes  $z$ . Durch Anwenden einer Rotation of  $M$  und somit auf  $T_0M$  können wir annehmen, daß  $E_0 = \mathbb{R}^k \times \{0\}$  ist. Und durch Zusammensetzen mit  $\text{id} \times \psi_0^{-1}$  können wir weiters  $\psi_0 = \text{id}$  annehmen. Insbesondere ist dann  $\text{pr}_k \circ \psi_0 \circ \text{incl}_k = \text{id} \in GL(k)$  und damit auch  $\text{pr}_k \circ \psi_z \circ \text{incl}_k \in GL(k)$  für alle  $z$  nahe 0.

Wir wollen nun jeden der Teilräume  $E_z$  als Graph einer linearen Abbildung  $f_z: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  darstellen. Wegen  $\text{Graph}(f_z) := \{(v, f(z)v) : v \in \mathbb{R}^k\}$  und  $E_z = \{(\psi_z^1(w, 0), \psi_z^2(w, 0)) : w \in \mathbb{R}^k\}$  muß  $f_z(v) = \psi_z^2(w, 0)$  mit  $\psi_z^1(w, 0) = v$  für ein (eindeutig bestimmtes)  $v \in \mathbb{R}^k$  sein, also  $f: M \rightarrow L(k, m-k)$  gegeben sein durch:

$$f_z := f(z) = \psi_z^2 \circ (\psi_z^1|_{\mathbb{R}^k})^{-1} = \text{pr}_{m-k} \circ \psi_z \circ (\text{pr}_k \circ \psi_z \circ \text{incl}_k)^{-1}.$$



Was sagt nun in diesem Zusammenhang die Integrabilität aus?

Es gilt für  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ :  $\xi_p \in E_p \Leftrightarrow \xi_p \in \text{Graph } f(p) \Leftrightarrow \xi_p = (\xi_1|_p, \xi_2|_p)$ , mit  $f(p)(\xi_1|_p) = \xi_2|_p$ . Seien  $\xi, \eta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$  mit  $\xi_p, \eta_p \in E_p$ . Nach Voraussetzung ist  $[\xi, \eta]_p \in E_p$  also

$$\begin{aligned} [\xi, \eta](p) &= ([\xi, \eta]_1(p), f(p)([\xi, \eta]_1(p))) \text{ und andererseits} \\ [\xi, \eta](p) &= \eta'(p)(\xi(p)) - \xi'(p)(\eta(p)) \\ &= \left( \eta'_1(p)(\xi(p)) - \xi'_1(p)(\eta(p)), \eta'_2(p)(\xi(p)) - \xi'_2(p)(\eta(p)) \right) \\ &= \left( \eta'_1(p)(\xi(p)) - \xi'_1(p)(\eta(p)), f'(p)(\xi(p))(\eta_1(p)) + f(p)\left(\eta'_1(p)(\xi(p))\right) \right. \\ &\quad \left. - f'(p)(\eta(p))(\xi_1(p)) - f(p)\left(\xi'_1(p)(\eta(p))\right) \right) \\ &= \left( [\xi, \eta]_1(p), f(p)([\xi, \eta]_1(p)) + f'(p)(\xi(p))(\eta_1(p)) - f'(p)(\eta(p))(\xi_1(p)) \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt für  $v_1 := \xi_1(p)$  und  $v_2 := \eta_1(p)$  mit  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^k$ :

$$f'(p)(v_1, f(p)v_1)v_2 = f'(p)(v_2, f(p)v_2)v_1.$$

Wir wollen ein  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  finden, sodaß  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  (für alle  $a$ ) eine Integralmannigfaltigkeit ist. D.h.  $(\partial_1 \varphi)(z): \mathbb{R}^k \rightarrow E_{\varphi(z)}$  soll ein Isomorphismus sein. O.B.d.A. (wie sich zeigen wird) schränken wir das Aussehen von  $\varphi$  durch folgende Bedingung noch weiter ein:

$$\varphi(0, y) = (0, y), \quad (\partial_1 \varphi)(z) \cdot v = (v, f(\varphi(z))v).$$

Ist  $\varphi(x, y) =: (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ , so gilt:

$$\begin{aligned} (\partial_1 \varphi_1(z) \cdot v, \partial_1 \varphi_2(z) \cdot v) &= \partial_1 \varphi(z) \cdot v = (v, f(\varphi(z)) \cdot v) \\ \Rightarrow \varphi_1(x, y) &= \varphi_1(0, y) + x = x \Rightarrow \varphi(x, y) = (x, \varphi_2(x, y)) =: (x, g_y(x)), \\ \text{wobei } g_y(0) &= y \text{ und } g'_y(x) = f(x, g_y(x)) \text{ gelten mu\ss.} \end{aligned}$$

Es folgt nun alles aus dem folgenden Satz 18.7. □

### 18.7 Satz von Frobenius für totale Differentialgleichungen.

Es sei  $f : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(k, n)$  eine lokale  $C^\infty$ -Abbildung. Dann gilt: Es existiert zu  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m$  genau dann eine lokale  $C^\infty$ -Abbildung  $g_{x_0, y_0} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g'_{x_0, y_0}(x)v = f(x, g_{x_0, y_0}(x))v$  und  $g_{x_0, y_0}(x_0) = y_0$  wenn  $f'(z)(v_1, f(z)v_1)v_2$  symmetrisch in  $v_1, v_2$  ist.

Weiters ist die Abbildung  $(x_0, y_0, x) \mapsto g_{x_0, y_0}(x)$   $C^\infty$ .

#### Bemerkung.

Sei  $\{e_1, \dots, e_k\}$  eine Basis für  $\mathbb{R}^k$ ,  $f_i(z) := f(z)e_i$ . Dann ist  $f(z)v = \sum_{i=1}^k f_i(z)v^i$  und  $\partial_i g(x) = f_i(x, g(x))$  mit  $1 \leq i \leq k$  ist ein System von partiellen Differentialgleichungen. Wir werden den Beweis von 18.7 in basisfreier Darstellung führen. (Einen Beweis in Koordinatenschreibweise findet man z.B. in 136, Vol.I, S.254.)

**Beweis von 18.7.** Siehe 81, 6.5.1. Let  $E = \mathbb{R}^k$  and  $F = \mathbb{R}^{m-k}$ .

( $\Rightarrow$ ) Für  $z_0 = (x_0, y_0) \in E \times F$  sei  $g$  eine lokale Lösung obiger Differentialgleichung mit Anfangsbedingung  $g(x_0) = y_0$ . Dann ist  $g' = f \circ (\text{id}, g)$  und nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} g''(x_0)(v_1, v_2) &= (g')'(x_0)(v_1)(v_2) = \text{ev}_{v_2} \left( (g')'(x_0)(v_1) \right) = \text{ev}_{v_2} \left( (f \circ (\text{id}, g))'(x_0)(v_1) \right) \\ &= \text{ev}_{v_2} \left( f'(x_0, g(x_0))(v_1, g'(x_0)(v_1)) \right) = f'(z_0) \left( v_1, f(z_0)(v_1) \right) (v_2) \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist also symmetrisch in  $v_1$  und  $v_2$ , weil  $g''(x_0)$  es nach dem Satz von Schwarz ist.

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $(x_0, y_0) \in E \times F$  fix. Wir versuchen die totale Differentialgleichung auf eine gewöhnliche zurückzuführen indem wir zuerst nur untersuchen was bei  $x_0$  in Richtung  $v \in E$  passiert.

Dazu nehmen wir vorerst an, daß eine lokale Lösung  $g$  der totalen Differentialgleichung mit Anfangswert  $g(x_0) = y_0$  existiert und setzen  $\bar{g}(t, v) := g(x_0 + tv)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, v) &= g'(x_0 + tv) \cdot v = f(x_0 + tv, g(x_0 + tv)) \cdot v = f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v)) \cdot v, \\ \bar{g}(0, v) &= g(x_0) = y_0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\bar{g}$  welche somit lokal (d.h. für  $|t| \leq \varepsilon$ ,  $\|v\| \leq \varepsilon$  mit einem gewissen  $\varepsilon > 0$ ) eine eindeutig bestimmte Lösung  $\bar{g}$  besitzt, welche von  $(t, v, x_0, y_0)$   $C^\infty$  abhängt. Daraus sollten wir eine Lösung  $g$  der totalen Differentialgleichung vermöge  $g(x) := \bar{g}(t, v)$  erhalten, wenn wir  $tv := x - x_0$  setzen. Naheliegender wäre  $t = 1$  zu wählen, aber solange existiert womöglich die Lösung  $\bar{g}$  nicht, darum wählen wir  $t := \varepsilon$  und somit  $v := \frac{x - x_0}{\varepsilon}$ , also setzen wir  $g(x) := \bar{g}(\varepsilon, \frac{x - x_0}{\varepsilon})$  für  $\|x - x_0\| \leq \varepsilon^2$  und müssen nun  $g'(x)(w)$  und dazu

insbesondere  $\partial_2 \bar{g}$  berechnen. Die Idee dabei ist, daß

$$\begin{aligned} \partial_2 \bar{g}(t, v)(w) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \bar{g}(t, v + sw) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g(x_0 + t(v + sw)) \\ &= g'(x_0 + tv)(tw) = f(x_0 + tv, g(x_0 + tv))(tw) \\ &= f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw) \end{aligned}$$

gelten sollte. Also definieren wir  $k : \mathbb{R} \rightarrow F$  durch

$$k(t) := \partial_2 \bar{g}(t, v)(w) - f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw).$$

Dann ist  $k(0) = \partial_2 \bar{g}(0, v)(w) - f(x_0 + 0v, \bar{g}(0, v))(0w) = 0$  und somit ergibt sich – wobei wir der Übersichtlichkeit halber nach Anwendung der Kettenregel das Argument  $(t, v)$  bei  $\bar{g}$  und bei deren Ableitungen sowie das Argument  $(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))$  bei  $f$  und bei seinen Ableitungen weglassen –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \partial_2 \bar{g}(t, v)(w) - f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw) \right) \\ &= \partial_2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, v)(w)}_{f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v)) \cdot v} - \left( \partial_1 f \cdot v \cdot tw + \partial_2 f \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}}_{f \cdot v} \cdot tw + f \cdot w \right) \\ &= \left( \partial_1 f \cdot tw \cdot v + \partial_2 f \cdot (\partial_2 \bar{g} \cdot w) \cdot v + f \cdot w \right) - \left( f' \cdot (v, f \cdot v) \cdot tw + f \cdot w \right) \\ &\stackrel{\text{Int. Bed.}}{=} \partial_1 f \cdot tw \cdot v + \partial_2 f \cdot (\partial_2 \bar{g} \cdot w) \cdot v - f' \cdot (tw, f \cdot tw) \cdot v \\ &= \partial_2 f \cdot (\partial_2 \bar{g} \cdot w - f \cdot tw) \cdot v = \partial_2 f \cdot k(t) \cdot v. \end{aligned}$$

Da letzteres eine lineare Differentialgleichung (mit nicht konstanten Koeffizienten) und  $k(0) = 0$  ist, folgt  $k = 0$ . Folglich ist für  $g(x) := \bar{g}(t, v)$  mit  $t := \varepsilon$  und  $v := \frac{x-x_0}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} g'(x)(w) &= \partial_2 \bar{g}(\varepsilon, \frac{x-x_0}{\varepsilon})(\frac{1}{\varepsilon}w) = \partial_2 \bar{g}(t, v)(\frac{1}{\varepsilon}w) = f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(\frac{1}{\varepsilon}w) \\ &= f\left(x, \bar{g}(\varepsilon, \frac{x-x_0}{\varepsilon})\right)(w) = f(x, g(x))(w). \quad \square \end{aligned}$$

### 18.8 Spezialfälle.

Insbesondere erhalten wir (falls  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(m, n)$  nur von einem Faktor abhängt):

1. Für  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow L(m, n)$  gilt:  $f'(x) \cdot v_1 \cdot v_2 = f'(x) \cdot v_2 \cdot v_1 \Leftrightarrow$  es existiert lokal ein  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g(0) = 0$  und  $g'(x)v = f(x)v$ , d.h.  $g' = f$ .
2. Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow L(m, n)$  gilt:  $f'(y)(f(y)v_1)v_2 = f'(y)(f(y)v_2)v_1 \Leftrightarrow$  es existiert lokal ein  $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g_y(0) = y$  und  $g'_y(x) = f(g_y(x))$ .

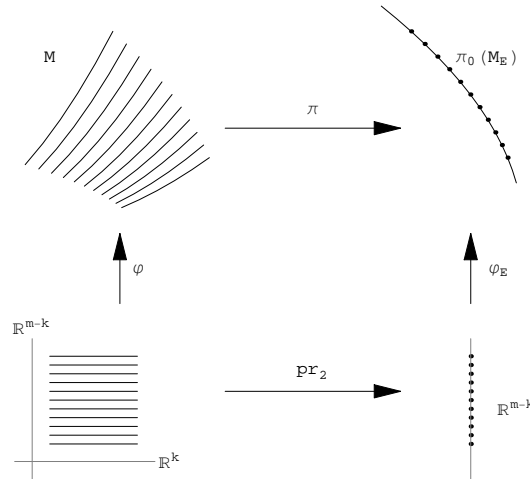
### 18.9 Integrierbarkeitstheorem von Frobenius, globale Version.

Es sei  $E$  ein integrables Teilbündel von  $TM$ , dann gilt

1. Es existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur  $M_E$  auf  $M$ , sodaß die Inklusion  $\text{incl} : M_E \rightarrow M$  eine Immersion ist und  $T \text{incl}(TM_E) = E$  gilt, d.h.  $T \text{incl} : TM_E \rightarrow E \subseteq TM$  ist bijektiv
2. Sei  $f : N \rightarrow M$  glatt und  $Tf(TN) \subseteq E$ . Dann ist  $f : N \rightarrow M_E$  glatt.
3. Jede Zusammenhangskomponente von  $M_E$  (diese heißen MAXIMALE INTEGRALMANNIGFALTIGKEITEN) ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit von  $M$  und ist parakompakt falls  $M$  es ist.
4. Ist  $N$  eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist  $N$  eine offene Teilmannigfaltigkeit einer Zusammenhangskomponente von  $M_E$ .

In dieser Situation spricht man von der von  $E$  induzierten BLÄTTERUNG (engl.: FOLIATION)  $M_E$  von  $M$ . Die maximalen Integralmannigfaltigkeiten heißen BLÄTTER (engl.: leaves) der Blätterung (Achtung: Dies ist etwas anderes als die Blätter einer Überlagerung).

**Beweis.** Nach [18.6](#) existieren Karten  $\varphi$ , sodaß  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  eine Integralmannigfaltigkeit für jedes  $a$  ist, d.h.  $T_z\varphi(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = E_{\varphi(z)}$  für alle  $z \in \text{Dom } \varphi$ .



Sei  $f : N \rightarrow M$  glatt mit  $\text{Bild}(Tf) \subseteq E$  und  $f(p) \in \text{Bild } \varphi$ , dann liegt  $f$  lokal in einer "Schicht"  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ : In der Tat, für  $\bar{f} := \varphi^{-1} \circ f$  ist

$$\left. \begin{aligned} \text{Bild}(T_x \bar{f}) \subseteq T_{f(x)} \varphi^{-1}(\text{Bild } T_x f) \subseteq T_{f(x)} \varphi^{-1}(E_{f(x)}) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \\ \exists a : \bar{f}(p) \in \mathbb{R}^k \times \{a\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Bild } \bar{f} \subseteq \mathbb{R}^k \times \{a\}.$$

[\(1\)](#) Auf der Menge  $M$  ist  $\{\varphi|_{(\mathbb{R}^k \times \{a\})}, \varphi$  trivialisiert  $E$  wie in [18.6](#),  $a \in \mathbb{R}^{m-k}\}$  ein Atlas. Dazu ist zu zeigen, daß der Kartenwechsel glatt auf offenen Mengen definiert ist:

Betrachte  $\varphi_1, \varphi_2; a_1, a_2$  und  $p \in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}) \cap \varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$ . Da  $\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})} : \mathbb{R}^k \times \{a_1\} \rightarrow M$  eine Integralmannigfaltigkeit ist, liegt nach dem eben gezeigten  $\text{Bild}(\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})})$  lokal in  $\varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$ . Es ist also

$$\left(\varphi_2|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})}\right)$$

lokal wohldefiniert und als Einschränkung glatt.

Wir bezeichnen die so erhaltene Mannigfaltigkeit mit  $M_E$ . Die Inklusion  $M_E \hookrightarrow M$  ist eine Immersion, denn die Inklusion  $\mathbb{R}^k \times \{a\} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$  ist ihre Kartendarstellung. Weiters ist  $T \text{incl}(TM_E) = E$ , denn  $T_x\varphi(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = E_{\varphi(x)}$  für alle  $x \in \text{Dom } \varphi$ .

[\(2\)](#) Sei  $f : N \rightarrow M$  glatt und  $\text{Bild}(Tf) \subseteq E$ . Dann liegt  $f$  lokal in einer Schicht  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  und somit ist  $(\varphi|_{(\mathbb{R}^k \times \{a\})})^{-1} \circ f$  lokal wohldefiniert und glatt, also  $f : N \rightarrow M_E$  glatt.

[\(3\)](#) Mit  $M$  ist auch  $M_E$  parakompakt: o.B.d.A. sei  $M$  zusammenhängend,  $C$  sei eine Zusammenhangskomponente von  $M_E$ . Dazu genügt es nach [9.3](#) z.z., daß  $C$  durch abzählbar viele Kartenumgebungen  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  überdeckt wird.

Sei  $\mathcal{A}$  eine Menge abzählbar vieler  $E$  trivialisierende Karten, die  $M$  überdecken;  $p_0 \in C$  fix und  $p \in C$  beliebig. Da eine Kurve in  $C$  existiert, die  $p_0$  und  $p$  verbindet,

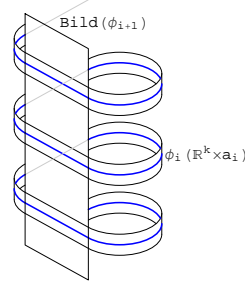
gibt es endlich viele Karten  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{A}$  und  $a_1, \dots, a_n$ , sodaß:

$$p_0 \in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}), \quad p \in \varphi_n(\mathbb{R}^k \times \{a_n\}) \text{ und} \\ \varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset.$$

Zu vorgegebenen  $\varphi_i, \varphi_{i+1}, a_i$  gibt es höchstens abzählbar viele  $a_{i+1}$ , sodaß

$$\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset,$$

denn andernfalls gäbe es eine Überdeckung von  $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \text{Bild } \varphi_{i+1}$  durch überabzählbar viele disjunkte (in der von  $(\varphi_i|_{\mathbb{R}^k \times \{a_i\}})^{-1}(\text{Bild } \varphi_{i+1}) \subseteq \mathbb{R}^k$  induzierten Topologie) offene Mengen  $\varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ , welches ein Widerspruch zur Lindelöf-Eigenschaft wäre.



Also gibt es nur abzählbar viele endliche Folgen  $(\varphi_i, a_i)_i$ , die der Bedingung  $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset$  genügen. Jedes  $p \in C$  wird durch eine geeignete Folge erreicht. Also wird  $C$  durch abzählbar viele Mengen der Form  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  überdeckt.

Die Zusammenhangskomponente  $C$  ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit: Sei  $f : N \rightarrow C \subseteq M$  glatt. Lokal liegt  $f$  in Bild  $\varphi$ , außerdem liegt  $f$  global in  $C$ . Da  $C$  (als abzählbare Vereinigung von Schichten) aber (nach dem eben gezeigten) höchstens abzählbar viele Schichten von  $\varphi$  trifft, liegt  $f$  lokal in einer Schicht (verschiedene Schichten hängen nicht zusammen). Somit ist  $f : N \rightarrow M_E$  stetig und damit auch glatt.

**[4]** Sei  $N \rightarrow M$  zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist  $\text{incl} : N \rightarrow M_E$  glatt nach **[2]**. Weiters ist  $\text{incl} : N \rightarrow M_E$  injektiv und immersiv (da  $\text{incl} : N \rightarrow M$  es ist) und submersiv (da  $T \text{incl} : T_p N \rightarrow E_p$  bijektiv ist), also ein lokaler Diffeomorphismus. Somit ist  $\text{incl} : N \hookrightarrow M_E$  ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von  $M_E$ . □

**18.10 Proposition (Urbilder von Punkten).**

*Es sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und  $x \mapsto T_x f$  habe konstanten Rang  $r$ . Dann ist  $\text{Ker}(Tf) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Ker}(T_x f)$  ein integrables Teilvektorbündel von  $TM$  und die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen  $f^{-1}(q)$  sind die maximalen Integralmannigfaltigkeiten zu  $\text{Ker}(Tf)$ .*

**18.11 Definition (Riemann-Mannigfaltigkeit).**

Eine RIEMANN-METRIK auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Funktion  $g$  die jedem Punkt  $x \in M$  eine positiv definite symmetrische Bilinearform  $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnet, sodaß für beliebige Vektorfelder  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$  die Abbildung  $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$  von  $M$  nach  $\mathbb{R}$  glatt ist.

Eine RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT ist eine Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer ausgezeichneten Riemann-Metrik  $g$ .

Ist die Metrik nur bis auf Vielfache mit glatten positiven Funktionen festgelegt, so spricht man von einer KONFORMEN MANNIGFALTIGKEIT.

Ersetzt man die Bedingung der positiven Definitheit, durch die des nicht-Degeneriertseins, d.h.  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  und  $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$  ist injektiv als Abbildungen  $\mathbb{R}^m \rightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ , so erhält man eine PSEUDO-RIEMANN-METRIK und als zugehörige Mannigfaltigkeiten

PSEUDO-RIEMANN-MANNIGFALTIGKEITEN. Falls die Signatur  $-1$  ist, so spricht man auch von einer LORENTZ-MANNIGFALTIGKEIT.

Betrachtet man komplexe Mannigfaltigkeiten und ersetzt die Bedingung ‘‘Bilinearform’’ durch ‘‘Hermite’sche Form’’, so spricht man von HERMITE’SCHER MANNIGFALTIGKEIT. Der Realteil der Hermite’schen Form liefert eine Riemann-Metrik.

### 18.12 Definition (Länge und Distanz).

Sei  $(M, g)$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit, dann können wir die LÄNGE VON TANGENTIALVEKTOREN  $\xi_x \in T_x M$  als  $|\xi_x| := \sqrt{g_x(\xi_x, \xi_x)}$  definieren.

Falls  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine glatte Kurve in  $M$  ist, so sei die LÄNGE  $c$  definiert durch

$$L(c) := \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, haben wir für zusammenhängende Riemann-Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  auch eine Metrik  $d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  im Sinne der Topologie:

$$d_g(p, q) := \inf \left\{ L(c) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, M); c(0) = p, c(1) = q \right\}.$$

Für jedes glatte immersive  $f : N \rightarrow M$  definiert  $(v, w) \mapsto g_{f(x)}(T_x f \cdot v, T_x f \cdot w)$  für  $v, w \in T_x N$  eine Riemann-Metrik  $f^*g$  auf  $N$  und für diese gilt:

$$\begin{aligned} L_{f^*g}(c) &= L_g(f \circ c) \text{ und somit} \\ d_g(f(x), f(y)) &= \inf \{ L_g(c) : c \text{ verbindet } f(x) \text{ mit } f(y) \} \\ &\leq \inf \{ L_g(f \circ c) : c \text{ verbindet } x \text{ mit } y \} \\ &= \inf \{ L_{f^*g}(c) : c \text{ verbindet } x \text{ mit } y \} \\ &= d_{f^*g}(x, y), \text{ folglich} \\ f \left( \{x : d_{f^*g}(x, x_0) < r\} \right) &\subseteq \{y : d_g(y, f(x_0)) < r\} \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß die Metrik  $d_g$  die Topologie erzeugt:

Um zu sehen, daß die Identität von der Mannigfaltigkeit  $M$  in den metrischen Raum  $(M, d)$  stetig ist, verwenden wir, daß für die Kartendarstellung  $\varphi^*g$  bzgl. einer Karte  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  und für alle  $x$  in einem Kompaktum in  $U$  Ungleichungen

$$M_1^2 \cdot |v|^2 \leq (\varphi^*g)_x(v, v) \leq M_2^2 \cdot |v|^2$$

mit  $M_1, M_2 > 0$  gelten. Damit ist insbesondere

$$\varphi \left( \left\{ x : |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{M_2} \right\} \right) \subseteq \varphi \left( \left\{ x : d_{\varphi^*g}(x, x_0) \leq \varepsilon \right\} \right) \subseteq \{y : d_g(y, \varphi(x_0)) \leq \varepsilon\}.$$

In der Tat: Einerseits ist  $\{(\varphi^*g)_x(w, w) : |w| \leq 1, x \in \text{Kompaktum}\}$  kompakt, also beschränkt durch ein  $M_2^2$  und somit  $(\varphi^*g)_x(v, v) = |v|^2 (\varphi^*g)_x(w, w) \leq M_2^2 |v|^2$  mit  $v = |v|w$ . Andererseits ist  $M_1^2 := \inf \{(\varphi^*g)_x(v, v)/|v|^2 : v \neq 0, x \in \text{Kompaktum}\} > 0$ , denn andernfalls existieren  $x_n$  und  $v_n \neq 0$  mit

$$(\varphi^*g)_{x_n}(w_n, w_n) = (\varphi^*g)_{x_n}(v_n, v_n)/|v_n|^2 \rightarrow 0 \text{ für } w_n := v_n/|v_n|.$$

und für Häufungspunkte  $x_\infty$  von  $x_n$  und  $w_\infty$  von  $w_n$  ist dann  $|w_\infty| = 1$  aber  $(\varphi^*g)_{x_\infty}(w_\infty, w_\infty) = 0$ .

Umgekehrt sei  $\varphi$  eine Karte zentriert bei  $y_0$  und  $V$  eine relativ kompakte offene Umgebung von  $0$  mit  $\bar{V} \subseteq U$ . Nach obigem existiert ein  $M_1 > 0$  mit  $M_1^2 \cdot |v|^2 \leq$

$(\varphi^*g)_x(v, v)$  für alle  $x \in \bar{V}$ . Sei  $\varepsilon > 0$  mit  $\{x : M_1|x| \leq \varepsilon\} \subseteq V$  und  $\bar{\varphi} := \varphi|_V$ . Dann ist  $d_{\bar{\varphi}^*g}(x, 0) \geq M_1|x|$  für alle  $x \in \bar{V}$ , denn

$$L_{\bar{\varphi}^*g}(c) = \int_0^1 \sqrt{(\varphi^*g)_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt \geq M_1 \int_0^1 |c'(t)| dt \geq M_1 |c(1) - c(0)|$$

für jede glatte Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow V$ . Schließlich ist

$$\begin{aligned} \{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} &\subseteq \bar{\varphi}(\{x \in V : d_{\bar{\varphi}^*g}(x, 0) < \varepsilon\}) \\ &\subseteq \bar{\varphi}(\{x \in V : M_1|x| < \varepsilon\}) \subseteq \varphi(U) : \end{aligned}$$

Andernfalls existiert eine glatte Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = y_0$  und  $L_g(c) < \varepsilon$ , aber  $y = c(1)$  liegt nicht in der offenen Menge  $\bar{\varphi}(\{x \in V : d_{\bar{\varphi}^*g}(x, 0) < \varepsilon\})$ . Nun wähle  $t_\infty$  minimal mit  $c(t_\infty) \notin \bar{\varphi}(\{x \in V : d_{\bar{\varphi}^*g}(x, 0) < \varepsilon\})$ . Für alle  $t < t_\infty$  ist also  $c(t) \in \bar{\varphi}(\{x \in V : d_{\bar{\varphi}^*g}(x, 0) < \varepsilon\})$  und  $\bar{\varphi}^{-1}(c(t))$  besitzt für  $t \rightarrow t_\infty$  einen Häufungswert  $x_\infty$  in der kompakten Menge  $\{x \in \bar{V} : d_{\bar{\varphi}^*g}(x, 0) \leq \varepsilon\} \subseteq \bar{V} \subseteq U$ . Damit ist  $c(t_\infty) = \bar{\varphi}(x_\infty) \in \varphi(U)$  und somit  $\varphi^{-1} \circ c|_{[0, t_\infty]}$  eine wohldefinierte glatte Kurve in  $V$  mit

$$L_{\bar{\varphi}^*g}(\bar{\varphi}^{-1} \circ c|_{[0, t_\infty]}) = L_g(\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ c|_{[0, t_\infty]}) = L_g(c|_{[0, t_\infty]}) < \varepsilon,$$

i.e.  $d_{\bar{\varphi}^*g}(\bar{\varphi}^{-1} \circ c(t_\infty), 0) < \varepsilon$ , ein Widerspruch.

Interessant ist es, eine kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten tatsächlich zu finden. Dies ist ein Variationsproblem, welches wir in Paragraph [86, 57] angehen werden.

## VI. Differentialformen

In diesem Kapitel beginnen wir mit 1-Formen und dem dafür nötigen Kotangententialraum. Danach verallgemeinern wir diese zu Differentialformen höheren Grades (kurz:  $n$ -Formen). Nach einem der Motivation dienenden Abschnitt stellen wir die nötige multilineare Algebra zusammen, und verkleben die damit aus den Tangential- und Kotangentential-Räumen konstruierten Tensorräume zu Tensorbündeln. Als Schnitte der Bündel alternierender Tensoren erhalten wir die Differentialformen. Wir behandeln die wichtigsten Operationen auf ihnen: Die äußere Ableitung, die Lie-Ableitung und den Einsetzungshomomorphismus. Insbesondere schauen wir uns das für Riemann-Mannigfaltigkeiten genauer an. Als Anwendung reißen wir die De Rham Kohomologie an.

### 19. Konstruktion und 1-Formen

#### 19.1 Motivation.

Für Kurvenintegrale im  $\mathbb{R}^m$  ist der Begriff der 1-Form wichtig, da dies längs Kurven integrierbare Objekte sind (siehe [86, 3.10] oder [81, 6.5.6]). Wir wollen diesen Begriff nun auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Wir erinnern uns daran, daß eine 1-Form  $\omega$  auf einer offenen Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Abbildung  $\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  ist. Das Kurvenintegral von  $\omega$  längs einer Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  ist dann als gewöhnliches Riemannintegral von  $t \mapsto \omega(c(t))(c'(t))$  definiert. Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $c'(t) \in T_{c(t)}M$  und somit muß  $\omega(x) \in L(T_xM, \mathbb{R}) = (T_xM)^*$  für jedes  $x \in M$  sein.

#### 19.2 Definition (1-Formen).

Unter einer 1-FORM auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  verstehen wir eine Abbildung  $\omega$ , die jedem Punkt  $x \in M$  ein lineares Funktional  $\omega(x) \in (T_xM)^*$  zuordnet.

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Dann erhalten wir eine 1-Form, das TOTALE DIFFERENTIAL  $df$  von  $f$ , durch  $df(x)(v) := v(f) \in \mathbb{R}$  für alle  $v \in T_xM = \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ .

Wir wollen nun 1-Formen in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu benötigen wir Koordinaten in  $(T_xM)^*$ . Ist  $E$  ein  $m$ -dimensionaler Vektorraum und  $(g_i)_{i=1}^m$  eine Basis in  $E$ , so erhält man eine Basis  $(g^i)_{i=1}^m$  von  $E^*$ , die sogenannte DUALE BASIS indem man die Funktionale  $g^i$  auf der Basis  $(g_j)_{j=1}^m$  durch  $g^i(g_j) := \delta_j^i$  festlegt, wobei  $\delta_j^i$  das Kronecker-Deltasymbol ist, d.h.  $\delta_i^i := 1$  und  $\delta_j^i := 0$  für  $i \neq j$ .

Seien nun  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten auf  $M$ . Dann ist  $(\frac{\partial}{\partial u^i}|_x)_{i=1}^m$  eine Basis von  $T_xM$ . Berechnen wir nun das totale Differential  $du^i$  der  $i$ -ten Koordinatenfunktionen  $u^i$ , so erhalten wir:

$$du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}(u^i) = \partial_j(u^i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \partial_j(\text{pr}_i) \circ \varphi^{-1} = \delta_j^i.$$



Also ist  $(du^i)_{i=1}^m$  gerade die duale Basis zur Basis  $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$  von  $T_x M$  und für  $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  ist  $du^i(\xi) = \xi^i$ . Für das totale Differential  $df$  einer Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir somit

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i,$$

denn  $df(x)(\xi_x) = \xi_x(f) = \left(\sum_i \xi_x^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(f) = \sum_i du^i(\xi_x) \frac{\partial f}{\partial u^i} = \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i\right)(\xi_x)$ .

### 19.3 Transformationsverhalten von Vektoren.

(Vgl. mit [86, 1.1] und [10.9]) Sei im Folgenden  $E$  ein endlich dimensionaler Vektorraum,  $\mathcal{G} := (g_i)_{i=1}^m$  eine Basis in  $E$  und  $x^i$  die Komponenten (Koordinaten) eines Punktes  $x$  in  $E$  bezüglich  $\mathcal{G}$ , also  $x = \sum_{i=1}^m x^i g_i$ . Sei  $\bar{\mathcal{G}} := (\bar{g}_j)_j$  eine weitere Basis und  $\bar{x}^j$  die Koordinaten von  $x$  bezüglich  $\bar{\mathcal{G}}$ . Und sei  $A$  jener Isomorphismus von  $E$ , welcher die  $g_i$  auf  $\bar{g}_i$  abbildet. Stellt man die Vektoren  $\bar{g}_j$  bezüglich der Basis  $\mathcal{G}$  dar, d.h.  $\bar{g}_j = \sum_{i=1}^m a_j^i g_i$ , so ist  $[A] := (a_j^i)_{i,j}$  (wobei der obere Index  $i$  die Zeilen und der untere  $j$  die Spalten der Matrix nummeriert)

- die Matrixdarstellung  $[A]_{\mathcal{G},\mathcal{G}}$  von  $A$  bezüglich der Basis  $\mathcal{G}$  für  $\text{Dom}(A) = E$  und für  $\text{Bild}(A) = E$ ,
- sowie die Matrixdarstellung  $[\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}},\mathcal{G}}$  der Identität bezüglich der Basis  $\bar{\mathcal{G}}$  für  $\text{Dom}(\text{id}) = E$  und der Basis  $\mathcal{G}$  für  $\text{Bild}(\text{id}) = E$ ,
- und ebenso die Matrixdarstellung  $[A]_{\bar{\mathcal{G}},\bar{\mathcal{G}}}$  bezüglich der Basis  $\bar{\mathcal{G}}$  für  $\text{Dom}(A) = E$  und für  $\text{Bild}(A) = E$ .

In der Tat folgen die ersten beiden Darstellungen aus [86, 1.1], wonach die  $j$ -te Spalte der Matrixdarstellung einer linearen Abbildung die Koeffizienten des Bildes des  $j$ -ten Basisvektors bzgl. der Basis im Bildraum sind. Hingegen ist  $[A]_{\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}} = 1$ , denn  $A(g_i) = \bar{g}_i$  also  $[A(g_i)]_{\bar{\mathcal{G}}} = (\delta_i^j)_j$ , und somit ist  $[A]_{\bar{\mathcal{G}},\bar{\mathcal{G}}} = [A \circ \text{id}]_{\bar{\mathcal{G}},\bar{\mathcal{G}}} = [A]_{\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}} \cdot [\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}},\mathcal{G}} = 1 \cdot [A]_{\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}} = [A]$ .

**Zusammengefaßt:**  $[A] = [A]_{\mathcal{G},\mathcal{G}} = [A]_{\bar{\mathcal{G}},\bar{\mathcal{G}}} = [\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}},\mathcal{G}}$  und  $[A]_{\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}} = 1$ .

Für das Transformationsverhalten der Komponenten erhalten wir somit:

$$[x]_{\bar{\mathcal{G}}} = 1 \cdot [x]_{\mathcal{G}} = [A]_{\bar{\mathcal{G}},\mathcal{G}} \cdot [x]_{\mathcal{G}} = [A(x)]_{\bar{\mathcal{G}}} = [A]_{\bar{\mathcal{G}},\bar{\mathcal{G}}} \cdot [x]_{\bar{\mathcal{G}}} = [A] \cdot [x]_{\bar{\mathcal{G}}}$$

Umgekehrt ist  $A^{-1} : E \rightarrow E$  gegeben durch  $A^{-1} : \bar{g}_j \mapsto g_j$  mit Matrixdarstellung  $[A^{-1}] = [A]^{-1} =: (b_j^i)_{i,j}$ .

Es bezeichne  $E^* := L(E, \mathbb{R})$  den zu  $E$  dualen Raum,  $\mathcal{G}^* := (g^i)_{i=1}^m$  die duale Basis zu  $\mathcal{G} = (g_i)_{i=1}^m$  definiert durch  $g^i(g_j) := \delta_j^i$ . Jeder Vektor  $x^* \in E^*$  kann dann in der Form  $x^* = \sum_{i=1}^m x_i g^i$  geschrieben werden, mit Koeffizienten  $x_i = x^*(g_i) \in \mathbb{R}$ .

Wie transformieren jetzt diese Koordinaten?

Die Matrixdarstellung  $[T^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*,\mathcal{G}^*}$  der Adjungierten einer linearen Abbildung  $T$  ist die Transponierte der Matrixdarstellung  $(t_k^i)_{k,i} := [T]_{\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}}$  von  $T$ , d.h.  $[T^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*,\mathcal{G}^*} = [T]_{\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}}^t$ , denn

$$T^*(\bar{g}^i)(g_j) := \bar{g}^i(T(g_j)) = \bar{g}^i\left(\sum_k t_j^k \bar{g}_k\right) = \sum_k t_j^k \bar{g}^i(\bar{g}_k) = t_j^i = \sum_k t_k^i g^k(g_j).$$

Indem wir dies auf die Basiswechselabbildung  $A : g_i \mapsto \bar{g}_i$  anwenden, erhalten wir

$$[A^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*,\mathcal{G}^*} = [A]_{\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}}^t = 1^t = 1, \text{ also } A^*(\bar{g}^j) = g^j$$

und weiters  $g^j = A^*(\bar{g}^j) = \sum_{i=1}^m a_i^j \bar{g}^i$ , denn  $[A^*]_{\bar{g}^*, \bar{g}^*} = [A]_{\bar{g}, \bar{g}}^t = [A]^t$ , und damit das Transformationsverhalten für die Koordinaten von dualen Vektoren  $x^* \in E^*$ :

$$\sum_i \bar{x}_i \bar{g}^i = x^* = \sum_j x_j g^j = \sum_{i,j} x_j a_i^j \bar{g}^i \Rightarrow \bar{x}_i = \sum_j a_i^j x_j.$$

Vergleicht man nun die Transformationsformeln, so zeigt sich, daß die Komponenten  $x_i$  der dualen Vektoren  $x^* \in E^*$  wie die Basisvektoren  $g_i$  des Grundraumes transformieren:

$$\bar{x}_j = \sum_i a_j^i x_i, \quad \bar{g}_j = \sum_i a_j^i g_i; \quad x_i = \sum_j b_j^i \bar{x}_j, \quad g_i = \sum_j b_j^i \bar{g}_j.$$

Hingegen transformieren die Komponenten  $x^i$  eines Vektors  $x \in E$  wie die Vektoren der dualen Basis  $g^i$ :

$$\bar{x}^j = \sum_i b_j^i x^i, \quad \bar{g}^i = \sum_j b_j^i g^j; \quad x^i = \sum_j a_j^i \bar{x}^j, \quad g^i = \sum_j a_j^i \bar{g}^j.$$

Dieser Sachverhalt motiviert auch die Verwendung von “oberen” und “unteren” Indizes: Die Komponentenvektoren dualer Vektoren transformieren wie die Basis im Grundraum (sie transformieren kovariant), die duale Basis und die Komponentenvektoren im Grundraum transformieren kontravariant.

Vergleiche das aber mit folgender

#### 19.4 Definition (Funktork).

Unter einem FUNKTOR  $\mathcal{F}$  auf einer Kategorie versteht man eine Zuordnung, die jedem Raum  $M$  einen anderen Raum  $\mathcal{F}(M)$  zuordnet und jedem Morphismus  $f : M \rightarrow N$  einen entsprechenden Morphismus  $\mathcal{F}(f)$  zwischen  $\mathcal{F}(M)$  und  $\mathcal{F}(N)$  zuordnet, sodaß  $\mathcal{F}(\text{id}_M) = \text{id}_{\mathcal{F}(M)}$  und  $\mathcal{F}$  von der Zusammensetzung je zweier Morphismen die Zusammensetzung der zugeordneten Morphismen ist.

Man nennt einen Funktor  $\mathcal{F}$  KOVARIANT, falls  $\mathcal{F}(f)$  in die gleiche Richtung läuft wie  $f$ , d.h. für  $f : M \rightarrow N$  ist  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$ . Er heißt KONTRAVARIANT, falls  $\mathcal{F}(f)$  in die entgegengesetzte Richtung läuft, d.h. für  $f : M \rightarrow N$  ist  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ . Insbesondere ist der Dualraum-Funktor  $(f : E \rightarrow F) \mapsto (f^* : F^* \rightarrow E^*)$  **kontravariant**.

#### 19.5 Transformationsverhalten von 1-Formen.

Es sei  $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$  bzw.  $\psi^{-1} = (v^1, \dots, v^m)$  eine Karte einer Mannigfaltigkeit  $M$  und  $\partial_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial u^i}$  bzw.  $\partial_j^\psi = \frac{\partial}{\partial v^j}$  seien die (lokalen) Basisvektorfelder des Tangentialbündels. Diese hängen nach [10.9](#) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \partial_j^\psi|_x &= \sum_{i=1}^m \partial_j^\psi|_x (\varphi^{-1})^i \partial_i^\varphi|_x \text{ oder intuitiver } \frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \partial_j^\varphi|_x &= \sum_{i=1}^m \partial_j^\varphi|_x (\psi^{-1})^i \partial_i^\psi|_x \text{ oder intuitiver } \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^i} \end{aligned}$$

Seien  $a_j^i := \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$  bzw.  $b_i^j := \frac{\partial v^j}{\partial u^i}$  die Koeffizienten der Jakobimatrix des Kartenwechsels und das Vektorfeld  $\xi$  habe die Darstellungen  $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial v^j}$ , dann

gilt auch

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_i \left( \sum_j \eta^j \left( \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \Rightarrow \xi^i &= \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \eta^j = \sum_j a_j^i \eta^j\end{aligned}$$

und analog  $\eta^j = \sum_i b_i^j \xi^i$ .

Für Kotangentialvektoren erhalten wir wegen [19.3](#) die folgenden Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}du^i &= \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j = \sum_j a_j^i dv^j \\ dv^j &= \sum_i \frac{\partial v^j}{\partial u^i} du^i = \sum_i b_i^j du^i.\end{aligned}$$

Die Komponenten der Kotangentialvektoren, transformieren also kovariant, daher heißen Schnitte im Kotangentialbündel (d.h. 1-Formen) auch KOVARIANTE VEKTORFELDER.

### 19.6 Konstruktion des dualen Bündels.

Um über Glattheit von 1-Formen sprechen zu können, müssen wir nun die disjunkte Vereinigung  $T^*M := (TM)^* := \bigsqcup_{x \in M} (T_x M)^*$  zu einer glatten Mannigfaltigkeit, oder besser noch einem Vektorbündel machen. Noch allgemeiner wollen wir für ein allgemeines Vektorbündel  $E \xrightarrow{\mathcal{P}} M$  die disjunkte Vereinigung  $E^* := \bigsqcup_{x \in M} (E_x)^*$  wieder zu einem solchen machen. Seien dazu Trivialisierungen  $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} E|_U$  von  $E$  über offenen Mengen  $U \subseteq M$  gegeben. Wir brauchen eine Trivialisierung

$$\varphi^* : \bigsqcup_{x \in U} (\mathbb{R}^k)^* = U \times (\mathbb{R}^k)^* \xrightarrow{\cong} E^*|_U = \bigsqcup_{x \in U} (E_x)^*$$

Faserweise können wir  $\varphi^*$  als  $(\varphi^*)_x := ((\varphi_x)^*)^{-1} = ((\varphi_x)^{-1})^* : (\mathbb{R}^k)^* \rightarrow (E_x)^*$  definieren, wobei  $(\varphi_x)^* : (E_x)^* \rightarrow (\mathbb{R}^k)^*$  die adjungierte Abbildung zum Isomorphismus  $\varphi_x : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$  bezeichnet.

Sei  $\psi : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$  die Transitionsfunktion für zwei Vektorbündelkarten von  $E$ . Die zu den Trivialisierungen  $\varphi^*$  gehörenden Transitionsfunktionen  $\psi^*$  sind dann durch

$$\psi^*(x) := (\psi(x)^*)^{-1} \in GL((\mathbb{R}^k)^*) \cong GL(\mathbb{R}^k)$$

gegeben, wobei  $\psi(x)^*$  die adjungierte Abbildung zum linearen Isomorphismus  $\psi(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  bezeichnet. Da  $A \mapsto A^*$  linear ist von  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \rightarrow L((\mathbb{R}^l)^*, (\mathbb{R}^k)^*)$ , die Inversion  $A \mapsto A^{-1}$  von  $GL(\mathbb{R}^k) \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$  glatt ist und  $\psi : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$  als Transitionsfunktion des Vektorbündels  $E$  ebenfalls glatt ist, gilt gleiches auch für die Zusammensetzung  $\psi^*$

$$\begin{array}{ccccc} & & GL(\mathbb{R}^k) & & \\ & \nearrow^{(-)^*} & & \searrow^{\text{inv}} & \\ U \cap V & \xrightarrow{\psi} & GL(\mathbb{R}^k) & & GL(\mathbb{R}^k) \\ & \searrow^{\text{inv}} & & \nearrow^{(-)^*} & \\ & & GL(\mathbb{R}^k) & & \end{array}$$

Also bilden die  $\psi^*$  einen Kozykel von Transitionsfunktionen für ein glattes Vektorbündel  $E^* \rightarrow M$  und die  $\varphi^*$  sind die zugehörigen Vektorbündelkarten. Diese Vektorbündel  $E^* \rightarrow M$  heißt das **DUALE VEKTORBÜNDEL** zu  $E \rightarrow M$ .

Im Spezialfall, wo  $E \rightarrow M$  gerade das Tangentialbündel  $TM \rightarrow M$  ist, heißt  $T^*M := (TM)^* \rightarrow M$  **KOTANGENTIALBÜNDEL** von  $M$ .

Der Raum  $C^\infty(M \leftarrow T^*M)$  der glatten Schnitte des Kotangentialbündels wird auch mit  $\Omega^1(M)$  bezeichnet.

### 19.7 Glatte 1-Formen.

Wie erkennt man, ob eine 1-Form  $\omega$  wirklich glatt ist? Nun, das ist lokal um einen Punkt  $x \in M$  genau dann der Fall, wenn ihre Darstellung bezüglich einer Trivialisierung  $T^*M|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$  mit  $x \in U \subseteq M$  glatt ist. Nach [19.6](#) werden die Trivialisierungen von  $T^*M$  durch Dualisieren aus jenen von  $TM$  gewonnen. Zu einer Karte  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  mit zugehörigen lokalen Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m) = \varphi^{-1}$ , war die entsprechende lokale Trivialisierung von  $TM \rightarrow M$  in [14.4](#) durch

$$TM \supseteq T(\varphi(U)) \xleftarrow{T\varphi} TU \cong U \times \mathbb{R}^m \xleftarrow{\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m} \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

gegeben. Wobei der standard-Basis  $(e_i)$  in  $\{x\} \times \mathbb{R}^m$  die Basis  $(\frac{\partial}{\partial u^i}|_x) \in T_x M$  der Richtungsableitungen entspricht. Die duale Abbildung zu  $T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$  bildet somit die duale Basis  $(du^i)$  von  $(T_x M)^*$  auf die duale Basis  $(e^i)$  von  $(\mathbb{R}^m)^* \cong \mathbb{R}^m$ . Die lokale Trivialisierung von  $T^*M$  bildet somit  $e^i$  auf  $du^i$  ab, und eine 1-Form  $\omega$  genau dann glatt, wenn alle ihre lokalen Koordinaten (Koeffizienten)  $\omega_i$  – gegeben durch  $\omega = \sum_i \omega_i du^i$  – glatt sind.

### 19.8 Lemma (Schnitte des dualen Bündels).

Sei  $p : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel, dann gibt es folgende Beschreibungen für die glatten Schnitte des dualen Bündels  $E^* := \bigsqcup_x (E_x)^* \rightarrow M$ :

$$\begin{aligned} C^\infty(M \leftarrow E^*) &:= \Gamma(E^* \rightarrow M) := \{\sigma \in C^\infty(M, E^*) : \forall x : \sigma(x) \in E_x^*\} \\ &\cong \{s \in C^\infty(E, \mathbb{R}) : \forall x : s|_{E_x} \in L(E_x, \mathbb{R})\} \\ &\cong \text{Raum der Vektorbündelhomomorphismen} \\ &\quad \text{von } E \text{ nach } M \times \mathbb{R} \text{ über } \text{id}_M. \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir müssen nur zeigen, daß die Schnitte  $\sigma \in C^\infty(M \leftarrow E^*)$  genau den faserweise linearen glatten Abbildungen  $s : E \rightarrow \mathbb{R}$  entsprechen.

Definiert man  $\sigma \leftrightarrow s$  durch  $\sigma(x) = s|_{E_x} =: s_x$ , so ist klar, daß sich die Abbildungen  $\sigma$  mit Graph  $\{(x, \sigma(x)) : x \in M\} \subseteq M \times E$  und  $s = \bigsqcup_{x \in M} s_x$  in eindeutiger Weise entsprechen. Verbleibt zu zeigen, daß  $\sigma$  genau dann glatt ist, wenn  $s$  es ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft. Sei  $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U$  eine Vektorbündelkarte von  $p : E \rightarrow M$  und  $\varphi^* : U \times (\mathbb{R}^k)^* \rightarrow E^*|_U$  die zugehörige Karte von  $E^* \rightarrow M$ . Lokal ist  $\sigma$  durch  $\bar{\sigma} : U \rightarrow (\mathbb{R}^k)^* = L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$  mit  $\sigma(x) = (\varphi^*)_x(\bar{\sigma}(x)) = \bar{\sigma}(x) \circ (\varphi_x)^{-1}$  und  $s$  durch  $\bar{s} := s \circ \varphi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Also ist  $\bar{s}(x, v) = s_x(\varphi_x(v)) = \sigma(x)(\varphi_x(v)) = \bar{\sigma}(x)(v)$ . Sei  $\sigma$  (und also auch  $\bar{\sigma}$ ) glatt, dann ist  $\bar{s} : (x, v) \mapsto \bar{s}(x, v) = \bar{\sigma}(x)(v) = (\text{eval} \circ (\bar{\sigma} \times \text{id}_{\mathbb{R}^k}))(x, v)$  ebenfalls glatt. Umgekehrt: Ist  $s$  glatt, so auch  $\bar{s}$  und damit auch  $\text{eval}_v \circ \bar{\sigma} = \bar{s}(\cdot, v)$  für jedes  $v$ . Somit ist aber  $\bar{\sigma} : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$  glatt, und damit auch  $\sigma$  selbst.  $\square$

### 19.9 Bemerkung.

Wir wollen als nächstes wie für glatte Vektorfelder in [17.1](#) auch für glatte 1-Formen eine algebraische Beschreibung. Wir können eine 1-Form  $\omega$  auf ein Vektorfeld  $\xi$  punktweise anwenden, da  $\omega_x \in (T_x M)^* = L(T_x M, \mathbb{R})$  und  $\xi_x \in T_x M$ , und erhalten eine Funktion  $\omega(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \omega_x(\xi_x)$ . In lokalen Koordinaten sieht das wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_i \omega_i du^i ; & \xi &= \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \omega(\xi) &= \left( \sum_i \omega_i du^i \right) \left( \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} \omega_i \xi^j du^i \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_i \omega_i \xi^i.\end{aligned}$$

Also ist die resultierende Funktion  $\omega(\xi)$  glatt, falls  $\omega$  und  $\xi$  glatt sind. Und klarerweise ist die Zuordnung  $(\omega, \xi) \mapsto \omega(\xi)$  bilinear als Abbildung von  $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

### 19.10 Lemma (Raum der 1-Formen als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineare Abbildungen).

Die bilineare Abbildung  $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  induziert einen  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linearen Isomorphismus

$$\Omega^1(M) \cong \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R})),$$

wobei der rechte Raum aus allen  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linearen Abbildungen (i.e.  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Modul Homomorphismen) von  $\mathfrak{X}(M)$  nach  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  besteht.

**Beweis.** Klarerweise induziert obige bilineare Abbildung eine lineare Abbildung von  $\Omega^1(M)$  in den Raum  $L(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$  der linearen Abbildungen.

Jedes  $\omega \in \Omega^1(M)$  wirkt aber auch  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear auf  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ , denn

$$\omega(f \cdot \xi)|_x = \omega_x((f \cdot \xi)_x) = \omega_x(f(x) \cdot \xi_x) = f(x) \cdot \omega_x(\xi_x) = (f \cdot \omega(\xi))_x$$

Weiters ist  $\Omega^1(M) \rightarrow \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$  sogar  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear, denn  $(f \cdot \omega)(\xi)|_x = (f \cdot \omega)_x(\xi_x) = (f(x)\omega_x)(\xi_x) = f(x) \cdot \omega_x(\xi_x) = f(x) \cdot \omega(\xi)|_x = (f \cdot \omega(\xi))_x$ .

Sei umgekehrt ein  $\omega \in \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$  gegeben.

Dann wirkt  $\omega$  lokal, d.h.  $\xi = 0$  auf  $U \subseteq M$  impliziert  $\omega(\xi) = 0$  auf  $U$ : Zu  $x \in U$  wählen wir ein  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f(x) = 1$  und  $\text{Trg}(f) \subseteq U$ . Dann ist  $f \cdot \xi = 0$  und somit

$$0 = \omega(0) = \omega(f \cdot \xi) = f \cdot \omega(\xi) \quad \Rightarrow \quad 0 = f(x) \cdot \omega(\xi)(x) = \omega(\xi)(x).$$

Es wirkt  $\omega$  sogar punktal, d.h.  $\xi(x) = 0$  impliziert  $\omega(\xi)(x) = 0$ , denn

$$\omega(\xi)(x) = \omega\left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(x) = \sum_i \underbrace{\xi^i(x)}_{=0} \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)(x) = 0.$$

Folglich können wir eine 1-Form  $\omega$  durch  $\omega(x)(\xi_x) := \omega(\xi)(x)$  definieren, wobei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  so gewählt ist, daß  $\xi(x) = \xi_x$  ist. Die 1-Form  $\omega$  ist dann glatt, denn lokal gilt:

$$\omega = \sum_i \omega_i du^i \quad \text{mit} \quad \omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right).$$

Daß diese beiden Zuordnungen invers zueinander sind, ist offensichtlich.  $\square$

Beachte, daß sich dieser Beweis direkt zu einem für

$$C^\infty(M \leftarrow E^*) \cong \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(C^\infty(M \leftarrow E), C^\infty(M, \mathbb{R}))$$

verallgemeinern läßt.

### 19.11 Lemma (Pull-back von Schnitten dualer Bündel).

Seien  $p : E \rightarrow M, q : F \rightarrow N$  Vektorbündel und  $f$  ein Vektorbündelhomomorphismus. Dann ist  $f^* : C^\infty(N \leftarrow F^*) \rightarrow C^\infty(M \leftarrow E^*)$  durch die Formel

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ p \downarrow & & q \downarrow \\ M & \xrightarrow{f_0} & N \end{array}$$

$$f^*(s)_x \cdot v_x := s_{f_0(x)} \cdot f(v_x) \text{ für } s \in C^\infty(N \leftarrow F^*), x \in M, \text{ und } v_x \in E_x$$

wohldefiniert.

Vergleiche dies mit [17.5](#) und [17.4](#). Falls  $p : E = M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  und  $q : F = N \times \mathbb{R} \rightarrow N$  triviale Bündel sind mit  $f(x, t) = (f_0(x), t)$ , so verallgemeinert das eben definierte Pull-back  $f^*$  jenes für Funktionen  $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ , denn der Isomorphismus  $C^\infty(N, \mathbb{R}) \cong C^\infty(N \leftarrow F^*)$  ist gegeben durch  $g \mapsto (s : N \ni y \mapsto (F_y \ni v \mapsto g(y) \cdot v \in F_y^*))$ .

**Beweis.** Z.z. ist nur, daß  $f^*(s)$  glatt ist. Via lokaler Trivialisierungen reduziert man das Problem auf triviale Bündel. Betrachten wir also die Bündel  $p : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ ,  $q : V \times \mathbb{R}^i \rightarrow V$ , und die Abbildungen  $f : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i)$ ,  $f_0 : U \rightarrow V$  und  $s : V \rightarrow (\mathbb{R}^i)^*$ . Dann ist

$$f^*(s)_x \cdot v_x := s_{f_0(x)} \cdot f(v_x) = (s \circ f_0)(x) \cdot f_x(v_x) = \text{komp}((s \circ f_0)(x), f_x) \cdot v_x$$

also kommutiert

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f^*(s)} & (\mathbb{R}^k)^* \\ & \searrow (s \circ f_0, f) & \nearrow \text{komp} \\ & (\mathbb{R}^i)^* \times L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i) & \end{array}$$

und  $f^*(s)$  ist als Zusammensetzung zweier  $C^\infty$ -Funktionen selbst glatt. □

**19.12 Pull-back von 1-Formen in lokalen Koordinaten.**

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und  $\omega \in \Omega^1(N)$ . Dann ist  $f^*\omega \in \Omega^1(M)$  definiert durch

$$(f^*\omega)_x(\xi) := ((Tf)^*\omega)(x)(\xi) \stackrel{19.11}{=} \omega_{f(x)}(T_x f \cdot \xi) \text{ für } x \in M \text{ und } \xi \in T_x M.$$

Insbesondere erhält man

$$\begin{aligned} f^*(dg)_p(\xi_p) &= (dg)_{f(p)}(T_p f \cdot \xi_p) = \text{pr}_2 \cdot T_{f(p)} g \cdot T_p f \cdot \xi_p \\ &= \text{pr}_2 \cdot T_p(g \circ f) \cdot \xi_p = d(g \circ f)_p \cdot \xi_p, \text{ d.h.} \\ f^*(dg) &= d(g \circ f) = d(f^*g) \text{ für } g \in C^\infty(N, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

oder noch kürzer:  $f^* \circ d = d \circ f^*$ .

Wir wollen  $f^*\omega$  in lokalen Koordinaten ausdrücken. Seien dazu  $(u^1, \dots, u^i)$  lokale Koordinaten um  $x \in M$  und  $(v^1, \dots, v^j)$  lokale Koordinaten um  $y := f(x) \in N$ . Sei weiters  $\omega = \sum_j \omega_j dv^j$  die Koordinatendarstellung von  $\omega$  um  $y$  und  $f^*\omega = \sum_i \eta_i du^i$  jene von  $f^*\omega$  um  $x$ . Setzen wir speziell  $\xi := \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x$  so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \omega_{f(x)}\left(T_x f \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x\right) &= (f^*\omega)_x\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x\right) = \left(\sum_k \eta_k du^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x\right) \stackrel{19.9}{=} \eta_i \\ \omega_{f(x)}\left(T_x f \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x\right) &\stackrel{10.9}{=} \left(\sum_j \omega_j dv^j\right)_y \left(\sum_l \frac{\partial f^l}{\partial u^i} \Big|_x \frac{\partial}{\partial v^l} \Big|_y\right) \stackrel{19.9}{=} \sum_j \omega_j(y) \frac{\partial f^j}{\partial u^i} \Big|_x \end{aligned}$$

Also gilt

$$f^*\left(\sum_j \omega_j dv^j\right) = \sum_i \left(\sum_j (\omega_j \circ f) \frac{\partial f^j}{\partial u^i}\right) du^i.$$

Man beachte, daß das Kurvenintegral aus [86, 3.10] einer 1-Form  $\omega \in \Omega^1(U)$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  längs einer Kurve  $c: I \rightarrow U$  gerade durch

$$\int_c \omega = \int_c \sum_i \omega_i(x) dx^i := \int_0^1 \sum_i \omega_i(c(t)) \frac{dc^i}{dt} dt = \int_0^1 c^*(\omega)$$

gegeben ist. Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit  $M$  können wir genauso das Kurvenintegral  $\int_c \omega$  einer 1-Form  $\omega \in \Omega^1(M)$  längs einer Kurve  $c: I \rightarrow M$  durch

$$\int_c \omega := \int_0^1 c^*(\omega)$$

definieren. Wir werden diese Definition im Abschnitt [28] weiter verallgemeinern.

## 20. Motivation für Formen höheren Grades

### 20.1 Die Riemann-Metrik als Tensorfeld.

In [18.11] hatte wir Riemann-Metriken als Abbildungen definiert, die jedem  $x \in M$  eine Bilinearform  $g_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnen, und zwar so, daß  $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$ ,  $M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist für je zwei glatte Vektorfelder  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ . Schreiben wir die beiden Vektorfelder mittels lokaler Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$  als  $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  und  $\eta = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ , so erhalten wir

$$g_x(\xi_x, \eta_x) = \sum_{i,j} \xi_x^i \eta_x^j g_x \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} du^i(\xi)|_x du^j(\eta)|_x g_{i,j}(x),$$

wobei wir  $g_{i,j}(x) := g_x \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$  gesetzt haben. Es ist  $(\xi_x, \eta_x) \mapsto du^i(\xi)|_x \cdot du^j(\eta)|_x$  eine bilineare Abbildung  $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ , die wir mit  $du^i|_x \otimes du^j|_x$  bezeichnen. Also gilt lokal

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} du^i \otimes du^j$$

### 20.2 Hessische Form.

Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit lokalem Extremum bei  $x$ , dann ist  $T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$  die Nullabbildung. Um umgekehrt schließen zu können benötigen wir die 2.Ableitung: Sei  $M$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ , (oder  $M$  eine Teilmannigfaltigkeit die wir durch eine offene Umgebung und  $f$  durch eine Erweiterung darauf ersetzen).

$$M \times \mathbb{R}^m = TM \xrightarrow{Tf} T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$Tf(x, v) = (f(x), f'(x)(v))$$

$$M \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = T^2 M := T(TM) \xrightarrow{T^2 f} T^2 \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$

$$T^2 f(x, v; y, w) = \left( f(x), f'(x)(v), f'(x)(y), f''(x)(v, y) + f'(x)(w) \right)$$

Im  $\mathbb{R}^m$  ist  $\text{pr}_4(T^2 f(x, v; y, 0)) = f''(x)(v, y)$ , falls  $(x, v; y, 0)$  im 2. Tangentialraum der Mannigfaltigkeit liegt.

### 20.3 Beispiel.

Zweite Ableitung von Funktionen am Kreis:

$$\begin{aligned} S^1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \\ TS^1 &= \{(x, v) \in (\mathbb{R}^2)^2 : |x| = 1, \langle x, v \rangle = 0\} \\ T^2S^1 &= \{(x, v; y, w) \in (\mathbb{R}^2)^4 : |x| = 1, \langle x, v \rangle = \langle x, y \rangle = 0, \\ &\quad \langle y, v \rangle + \langle x, w \rangle = 0\} \end{aligned}$$

Somit ist  $(x, v; y, 0) \in T^2S^1$  genau dann, wenn  $|x| = 1$ ,  $v \perp x$ ,  $y \perp x$  und  $v \perp y$ , also nur dann wenn  $v = 0$  oder  $y = 0$  ist. D.h. auf einer allgemeine Mannigfaltigkeit läßt sich  $f''(x) : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$  nicht sinnvoll definieren.

Falls  $T_x f = 0$ , so ist dies doch möglich. Sei  $\xi_x, \eta_x \in T_xM$ , dann definieren wir  $f''(x)(\xi_x, \eta_x) := \eta_x(\xi(f))$ , wobei  $\xi$  ein Vektorfeld mit  $\xi(x) = \xi_x$  sei. Schreiben wir  $\xi_x$  und  $\eta_x$  in lokalen Koordinaten, d.h.  $\xi_x = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  bzw.  $\eta_x = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \xi(f) &= \sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i} \\ \eta_x(\xi(f)) &= \left( \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \left( \sum_i \xi^i \cdot \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \Big|_x \\ &= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \xi^i \cdot \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \Big|_x = \sum_j \eta^j \sum_i \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \Big|_x \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}(x), \quad \text{da } \frac{\partial f}{\partial u^i} \Big|_x = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, daß obige Definition von der Fortsetzung  $\xi$  unabhängig ist und in lokalen Koordinaten die übliche 2. Ableitung liefert, falls  $f'(x) = 0$ .

Es ist also unter dieser Voraussetzung  $f''(x) : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} f''(x)(\xi, \eta) &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \Big|_x = \sum_{i,j} du^i(\xi) du^j(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \Big|_x \\ &= \left( \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} du^i \otimes du^j \right)(x)(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Demnach ist  $f''(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}(x) du^i|_x \otimes du^j|_x$ . Wie transformiert sich dieser Ausdruck beim Wechsel von Koordinaten  $u^i$  zu neuen Koordinaten  $v^j$ ? Wir haben  $dv^i = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} du^j$  und  $\frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^k}$ . Also ist  $\frac{\partial}{\partial u^j}(f) = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k}$  und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}(f) &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{\partial}{\partial u^j}(f) \right) = \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial v^k} \cdot \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} + \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \cdot \left( \sum_l \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^l} \right) \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial f}{\partial v^k} + \sum_{k,l} \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} du^i \otimes du^j = \sum_{l,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k} dv^l \otimes dv^k + \sum_{i,j} \left( \sum_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} \right) \frac{\partial f}{\partial v^k} du^i \otimes du^j,$$



und der zweite Summand verschwindet im Punkt  $x$ , da  $\frac{\partial f}{\partial v^k}|_x = 0$ .

#### 20.4 Exakte 1-Formen.

Für eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  offen sei, ist  $f' : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  glatt. Natürlich interessiert man sich dafür, wann die Umkehrung gilt, also wann zu einer 1-Form  $\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodaß  $\omega = f'$ , ein solches  $\omega$  nennt man EXAKTE 1-FORM. Der Spezialfall [18.8.1](#) des Satzes von Frobenius [18.7](#) liefert so eine Integrierbarkeits-Bedingung (siehe auch [81, 6.5.2](#)):

Lokal existiert so ein  $f$  genau dann wenn  $2d\omega(x)(v_1, v_2) := \omega'(x)(v_1) \cdot v_2 - \omega'(x)(v_2) \cdot v_1 = 0 \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ . Das so definierte  $d\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$  ist für festes  $x \in M$  alternierend (= schiefsymmetrisch) und bilinear. Kürzer schreibt man  $d\omega : M \rightarrow L_{Alt}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  und sagt:  $d\omega$  ist eine 2-FORM.

Allgemein bezeichnet man eine Abbildung  $\omega : M \rightarrow L_{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  als  $k$ -FORM, wobei  $L_{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  den Raum der alternierenden  $k$ -linearen Funktionale bezeichnet. Ist  $M = \mathbb{R}^m$ , so genügt  $d\omega = 0$  um ein global gegebenes  $f$  mit  $\omega = f'$  zu finden. Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^m$ , so genügt es i.a. nicht. Dazu ein Beispiel:

#### 20.5 Beispiel.

Wir betrachten die 1-Form

$$\omega(x, y)(v, w) := \frac{-yv + xw}{x^2 + y^2} \quad \text{also} \quad \omega(x, y) := -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

auf  $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  aus [86, 3.10](#). Wegen  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  ist  $d\omega = 0$ . Angenommen, es gäbe ein  $f$  mit  $f' = \omega$ , also

$$f'(x, y) = (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Ist  $(x_0, y_0) \in S^1$  ein Punkt, in dem  $f$  eingeschränkt auf  $S^1$  ein Minimum annimmt, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_0, y_0)(-y_0, x_0) = \frac{-y_0}{x_0^2 + y_0^2} \cdot (-y_0) + \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} \cdot x_0 \\ &= 1, \text{ ein Widerspruch.} \end{aligned}$$

Für die eben betrachtete Form gilt also:  $d\omega = 0$ , aber es gibt keine Stammfunktion zu  $\omega$  auf  $M$ . Diese Diskrepanz zwischen Formen  $\omega$  mit  $d\omega = 0$  und solchen der Gestalt  $\omega = f' = df$  kann verwendet werden, um etwas über die topologischen Eigenschaften von  $M$  auszusagen (In unserem Beispiel war  $M$  nicht einfach zusammenhängend).

Wie sieht das nun für beliebige Mannigfaltigkeiten  $M$  aus?

Sei allgemeiner  $\omega : x \mapsto \omega(x)$  eine 1-Form, dann müßte  $d\omega$  eine, auf  $M$  gegebene Abbildung  $d\omega : x \mapsto d\omega(x)$  mit Werten  $d\omega(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  sein, die bilinear und alternierend ist (so eine Abbildung heißt 2-FORM). Also ist  $(d\omega)_x \in L_{Alt}^2(T_x M, \mathbb{R})$ . Analog werden wir  $k$ -Formen definieren. Dazu wollen wir jetzt die grundlegenden Tatsachen aus der multilinearen Algebra zusammenfassen.

## 21. Multilineare Algebra, Tensoren

### 21.1 Definition.

Wir stellen zuerst die (multi)linear Theorie zusammen, für ein vertiefendes Studium vgl. etwa [53] und [136, Vol.I, Cap.7]. Im folgenden bezeichnen  $E, F$ , etc. endlichdimensionale Vektorräume über  $\mathbb{R}$ . Wir bezeichnen mit  $L^k(E_1, \dots, E_k; F)$  (oder kurz  $L(E_1, \dots, E_k; F)$ ) den RAUM DER  $k$ -LINEAREN ABBILDUNGEN  $E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ . Dieser ist ein Vektorraum der endlicher Dimension  $\dim(E_1) \cdot \dots \cdot \dim(E_k) \cdot \dim(F)$ .

Die Abbildung  $T : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $k$ -linear und  $S : E_{k+1} \times \dots \times E_{k+i} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $i$ -linear.

Das TENSORPRODUKT von  $T$  mit  $S$  ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T \otimes S : E_1 \times \dots \times E_{k+i} &\rightarrow \mathbb{R} \quad (k+i)\text{-linear} \\ (T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= T(v_1, \dots, v_k) S(v_{k+1}, \dots, v_{k+i}) \end{aligned}$$

Völlig analog kann man auch das Tensorprodukt  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$  mehrerer multilinearer Funktionale  $T_i$  definieren.

### 21.2 Das Tensorprodukt von Vektorräumen.

Für endlichdimensionale Vektorräume  $E_1, \dots, E_k$  ist ihr Tensorprodukt durch

$$E_1 \otimes \dots \otimes E_k := L^k(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R})$$

definiert. Gemeinsam mit der  $k$ -linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes : E_1 \times \dots \times E_k &\rightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_k, \\ \otimes : (x_1, \dots, x_k) &\mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_k, \text{ wobei} \\ (x_1 \otimes \dots \otimes x_k)(y_1^*, \dots, y_k^*) &:= y_1^*(x_1) \cdot \dots \cdot y_k^*(x_k), \end{aligned}$$

löst es folgendes universelles Problem:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_k & \xrightarrow{\otimes} & E_1 \otimes \dots \otimes E_k \\ & \searrow \text{\textit{k-linear}} & \swarrow \text{\textit{linear}} \\ & & F \end{array}$$

$\exists!$

Ist  $\{e_i^j : 1 \leq i \leq \dim E_j\}$  eine Basis von  $E_j$ , dann ist eine Basis von  $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$  gegeben durch:

$$\{e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k : 1 \leq i_1 \leq \dim E_1, \dots, 1 \leq i_k \leq \dim E_k\}.$$

**Beweis.** Wir zeigen zuerst die Aussage über die Basis. Die Menge  $\{e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k : i_1, \dots, i_k\}$  ist linear unabhängig, denn aus  $\sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k = 0$  folgt durch Anwenden auf  $(e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k})$  die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} \left( e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} \underbrace{e_1^{j_1}(e_{i_1}^1)}_{\delta_{i_1}^{j_1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{e_k^{j_k}(e_{i_k}^k)}_{\delta_{i_k}^{j_k}} = \mu^{j_1, \dots, j_k} \end{aligned}$$

Dies ist auch ein Erzeugendensystem für  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k := L(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R})$ , denn jedes  $k$ -lineare  $\mu : E_1^* \times \cdots \times E_k^* \rightarrow \mathbb{R}$  läßt sich auf  $(x^1, \dots, x^k) \in E_1^* \times \cdots \times E_k^*$  wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned} \mu(x^1, \dots, x^k) &= \mu\left(\sum_{i_1} x_{i_1}^1 e_1^{i_1}, \dots, \sum_{i_k} x_{i_k}^k e_k^{i_k}\right) \\ &= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} x_{i_1}^1 \cdots x_{i_k}^k \cdot \mu(e_1^{i_1}, \dots, e_k^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_k} e_{i_1}^1(x^1) \cdots e_{i_k}^k(x^k) \cdot \mu(e_1^{i_1}, \dots, e_k^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} \cdot (e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k)(x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

wobei  $\mu^{i_1, \dots, i_k} := \mu(e_1^{i_1}, \dots, e_k^{i_k}) \in \mathbb{R}$ .

Folglich läßt sich jede multilineare Abbildung  $\mu : E_1 \times \cdots \times E_k \rightarrow F$  auf eine eindeutige Weise zu einer lineare Abbildung  $\tilde{\mu} : E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \rightarrow F$  durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert.  $\square$

### 21.3 Bemerkungen.

- Wir erhalten folgende natürliche Isomorphismen (den zweiten mittels vollständiger Induktion):

$$\begin{aligned} (E_1 \otimes \cdots \otimes E_k)^* &\cong L(E_1, \dots, E_k; \mathbb{R}) \cong L(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R}) \\ &= E_1^* \otimes \cdots \otimes E_k^* \\ (\dots (E_1 \otimes E_2) \otimes \cdots \otimes E_k) &\cong L((E_1 \otimes \cdots \otimes E_{k-1})^*, E_k^*; \mathbb{R}) \\ &\cong L((E_1 \otimes \cdots \otimes E_{k-1})^*; L(E_k^*, \mathbb{R})) \\ &\cong L(E_1^* \otimes \cdots \otimes E_{k-1}^*; L(E_k^*, \mathbb{R})) \\ &\cong L(E_1^*, \dots, E_{k-1}^*, L(E_k^*, \mathbb{R})) \\ &\cong L(E_1^*, \dots, E_{k-1}^*, E_k^*; \mathbb{R}) \\ &\cong E_1^* \otimes \cdots \otimes E_k^* \\ E_1 \otimes E_2 &= L(E_1^*, E_2^*; \mathbb{R}) \cong L(E_2^*, E_1^*; \mathbb{R}) = E_2 \otimes E_1 \\ E_1 \otimes \mathbb{R} &= L(E_1^*, \mathbb{R}^*; \mathbb{R}) \cong L(E_1^*, \mathbb{R}^{**}) \cong L(E_1^*, \mathbb{R}) = E_1^* \cong E_1 \\ L(E, F) &\cong L(E, F^{**}) = L(E, L(F^*, \mathbb{R})) \cong L(E, F^*; \mathbb{R}) \\ &\cong L(E^{**}, F^*; \mathbb{R}) = E^* \otimes F \\ L(E_1, \dots, E_k; F) &\cong L(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k, F) \\ &\cong (E_1 \otimes \cdots \otimes E_k)^* \otimes F \cong E_1^* \otimes \cdots \otimes E_k^* \otimes F. \end{aligned}$$

- Zu linearen Abbildungen  $T_i : E_i \rightarrow F_i$  existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $T_1 \otimes \cdots \otimes T_k : E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \rightarrow F_1 \otimes \cdots \otimes F_k$ :

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_k & \xrightarrow[k\text{-linear}]{\otimes} & E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \\ \downarrow \text{linear} & & \downarrow \text{linear} \\ T_1 \times \cdots \times T_k & & T_1 \otimes \cdots \otimes T_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_1 \times \cdots \times F_k & \xrightarrow[k\text{-linear}]{\otimes} & F_1 \otimes \cdots \otimes F_k \end{array}$$

Dabei ist  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$  auf der Basis  $(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k)$  wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes \dots \otimes T_k)(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k) &= T_1(e_{i_1}^1) \otimes \dots \otimes T_k(e_{i_k}^k) \\ &= \sum_{j_1} (T_1)_{i_1}^{j_1} f_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes \sum_{j_k} (T_k)_{i_k}^{j_k} f_{j_k}^k \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} (T_1)_{i_1}^{j_1} \dots (T_k)_{i_k}^{j_k} f_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes f_{j_k}^k \end{aligned}$$

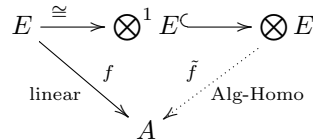
3. Zwischen den verschiedensten soeben definierten Tensorprodukten besteht der folgende Zusammenhang: Für  $T_i \in E_i^*$  stimmen die Tensorprodukte

1.  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k \in L(E_1, \dots, E_k; \mathbb{R}) \cong (E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^*$  von 21.1;
2.  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k \in E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*$  von 21.2;
3.  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow \mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}$  von 2

vermöge der Isomorphismen  $(E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^* \cong E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*$  und  $\mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$  aus 1 überein.

4.  $\otimes E := \prod_{m=0}^{\infty} (\otimes_{i=1}^m E)$  ist eine graduierte, assoziative Algebra mit 1 und heißt die TENSORALGEBRA über  $E$ . Dabei heißt eine Algebra GRADUIERT, falls  $A = \prod_{k \in \mathbb{N}} A_k$  und die Multiplikation  $A_k \times A_l$  in  $A_{k+l}$  abbildet. Die Elemente  $\omega \in A_k$  heißen HOMOGEN VOM GRAD  $k$ . Dabei setzt man  $\otimes^0 E := \otimes_{i \in \emptyset} E = \mathbb{R}$ , denn  $\prod_{i \in \emptyset} E^* = \{0\}$  und jedes  $f : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist 0-linear. Die 1 in  $\otimes E$  ist dann  $1 \in \mathbb{R} = \otimes^0 E \subseteq \otimes E$ .

5. Die Tensoralgebra hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder linearen Abbildung  $f : E \rightarrow A$ , wo  $A$  eine assoziative Algebra mit 1 ist, existiert ein eindeutiger Algebramorphismus  $\tilde{f} : \otimes E \rightarrow A$ , welcher auf  $\otimes^1 E = E$  mit  $f$  übereinstimmt:



**21.4 Definition.**

Mit  $L_{Alt}^k(E, F)$  bezeichnen wir den durch die alternierenden  $k$ -linearen Abbildungen gebildeten Teilraum von  $L^k(E, F)$ . Bekanntlich heißt eine Abbildung  $T : E \times \dots \times E \rightarrow F$  alternierend, wenn  $\pi^{**}(T) := T \circ \pi^* = \text{sgn}(\pi) \cdot T$  für alle Permutationen  $\pi \in S_k := \{\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} : \pi \text{ ist bijektiv}\}$  gilt, d.h.

$$\begin{aligned} T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) &= T(v \circ \pi) = T(\pi^* v) = (T \circ \pi^*)(v) = (\pi^{**}(T))(v) \\ &= (\text{sgn}(\pi) \cdot T)(v) = \text{sgn}(\pi) \cdot T(v_1, \dots, v_k) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in E, \end{aligned}$$

wobei wir  $(v_1, \dots, v_k)$  als Abbildung  $v : \{1, \dots, k\} \rightarrow E$  auffassen.

Eine Projektion  $\text{alt} : L^k(E, F) \rightarrow L_{Alt}^k(E, F) \subseteq L^k(E, F)$ , genannt ALTERNATOR, auf diesen Teilraum ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{alt}(T)(v_1, \dots, v_k) &:= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \\ \text{alt}(T) &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn}(\pi) \cdot \pi^{**}(T). \end{aligned}$$

Für alternierende multilineare Funktionale  $T$  und  $S$  definiert man das ÄUSSERE oder “HACK”-PRODUKT (englisch: wedge-product) durch:

$$\begin{aligned}
(T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= \frac{(k+i)!}{k!i!} \text{alt}(T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+i}) = \\
&= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \text{sgn } \pi \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+i)}) \\
&= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi_1, \pi_2} \sum_{\sigma \text{ stkw.}} \text{sgn } \sigma \text{sgn } \pi_1 \text{sgn } \pi_2 \cdot \\
&\quad \cdot T(v_{\sigma(\pi_1(1))}, \dots, v_{\sigma(\pi_1(k))}) \cdot S(v_{\sigma(\pi_2(k+1))}, \dots, v_{\sigma(\pi_2(k+i))}) \\
&= \sum_{\sigma(1) < \dots < \sigma(k)} (-1)^{\sum_{j \leq k} (\sigma(j) - j)} \cdot \\
&\quad \cdot T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot S(v_1, \dots, \overbrace{v_{\sigma(1)}}, \dots, \overbrace{v_{\sigma(k)}}, \dots, v_{k+i}).
\end{aligned}$$

In dieser Rechnung haben wir die Permutationen  $\pi$  von  $\{1, \dots, k+i\}$  in eindeutiger Weise als  $\sigma \circ (\pi_1 \sqcup \pi_2)$  geschrieben, wobei  $\pi_1$  eine beliebige Permutation von  $\{1, \dots, k\}$ ,  $\pi_2$  eine solche von  $\{k+1, \dots, k+i\}$  ist und  $\sigma$  eine von  $\{1, \dots, k+i\}$  welche auf  $\{1, \dots, k\}$  und  $\{k+1, \dots, k+i\}$  streng monoton wachsend ist. Es ist also  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$  die monotone Anordnung von  $\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$  und  $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+i)$  jene von  $\{\pi(k+1), \dots, \pi(k+i)\}$ . Damit ist  $\pi_1 = \sigma^{-1} \circ \pi|_{\{1, \dots, k\}}$  und  $\pi_2 = \sigma^{-1} \circ \pi|_{\{k+1, \dots, k+i\}}$ . Es ist  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sum_{j \leq k} (\sigma(j) - j)}$ , denn um die natürliche Ordnung von  $\sigma(1), \dots, \sigma(k+i)$  wiederherzustellen müssen für alle  $1 \leq j \leq k$  die  $\sigma(j) - j$  vielen kleineren Zahlen aus  $\{\sigma(k+1), \dots\}$  mit  $\sigma(j)$  vertauscht werden.

Falls  $T$ ,  $S$  und  $R$  linear sind, dann ist

$$(T \wedge S)(w, v) = T(w)S(v) - T(v)S(w) = \det \begin{pmatrix} T(w) & S(w) \\ T(v) & S(v) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}
2((T \wedge S) \wedge R)(w, v, u) &= \\
&= (T \wedge S)(w, v)R(u) - (T \wedge S)(v, w)R(u) \\
&+ (T \wedge S)(v, u)R(w) - (T \wedge S)(w, u)R(v) \\
&+ (T \wedge S)(u, w)R(v) - (T \wedge S)(u, v)R(w) \\
&= \left( T(w)S(v) - T(v)S(w) \right) R(u) - \left( T(v)S(w) - T(w)S(v) \right) R(u) \\
&+ \left( T(v)S(u) - T(u)S(v) \right) R(w) - \left( T(w)S(u) - T(u)S(w) \right) R(v) \\
&+ \left( T(u)S(w) - T(w)S(u) \right) R(v) - \left( T(u)S(v) - T(v)S(u) \right) R(w) \\
&= 2T(w)S(v)R(u) + 2T(v)S(u)R(w) + 2T(u)S(w)R(v) \\
&- 2T(v)S(w)R(u) - 2T(w)S(u)R(v) - 2T(u)S(v)R(w) \\
&= 2 \det \begin{pmatrix} T(w) & S(w) & R(w) \\ T(v) & S(v) & R(v) \\ T(u) & S(u) & R(u) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und folglich verschwinden auch im 3-fachen Produkt von 1-Formen alle Faktoren. Dies ist der Grund für die Wahl des Faktors  $\frac{(k+i)!}{k!i!}$  bzw.  $\frac{1}{k!i!}$ , siehe auch [21.6.2](#). Analog zu obiger Formel für  $T \wedge S$  können wir auch direkt ein Hackprodukt mehrerer multilinearer alternierender Funktionale definieren. Beachte noch, daß

$$T \wedge S = (-1)^{ki} S \wedge T,$$

denn

$$\begin{aligned}
 (T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= \\
 &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+i)}) \\
 &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi'} \operatorname{sgn}(\pi' \circ \sigma) \cdot T(v_{\pi'(\sigma(1))}, \dots, v_{\pi'(\sigma(k))}) \cdot S(v_{\pi'(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\pi'(\sigma(k+i))}) \\
 &= \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi'} \operatorname{sgn}(\pi') \cdot S(v_{\pi'(1)}, \dots, v_{\pi'(i)}) \cdot T(v_{\pi'(i+1)}, \dots, v_{\pi'(i+k)}) \\
 &= (-1)^{ki} (S \wedge T)(v_1, \dots, v_{k+i})
 \end{aligned}$$

wobei  $\pi = \pi' \circ \sigma$  und  $\sigma$  jene Permutation ist, welche den Block  $(1, \dots, k)$  mit  $(k+1, \dots, k+i)$  vertauscht und Vorzeichen  $(-1)^{ik}$  hat, d.h.

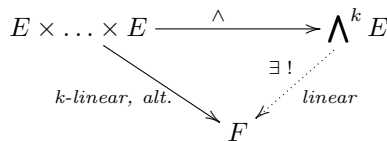
$$\sigma(j) := \begin{cases} j+i & \text{für } j \leq k \\ j-k & \text{für } j > k. \end{cases}$$

**21.5 Lemma (Das äußere Produkt eines Vektorraums).**

Es sei das  $k$ -fache äußere Produkt des Vektorraums  $E$  definiert durch  $\bigwedge^k E := L^k_{\text{Alt}}(E^*, \mathbb{R})$  und  $\wedge : E \times \dots \times E \rightarrow \bigwedge^k E \subseteq \bigotimes^k E = L^k(E^*, \mathbb{R})$  sei die folgende alternierende,  $k$ -lineare Abbildung:

$$\begin{aligned}
 \wedge : (v_1, \dots, v_k) &\mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \quad \text{mit} \\
 (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(w^1, \dots, w^k) &:= \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) w^{\pi(1)}(v_1) \cdot \dots \cdot w^{\pi(k)}(v_k) \\
 &= k! \operatorname{alt}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)(w^1, \dots, w^k), \\
 \text{also } v_1 \wedge \dots \wedge v_k &:= k! \operatorname{alt}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k).
 \end{aligned}$$

Das äußere Produkt löst folgendes universelles Problem:



Ist  $\{e_i\}_{i=1}^m$  eine Basis von  $E$  (also  $m = \dim E$ ), dann ist  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$  eine Basis von  $\bigwedge^k E$ , also ist  $\dim \bigwedge^k E = \binom{m}{k}$ . Speziell für  $k = \dim E$  erzeugt  $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$  ganz  $\bigwedge^k E$  und

$$(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)(w^1, \dots, w^k) = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) w_1^{\pi(1)} \cdot \dots \cdot w_k^{\pi(k)} = \det(w^1, \dots, w^k).$$

**Beweis.** Es ist  $\wedge : E \times \dots \times E \rightarrow \bigwedge^k E$  durch  $E \times \dots \times E \xrightarrow{\otimes} \bigotimes^k E \xrightarrow{k! \operatorname{alt}} \bigwedge^k E$  gegeben, folglich bildet  $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$  ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^k E = L^k_{\text{Alt}}(E; \mathbb{R})$ .

Dieses ist auch linear unabhängig, denn aus  $\sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0$  folgt durch Anwenden auf  $(e^{j_1}, \dots, e^{j_k})$  mit  $j_1 < \dots < j_k$  die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \right) (e^{j_1}, \dots, e^{j_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) (e^{j_1}, \dots, e^{j_k}) \\ &= \mu^{j_1, \dots, j_k} \end{aligned}$$

Folglich läßt sich jede alternierende multilineare Abbildung  $\mu : E \times \dots \times E \rightarrow F$  auf eine eindeutige Weise zu einer lineare Abbildung  $\tilde{\mu} : \bigwedge^k E \rightarrow F$  durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert.  $\square$

### 21.6 Bemerkungen.

1. Es gelten die folgenden Identitäten:

$$L_{Alt}^k(E, F) \cong L\left(\bigwedge^k E, F\right) \text{ und } \left(\bigwedge^k E\right)^* \cong L_{Alt}^k(E, \mathbb{R}) \cong L_{Alt}^k(E^{**}, \mathbb{R}) = \bigwedge^k E^*$$

2. Zu jeder linearen Abbildung  $T : E \rightarrow F$  existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\bigwedge^k T : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^k F$ :

$$\begin{array}{ccc} E \times \dots \times E & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k E \\ T \times \dots \times T \downarrow & & \exists ! \downarrow \bigwedge^k T \\ F \times \dots \times F & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k F \end{array}$$

Damit wird  $\bigwedge^k$  zu einem Funktor.

In der Tat ist  $\bigwedge^k T$  auf der Basis  $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})$  wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \left(\bigwedge^k T\right)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) &:= T(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge T(e_{i_k}) \\ &= \sum_{j_1} T_{i_1}^{j_1} f_{j_1} \wedge \dots \wedge \sum_{j_k} T_{i_k}^{j_k} f_{j_k} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} T_{i_1}^{j_1} \cdot \dots \cdot T_{i_k}^{j_k} f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_k} \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{\pi} T_{i_1}^{j_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot T_{i_k}^{j_{\pi(k)}} f_{j_{\pi(1)}} \wedge \dots \wedge f_{j_{\pi(k)}} \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \sum_{\pi} T_{i_1}^{j_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot T_{i_k}^{j_{\pi(k)}} \operatorname{sgn}(\pi) f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_k} \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det(T_{i_s}^{j_r})_{r,s} f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_k}. \end{aligned}$$

3. Für  $m = \dim(E)$  ist der Raum  $\bigwedge E := \coprod_{i=0}^m \bigwedge^i E$  eine graduiert-kommutative assoziative Algebra mit  $1 \in \bigwedge^0 E := \mathbb{R}$ , die sogenannte ÄUSSERE ALGEBRA über  $E$ . Dabei heißt eine graduierte Algebra  $A = \coprod_{k \in \mathbb{N}} A_k$  GRADUIERT-KOMMUTATIV, falls:  $a \in A_k, b \in A_j \Rightarrow a \cdot b = (-1)^{kj} b \cdot a$ .  
Es ist  $\dim(\bigwedge E) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m$ .

## 22. Vektorbündel-Konstruktionen

### 22.1 Definition (Tensorfelder und Differentialformen).

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Als Vektorraum  $E$  verwenden wir nun den Tangentialraum  $T_x M$  von  $M$  bei  $x$ . Dann ist  $E^* = (T_x M)^*$ , und wir bilden das Tensorprodukt

$$\underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} = L^{p+q}(T_x^* M, \dots, T_x M; \mathbb{R}).$$

Die Elemente dieses Vektorraums bezeichnet man als  $p$ -FACH KONTRAVARIANTE,  $q$ -FACH KOVARIANTE VEKTOREN oder Tensoren. Eine Basis von  $T_x M$  ist gegeben durch  $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$ , wobei  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten um  $x$  von  $M$  sind. Die duale Basis von  $(T_x M)^*$  haben wir mit  $(du^i)_{i=1}^m$  bezeichnet. Nach [21.3](#) erhalten wir als Basis des Tensorprodukts:

$$\left( \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \right)_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, m}$$

Analog bilden wir  $\Lambda^k(T_x M)^* \cong L_{alt}^k(T_x M, \mathbb{R})$ . Die Elemente dieses äußeren Produktes nennt man  $k$ -FORMEN und eine Basis bildet

$$(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k})_{i_1 < \cdots < i_k}.$$

Lassen wir nun noch den Punkt  $x \in M$  variieren, so können wir Abbildungen

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}}$$

betrachten. Diese heißen  $p$ -FACH KONTRAVARIANTE UND  $q$ -FACH KOVARIANTE TENSORFELDER.

Eine Abbildung

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \Lambda^k(T_x M)^*$$

heißt DIFFERENTIALFORM VOM GRAD  $k$ .

Um von der Glattheit eines Tensorfelds (oder einer Differentialform) sprechen zu können sollten wir die Familie der Vektorräume

$$\left( \underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} \right)_{x \in M}$$

zu einer Mannigfaltigkeit oder besser gleich zu einem Vektorbündel über  $M$  machen.

Wir gehen dabei wie beim Tangentialbündel und dem daraus konstruierten Kotangentialbündel vor:

### 22.2 Direkte Summe von Vektorbündel.

Seien  $E \xrightarrow{-p} M$  und  $F \xrightarrow{-q} M$  zwei Vektorbündel über  $M$  sowie  $\varphi^E$  eine Trivialisierung von  $E$  über  $U \subset M$  und  $\varphi^F$  eine solche von  $F$  über dem o.B.d.A. gleichen  $U$ . Mit  $\psi^E : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$  und  $\psi^F : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^l)$  bezeichnen wir die Transitionsfunktionen zu je zwei solcher Vektorbündelkarten über  $U$  und  $V$ . Wir wollen nun die disjunkte Vereinigung  $E \oplus F := \bigsqcup_{x \in M} (E_x \oplus F_x)$  zu einem Vektorbündel machen. Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E \oplus F} := \varphi_x^E \oplus \varphi_x^F : \mathbb{R}^{k+l} \cong \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l \xrightarrow{\cong} E_x \oplus F_x.$$

Die Transitionsfunktionen  $\psi^{E \oplus F} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{k+l})$  sind dann durch

$$\psi^{E \oplus F}(x) := \psi^E(x) \oplus \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^k) \times GL(\mathbb{R}^l) \hookrightarrow GL(\mathbb{R}^{k+l})$$



gegeben. Die Matrixdarstellung von  $\psi^{E \oplus F}(x)$  ist  $\begin{pmatrix} [\psi^E(x)] & 0 \\ 0 & [\psi^F(x)] \end{pmatrix}$ . Also ist  $\psi^{E \oplus F}$  glatt. Somit ist  $E \oplus F \rightarrow M$  ein Vektorbündel, die sogenannte WHITNEY-SUMME von  $E$  und  $F$ .

### 22.3 Tensorprodukt von Vektorbündeln.

Analog zur direkten Summe machen wir die disjunkte Vereinigung  $E \otimes F := \bigsqcup_{x \in M} (E_x \otimes F_x)$  zu einem Vektorbündel, dem sogenannten TENSORPRODUKT von  $E$  und  $F$ . Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E \otimes F} := \varphi_x^E \otimes \varphi_x^F : \mathbb{R}^{kl} \cong \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \xrightarrow{\cong} E_x \otimes F_x.$$

Die Transitionsfunktionen  $\psi^{E \otimes F} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{kl})$  sind dann durch

$$\psi^{E \otimes F}(x) := \psi^E(x) \otimes \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^{kl}) \subset L(\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l)$$

gegeben. Die Matrixdarstellung von  $\psi^{E \otimes F}(x)$  ist  $(a_i^r b_j^s)_{(i,j),(r,s)}$  nach [21.3.2](#), wobei  $(a_i^r)$  die Matrix von  $\psi^E(x)$  und  $(b_j^s)$  die Matrix von  $\psi^F(x)$  sei. Also ist  $\psi^{E \otimes F}$  glatt und  $E \otimes F \rightarrow M$  ein Vektorbündel.

### 22.4 Äußeres Produkt eines Vektorbündels.

Schließlich machen wir die disjunkte Vereinigung  $\bigwedge^p E := \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^p E_x$  zu einem Vektorbündel, dem sogenannten  $p$ -FACHEN ÄUSSEREN PRODUKT von  $E$ . Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{\bigwedge^p E} := \bigwedge^p (\varphi_x^E) : \mathbb{R}^{\binom{k}{p}} \cong \bigwedge^p \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} \bigwedge^p E_x.$$

Die Transitionsfunktionen  $\psi^{\bigwedge^p E} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}})$  sind dann durch

$$\psi^{\bigwedge^p E}(x) := \bigwedge^p (\psi^E(x)) \in GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}}) \subset L\left(\bigwedge^p \mathbb{R}^k, \bigwedge^p \mathbb{R}^k\right)$$

gegeben. Die Matrixdarstellung von  $\psi^{\bigwedge^p E}(x)$  ist  $(\det((a_{i_s}^{j_r})_{r,s}))_{i_1 < \dots < i_p, j_1 < \dots < j_p}$  nach [21.6.2](#), somit sind die Transitionsfunktionen glatt und  $\bigwedge^p E$  vector bundle.

Allgemeiner hat man folgende Konstruktion:

### 22.5 Theorem (Funktorielle Vektorbündel Konstruktionen).

*Es sei  $\mathcal{F}$  eine Zuordnung, die jeder Familie von  $(k+i)$  endlichdimensionalen Vektorräumen einen endlichdimensionalen Vektorraum zuweist und die FUNKTORIELL ist.*

*Funktoriell bedeutet, daß jedem  $(k+i)$ -Tupel linearer Abbildungen  $T_j : E_j \rightarrow E_j$  für  $j \leq k$  "kontravariant in den vorderen Variablen"  $T_j : E_j \rightarrow F_j$  für  $k < j$  "kovariant in den hinteren Variablen" eine lineare Abbildung*

$$\mathcal{F}(T_1, \dots, T_{k+i}) : \mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) \rightarrow \mathcal{F}(F_1, \dots, F_{k+i})$$

*zugeordnet wird, die mit Komposition und Identität verträglich ist und glatt von  $T_1, \dots, T_{k+i}$  abhängt.*

*Dann ist für  $(k+i)$  viele Vektorbündel  $p_j : E_j \rightarrow M$  eine natürliche Vektorbündel-Struktur auf  $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) := \bigsqcup_x \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x)$  gegeben.*

Ein Beispiel eines solchen Funktors ist die direkte Summe  $\oplus$ ; der auf Vektorbündel angewandt die Whitney-Summe liefert.

Ein weiteres ist der Dualraum-Funktor, der auf das Tangentenbündel  $\pi : TM \rightarrow M$  angewandt das Kotangentenbündel  $T^*M = \bigsqcup_x (T_x M)^* \rightarrow M$  liefert.

Andere Beispiele sind das Tensorprodukt und das äußere Produkt sowie Kombinationen von ihnen, wie  $\bigwedge^k T^*M = L_{Alt}^k(TM, \mathbb{R}) = (\bigwedge^k TM)^*$ .

**Beweis.** Die Vektorbündelkarten  $\mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})$  werden aus jenen für  $E_i$  faserweise durch folgende Formel gewonnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})|_x &= \\ &= \mathcal{F}\left((\psi_1)_x^{-1}, \dots, (\psi_k)_x^{-1}, (\psi_{k+1})_x, \dots, (\psi_{k+i})_x\right) \\ &= \mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})|_x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1}, \dots, \mathbb{R}^{N_{k+i}}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x) \end{aligned}$$

Die zugehörigen Transitionsfunktionen sind dann die Zusammensetzung folgender drei Abbildungen:

$$\begin{aligned} (\psi_1|_x, \dots, \psi_{k+i}|_x) : U \cap V &\rightarrow GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\ \text{inv} \times \dots \times \text{id} : GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) &\rightarrow GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\ \mathcal{F} : GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) &\rightarrow GL\left(\mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1}, \dots, \mathbb{R}^{N_{k+i}})\right) \quad \square \end{aligned}$$

## 23. Differentialformen

### 23.1 Definition (glatte Tensorfelder und Differentialformen).

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN  $p$ -FACH KONTRAVARIANT UND  $q$ -FACH KOVARIANTEN TENSORFELDER oder kurz  $p$ - $q$ -TENSORFELDER, d.h. der glatten Schnitte des Vektorbündels

$$\underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(TM)^* \otimes \dots \otimes (TM)^*}_{q\text{-mal}} \rightarrow M$$

wird auch mit  $\mathcal{T}_p^q(M) := C^\infty(M \leftarrow \bigotimes^p TM \otimes \bigotimes^q T^*M)$  bezeichnet. Insbesondere sind die 0-0-Tensorfelder gerade die reell-wertigen Funktionen, die 1-0-Tensorfelder die Vektorfelder und die 0-1-Tensorfelder die 1-Formen.

Lokal läßt sich jedes Tensorfeld  $\Phi$  als

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ j_1, \dots, j_q=1}}^{\dim(M)} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$$

schreiben. Und wir wissen, daß  $\Phi$  genau dann glatt ist, wenn alle Komponenten  $\Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$  glatte reell-wertige Funktionen sind.

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN DIFFERENTIALFORMEN VOM GRAD  $p$ , d.h. glatten Schnitte des Vektorbündels  $\bigwedge^p (TM)^*$  wird mit  $\Omega^p(M)$  bezeichnet. Diesen Raum können wir auch anders beschreiben:

$$\begin{aligned} \Omega^p(M) &:= C^\infty\left(M \leftarrow \bigwedge^p (TM)^*\right) \\ &\cong C^\infty\left(M \leftarrow \left(\bigwedge^p TM\right)^*\right) \\ &\cong \left\{ \omega : \bigwedge^p TM \rightarrow \mathbb{R} : \omega_x \in L\left(\bigwedge^p T_x M, \mathbb{R}\right) \forall x \right\} \\ &\cong \left\{ \omega : \prod^p TM \rightarrow \mathbb{R} : \omega_x \in L_{Alt}^p(T_x M, \mathbb{R}) \forall x \right\} \end{aligned}$$

Wegen  $\bigwedge^0(TM)^* = M \times \mathbb{R}$  stimmt der Raum  $\Omega^0(M)$  der 0-Formen mit  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  überein. Jede Differentialform  $\omega$  vom Grad  $k$  läßt sich lokal als

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

schreiben. Wieder gilt, daß  $\omega$  glatt ist, wenn alle seine lokalen Komponenten  $\omega_{i_1, \dots, i_k}$  glatt sind. Für diese ergibt sich aus

$$\begin{aligned} & (du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}) \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) \stackrel{\boxed{21.5}}{=} \\ &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) du^{i_1} \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(1)}}} \right) \cdot \dots \cdot du^{i_k} \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(k)}}} \right) \\ &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(\pi) & \text{falls eine Permutation } \pi \text{ existiert mit } j_{\pi(k)} = i_k \forall k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

folgende Formel für  $j_1 < \dots < j_k$ :

$$\begin{aligned} \omega \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) &= \left( \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) \\ &= \omega_{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

### 23.2 Bemerkung.

Wegen

$$\underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \dots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} \cong L(\underbrace{(T_x M)^*, \dots, (T_x M)^*}_{p\text{-mal}}, \underbrace{T_x M, \dots, T_x M}_{q\text{-mal}}; \mathbb{R})$$

können wir ein  $p$ - $q$ -Tensorfeld

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$$

punktweise auf  $p$  Kotangentialvektoren  $\omega^1, \dots, \omega^p$  und  $q$  Tangentialvektoren  $\xi_1, \dots, \xi_q$  anwenden:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) &= \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \right) \left( \sum_{r_1} \omega_{r_1}^1 du^{r_1}, \dots, \sum_{s_q} \xi_{s_q}^{j_q} \frac{\partial}{\partial u^{s_q}} \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q \\ r_1, \dots, r_p \\ s_1, \dots, s_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{r_1}^1 \delta_{i_1}^{r_1} \cdot \dots \cdot \xi_{s_q}^{j_q} \delta_{s_q}^{j_q} \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_q^{j_q}. \end{aligned}$$

**Satz (Tensorfelder als  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildungen).**

Obige Abbildung liefert einen linearen Isomorphismus des Raums der glatten  $p$ - $q$ -Tensorfelder auf  $M$  mit folgenden Raum  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilinearen Abbildungen:

$$\mathcal{T}_p^q(M) \cong \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\Omega^1(M), \dots, \mathfrak{X}(M); C^\infty(M, \mathbb{R}))$$

**Beweis.** Wir gehen analog zum Beweis von [19.11](#) vor:

Offensichtlich wirkt jedes Tensorfeld  $\Phi$  auf 1-Formen  $\omega^1, \dots, \omega^p \in \Omega^1(M)$  und auf Vektorfelder  $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathfrak{X}(M)$  als  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineare Abbildung, durch

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) := \Phi_x(\omega^1(x), \dots, \omega^p(x), \xi_1(x), \dots, \xi_q(x))$$

und wegen der obigen lokalen Formel

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_q^{j_q}$$

liegt  $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Umgekehrt sei  $\Phi : \Omega^1(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  eine  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildung. Falls eines der Vektorfelder oder 1-Formen  $\sigma$  lokal um  $x \in M$  verschwindet, so auch  $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)$ , denn sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  so gewählt, daß  $f = 1$  auf dem Träger jenes Schnittes  $\sigma$  und  $f(x) = 0$  gilt. Dann ist  $f \cdot \sigma = \sigma$  und wegen der  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Linearität ist

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) = f(x) \cdot \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) = 0.$$

Folglich erhalten wir die lokale Formel

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_q^{j_q},$$

mit  $\Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := \Phi(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, du^{j_q})$ , deren rechte Seite an der Stelle  $x$  nur von Wert der 1-Formen und Vektorfelder an dieser Stelle abhängt. Also definiert

$$\Phi_x(\omega^1|_x, \dots, \xi_q|_x) := \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x)$$

ein glattes Tensorfeld, das gesuchte inverse Bild zu  $\Phi$ . □

### 23.3 Satz (Differentialformen als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildungen).

Es existiert ein linearer Isomorphismus von  $\Omega^k(M)$  mit  $\left\{ \omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) : \omega \text{ ist } k\text{-linear alternierend und } C^\infty(M, \mathbb{R})\text{-homogen} \right\}$ .

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Offensichtlich ist  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = \omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p)$   $k$ -linear und alternierend.

Die Abbildung  $\omega$  ist aber auch  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen:

$$\begin{aligned} \omega(f \xi_1, \dots, \xi_k)|_p &= \omega_p(f_p \xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) = f(p) \omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) \\ &= f \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p \end{aligned}$$

Weiters ist  $M \xrightarrow{(\xi_1, \dots, \xi_k)} TM \oplus \dots \oplus TM \xrightarrow[\boxed{23.1}]{\omega} \mathbb{R}$  glatt, also  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

( $\Leftarrow$ ) Sei  $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit obigen Eigenschaften. Es ist z.z., daß  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p$  nur von  $\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p$  abhängt, denn dann können wir definieren:  $\omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) := \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p$ .

Sei  $\xi_1 = 0$  lokal um  $p$ , sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f(p) = 0$  und  $f = 1$  dort wo  $\xi_1 \neq 0$ . Dann gilt  $f \cdot \xi_1 = \xi_1$  und somit wie zuvor

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = \omega(f\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = f(p) \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = 0.$$

Sei weiters  $\xi_1 = \sum_{i=1}^m \xi_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  lokal. Dann gilt

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega\left(\sum_i \xi_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \xi_2, \dots, \xi_k\right) = \sum_i \xi_1^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \xi_2, \dots, \xi_k\right)$$

und da  $\xi_1|_p = 0$  gilt  $\xi_1^i|_p = 0 \forall i$  und somit  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = 0$ .

Sei  $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$  eine lokale Darstellung von  $\omega$ , dabei sei  $dx^I := dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  für  $I = (i_1, \dots, i_k)$  mit  $i_1 < \dots < i_k$ . Es ist  $\omega_I(p) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)|_p$  glatt bei  $p$ , also ist  $\omega \in \Omega^k(M)$ .  $\square$

## 24. Differentialformen auf Riemann MF

### 24.1 Bemerkung zur Dualität.

Für offenes  $M \subset \mathbb{R}^m$  können wir das Tangentialbündel und das Kotangentialbündel identifizieren, denn  $TM = M \times \mathbb{R}^m$  und  $T^*M = M \times (\mathbb{R}^m)^*$ . Es sind also sowohl die Vektorfelder als auch die 1-Formen auf  $M$  mit Abbildungen  $M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ident. Für allgemeine Mannigfaltigkeiten  $M$  gibt es aber keinen solchen kanonischen Isomorphismus zwischen  $T_x M$  und  $(T_x M)^*$ . Wir wollen nun Mannigfaltigkeiten beschreiben, für welche es einen solchen dennoch gibt. Inwiefern ist denn ein endlich dimensionaler Vektorraum  $E$  und sein Dualraum  $E^*$  isomorph? Da sie die gleiche Dimension haben sind sie isomorph. Aber um einen solchen Isomorphismus angeben zu können, verwendet man üblicherweise eine Basis von  $E$  und als Bildvektoren die duale Basis von  $E^*$ . Wählt man eine andere Basis, so ändert sich auch der Isomorphismus. So können wir auf einer Mannigfaltigkeit nicht vorgehen, denn in  $T_x M$  haben wir keine ausgezeichnete Basis zur Verfügung.

Eine zweite Möglichkeit so einen Isomorphismus zu erhalten ist die Verwendung eines inneren Produkts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $E$ . Dann induziert diese bilineare Form eine lineare Abbildung  $\sharp : E \rightarrow L(E, \mathbb{R}) = E^*$  durch  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ . Diese ist injektiv, denn:  $\forall w : \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ . Aus Dimensionsgründen ist sie somit ein Isomorphismus. Ihre Umkehrabbildung bezeichnen wir mit  $\flat := \sharp^{-1} : E^* \rightarrow E$ . Wegen  $\sharp(\xi)(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle$  ist  $\langle \flat\omega, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \sharp(\xi)(\eta) = \omega(\eta)$ , wobei wir  $\xi := \flat\omega$  gesetzt haben und somit  $\omega = \sharp\xi$  ist.

Wie sieht  $\sharp$  in Koordinaten aus? Sei  $(e_i)$  eine Orthonormal(!)basis von  $E$  und  $(e^i)$  die dazugehörige duale Basis. Dann ist  $\sharp(e_i)(e_j) := \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = e^i(e_j)$ , also bildet  $\sharp$  die Basis  $(e_i)$  auf die duale Basis  $(e^i)$  ab.

Falls  $(g_i)$  eine beliebige Basis von  $E$  ist und  $(g^i)$  die dazugehörige duale Basis von  $E^*$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \sharp(g_i)(g_k) &= \langle g_i, g_k \rangle =: g_{i,k} = \sum_j g_{i,j} g^j(g_k) \\ \Rightarrow \sharp(g_i) &= \sum_j g_{i,j} g^j \text{ und} \\ \sharp(v) &= \sharp\left(\sum_i v^i g_i\right) = \sum_i v^i \sum_j g_{i,j} g^j = \sum_j \left(\sum_i g_{i,j} v^i\right) g^j \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit  $v^i$  die Koordinaten des Vektors  $v \in E$  bezüglich der Basis  $(g_i)$  und mit  $v_j$  die Koordinaten des dazugehörigen dualen Vektors  $\sharp(v) \in E^*$  bezüglich der dualen Basis  $(g^i)$ , so gilt also:

$$v_j = \sum_i g_{i,j} v^i.$$

Sei nun  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $T_x M$  ein Teilraum vom  $\mathbb{R}^n$  und erbt somit das übliche innere Produkt von  $\mathbb{R}^n$ . Also ist  $(T_x M)^*$  isomorph zu  $T_x M$  vermöge dem Isomorphismus  $\sharp : T_x M \rightarrow (T_x M)^*$ . Wir erhalten also auch eine faserlineare Bijektion der Bündel  $TM \rightarrow M$  und  $T^*M \rightarrow M$ . In Koordinaten ist sie durch

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \mapsto \sum_j g_{i,j} du^j$$

gegeben, wobei  $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$  mit  $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$  und  $g^i = du^i$ . Da die  $g_i$  glatte Funktionen von  $M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind, sind alle Koeffizienten  $g_{i,j} : M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, und somit die Bündel  $TM$  und  $T^*M$  isomorph.

Es entsprechen sich also auch die glatten Schnitte eindeutig, d.h.  $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^1(M)$ . Das Vektorfeld, welches einer exakten 1-Form  $df$  entspricht, heißt GRADIENTENFELD  $\text{grad}(f)$  von  $f$ . Für offene Teilmannigfaltigkeiten  $M \subseteq \mathbb{R}^M$  wird die Koordinatendarstellung von  $\text{grad}(f)$  aus jener von  $df$  durch transponieren gewonnen, nicht aber für allgemeine  $M$ .

## 24.2 Tensorfelder auf Riemann-Mannigfaltigkeiten.

Allgemein wissen wir, daß  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  ist und wir wollen nun  $\Omega^1(M)$  anders beschreiben. Sei dazu vorerst  $E$  ein endlich dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. Wir haben dann nach [24.1] einen Isomorphismus  $\sharp : E \xrightarrow{\cong} E^*$  definiert durch  $\sharp : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ . Sein Inverses bezeichnen wir mit  $\flat := \sharp^{-1}$ . Sei  $(e_i)$  eine Orthonormalbasis von  $E$  und  $(e^i)$  die duale Basis von  $E^*$ , dann ist:

$$\sharp : x = \sum_i x^i e_i \in E \mapsto \sum_i x^i e^i \in E^*.$$

Sei  $(M, g)$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit mit dem zugehörigen Tangentialraum  $\sharp : T_x M \cong (T_x M)^*$ . Eine Basis im Tangentialraum ist gegeben durch  $\frac{\partial}{\partial u^i}$ , diese wird nach [24.1] abgebildet auf  $\sharp(\frac{\partial}{\partial u^i}) = \sum_j g_{j,i} du^j$ . Und allgemeiner wird  $\xi \in T_x M$  wie folgt abgebildet:

$$\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in T_x M \xrightarrow{\sharp} \omega = \sum_i \omega_i du^i \in (T_x M)^*.$$

wobei  $\omega_i = \sum_j g_{i,j} \xi^j$ ,  $\xi^i = \sum_j g^{i,j} \omega_j$ ,  $g_{i,j} := \langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \rangle$  und  $(g^{i,j}) := (g_{i,j})^{-1}$  ist. Es folgt, daß auf kanonische Weise  $TM \cong T^*M$  ist, und somit der Raum der Vektorfelder  $\mathfrak{X}(M)$  kanonisch isomorph zum Raum der 1-Formen  $\Omega^1(M)$  ist.

Allgemeiner gilt  $\otimes^p TM \otimes \otimes^q T^*M \cong \otimes^{p+q} TM \cong \otimes^{p+q} T^*M$  und somit

$$\mathcal{T}_p^q(M) \cong \mathcal{T}_{p+q}^0(M) \cong \mathcal{T}_0^{p+q}(M)$$

## 24.3 Volumensform.

Sei  $E$  ein endlich dimensionaler, orientierter Vektorraum mit innerem Produkt. Falls  $(e_i)_{i=1}^m$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $E$  ist, so definieren wir  $\det \in L_{Alt}^m(E; \mathbb{R})$  durch  $\det(e_1, \dots, e_m) := 1$ . Um zu zeigen, daß diese Definition nicht von der gewählten Basis abhängt wählen wir beliebige Vektoren  $g_i \in E$  und

betrachten die Abbildung  $A : E \rightarrow E$ , welche  $e_j$  auf  $g_j := \sum_i a_j^i e_i$  abbildet. Dann ist

$$\begin{aligned} \det(g_1, \dots, g_m) &= \det\left(\sum_{j_1} a_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_m} a_m^{j_m} e_{j_m}\right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_m} a_1^{j_1} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m} \underbrace{\det(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})}_{\substack{=0, \text{ falls } j_1, \dots, j_m \text{ keine} \\ \text{Permutation von } 1, \dots, m}} \\ &= \sum_{\substack{j \text{ Permutation} \\ j}} a_1^{j(1)} \cdot \dots \cdot a_m^{j(m)} \underbrace{\text{sgn}(j) \det(e_1, \dots, e_m)}_{=1} \\ &= \det((a_i^j)_{i,j}). \end{aligned}$$

Falls also  $(g_i)_i$  insbesondere eine andere positiv orientierte Orthonormalbasis ist, so ist  $[A] \in SO(n)$ , also  $1 = \det[A] = \det(g_1, \dots, g_m)$ .

Da wir diese Konstruktion auf den Tangentialraum einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit anwenden wollen (dort aber nicht eine orthonormal-Basis) sondern nur eine (positiv orientierte) Basis  $(\frac{\partial}{\partial u^j})_j$  gegeben haben, benötigen wir auch für so eine Basis  $(g_j)$  eine Formel für die Determinante: Dazu betrachten wir wieder die inneren Produkte

$$g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_k a_i^k e_k, \sum_l a_j^l e_l \right\rangle = \sum_{k,l} a_i^k a_j^l \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{k,l}} = \sum_k a_i^k a_j^k$$

und erhalten  $(g_{i,j})_{i,j} = [A \cdot A^t]$  und weiters

$$\det((g_{i,j})_{i,j}) = \det([A] \cdot [A]^t) = (\det[A])^2$$

und schließlich (wegen  $\det[A] > 0$ )

$$\det(g_1, \dots, g_m) = \det[A] = \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j})} =: \sqrt{G}.$$

Für jede orientierte (siehe [86, 34.3]) Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist  $\det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M, \mathbb{R})$  und wir definieren die VOLUMSFORM  $\text{vol}_M \in \Omega^m(M)$  der Mannigfaltigkeit durch

$$\text{vol}_M(x) := \det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M; \mathbb{R}).$$

Diese Volumsform wollen wir mittels lokaler Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$  berechnen. Es bilden die  $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$  eine Basis in  $T_x M$ , von der wir annehmen dürfen, daß sie positiv orientiert ist, wenn wir ein Orientierungs-erhaltende Karte  $\varphi = (u^1, \dots, u^m)^{-1}$  verwenden. Es ist  $\text{vol} = \text{vol}_{1, \dots, m} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^m$  mit

$$\begin{aligned} \text{vol}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) &= \left(\text{vol}_{1, \dots, m} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^m\right) \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) \\ &= \text{vol}_{1, \dots, m} \cdot \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \underbrace{du^1\left(\frac{\partial}{\partial u^{\pi(1)}}\right)}_{\delta_{\pi(1),1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{du^m\left(\frac{\partial}{\partial u^{\pi(m)}}\right)}_{\delta_{\pi(m),m}} = \text{vol}_{1, \dots, m}, \end{aligned}$$

da  $\pi$  die Identität sein muß, siehe auch [23.1]. Wegen obiger Rechnung ist

$$\text{vol}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) = \det(g_1, \dots, g_m) = \sqrt{G}$$

$$\text{mit } G := \det((g_{i,j})_{i,j}) \text{ und } g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right).$$

Wir erhalten für orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m$  folgenden Isomorphismus:

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \Omega^m(M), \quad f \mapsto f \cdot \text{vol}_M.$$

## 25. Graduierte Derivationen

### 25.1 Lemma (Algebra der Differentialformen).

Es ist  $\Omega(M) := \coprod_k \Omega^k(M)$  eine graduiert kommutative Algebra bezüglich dem punktwweisen Hackprodukt (siehe [21.4](#))

$$\begin{aligned}
 (\alpha \wedge \beta)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k+i}) &= \\
 &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_x(\xi_{\pi(1)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \cdot \beta_x(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+i)}),
 \end{aligned}$$

für  $\alpha \in \Omega^k(M)$ ,  $\beta \in \Omega^i(M)$  und  $\xi_j \in T_x M$ . Für parakompakte Mannigfaltigkeiten  $M$  ist sie als Algebra durch  $\{f, df : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$  erzeugt.

Beachte, daß  $f \cdot \omega = f \wedge \omega$  für  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M)$  und  $\omega \in \Omega(M)$  gilt.

**Beweis.** Da die Fasern  $\bigwedge T_x^* M = \coprod_k \bigwedge^k T_x^* M$  graduiert kommutative Algebren sind, ist auch  $\Omega(M) = C^\infty(M \leftarrow \bigwedge T^* M)$  eine graduiert kommutative Algebra. Lokal wird  $\Omega(M)$  durch  $\{f, df : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$  erzeugt, denn lokal ist  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$ . Um das auch global zu erhalten, benötigen wir einen endlichen Atlas von  $M$ . Für zusammenhängende parakompakte Mannigfaltigkeiten existiert ein solcher nach [9.8](#). Wir wählen eine Partition  $\{f_1, \dots, f_N\}$  der Eins, welche dem zugehörigen Vektorbündel-Atlas von  $T^*M$  untergeordnet ist. Dann ist  $\omega = \sum_j f_j \omega$  und  $f_j \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{j; i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$ , wobei  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten auf eine Umgebung  $W_i$  von  $\operatorname{Trg}(f_j)$  sind, die zu globalen glatten Funktionen auf  $M$  erweitert wurden und die Koeffizienten  $\omega_{j; i_1, \dots, i_k}$  globale glatte Funktionen mit Träger in  $W_i$  sind.  $\square$

### 25.2 Zurückziehen von Formen.

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt, dann haben wir die Tangentialabbildung  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , sowie deren Adjungierte  $(T_p f)^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ . Falls nun  $p$  nicht durch  $f(p)$  determiniert ist, d.h.  $f$  nicht injektiv ist, oder zu gewissen  $q \in N$  kein  $p$  mit  $f(p) = q$  existiert, d.h.  $f$  nicht surjektiv ist, läßt sich keine Abbildung  $T^* f : T^* N \rightarrow T^* M$  aus den  $(T_p f)^*$  zusammensetzen. Es läßt sich aber nach [19.11](#) dennoch ganz allgemein aus

$$\begin{array}{ccc}
 \bigwedge^k TM & \xrightarrow{\bigwedge^k T f} & \bigwedge^k TN \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^k(M) & \xleftarrow{f^*} & \Omega^k(N) \\
 \parallel & & \parallel \\
 C^\infty\left(M \leftarrow \left(\bigwedge^k TM\right)^*\right) & \xleftarrow{\left(\bigwedge^k T f\right)^*} & C^\infty\left(N \leftarrow \left(\bigwedge^k TN\right)^*\right)
 \end{array}$$

definieren. Dabei heißt  $f^*(\omega)$  die mit  $f$  ZURÜCKGEZOGENE FORM zu  $\omega$ .

$$(f^* \omega)_p(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k) := \omega_{f(p)}\left(\left(\bigwedge^k T f\right)(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k)\right)$$

oder unter Verwendung des Isomorphismuses  $\left(\bigwedge^k T_p M\right)^* \cong L_{Alt}^k(T_p M; \mathbb{R})$  auch als

$$(f^* \omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega_{f(p)}(T_p f \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p f \cdot \xi_k|_p).$$



Das so definierte  $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$  ist ein Algebrhomomorphismus – wie man leicht nachrechnet – und es gilt:  $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$  für zusammensetzbare Abbildungen  $f_1$  und  $f_2$ .

Mittels des Isomorphismus  $(\bigwedge^k TM)^* \cong \bigwedge^k (T^*M)$  kann man  $f^*$  für  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega^1(M)$  auch äquivalent durch  $f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) := f^*(\omega_1) \wedge \dots \wedge f^*(\omega_k)$  definieren, wobei  $f^*(\omega_j)$  die in [19.12](#) definierte zurückgezogene 1-Form ist.

Seien  $(u^i)_{i=1}^m$  lokale Koordinaten auf  $M$  und  $(v^j)_{j=1}^n$  lokale Koordinaten auf  $N$ . Dann läßt sich  $\omega \in \Omega^k(N)$  lokal als

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1, \dots, j_k} dv^{j_1} \wedge \dots \wedge dv^{j_k}$$

schreiben. Die zurückgezogene Form muß eine lokale Darstellung der Form

$$f^*(\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \eta_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

besitzen. Wir berechnen nun die lokalen Koeffizienten  $\eta_{i_1, \dots, i_k}$  von  $f^*(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \eta_{i_1, \dots, i_k}(x) &= f^*(\omega)_x \left( \frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{i_k}} \right) \\ &= \omega_{f(x)} \left( \bigwedge^k T_x f \left( \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{i_k}} \right) \right) \\ &\stackrel{21.6.2}{=} \omega_{f(x)} \left( \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left( \left( \frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \right) \frac{\partial}{\partial v^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial v^{j_k}} \right) \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left( \left( \frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \right) \omega_{f(x)} \left( \frac{\partial}{\partial v^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{j_k}} \right) \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left( \left( \frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \right) \omega_{j_1, \dots, j_k}(f(x)). \end{aligned}$$

Also ist

$$f^*(\omega) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ i_1, \dots, i_k = 1 \dots m}} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_k \\ j_1, \dots, j_k = 1 \dots n}} \omega_{j_1, \dots, j_k} \rho_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

$$\text{Wobei} \quad \rho_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} := \det \left( \frac{\partial(v^{j_1}, \dots, v^{j_k})}{\partial(u^{i_1}, \dots, u^{i_k})} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_k}} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial v^j}{\partial u^i} := \frac{\partial}{\partial u^i} (v^j \circ f),$$

### 25.3 Folgerung (Pull-back von Volumsformen).

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt,  $\dim M = m = \dim N$  und  $(x^1, \dots, x^m)$  lokale Koordinaten von  $M$  und  $(y^1, \dots, y^m)$  solche von  $N$ . Dann gilt:

$$f^*(g \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = (g \circ f) \cdot \det \left( \left( \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i} \right)_{i,j=1}^m \right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

**Beweis.** Dies ist ein Spezialfall von [25.2](#). Als  $m$ -Form ist  $f^*(g \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = h \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$  für eine glatte Funktion  $h$ . Durch Anwenden auf  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$

erhalten wir:

$$\begin{aligned}
h &= f^*(g \cdot dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m) \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
&\stackrel{\boxed{25.2}}{=} f^*(g) \cdot (dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m) \left( Tf \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, Tf \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
&= (g \circ f) \cdot (dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m) \left( \sum_{i_1} \frac{\partial(y^{i_1} \circ f)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \dots, \sum_{i_m} \frac{\partial(y^{i_m} \circ f)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^{i_m}} \right) \\
&= (g \circ f) \cdot \sum_{i_1, \dots, i_m} (dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m) \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{i_m}} \right) \frac{\partial(y^{i_1} \circ f)}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial(y^{i_m} \circ f)}{\partial x^m} \\
&= (g \circ f) \cdot \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^m \frac{\partial(y^{\pi(j)} \circ f)}{\partial x^j} = (g \circ f) \cdot \det \left( \left( \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j} \right)_{i,j=1}^m \right) \quad \square
\end{aligned}$$

#### 25.4 Bemerkung.

Speziell für  $f = \operatorname{id}$  und  $g = 1$  folgt aus [25.3](#):

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m = \det \left( \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_{i,j} \right) \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

In [17.1](#) haben wir die kommutative Algebra  $A := C^\infty(M, \mathbb{R})$  betrachtet. Den Raum  $\operatorname{Der}(A)$  ihrer Derivationen konnten wir mit dem Raum  $\mathfrak{X}(M)$  der Vektorfelder auf  $M$  identifizieren. Wir haben auf  $\operatorname{Der}(A)$  die Struktur einer Lie-Algebra gefunden. Wir wollen ähnliche Ideen nun auf die graduiert kommutative Algebra  $A := \Omega(M)$  der Differentialformen auf  $M$  anwenden.

#### 25.5 Definition (graduierte Derivation).

Eine Abbildung  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  heißt GRADUIERTE DERIVATION VOM GRAD  $d$ , falls  $D$  linear ist, für alle  $k$  den Summanden  $\Omega^k(M)$  in  $\Omega^{d+k}(M)$  abbildet und für alle  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\eta \in \Omega(M)$  die Produktregel  $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge \eta + (-1)^{dk} \omega \wedge D\eta$  gilt.

Mit  $\operatorname{Der}_d(\Omega(M))$  bezeichnen wir den VEKTORRAUM ALLER GRADUIERTEN DERIVATIONEN von  $\Omega(M)$  vom Grad  $d$ , und mit  $\operatorname{Der}(\Omega(M))$  bezeichnen wir die direkte Summe  $\coprod_{d \in \mathbb{Z}} \operatorname{Der}_d(\Omega(M))$ .

Allgemeiner heißt für eine glatte Abbildung  $g : N \rightarrow M$  eine Abbildung  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$  GRADUIERTE DERIVATION ÜBER  $g^*$ , falls  $D$  linear ist, für alle  $k$  den Summanden  $\Omega^k(M)$  in  $\Omega^{d+k}(N)$  abbildet und für alle  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\eta \in \Omega(M)$  die Produktregel  $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge g^*(\eta) + (-1)^{dk} g^*(\omega) \wedge D\eta$  gilt.

#### 25.6 Lemma (Eindeutigkeit graduierter Derivationen).

Es sei  $g : N \rightarrow M$  glatt. Jede graduierte Derivation  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$  über dem Algebra-Homomorphismus  $g^* : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$  ist eindeutig durch die Werte  $D(f)$  und  $D(df)$  für alle  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  festgelegt.

**Beweis.** Da  $f$  und  $df$  die Algebra  $\Omega(M)$  erzeugen folgt dies sofort aus [25.1](#). Wollen wir aber die dort verwendete Dimensionstheorie nicht hineinstecken so können wir dies auch wie folgt zeigen:

Hätten wir zwei solche Derivationen, so betrachten wir die Differenz  $D$ . Wir müssen zeigen:  $\forall f : D(f) = 0, D(df) = 0 \Rightarrow D = 0$ .

Wir behaupten zuerst, daß die Derivation  $D$  ein lokaler Operator ist. Sei nämlich  $\omega \in \Omega(M)$  lokal um  $g(x)$  gleich 0. Dann wählen wir ein  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f(g(x)) = 1$  und  $f\omega = 0$ , und erhalten

$$0 = D(0) = D(f\omega) = \underbrace{D(f)}_{=0} \wedge g^*(\omega) + g^*(f) \cdot D(\omega)$$

Und an der Stelle  $x \in N$  gilt  $0 = f(g(x)) \cdot D(\omega)(x) = D(\omega)(x)$ . Da  $D$  ein lokaler und linearer Operator ist, dürfen wir ihn durch eine lokale Darstellung durchtauschen:

$$\begin{aligned} D(\omega) &= D\left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \underbrace{D(\omega_{i_1, \dots, i_p})}_{=0} \wedge g^*(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p \pm g^*(\omega_{i_1, \dots, i_p}) g^*(du^{i_1}) \wedge \dots \wedge \underbrace{D(du^{i_k})}_{=0} \wedge \dots \wedge du^{i_p} \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

### 25.7 Beispiele graduerter Derivationen.

Aus [25.6](#) folgt, daß  $\text{Der}_d(\Omega(M)) = \{0\}$  für  $d < -1$ , denn  $D(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+d}(M) = \{0\}$  für  $k+d < 0$  und insbesondere für  $k \in \{0, 1\}$ .

Wir wollen als nächstes  $\text{Der}_{-1}(\Omega(M))$  bestimmen. Sei also  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  eine graduierte Derivation vom Grad  $d = -1$ . Dann ist  $D(C^\infty(M, \mathbb{R})) = \{0\}$  und die lineare Abbildung  $D \circ d : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  erfüllt  $(D \circ d)(f \cdot g) = D(g \cdot df + f \cdot dg) = D(g) \wedge df + (-1)^{0 \cdot d} g \cdot D(df) + D(f) \wedge dg + (-1)^{0 \cdot d} f \cdot D(dg) = (D \circ d)f \cdot g + f \cdot (D \circ d)g$ , wegen  $D(g) = 0 = D(f)$ . Also ist  $D \circ d$  auf  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  eine Derivation und somit durch ein Vektorfeld  $\xi$  gegeben, d.h.  $D(f) = 0$  und  $D(df) = \xi(f) = df(\xi)$  für alle  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Wir werden in [25.8](#) zeigen, daß wir durch  $(i_\xi \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_k)$  zu jedem Vektorfeld  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  eine graduierte Derivation  $i_\xi$  vom Grad  $d = -1$  definieren können.

Nun zu  $\text{Der}_0(\Omega(M))$ . Sei also  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  eine graduierte Derivation vom Grad  $d = 0$ . Dann wirkt  $D$  auf  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  derivativ, ist also durch ein Vektorfeld  $\xi$  gegeben, d.h.

$$D(f) = \xi(f) = \mathcal{L}_\xi(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* f \quad (\text{siehe } \a href="#">17.9 \text{ und } \a href="#">17.10).$$

Der letzte Ausdruck  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* \omega$  macht aber auch für  $\omega \in \Omega(M)$  einen Sinn und wir werden in [25.8](#) zeigen, daß dadurch für jedes Vektorfeld  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  eine Derivation  $\mathcal{L}_\xi$  vom Grad  $d = 0$  auf  $\Omega(M)$  definiert wird. Wir werden weiters in [25.10](#) zeigen, daß dies alle Derivationen vom Grad 0 sind, die zusätzlich  $D(df) = d(Df)$  erfüllen. Um eine globale Formel für  $\mathcal{L}_\xi$  zu erhalten, differenzieren wir die Funktion  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$  (für  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ ) in Richtung von  $\xi$  an der

Stelle  $x \in M$  und erhalten:

$$\begin{aligned}
(\xi \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k))_x &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \circ \text{Fl}_t^\xi)_x \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \omega_{\text{Fl}_t^\xi(x)}(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \omega_{\text{Fl}_t^\xi(x)}(T \text{Fl}_t^\xi \cdot T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_1, \dots, T \text{Fl}_t^\xi \cdot T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_k) \\
&\stackrel{\boxed{25.2}}{=} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x \left( T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_1|_{\text{Fl}_t^\xi(x)}, \dots, T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_k|_{\text{Fl}_t^\xi(x)} \right) \\
&\stackrel{\boxed{17.5}}{=} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x \left( (\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_1)(x), \dots, (\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_k)(x) \right) \\
&= \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x \right) (\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \omega_x \left( \xi_1(x), \dots, \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \left( (\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_j)(x) \right), \dots, \xi_k(x) \right) \\
&\stackrel{\boxed{17.10.2}}{=} (\mathcal{L}_\xi \omega)_x (\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \omega_x \left( \xi_1(x), \dots, [\xi, \xi_i](x), \dots, \xi_k(x) \right),
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{L}_\xi \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \xi \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega \left( \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_k \right).$$

Insbesondere ist

$$(\mathcal{L}_\xi df)(\eta) = \xi \cdot (df(\eta)) - df([\xi, \eta]) = \xi \cdot (\eta \cdot f) - [\xi, \eta] \cdot f = \eta \cdot (\xi \cdot f) = d(\xi \cdot f)(\eta).$$

Schließlich wollen wir noch eine ausgezeichnete Derivation vom Grad  $d = 1$  angeben. Nach [20.4](#) hoffen wir ja durch die Abweichung der Ableitung einer 1-Form (oder allgemeiner einer  $k$ -Form) davon symmetrisch zu sein, zu erkennen, ob die Form selbst Ableitung einer Funktion (bzw.  $k - 1$ -Form) ist. Betrachten wir dazu zuerst den Fall, wo  $M = U$  offen in einem Vektorraum  $E$  ist. Dann ist eine  $k$ -Form auf  $U$  eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})$$

und ihre Ableitung ist

$$\omega' : U \rightarrow L(E, L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})).$$

Setzen wir diese mit dem Alternator von

$$L(E, L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})) \subseteq L(E, L^k(E; \mathbb{R})) \cong L^{k+1}(E, \mathbb{R}) \xrightarrow{alt} L_{Alt}^{k+1}(E, \mathbb{R})$$

zusammen, so erhalten wir die Abweichung  $d\omega$  davon, daß  $\omega'(x)$  symmetrisch ist für alle  $x \in U$ .

Es ist also

$$\begin{aligned}
d\omega(x)(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega'(x)(\xi_{\sigma(0)})(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i)(\xi_0, \dots, \overset{\square}{\xi_i}, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

Um nun eine globale Formel für  $d$  auf beliebige Mannigfaltigkeiten  $M$  zu erhalten ersetzen wir die Vektoren  $\xi_i \in E$  durch Vektorfelder  $\xi_i \in \mathfrak{X}(E)$  und Differenzieren  $\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k)$  an der Stelle  $x \in M$  in Richtung  $\xi_i(x)$  und erhalten:

$$\begin{aligned} \left( \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \right)'(x)(\xi_i(x)) &= \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_k(x)) \\ &+ \sum_{j < i} \omega(x)(\dots, \xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots) \\ &+ \sum_{j > i} \omega(x)(\dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \dots) \end{aligned}$$

Und Einsetzen in obige Formel liefert

$$\begin{aligned} (k+1)d\omega(x)(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_k(x)) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k))(x) \\ &\quad - \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \omega(x)(\xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \xi_0(x), \dots, \overline{\xi_j(x)}, \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots) \\ &\quad - \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} \omega(x)(\xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \overline{\xi_j(x)}, \dots) \\ &= \left( \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \right)(x). \end{aligned}$$

Wegen des lästigen Faktors  $(k+1)$  ersetzen wir in Hinkunft  $d\omega$  besser durch  $(k+1)d\omega$ .

### 25.8 Lemma (Lie-Algebra der graduierten Derivationen).

Der Raum  $\text{Der}(\Omega(M))$  ist eine graduierte Lie-Algebra bezüglich der punktweisen Vektorraumoperationen und dem graduierten Kommutator als Lie-Klammer:

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1 \text{ für } D_i \in \text{Der}_{d_i}(\Omega(M))$$

Im Detail bedeutet das:

1. Die Klammer  $[\cdot, \cdot] : \text{Der}_{d_1}(\Omega(M)) \times \text{Der}_{d_2}(\Omega(M)) \rightarrow \text{Der}_{d_1+d_2}(\Omega(M))$  ist bilinear für alle  $d_1, d_2$ .
2. Sie ist GRADUIERT ANTIKOMMUTATIV:  $[D_1, D_2] + (-1)^{d_1 d_2} [D_2, D_1] = 0$ .
3.  $[D_0, \cdot]$  ist eine graduierte Derivation bezüglich  $[\cdot, \cdot]$ , d.h. es gilt die GRADUIERTE JACOBI-IDENTITÄT

$$[D_0, [D_1, D_2]] = [[D_0, D_1], D_2] + (-1)^{d_0 d_1} [D_1, [D_0, D_2]],$$

oder äquivalent und zyklisch symmetrisch

$$0 = (-1)^{d_0 d_2} [D_0, [D_1, D_2]] + (-1)^{d_1 d_0} [D_1, [D_2, D_0]] + (-1)^{d_2 d_1} [D_2, [D_0, D_1]].$$

**Beweis.** Wir führen den Beweis abstrakt für eine beliebige graduiert-kommutative Algebra  $A$  anstelle von  $\Omega(M)$ .

Behauptung:  $[D_1, D_2] \in \text{Der}_{d_1+d_2}(A)$  für  $D_i \in \text{Der}_{d_i}(A)$  für  $i = 1, 2$ .

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](X \cdot Y) &= \left( D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1 \right) (X \cdot Y) \\
&= D_1 \left( D_2 X \cdot Y + (-1)^{x d_2} X \cdot D_2 Y \right) \\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \left( D_1 X \cdot Y + (-1)^{x d_1} X \cdot D_1 Y \right) \\
&= D_1 D_2 X \cdot Y + (-1)^{d_1(d_2+x)} D_2 X \cdot D_1 Y \\
&\quad + (-1)^{x d_2} D_1 X \cdot D_2 Y + (-1)^{x d_2 + x d_1} X \cdot D_1 D_2 Y \\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1 X \cdot Y - (-1)^{d_1 d_2 + (d_1+x) d_2} D_1 X \cdot D_2 Y \\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2 + x d_1} D_2 X \cdot D_1 Y - (-1)^{d_1 d_2 + d_1 x + d_2 x} X \cdot D_2 D_1 Y \\
&= [D_1, D_2] X \cdot Y + (-1)^{x(d_1+d_2)} X \cdot [D_1, D_2] Y \quad \text{für } x := \deg(X).
\end{aligned}$$

Klarerweise ist  $[\_, \_]$  bilinear und graduiert antikommutativ.

Verbleibt die graduierte Jacobi-Identität zu zeigen:

$$\begin{aligned}
[D_0, [D_1, D_2]] - [[D_0, D_1], D_2] - (-1)^{d_0 d_1} [D_1, [D_0, D_2]] &= \\
= [D_0, D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1] - [D_0 D_1 - (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0, D_2] &= \\
- (-1)^{d_0 d_1} [D_1, D_0 D_2 - (-1)^{d_0 d_2} D_2 D_0] &= \\
= D_0 D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_0 D_2 D_1 &= \\
- (-1)^{(d_1+d_2)d_0} D_1 D_2 D_0 + (-1)^{d_1 d_2 + d_0(d_1+d_2)} D_2 D_1 D_0 &= \\
- D_0 D_1 D_2 + (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0 D_2 &= \\
+ (-1)^{(d_0+d_1)d_2} D_2 D_0 D_1 - (-1)^{d_0 d_1 + (d_0+d_1)d_2} D_2 D_1 D_0 &= \\
- (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0 D_2 + (-1)^{d_0 d_1 + d_0 d_2} D_1 D_2 D_0 &= \\
+ (-1)^{d_0 d_1 + (d_0+d_2)d_1} D_0 D_2 D_1 - (-1)^{d_0(d_1+d_2) + (d_0+d_2)d_1} D_2 D_0 D_1 &= \\
= 0. \quad \square &= 0.
\end{aligned}$$

### 25.9 Theorem (Die wichtigsten graduierten Derivationen).

Sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ .

( $\iota_\xi$ ) Durch  $\iota_\xi(f) := 0$ ,  $\iota_\xi(df) := \xi \cdot f$  ist eine graduierte Derivation  $\iota_\xi$  vom Grad  $-1$ , der EINSETZOPERATOR festgelegt.

( $\mathcal{L}_\xi$ ) Durch  $\mathcal{L}_\xi(f) := \xi \cdot f$ ,  $\mathcal{L}_\xi(df) := d(\xi \cdot f)$  ist eine graduierte Derivation  $\mathcal{L}_\xi$  vom Grad  $0$ , die LIE-ABLEITUNG festgelegt.

( $d$ ) Durch  $d(f) := df$ ,  $d(df) := 0$  ist eine graduierte Derivation  $d$  vom Grad  $+1$ , die ÄUSSERE ABLEITUNG, festgelegt.

Globale Formeln für diese graduierten Derivationen sind mit  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} (\iota_{\xi_0} \omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &:= \omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \quad \text{für } k \geq 1 \\ (\mathcal{L}_{\xi_0} \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) &:= \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi_0, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) \\ (d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

Die graduierten Kommutatoren sind durch folgende Tabelle gegeben:

$[D_1, D_2]$	$\iota_\eta$	$\mathcal{L}_\eta$	$d$
$\iota_\xi$	0	$-\iota_{[\xi, \eta]}$	$-\mathcal{L}_\xi$
$\mathcal{L}_\xi$	$\iota_{[\xi, \eta]}$	$\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}$	0
$d$	$\mathcal{L}_\eta$	0	0

Falls  $\eta \in \mathfrak{X}(N)$  verwandt mit  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  bezüglich einem glatten  $g : M \rightarrow N$  ist, d.h.  $Tg \circ \xi = \eta \circ g$  erfüllt ist, so gilt:

$$g^* \circ \iota_\eta = \iota_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ \mathcal{L}_\eta = \mathcal{L}_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ d = d \circ g^*$$

Weiters gilt:

$$\iota_{f\xi} \omega = f \iota_\xi \omega, \quad \mathcal{L}_{f\xi} \omega = f \mathcal{L}_\xi \omega + df \wedge \iota_\xi \omega, \quad (\mathcal{L}_\xi \omega)(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (F1_t^\xi)^* \omega \Big|_x$$

**Beweis.** Wir führen den Beweis in 15 Schritten wobei wir die globalen Formeln als Definition von  $\iota_\xi$ ,  $\mathcal{L}_\xi$  und  $d$  verwenden.

**1. Behauptung.**  $\iota_\xi \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ :

Offensichtlich ist  $\iota_\xi \omega$  alternierend und  $k-1$ -linear und es gilt

$$\begin{aligned} \iota_\xi \omega(f\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &= \omega(\xi, f\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = f \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ &= f \iota_\xi \omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}). \end{aligned}$$

**2. Behauptung.**  $\iota_\xi \in \text{Der}_{-1}(\Omega(M))$ : Sei dazu  $\alpha \in \Omega^{k+1}$  und  $\beta \in \Omega^l$ , dann ist:

$$\begin{aligned}
& \iota_{\xi_0}(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \\
& = (\alpha \wedge \beta)(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\
& = \frac{1}{(k+1)!l!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
& = \sum_{\pi \text{ stkw.}\uparrow} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
& = \sum_{\pi(0)=0} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
& \quad + \sum_{\pi(k+1)=0} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
& = \left( \iota_{\xi_0} \alpha \wedge \beta \right) (\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\
& \quad + \sum_{\pi' \text{ stkw.}\uparrow} (-1)^{k+1} \text{sgn}(\pi') \alpha(\xi_{\pi'(1)}, \dots, \xi_{\pi'(k+1)}) \beta(\xi_0, \xi_{\pi'(k+2)}, \dots, \xi_{\pi'(k+l)}) \\
& = \left( \iota_{\xi_0} \alpha \wedge \beta + (-1)^{k+1} \alpha \wedge \iota_{\xi_0} \beta \right) (\xi_1, \dots, \xi_{k+l}).
\end{aligned}$$

Dabei ist  $\pi' := \pi \circ (k+1, k, \dots, 1, 0)$  jene Permutation, die 0 auf 0 abbildet, auf  $i+1 \leq k+1$  mit  $\pi(i)$  übereinstimmt, und auf  $i > k+1$  mit  $\pi$  ident ist.

**3. Behauptung.**  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ :

Offensichtlich ist  $d\omega$  ist  $(k+1)$ -linear und alternierend. Die  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Homogenität ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
d\omega(f\xi_0, \dots, \xi_k) &= (f\xi_0) \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
& \quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i \cdot f\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + \sum_{j>i=0} (-1)^j \omega([f\xi_0, \xi_j], \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + \sum_{j>i>0} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], f\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= f \cdot (\xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)) \\
& \quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + f \cdot \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + f \cdot \sum_{j>i=0} (-1)^j \omega([\xi_0, \xi_j], \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + \sum_{j>i=0} (-1)^j \xi_j(f) \omega(\xi_0, \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + f \cdot \sum_{j>i>0} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= f \cdot d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad - \sum_{j>i=0} (-1)^j \xi_j(f) \omega(\xi_0, \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= f \cdot d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

**4. Behauptung.**  $d(f\omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$

$$\begin{aligned}
d(f\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \\
&= \sum_i (-1)^i \xi_i \cdot (f\omega)(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} f\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^i \xi_i(f) \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + f \sum_i (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + f \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^i df(\xi_i) \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) + f \cdot d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) \\
&= (df \wedge \omega + f \cdot d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

**5. Behauptung.**  $d$  ist ein lokaler Operator

Sei dazu  $\omega|_U = 0$  und  $x \in U$ . Dann existiert ein  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $\text{Trg } f \subseteq U$ ,  $f(x) = 1$  und  $df(x) = 0$ . Folglich ist  $f\omega = 0$  und damit

$$0 = d(f\omega)(x) \stackrel{\boxed{4}}{=} df(x) \wedge \omega(x) + f(x) \cdot d\omega(x) = d\omega(x).$$

**6. Behauptung.**  $d$  und  $\iota_\xi$  erfüllen die ‘‘Anfangsbedingungen’’.

Das folgt sofort durch Einsetzen in die globalen Formeln:

$$\begin{aligned}
\iota_{\xi_0}(f) &:= 0 \\
\iota_{\xi_0}(df) &= df(\xi_0) = \xi_0 \cdot f \\
df(\xi_0) &= \sum_{i=0}^0 \xi_0 \cdot f(\overline{\xi_0}) + \sum_{\emptyset} = \xi_0 \cdot f \\
d(df)(\xi_0, \xi_1) &= \xi_0 \cdot df(\xi_1) - \xi_1 \cdot df(\xi_0) + (-1)^{0+1} df([\xi_0, \xi_1]) \\
&= \xi_0 \cdot (\xi_1 \cdot f) - \xi_1 \cdot (\xi_0 \cdot f) - [\xi_0, \xi_1] \cdot f = 0
\end{aligned}$$

**7. Behauptung.**  $d(du^I) = 0$ , wobei  $du^I := du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_{k-1}}$  für  $I := (i_1, \dots, i_{k-1})$ .

$$\begin{aligned} d(du^I)\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{\partial}{\partial u^{j_i}} \left( du^I \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{l>i} (-1)^{i+l} du^I \left( \left[ \frac{\partial}{\partial u^{j_i}}, \frac{\partial}{\partial u^{j_l}} \right], \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_l}}}, \dots \right) \\ &= 0, \quad \text{da } \left[ \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right] = 0 \text{ und } du^i \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \text{ konstant ist.} \\ \Rightarrow d\left(\sum_I \omega_I du^I\right) &\stackrel{\boxed{4}}{=} \sum_I d\omega_I \wedge du^I + \omega_I \wedge d(du^I) \stackrel{\boxed{7}}{=} \sum_{i,I} \frac{\partial \omega_I}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \end{aligned}$$

**8. Behauptung.**  $d \in \text{Der}_{+1}(\Omega(M))$ : Sei  $\alpha = \sum_I \alpha_I du^I$  und  $\beta = \sum_J \beta_J du^J$ , dann ist.

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{I,J} d(\alpha_I \beta_J du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,J,i} \frac{\partial(\alpha_I \beta_J)}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \wedge du^J \\ &= \sum_{I,i} \frac{\partial \alpha_I}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \wedge \sum_J \beta_J du^J + (-1)^{|I|} \sum_I \alpha_I du^I \wedge \sum_{J,i} \frac{\partial \beta_J}{\partial u^i} du^i \wedge du^J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|} \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

**9. Behauptung.** Es gelten die Formeln für die Kommutatoren von Einsetzoperatoren  $\iota_\xi$  beziehungsweise für  $d$ .

Wegen [25.6](#) genügt es die ‘‘Anfangswerte’’ zu überprüfen:

$$\begin{aligned} [\iota_\xi, \iota_\eta] &= 0, \text{ da dies eine Derivation vom Grad -2 ist} \\ [d, d](f) &= (d \circ d - (-1)^{1 \cdot 1} d \circ d)(f) = 2d(df) = 0 \\ [d, d](df) &= 2(d \circ d)(df) = 2d(d(df)) = 2d(0) = 0 \end{aligned}$$

**10. Behauptung.** Der Kommutator  $[d, \iota_\xi]$  ist durch die globale Formel von  $\mathcal{L}_\xi$  gegeben, also ist  $\mathcal{L}_\xi \in \text{Der}_0(\Omega(M))$ .

$$\begin{aligned} ([d, \iota_{\xi_0}]\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= d(\iota_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) - (-1)^{1 \cdot (-1)} \iota_{\xi_0}(d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} \xi_i \cdot \iota_{\xi_0}\omega(\xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{0 < i < j} (-1)^{i-1+j-1} \iota_{\xi_0}\omega([\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + d\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) \\ &= - \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{0 < i < j} (-1)^{i+j} \omega(\xi_0, [\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) + \sum_{j>0} (-1)^j \omega([\xi_0, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= (\mathcal{L}_{\xi_0} \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

**11. Behauptung.** Es gilt die ‘‘Anfangsbedingung’’ für  $\mathcal{L}_\xi$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi &= d \circ \iota_\xi + \iota_\xi \circ d \quad \Rightarrow \\
\mathcal{L}_\xi(f) &= d(\iota_\xi f) + \iota_\xi(df) = 0 + \xi \cdot f \\
\mathcal{L}_\xi(df) &= d(\iota_\xi df) + \iota_\xi(d^2 f) = d(\xi \cdot f) + 0.
\end{aligned}$$

**12. Behauptung.** Es gelten die Formeln für Kommutatoren mit  $\mathcal{L}_\xi$ .

Wieder brauchen wir nur die Anfangswerte zu überprüfen (oder wir verwenden die Jacobi-Identität):

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_\xi, \iota_\eta](f) &= 0 = \iota_{[\xi, \eta]}(f), \text{ da der Grad } -1 \text{ ist} \\
[\mathcal{L}_\xi, \iota_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(\eta \cdot f) - \iota_\eta(d(\xi \cdot f)) \\
&= \xi \cdot (\eta \cdot f) - \eta \cdot (\xi \cdot f) = [\xi, \eta](f) = \iota_{[\xi, \eta]}(df) \\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](f) &= \xi \cdot \eta \cdot f - \eta \cdot \xi \cdot f = [\xi, \eta](f) = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}(f) \\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(d(\eta \cdot f)) - \mathcal{L}_\eta(d(\xi \cdot f)) \\
&= d(\xi \cdot \eta \cdot f - \eta \cdot \xi \cdot f) = d([\xi, \eta] \cdot f) = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}(df) \\
[\mathcal{L}_\xi, d](f) &= \mathcal{L}_\xi(df) - d(\xi \cdot f) = 0 \\
[\mathcal{L}_\xi, d](df) &= \mathcal{L}_\xi(ddf) - d(d(\xi \cdot f)) = 0.
\end{aligned}$$

**13. Behauptung.** Es gelten die Vertauschbarkeitsrelationen mit  $g^*$ .

Für  $d$  haben wir das folgende bereits in [25.2](#) gezeigt:

$$\begin{aligned}
(g^* \circ d)(f)(\xi|_p) &= g^*(df)(\xi|_p) = df|_{g(p)}(Tg \cdot \xi|_p) \\
&= d(f \circ g)(\xi|_p) = d(g^*(f))(\xi|_p) = (d \circ g^*)(f)(\xi|_p) \\
(g^* \circ d)(df) &= g^*(ddf) = g^*(0) = 0 = d^2(g^* f) \\
&= d((d \circ g^*)(f)) = d((g^* \circ d)(f)) = (d \circ g^*)(df).
\end{aligned}$$

Für  $\iota$ :

$$\begin{aligned}
(g^* \circ \iota_\eta)(df) &= g^*(df(\eta)) = g^*(\eta(f)) = \eta(f) \circ g \\
&\stackrel{17.3}{=} \xi(f \circ g) = d(f \circ g)(\xi) = \iota_\xi(g^*(df)) = (\iota_\xi \circ g^*)(df)
\end{aligned}$$

oder direkt

$$\begin{aligned}
(g^* \circ \iota_\eta)\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k) &= g^*(\iota_\eta \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= (\iota_\eta \omega)|_{g(p)}(T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\
&= \omega|_{g(p)}(\eta|_{g(p)}, T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\
&= \omega|_{g(p)}(T_p g \cdot \xi|_p, T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\
&= (g^* \omega)_p(\xi|_p, \xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) \\
&= (\iota_\xi(g^* \omega))(\xi_1, \dots, \xi_k)_p \\
&= (\iota_\xi \circ g^*)\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

Für  $\mathcal{L}$  folgt es nun durch Anwenden der Kommutatorformel:

$$\begin{aligned}
g^* \circ \mathcal{L}_\eta &= g^* \circ (d \circ \iota_\eta + \iota_\eta \circ d) \\
&= g^* \circ d \circ \iota_\eta + g^* \circ \iota_\eta \circ d \\
&= d \circ g^* \circ \iota_\eta + \iota_\xi \circ g^* \circ d \\
&= d \circ \iota_\xi \circ g^* + \iota_\xi \circ d \circ g^* \\
&= (d \circ \iota_\xi + \iota_\xi \circ d) \circ g^* \\
&= \mathcal{L}_\xi \circ g^*.
\end{aligned}$$

**14. Behauptung.** Es gelten die Homogenitätsformeln für  $\iota_{f\xi}$  und  $\mathcal{L}_{f\xi}$ .

$$\begin{aligned}
\iota_{f\xi}\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &= \omega(f\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = f \cdot \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\
&= f \cdot \iota_\xi\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\
\mathcal{L}_{f\xi}\omega &= [d, \iota_{f\xi}]\omega = d(\iota_{f\xi}\omega) + \iota_{f\xi}(d\omega) \\
&= d(f \cdot \iota_\xi\omega) + f \cdot \iota_\xi(d\omega) \\
&= df \wedge \iota_\xi\omega + f \cdot d(\iota_\xi\omega) + f \cdot \iota_\xi(d\omega) \\
&= df \wedge \iota_\xi\omega + f \cdot \mathcal{L}_\xi\omega.
\end{aligned}$$

**15. Behauptung.**  $\mathcal{L}_\xi$  ist die Lie-Ableitung aus [17.9](#).

Beide Seiten definieren eine Derivation vom Grad 0, also genügt es auf Funktionen und exakten 1-Formen auszutesten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\text{Fl}_t^\xi)^* f &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \text{Fl}_t^\xi = \xi f = \mathcal{L}_\xi f, \\
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\text{Fl}_t^\xi)^*(df_p)(\eta_p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(df)_{\text{Fl}_t^\xi(p)}(T\text{Fl}_t^\xi \cdot \eta_p) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(T\text{Fl}_t^\xi \cdot \eta_p) f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} df(T\text{Fl}_t^\xi(\eta_p)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta_p(f \circ \text{Fl}_t^\xi) \\
&= \eta_p\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \text{Fl}_t^\xi)\right) = \eta_p(\xi f) \\
&= \mathcal{L}_\xi(df)(\eta_p).
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis von [25.9](#). □

### 25.10 Die Frölicher-Nijenhuis und Nijenhuis-Richardson Klammer .

Wir wollen nun allgemeine graduierte Derivationen genauer beschreiben. Dazu nennen wir eine graduierte Derivation  $D \in \text{Der}_k(\Omega(M))$  ALGEBRAISCH, wenn sie auf den 0-Formen  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  verschwindet. Offensichtlich ist der graduierte Kommutator zweier algebraischer graduierter Derivationen selbst algebraisch, also bilden diese eine graduierte Lie-Teilalgebra. Für solche Derivationen  $D$  gilt

$$D(f \omega) = D(f) \wedge \omega + (-1)^{0 \cdot k} f \cdot D(\omega) = f \cdot D(\omega).$$

Folglich ist  $D$  ein lokaler Operator und sogar tensoriell, d.h.  $D(\omega)_x$  hängt nur von  $\omega_x$  ab (Hinweis: Wende  $d$  auf lokale Darstellungen von  $\omega$  an). Nach [25.6](#) ist  $D$  eindeutig durch  $D|_{\Omega^1(M)} : \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) \subseteq \Omega(M)$  bestimmt, und dies ist faserweise ein Element von

$$\begin{aligned}
L\left(T_x^* M, \bigwedge^{k+1} T_x^* M\right) &\cong T_x M \otimes \bigwedge^{k+1} T_x^* M \cong T_x M \otimes \left(\bigwedge^{k+1} T_x M\right)^* \cong \\
&\cong L\left(\bigwedge^{k+1} T_x M, T_x M\right) \cong L_{\text{alt}}^{k+1}(T_x M; T_x M)
\end{aligned}$$

welches glatt von  $x \in M$  abhängt, also eine vektorwertige  $k + 1$ -Form

$$\begin{aligned} K \in \Omega^{k+1}(M; TM) &:= C^\infty\left(M \leftarrow L\left(\bigwedge^{k+1} TM, TM\right)\right) \\ &\cong C^\infty\left(M \leftarrow L\left(T^*M, \bigwedge^{k+1} T^*M\right)\right). \end{aligned}$$

Sei umgekehrt  $K \in \Omega^{k+1}(M; TM)$  beliebig. Dann können wir eine algebraische Derivation  $\iota_K \in \text{Der}_k(\Omega(M))$  durch folgende Formel definieren:

$$\begin{aligned} (\iota_K \omega)(X_1, \dots, X_{k+l}) &:= \\ &= \frac{1}{(k+1)!(l-1)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega(K(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}), X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}), \end{aligned}$$

wobei  $\omega \in \Omega^l(M)$  mit  $l \geq 1$  und  $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}(M)$ . Dabei zeigt man  $\iota_K \omega \in \Omega^{k+l}(M)$  und  $\iota_K \in \text{Der}_k(\Omega(M))$  wie in [25.9.1](#) und [25.9.2](#).

Die Abbildung  $\iota : \Omega^{*+1}(M; TM) \rightarrow \text{Der}_*(\Omega(M))$  definiert einen linearen Isomorphismus auf die Teil-Lie-Algebra der algebraischen Derivationen, und macht somit  $\Omega^{*+1}(M, TM) := \coprod_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^{k+1}(M, TM)$  selbst zu einer graduierten Lie-Algebra (deren Klammer auch NIJENHUIS-RICHARDSON KLAMMER heißt).

Wir definieren für  $K \in \Omega^k(M; TM)$  eine graduierte Derivation  $\mathcal{L}_K := [\iota_K, d]$ . Die Abbildung  $\mathcal{L} : \Omega(M; TM) \rightarrow \text{Der}(\Omega(M))$  ist injektiv, da  $\mathcal{L}_K f = [\iota_K, d]f = \iota_K(df) \pm d(\iota_K f) = df \circ K$  für alle  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

$$\begin{array}{ccc} \{D : D|_{C^\infty} = 0\} & \hookrightarrow & \text{Der}_k(\Omega(M)) \longleftarrow \{D : [D, d] = 0\} \\ \uparrow \iota & & \uparrow \mathcal{L} \\ \Omega^{k+1}(M; TM) & & \Omega^k(M; TM) \end{array}$$

### Proposition.

Jedes  $D \in \text{Der}_k(\Omega(M))$  hat eine eindeutige Darstellung  $D = \iota_L + \mathcal{L}_K$  mit  $L \in \Omega^{k+1}(M; TM)$  und  $K \in \Omega^k(M; TM)$ . Das Bild von  $\mathcal{L}$  ist die Teil-Lie-Algebra aller  $D$  mit  $[D, d] = 0$ . Die Abbildung  $\mathcal{L}$  induziert somit eine graduierte Lie-Algebra Struktur (die FRÖLICHER-NIJENHUIS KLAMMER) auf  $\Omega^*(M; TM)$ .

**Beweis.** Für fixe Vektorfelder  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$  beschreibt  $f \mapsto D(f)(X_1, \dots, X_k)$  eine Derivation  $C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Folglich gibt es ein Vektorfeld  $K(X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $D(f)(X_1, \dots, X_k) = K(X_1, \dots, X_k)(f) = df(K(X_1, \dots, X_k))$ . Offensichtlich ist  $K \in \Omega^k(M; TM)$  und die definierende Gleichung für  $K$  ist  $D(f) = df \circ K = \mathcal{L}_K(f)$  für  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Also ist  $D - \mathcal{L}_K$  algebraisch, d.h.  $D := \mathcal{L}_K + \iota_L$  für ein  $L \in \Omega^{k+1}(M; TM)$ . Wir haben

$$0 = [\iota_K, 0] = [\iota_K, [d, d]] = [[\iota_K, d], d] + (-1)^{k-1} [d, [\iota_K, d]] = 2[\mathcal{L}_K, d]$$

Somit ist  $0 = [D, d]$  für  $D = \mathcal{L}_K + \iota_L$  genau dann, wenn  $0 = [\iota_L, d] = \mathcal{L}_L$ , i.e.  $L = 0$ . Die Eindeutigkeit der Zerlegung ergibt sich aus der Injektivität von  $\iota$  und  $\mathcal{L}$  und weil einzig die 0 eine algebraische mit  $d$  kommutierende Derivation ist.  $\square$

Es ist  $df \circ [X, Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}f = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]f$  für die Frölicher-Nijenhuis-Klammer  $[X, Y]$  von  $X, Y \in \Omega^*(M, TM)$ .

### 25.11 Differentialformen am $\mathbb{R}^3$ .

Für offenes  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  wissen wir, daß  $\mathfrak{X}(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$  ist vermöge der Abbildung  $\xi = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x^i} \leftrightarrow (f_i)_{i=1}^m = f$ , wobei  $x^i$  die Standardkoordinaten sind. Ebenso

ist  $\Omega^m(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$  vermöge  $*$  :  $f \cdot \text{vol}_M \leftarrow f$ , mit  $\text{vol}_M = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ .  
Zusammenfassend haben wir folgende Isomorphismen:

1.  $\Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$
2.  $\Omega^1(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  via der Basis  $dx^1, dx^2, dx^3$
3.  $\Omega^2(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  via der Basis  $dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2$
4.  $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  via der Basis  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Wie sieht nun  $d$  bezüglich dieser Basen aus?

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\
 \parallel & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
 \Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \\
 \\ 
 f & & (f_1, f_2, f_3) & & (f_1, f_2, f_3) & & f \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f & & \sum_i f_i dx^i & & \begin{array}{l} f_1 dx^2 \wedge dx^3 \\ + f_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \end{array} & & f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
 \end{array}$$

Der Operator  $d$  ist somit durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned}
 d : \Omega^0(\mathbb{R}^3) \ni f &\mapsto df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\
 d : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \ni \sum f_i dx^i &\mapsto \sum df_i \wedge dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\
 &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\
 d : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \ni f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 &\mapsto \\
 &\mapsto \left( \sum \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
 \end{aligned}$$

Also stimmt er bis auf natürliche Isomorphismen überein mit:

$$\begin{aligned}
 \text{grad } f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \\
 \text{rot}(f_1, f_2, f_3) &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}, \frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1}, \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) \\
 \text{div}(f_1, f_2, f_3) &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}.
 \end{aligned}$$

Es folgen direkt aus  $d^2 = 0$  die bekannten Sätze aus der Vektoranalysis:

$$(\text{rot} \circ \text{grad})f = 0, \quad (\text{div} \circ \text{rot})(f_1, f_2, f_3) = 0$$

und ebenso folgt direkt aus dem Lemma von Poincaré (siehe (6) in 26.5):

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(f_1, f_2, f_3) = 0 &\Rightarrow \exists g, \text{ soda\ss lokal } \text{grad } g = (f_1, f_2, f_3) \text{ gilt.} \\
 \text{div}(f_1, f_2, f_3) = 0 &\Rightarrow \exists (g_1, g_2, g_3), \text{ soda\ss lokal } \text{rot}(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3) \text{ gilt.}
 \end{aligned}$$



Ein Folge linearer Abbildungen  $\dots \xrightarrow{f_k} E_k \xrightarrow{f_{k+1}} \dots$  heißt EXAKT, falls  $\text{Bild } f_k = \text{Ker } f_{k+1}$  für alle  $k$  ist.

**Beweis.**

(1) Klar, da  $\Omega^k(\{*\}) = \{0\}$  for  $k \neq 0$  und  $\Omega^0(\{*\}) = C^\infty(\{*\}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

(2) Sei  $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$  eine (glatte) Homotopie von  $f$  nach  $g$ , d.h.  $H(x, 0) = f(x)$  und  $H(x, 1) = g(x)$  für alle  $x \in M$ . Für  $\omega \in \Omega^k(N)$  ist  $H^*\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ . Sei  $j_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  definiert durch  $j_t(x) := (x, t)$ . Dann ist  $H \circ j_0 = f$  und  $H \circ j_1 = g$  und somit

$$g^* - f^* = (H \circ j_1)^* - (H \circ j_0)^* = (j_1^* - j_0^*) \circ H^*.$$

Für  $\varphi \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$  ist  $j_t^*\varphi \in \Omega^k(M)$  und  $t \mapsto j_t^*\varphi$  ist eine glatte Kurve in  $\Omega^k(M)$  und somit

$$(j_1^* - j_0^*)\varphi = \int_0^1 \frac{d}{dt} j_t^*\varphi dt = \int_0^1 j_t^*(\mathcal{L}_\xi \varphi) dt,$$

wobei  $\xi := \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$  das Einheitsvektorfeld in  $\mathbb{R}$ -Richtung bezeichnet, denn

$$\begin{aligned} j_{t+s} &= \text{Fl}_s^\xi \circ j_t \text{ für } t, s \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} j_t^*\varphi &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (j_{t+s})^*\varphi = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s^\xi \circ j_t)^*\varphi \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (j_t^* \circ (\text{Fl}_s^\xi)^*)\varphi = j_t^* \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s^\xi)^*\varphi \right) = j_t^*(\mathcal{L}_\xi \varphi). \end{aligned}$$

Somit definieren wir Faserintegration  $I_0^1$  durch

$$I_0^1 : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(M), \quad I_0^1(\varphi) := \int_0^1 j_t^*\varphi dt.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (d \circ I_0^1)(\varphi) &= d \left( \int_0^1 j_t^*\varphi dt \right) = \int_0^1 d(j_t^*\varphi) dt = \int_0^1 j_t^*(d\varphi) dt \\ &= I_0^1(d\varphi) = (I_0^1 \circ d)(\varphi); \\ (j_1^* - j_0^*)\varphi &= \int_0^1 j_t^*(\mathcal{L}_\xi \varphi) dt = I_0^1(\mathcal{L}_\xi \varphi) = I_0^1((d \circ \iota_\xi + \iota_\xi \circ d)\varphi). \end{aligned}$$

Wir definieren nun den Homotopie-Operator  $G : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  mit  $G := I_0^1 \circ \iota_\xi \circ H^*$ , d.h.:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(N) & \xrightarrow{G} & \Omega^{k-1}(M) \\ H^* \downarrow & & \uparrow I_0^1 \\ \Omega^k(M \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{\iota_\xi} & \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R}) \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g^* - f^* &= (j_1^* - j_0^*) \circ H^* \\ &= I_0^1 \circ (d \circ \iota_\xi + \iota_\xi \circ d) \circ H^* \\ &= (d \circ I_0^1 \circ \iota_\xi + I_0^1 \circ \iota_\xi \circ d) \circ H^* \\ &= d \circ (I_0^1 \circ \iota_\xi \circ H^*) + (I_0^1 \circ \iota_\xi \circ H^*) \circ d = d \circ G + G \circ d. \end{aligned}$$

und somit ist  $g^*\omega - f^*\omega = d(G\omega) + G(d\omega) = d(G\omega)$  exakt, falls  $d\omega = 0$ . Also ist  $g^* - f^* = 0 : H(N) \rightarrow H(M)$ .

(3) Klar, da  $\Omega^k(\bigsqcup_\alpha M_\alpha) \cong \prod_\alpha \Omega^k(M_\alpha)$  und  $d$  diese Zerlegung respektiert.



(4) Wir zeigen zuerst, daß

$$0 \rightarrow \Omega^k(U \cup V) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Die Abbildung  $f := (i_U^*, i_V^*)$  ist klarerweise injektiv mit  $\text{Bild}(i_U^*, i_V^*) = \text{Ker}(j_U^* - j_V^*)$ . Die Abbildung  $g := (j_U^* - j_V^*)$  ist surjektiv: Sei dazu  $\{h_U, h_V\}$  eine Zerlegung der Eins zur Überdeckung  $\{U, V\}$  und  $\varphi \in \Omega(U \cap V)$ . Mit  $\varphi_U := h_V \varphi \in \Omega(U)$  (und  $\varphi_U|_{U \setminus \text{Trg}(h_V)} := 0$ ) bzw.  $\varphi_V := -h_U \varphi \in \Omega(V)$  (und  $\varphi_V|_{V \setminus \text{Trg}(h_U)} := 0$ ) gilt:

$$(j_U^* - j_V^*)(\varphi_U, \varphi_V) = \varphi_U|_{U \cap V} - \varphi_V|_{U \cap V} = (h_V + h_U)\varphi = \varphi.$$

Also ist die Sequenz exakt.

Um daraus die lange exakte Sequenz in der Kohomologie zu erhalten können wir das nachfolgende allgemeine Resultat verwenden. □

**26.4 Theorem.**

Es sei  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Folge von KETTEN-ABBILDUNGEN, d.h.  $C, C'$  und  $C''$  sind KETTENKOMPLEXE (i.e.  $\mathbb{Z}$ -graduierte Vektorräume mit sogenannten RANDOPERATOREN, d.h. linearen Operatoren  $\partial$  vom Grad 1, welche  $\partial^2 = 0$  erfüllen) und die verbindenden linearen Abbildungen  $f$  und  $g$  sind vom Grad 0 und vertauschen mit den Randoperatoren.

Dann erhalten wie eine lange exakte Folge in Homologie:

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{H_q(f)} H_q(C) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q+1}(C') \xrightarrow{H_{q+1}(f)} \dots$$

Dabei ist die  $q$ -te HOMOLOGIE  $H_q(C)$  des Kettenkomplexes  $C$  wie zuvor durch

$$H_q(C) := \text{Ker}(\partial_q : C_q \rightarrow C_{q+1}) / \text{Bild}(\partial_{q-1} : C_{q-1} \rightarrow C_q)$$

definiert.

**Beweis.** Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{f} & C_q & \xrightarrow{g} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{f} & C_{q+1} & \xrightarrow{g} & C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

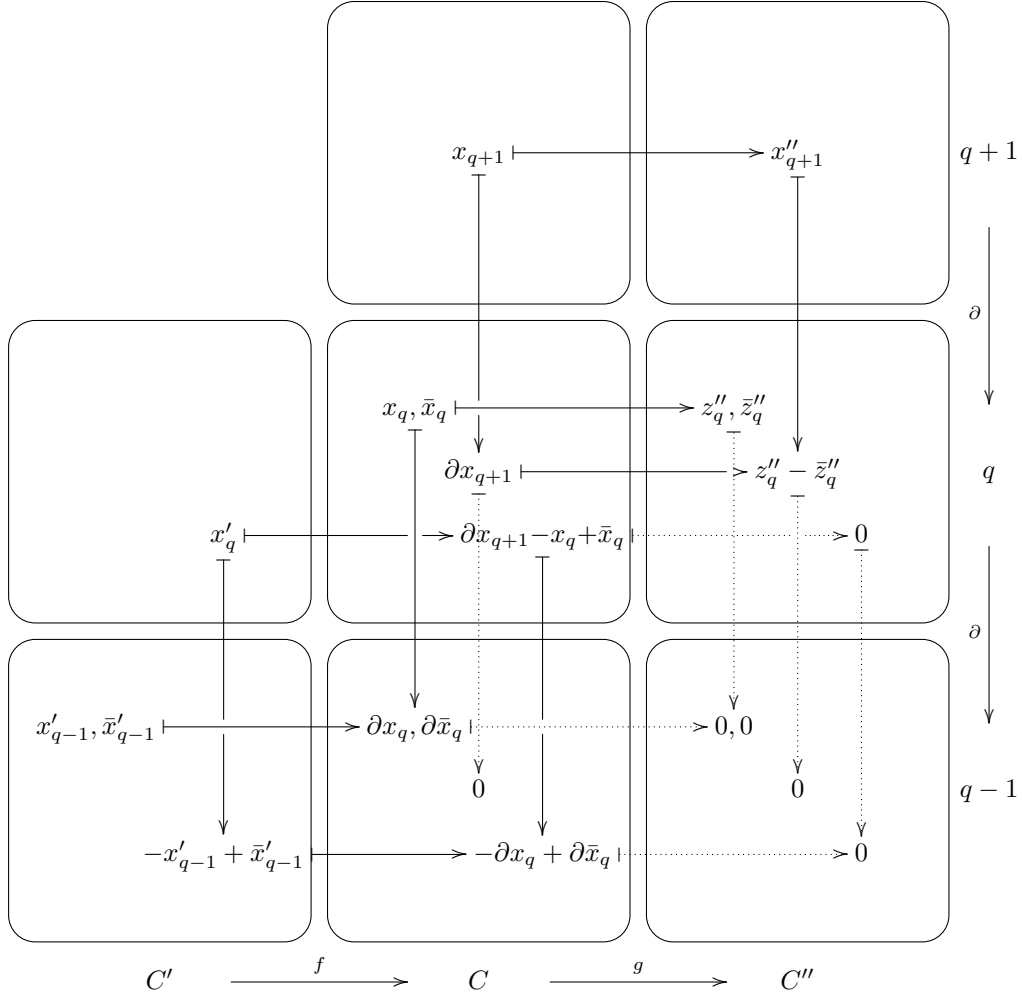
Es sei  $\partial_*[z''] := [(f^{-1} \circ \partial \circ g^{-1})(z'')]$  für  $z'' \in C''$  mit  $\partial z'' = 0$ .

Wir zuerst zeigen, daß es möglich ist Elemente in den entsprechenden inversen Bildern zu wählen und dann zeigen wir, daß die resultierende Klasse nicht von irgendeiner der Wahlen abhängt.

Sei dazu  $z''_q \in C''_q$  ein Zykel, d.h.  $\partial z''_q = 0$ . Da  $g$  surjektiv ist finden wir ein  $x_q \in C_q$  mit  $gx_q = z''_q$ . Da  $g\partial x_q = \partial gx_q = \partial z''_q = 0$ , finden wir ein  $x'_{q+1} \in C'_{q+1}$  mit  $fx'_{q+1} = \partial x_q$ . Und daher ist  $x'_{q+1} \in f^{-1}\partial g^{-1}z''_q$ . Weiters ist  $f\partial x'_{q+1} = \partial fx'_{q+1} = \partial \partial x_q = 0$ . Da  $f$  injektiv ist erhalten wir  $\partial x'_{q+1} = 0$  und daher können wir die Klasse  $\partial z''_q := [x'_{q+1}]$  bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & & x_q & \xrightarrow{g} & z''_q \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ x'_{q+1} & \xrightarrow{f} & x_{q+1} & \xrightarrow{g} & 0 \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ \partial x'_{q+1} & \xrightarrow{f} & 0 & & \end{array}$$

Nun die Unabhängigkeit von allen Wahlen:



Sei dazu  $[z''_q] = [\bar{z}''_q]$ , d.h.  $\exists x''_{q-1} : \partial x''_{q-1} = z''_q - \bar{z}''_q$ . Wähle  $x_q, \bar{x}_q \in C_q$  wie zuvor, so daß  $gx_q = x''_q$  und  $g\bar{x}_q = \bar{x}''_q$ . Ebenso wie zuvor wählen wir  $x'_{q+1}, \bar{x}'_{q+1} \in C'_{q+1}$  mit  $f x'_{q+1} = \partial x_q$  und  $f \bar{x}'_{q+1} = \partial \bar{x}_q$ . Wir haben zu zeigen, daß  $[x'_{q+1}] = [\bar{x}'_{q+1}]$ . Dazu wählen wir  $x_{q-1} \in C_{q-1}$  mit  $gx_{q-1} = x''_{q-1}$ . Dann ist  $g\partial x_{q-1} = \partial gx_{q-1} = \partial x''_{q-1} = z''_q - \bar{z}''_q = g(x_q - \bar{x}_q)$  und daher existiert ein  $x'_q \in C_q$  mit  $f x'_q = x_q - \bar{x}_q - \partial x_{q-1}$ . Weiters ist  $f\partial x'_q = \partial f x'_q = \partial(x_q - \bar{x}_q - \partial x_{q-1}) = \partial x_q - \partial \bar{x}_q - 0 = f(x'_{q+1} - \bar{x}'_{q+1})$ . Da  $f$  injektiv ist, haben wir  $x'_{q+1} - \bar{x}'_{q+1} = \partial x'_q$ , d.h.  $[x'_{q+1}] = [\bar{x}'_{q+1}]$ .

Exaktheit bei  $H_q(C')$ :

( $\subseteq$ )  $f_* \partial_* [z''] = [f f^{-1} \partial g^{-1} z''] = [\partial g^{-1} z''] = 0$ .

( $\supseteq$ ) Es sei  $\partial z' = 0$  und  $0 = f_* [z'] = [f z']$ , d.h.  $\exists x : \partial x = f z'$ . Dann erfüllt  $x'' := gx$  sowohl  $\partial x'' = \partial gx = g\partial x = g f z' = 0$  als auch  $\partial_* [x''] = [f^{-1} \partial g^{-1} gx] = [f^{-1} \partial x] = [z']$ .

Exaktheit bei  $H_q(C)$ :

( $\subseteq$ ) da  $g \circ f = 0$ .

( $\supseteq$ ) Es sei  $\partial z = 0$  mit  $0 = g_* [z] = [gz]$ , d.h.  $\exists x'' : \partial x'' = gz$ . Dann  $\exists x : gx = x''$ . Daher ist  $gz = \partial x'' = \partial gx = g\partial x \Rightarrow \exists x' : f x' = z - \partial x \Rightarrow f \partial x' = \partial f x' = \partial(z - \partial x) = 0 \Rightarrow \partial x' = 0$  und  $f_* [x'] = [f x'] = [z - \partial x] = [z]$ .

Exaktheit bei  $H_q(C'')$ :

( $\subseteq$ ) Wir haben  $\partial_* g_* [z] = [f^{-1} \partial g^{-1} gz] = [f^{-1} \partial z] = [f^{-1} 0] = 0$ .

( $\supseteq$ ) Es sei  $\partial z'' = 0$  und  $0 = \partial_*[z'']$ , d.h.  $\exists x': \partial x' = z'$ , wobei  $z' \in f^{-1}\partial g^{-1}z''$ , d.h.  $\exists x: gx = z''$  und  $fz' = \partial x$ . Dann ist  $\partial(x - fx') = fz' - f(\partial x') = 0$  und  $g(x - fx') = z'' - 0$ , d.h.  $g_*[x - fx'] = [z'']$ .  $\square$

### 26.5 Bemerkungen.

1. Die De-Rham Kohomologie ist durch die Eigenschaften aus Satz 26.3 schon eindeutig bestimmt, siehe [146, Kap.5].
2. Für die 0. Kohomologie gilt:

$$\begin{aligned} H^0(M) &= \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : df = 0\} \\ &= \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : f \text{ ist lokal konstant}\} = \mathbb{R}^\mu, \end{aligned}$$

wobei  $\mu$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $M$  ist.

3. Falls  $k < 0$  oder  $k > \dim M$  so ist  $\Omega^k(M) = 0$  und somit  $H^k(M) = 0$ .
4. Seien  $M$  und  $N$  HOMOTOPIEÄQUIVALENT, d.h. es gibt glatte Abbildungen  $f: M \rightarrow N$  und  $g: N \rightarrow M$  mit  $f \circ g \sim \text{id}_N$  und  $g \circ f \sim \text{id}_M$ . Die Abbildungen  $H(f) := f^*: H(N) \rightarrow H(M)$  und  $H(g) := g^*: H(M) \rightarrow H(N)$  sind dann inverse Isomorphismen. Z.B. ist offene Möbiusband homotopieäquivalent mit dem Zylinder.
5. Ist insbesondere  $A \subseteq M$  ein DEFORMATIONSRETRAKT, d.h. eine Homotopie  $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  existiert mit  $h(\cdot, 1) = \text{id}_M$ ,  $h(M \times \{0\}) \subseteq A$  und  $h(\cdot, 0)|_A = \text{id}_A$ , so gilt  $H(M) \cong H(A)$ . Z.B. ist die Basis jedes Vektorbündels vermöge der Einbettung als Nullschnitt ein Deformationsretrakt des Totalraums.
6. Ist  $M$  KONTRAHIERBAR, d.h. ein Punkt  $p$  in  $M$  existiert, welcher ein Deformationsretrakt von  $M$  ist, dann gilt  $H(M) \cong H(\{p\})$ , d.h. jede geschlossene  $k$ -Form ( $k \neq 0$ ) ist exakt (dies ist das versprochene POINCARÉ-LEMMA). Falls  $M = \mathbb{R}^m$  - oder allgemeiner  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  sternförmig (bzgl. 0) ist - so ist  $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $(x, t) \mapsto t \cdot x$  eine Kontraktion von  $M$  zu einen Punkt, also ist  $M$  kontrahierbar. Lokal ist also jede Mannigfaltigkeit kontrahierbar.
7. Ist  $M$  einfach zusammenhängend, dann ist  $H^1(M) = 0$ . Um dies zu zeigen geht man so vor: Sei  $\omega \in \Omega^1(M)$  mit  $d\omega = 0$ . Wir wollen ein  $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  finden mit  $df = \omega$ . Dazu wählen wir einen fixen Punkt  $x_0 \in M$  und suchen für jeden anderen Punkt  $x \in M$  eine Kurve  $c$ , welche  $x_0$  mit  $x$  verbindet, und definieren

$$f(x) := \int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Kurve ab, denn die Zusammensetzung mit einer zweiten verkehrt durchlaufenen Kurve liefert eine geschlossene Kurve  $c$ . Diese ist nach Voraussetzung homotop zur konstanten Kurve  $\text{konst}_{x_0}$ , also ist  $[c^*(\omega)] = [(\text{konst}_{x_0})^*(\omega)]$ . Die beiden Formen auf  $[0, 1]$  unterscheiden sich also nur um eine exakte Form  $dg$ , und somit ist:

$$\int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega) = \int_0^1 (\text{konst}_{x_0})^*(\omega) = \int_0^1 0 = 0.$$

Da lokal so ein  $f$  mit  $df = \omega$  immer existiert und  $\int_c df = f(c(1)) - f(c(0))$  gilt, ist das oben definierte  $f$  glatt und ist die gesuchte Stammfunktion wegen

$$\begin{aligned} df|_{c(0)}(c'(0)) &= (f \circ c)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left( f(c(0)) + \int_0^1 c(t\cdot)^*(\omega) \right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_0^1 \omega_{c(ts)}(t c'(ts)) ds = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \omega_{c(ts)}(t c'(ts)) ds \\ &= \int_0^1 \omega_{c(0)}(c'(0)) ds + 0 = \omega_{c(0)}(c'(0)) \end{aligned}$$

8. Falls  $\dots \rightarrow E_i \xrightarrow{T_i} E_{i+1} \rightarrow \dots$  eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen ist mit  $E_i = \{0\}$  für fast alle  $i$ , so folgt durch Aufsummieren der Gleichung

$$\dim E_i = \dim(\text{Ker } T_i) + \dim(\text{Bild}(T_i)) = \dim(\text{Ker } T_i) + \dim(\text{Ker } T_{i+1})$$

die Identität

$$\sum_i (-1)^i \dim E_i = 0$$

Die Mayer-Vietoris Sequenz impliziert also, daß für die Euler-Charakteristik folgendes gilt:

$$\chi(U \cup V) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V)$$

9. Da  $\mathbb{R}^m$  kontrahierbar ist, ist seine Euler-Charakteristik jene des Punktes also 1 nach Dimensionsaxiom [26.3.1](#). Es ist  $\chi(S^0) = 2$  wegen [26.3.3](#). Nach [8](#) ist für jeden Punkt  $* \in M$  einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi(M \setminus \{*\}) + \chi(\mathbb{R}^m) - \chi(\mathbb{R}^m \setminus \{*\}) \\ &= \chi(M \setminus \{*\}) + \chi(\{*\}) - \chi(S^{m-1}) \\ &= \chi(M \setminus \{*\}) + 1 - \chi(S^{m-1}). \end{aligned}$$

Für die Sphären erhalten wir somit

$$\chi(S^m) = \chi(\mathbb{R}^m) + 1 - \chi(S^{m-1}) = 2 - \chi(S^{m-1})$$

und insbesondere  $\chi(S^1) = 2 - \chi(S^0) = 0$  und somit  $\chi(M) = \chi(M \setminus \{*\}) + 1$  für  $\dim(M) = 2$ .

Kompakte 2-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeiten  $M_g$  vom Geschlecht  $g$  erhält man aus  $S^2$  durch Ankleben von  $g$  Henkeln (nach [1.2](#)) oder  $g$  Möbiusbändern (nach [1.4](#)), also ergibt sich rekursiv im nicht-orientierbaren Fall:

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi((M_{g-1} \setminus \{*\}) \cup \text{Möb}) = \chi(M_{g-1} \setminus \{*\}) + \chi(\text{Möb}) - \chi(S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 1 = 2 - (g-1) - 1 = 2 - g, \end{aligned}$$

und im orientierbaren Fall:

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi((M_{g-1} \setminus \{*_-, *_+\}) \cup S^1 \times \mathbb{R}) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 + \chi(S^1 \times \mathbb{R}) - \chi(S^1 \sqcup S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 = 2 - 2(g-1) - 2 = 2 - 2g \end{aligned}$$

10. Die Euler-Charakteristik  $\chi$  einer Mannigfaltigkeit, läßt sich auch dadurch berechnen, daß man sie TRIANGULIERT, d.h. in Simplexe zerlegt. Sei  $\gamma_i$  die Anzahl der verwendeten Simplexe der Dimension  $i$ , dann gilt:  $\chi = \sum_i (-1)^i \gamma_i$ . Insbesondere gilt für jeden Polyeder, daß die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Seitenflächen gleich  $2 = \chi(S^2)$  ist (siehe algebraische Topologie).

11. Eine weitere Möglichkeit die Euler-Charakteristik zu berechnen ist mittels MORSE-FUNKTIONEN, das sind Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , deren kritische Punkte nicht degeneriert sind, d.h. die Hessesche Matrix ist definit. Sei  $\beta_k(f)$  die Anzahl der kritischen Punkte, in denen die Hessesche Matrix genau  $k$  negative Eigenwerte hat, so gelten die Morse-Ungleichungen, siehe [65, S.161–162]

$$\beta_k(M) \leq \beta_k(f)$$

$$\sum_k (-1)^k \beta_k(f) = \chi(M).$$

12. Noch allgemeiner kann man für ein Vektorfeld  $\xi$  mit ausschließlich isolierten Nullstellen (z.B. das Gradientenfeld einer Morsefunktion) einen Index  $\text{ind}_x(\xi)$  in diesen Punkten definieren, siehe [29.27] oder [65, S.133]. Und es gilt dann  $\chi(M) = \sum_{\xi(x)=0} \text{ind}_x(\xi)$  nach einem Satz von Hopf, siehe [29.29] oder [65, S.164].

Falls es also ein nirgends verschwindendes Vektorfeld gibt, so muß die Eulercharakteristik  $\chi(M)$  verschwinden. Dies zeigt den Igelsatz [29.11].

Man kann umgekehrt zeigen, daß auf jeder kompakten, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit  $\chi(M) = 0$  ein Nullstellen-freies Vektorfeld existiert, siehe [65, S.137].

13. Die Kohomologie der Sphären  $S^n$  für  $n \geq 1$  ist:

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & 0 < k < n \\ \mathbb{R} & k = n \\ 0 & n < k \end{cases}$$

also hat das Poincaré-Polynom die Form:  $f_{S^n}(t) = 1 + t^n$  und – wie wir in [9] bereits gesehen haben – ist die Euler-Charakteristik  $\chi(S^{2n-1}) = 0$  und  $\chi(S^{2n}) = 2$ .

(i)  $H^0(S^n) = \mathbb{R}$  folgt aus [2].

(ii)  $H^k(S^n) = 0$  für  $k > n$  gilt immer, vergl. [3].

(iii) Bleibt zu zeigen:  $H^k(S^n) \cong H^{k+1}(S^{n+1})$  für  $0 < k$  sowie  $H^1(S^n) = 0$  für  $n > 1$  und  $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ .

Es ist  $S^{n+1} = U \cup V$  mit  $U := \{x \in S^{n+1} : -1 < \langle x, a \rangle\}$  und  $V := \{x \in S^{n+1} : +1 > \langle x, a \rangle\}$  für fix gewähltes  $a \in S^{n+1}$ . Also ist  $U \cap V \cong S^n \times \mathbb{R}$  und somit

$H(U \cap V) \cong H(S^n)$  nach [5]. Die Mayer-Vietoris Sequenz (für  $k > 0$ ) ist

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 H^k(U) \oplus H^k(V) \cong H^k(\{*\}) \oplus H^k(\{*\}) \\
 \downarrow \\
 H^k(U \cap V) \cong H^k(S^n) \\
 \downarrow \delta \\
 H^{k+1}(U \cup V) = H^{k+1}(S^{n+1}) \\
 \downarrow \\
 H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \cong H^{k+1}(\{*\}) \oplus H^{k+1}(\{*\}) \\
 \downarrow \\
 \vdots
 \end{array}$$

Also ist  $H^k(S^n) \xrightarrow{\cong} H^{k+1}(S^{n+1})$  für alle  $k > 0$ . Der Anfang der Sequenz sieht so aus:

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \downarrow \\
 H^0(S^{n+1}) \cong \mathbb{R} \\
 \downarrow \\
 H^0(\{*\}) \oplus H^0(\{*\}) \cong \mathbb{R}^2 \\
 \downarrow \\
 H^0(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{für } n = 0 \\ \mathbb{R} & \text{für } n > 0 \end{cases} \\
 \downarrow \\
 H^1(S^{n+1}) \\
 \downarrow \\
 0
 \end{array}$$

Folglich ist  $H^1(S^1) = \mathbb{R}$  und  $H^1(S^{n+1}) = 0$  für  $n > 0$  wegen [8].



## VII. Integration

In diesem Kapitel entwickeln wir die Integration auf orientierten Mannigfaltigkeiten. Die integrierbaren Objekte sind dabei die Differentialformen maximalen Grades. Wir beweisen den allgemeinen Satz von Stokes und führen dafür auch Mannigfaltigkeiten mit Rand ein. Im Fall einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit haben wir eine ausgezeichnete Form maximalen Grades, die Volumensform. Schließlich wenden wir die Integration um die Kohomologie weiter zu analysieren.

### 27. Orientierbarkeit

Um Integrationen auf Mannigfaltigkeiten durchführen zu können benötigen wir einen Orientierungsbegriff: Man beachte etwa die Formel  $\int_a^b f = -\int_b^a f$  für das gewöhnliche Riemann-Integral über ein Intervall  $[a, b]$ .

#### 27.1 Definition (Orientierbarkeit).

Eine Mannigfaltigkeit  $M$  heißt ORIENTIERBAR  $:\Leftrightarrow$  es existiert ein kompatibler Atlas  $\mathcal{A}$ , sodaß alle Kartenwechselabbildungen von  $\mathcal{A}$  orientierungserhaltend sind, d.h. die Determinante der Jakobi-Matrix in jedem Punkt ist positiv (cf. [86, 34.3]).

Ein Vektorbündel  $E \rightarrow M$  heißt ORIENTIERBAR  $:\Leftrightarrow$  es existiert ein Vektorbündelatlas  $\mathcal{A}$ , dessen Transitionsfunktionen Werte in  $GL_+(\mathbb{R}^n) := \{T \in GL(n) : \det(T) > 0\}$  haben.

#### 27.2 Proposition (Orientierbare Vektorbündel).

Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Das Vektorbündel  $E \rightarrow M$  ist orientierbar.
2. Auf jeder Faser  $E_x$  kann eine Orientierung gewählt werden und dazu ein Vektorbündelatlas, dessen Karten faserweise orientierungserhaltend sind.
3. Auf jeder Faser  $E_x$  kann eine Orientierung gewählt werden, sodaß jede Vektorbündelkarte mit zusammenhängender Domäne entweder überall faserweise orientierungserhaltend oder überall orientierungsvertauschend ist.

**Beweis.** (1)  $\Rightarrow$  (2) Sei  $\mathcal{A}$  ein Vektorbündelatlas, dessen Transitionsfunktionen faserweise orientierungserhaltend sind. Wir definieren eine Orientierung auf  $E_x$ , indem wir für irgendeine VB-Karte  $\varphi \in \mathcal{A}$  um  $x$  die induzierte Orientierung vom  $\mathbb{R}^k$  nehmen. Diese ist wohldefiniert und alle VB-Karten  $\psi \in \mathcal{A}$  orientierungserhalten, denn würde  $\psi$  eine davon verschiedene Orientierung induzieren – also bei  $x$  orientierungsvertauschend sein –, so wäre die Transitionsfunktion  $\varphi^{-1} \circ \psi$  bei  $x$  ebenfalls orientierungsvertauschend.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sei  $\psi$  irgendeine beliebige VB-Karte um  $x$  mit zusammenhängender Domäne und  $\varphi$  eine (orientierungserhaltende) VB-Karte um  $x$  des nach (2) gegebenen Atlas  $\mathcal{A}$ . Die Transitionsfunktion  $\varphi^{-1} \circ \psi$  hat Werte in  $GL(\mathbb{R}^k)$  und somit



lokal Werte in der offenen Teilmenge  $GL_+$  bzw.  $GL_-$ . Damit ist  $\psi$  entweder lokal orientierungserhaltend oder ist lokal orientierungsvertauschend und somit gilt gleiches auf dem zusammenhängenden Definitionsbereich.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) ist klar.

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) Die Transitionsfunktionen orientierungserhaltender VB-Karten sind offensichtlich selbst orientierungserhaltend.  $\square$

### 27.3 Lemma (Orientierbare Mannigfaltigkeiten).

$M$  ist orientierbare Mannigfaltigkeit  $\Leftrightarrow TM \rightarrow M$  ist orientierbares Vektorbündel.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Die Transitionsfunktionen des durch  $M$  induzierten Vektorbündelatlas auf  $TM \rightarrow M$  sind genau die Ableitungen der Kartenwechsel für  $M$ .

( $\Leftarrow$ ) Betrachte den von den Karten auf  $M$  induzierten VB-Atlas auf  $TM \rightarrow M$  und wähle auf den Fasern von  $TM$  eine Orientierung wie in 27.2.3: Ist  $\tilde{\varphi}$  eine durch eine Karte  $\varphi$  von  $M$  induzierte Vektorbündelkarte von  $TM \rightarrow M$ , die orientierungsvertauschend ist, so ersetze  $\varphi$  durch eine umparametrisierte Karte  $\psi := \varphi \circ j$ , mit  $j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,

$$j := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Der so erhaltene Atlas auf  $M$  hat dann nur orientierungserhaltende Kartenwechsel, liefert also eine Orientierung auf  $M$ .  $\square$

### 27.4 Beispiel.

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe, also eine Mannigfaltigkeit mit glatter Gruppenstruktur: Dann ist  $TG \rightarrow G$  global ein triviales Vektorbündel (siehe [86, 67.2]) und da jedes triviale Vektorbündel orientierbar ist, sind  $TG \rightarrow G$  und  $G$  selbst orientierbar.

### 27.5 Bemerkung.

Sind alle Mannigfaltigkeiten  $M_i$  orientierbar, dann sind es klarerweise auch  $\coprod M_i$  und  $\prod M_i$ . Z.B. sind alle Tori,  $T^n := (S^1)^n$ , orientierbar, denn  $S^1$  ist eine Lie-Gruppe.

Es gilt auch die Umkehrung, denn offene Teilmannigfaltigkeiten von orientierbaren Mannigfaltigkeiten sind offensichtlich orientierbar (also mit  $\coprod_i M_i$  auch  $M_i$ ) und falls  $M \times N$  orientierbar und  $N \neq \emptyset$  ist, dann wählen wir einen Punkt  $y \in N$  und eine kontrahierbare (und somit orientierbare) Kartenumgebung  $V$  von  $y$ . Es ist dann  $M \times V$  als offene Teilmannigfaltigkeit orientierbar und wir können  $T_x M$  kohärent orientieren indem wir die Orientierung von  $T_{(x,y)}(M \times V) \cong T_x M \times T_y V$  und jene von  $T_y V$  verwenden.

### 27.6 Definition (Transversale Abbildungen).

Zwei glatte Abbildungen  $f_i : M_i \rightarrow N$  für  $i \in \{1, 2\}$  zwischen Mannigfaltigkeiten heißen TRANSVERSAL falls  $\text{Bild}(T_{x_1} f_1) + \text{Bild}(T_{x_2} f_2) = T_y N$  für alle  $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$  mit  $f_1(x_1) = y = f_2(x_2) \in N$ .

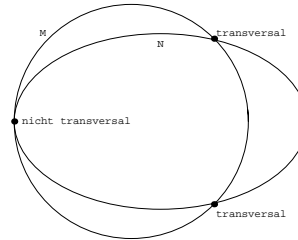
Ist  $f_2$  die Inklusion einer Teilmannigfaltigkeit, so sagt man  $f_1$  sei TRANSVERSAL zu  $M_2$  in dieser Situation, d.h. wenn  $\text{Bild}(T_x f_1) + T_y M_2 = T_y N$  für alle  $x \in M_1$  mit  $y := f(x) \in M_2$ .

Sind beide  $f_i$  Inklusionen von Teilmannigfaltigkeiten, so sagt man diese schneiden einander TRANSVERSAL in dieser Situation, d.h. wenn  $T_x M_1 + T_x M_2 = T_x N$  für alle  $x \in M_1 \cap M_2$ .

**27.7 Beispiel.**

Sei  $M_2 := S^1$  in  $N := \mathbb{R}^2$  und  $M := S^1$  sowie  $f : M \rightarrow N$  wie in nebenstehenden Bild.

Es ist bei Transversalität nicht gefordert, daß die Summe “direkt” ist; Z.B. ist die Identität  $f : M := N \rightarrow N$  transversal zu jeder Teilmannigfaltigkeit  $M_2 \subseteq N$  mit  $\text{Bild}(T_x f) \cap T_{f(x)} M_2 = T_{f(x)} M_2 \neq \{0\}$ .



**27.8 Satz (Pull-back von Mannigfaltigkeiten).**

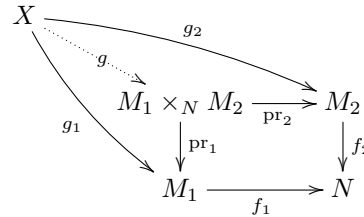
Für  $i \in \{1, 2\}$  sei  $f_i \in C^\infty(M_i, N)$  mit  $f_1$  transversal zu  $f_2$ .

Dann ist das PULL-BACK

$$M_1 \times_N M_2 := M_1 \times_{(f_1, N, f_2)} M_2 := \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 : f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$

eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M_1 \times M_2$  und hat folgende universelle Eigenschaft:

Für jedes Paar glatter Abbildungen  $g_i : X \rightarrow M_i$  mit  $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$  existiert eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung  $g : X \rightarrow M_1 \times_N M_2$  mit  $\text{pr}_i \circ g = g_i$ .



**Beweis.** Nach [2.4] genügt es  $M_1 \times_N M_2$  lokal durch eine reguläre Gleichung zu beschreiben. Sei also  $(x_1^0, x_2^0) \in M_1 \times_N M_2$ . Indem wir  $N$  lokal um  $f_1(x_1^0) = f_2(x_2^0) =: y$  durch eine offene Teilmenge in  $\mathbb{R}^n$  ersetzen, ist  $f(x_1, x_2) := f_1(x_1) - f_2(x_2) = 0$  eine lokale Gleichung für das Pullback und diese ist regulär, denn  $\text{Bild}(T_{(x_1^0, x_2^0)} f) = \text{Bild}(T_{x_1^0} f_1) + \text{Bild}(T_{x_2^0} f_2) = T_y N$ .

Nach Definition gilt  $f_1 \circ \text{pr}_1 = f_2 \circ \text{pr}_2$  auf  $M_1 \times_N M_2$ . Es ist  $g = (g_1, g_2) : X \rightarrow M_1 \times_N M_2$  die einzige (glatte) Abbildung mit  $\text{pr}_i \circ g = g_i$ . Diese hat wegen  $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$  Werte in der Teilmannigfaltigkeit  $M_1 \times_N M_2$  und ist somit auch dorthinein glatt nach [11.5]. □

Der Tangentialraum  $T_{(x_1, x_2)}(M_1 \times_N M_2)$  ist offensichtlich durch  $\text{Ker } T_{(x_1, x_2)} f = \{(v_1, v_2) \in T_{x_1} M_1 \times T_{x_2} M_2 : T_{x_1} f_1 \cdot v_1 = T_{x_2} f_2 \cdot v_2\}$  gegeben.

**27.9 Folgerung (Urbilder von Teilmannigfaltigkeiten).**

Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$  transversal zu einer regulären Teilmannigfaltigkeit  $K$  von  $N$ . Dann ist  $f^{-1}(K)$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M$  und diffeomorph zu  $M \times_N K$ .

Insbesondere ist der Durchschnitt  $M_1 \cap M_2$  zweier sich transversal schneidender Teilmannigfaltigkeiten  $M_1$  und  $M_2$  von  $N$  selbst eine Teilmannigfaltigkeit.

**Beweis.** Offensichtlich ist  $\text{pr}_1 : M \times_N K \rightarrow f^{-1}(K)$  eine Bijektion, denn

$$x \in \text{pr}_1(M \times_N K) \Leftrightarrow \exists y \in K : (x, y) \in M \times_N K \Leftrightarrow f(x) = y \in K \Leftrightarrow x \in f^{-1}(K)$$

$$\begin{array}{ccc}
 M \times_N K \hookrightarrow & M \times K & \text{Es sind } M \times_N K \subseteq M \times K, M \times K \subseteq M \times N, \\
 \downarrow & \downarrow & (M, f) : M \hookrightarrow M \times N \text{ Einbettungen und somit} \\
 f^{-1}(K) \hookrightarrow & M \xrightarrow{(M, f)} M \times N & f^{-1}(K) = \text{pr}_1(M \times_N K) \subseteq M \text{ eine reguläre Teil-} \\
 & & \text{mannigfaltigkeit.} \quad \square
 \end{array}$$

Wir geben nun ein Beispiel dafür, daß dieser Satz “stärker” ist als 11.12.2:

**27.10 Das Möbiusband als Nullstellenmenge.**

Betrachten wir das Möbiusband  $\text{Möb} \subseteq \mathbb{R}^3$ . Dieses kann nicht die Nullstellenmenge einer regulären  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktion sein, sonst wäre das Möbiusband orientierbar (siehe 27.41). Wir wollen nun  $\text{Möb}$  als Urbild der Einbettung  $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$  unter einer Abbildung vom Volltorus nach  $\mathbb{P}^2$  darstellen, die transversal zu  $\mathbb{P}^1$  ist. Dazu verwenden wir die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned}
 p : \mathbb{R} \times D^2 &\rightarrow \text{Volltorus} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{wobei } D^2 = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + s^2 < 1\} \\
 p : \begin{pmatrix} \varphi \\ t \\ s \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\varphi(1 + t \cdot \cos \varphi - s \cdot \sin \varphi) \\ \sin 2\varphi(1 + t \cdot \cos \varphi - s \cdot \sin \varphi) \\ t \cdot \sin \varphi + s \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Diese ist die Zusammensetzung

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ t \\ s \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi_1} \begin{pmatrix} \varphi \\ t \cdot \cos \varphi - s \cdot \sin \varphi \\ t \cdot \sin \varphi + s \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \varphi \\ \bar{t} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi_2} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi(1 + \bar{t}) \\ \sin 2\varphi(1 + \bar{t}) \\ \bar{s} \end{pmatrix}$$

mit den respektiven Ableitungen

$$\Psi'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ * & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi'_2 = \begin{pmatrix} -2 \sin 2\varphi(1 + \bar{t}) & \cos 2\varphi & 0 \\ 2 \cos 2\varphi(1 + \bar{t}) & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist  $p$  ein lokaler Diffeomorphismus (sogar eine Überlagerung) mit

$$p^{-1}(\text{Möb}) = \mathbb{R} \times (-1, 1) \times \{0\} \quad (\text{vergleiche mit } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1.3)$$

Es ist  $p$  auch die Zusammensetzung

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ t \\ s \end{pmatrix} \xrightarrow{\exp \times D^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ t \\ s \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ s \end{pmatrix} \xrightarrow{\bar{p}} \begin{pmatrix} (x^2 - y^2)(1 + tx - sy) \\ 2xy \cdot (1 + tx - sy) \\ ty + sx \end{pmatrix}$$

Da  $p = \bar{p} \circ (\exp \times D^2)$  ein lokaler Diffeomorphismus,  $\exp \times D^2 : \mathbb{R} \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$  eine Submersion (sogar die universelle Überlagerung) und da  $\bar{p} : S^1 \times D^2 \rightarrow \text{Volltorus} \subseteq \mathbb{R}^3$  glatt ist und jeder Punkt unter  $\bar{p}$  zwei Urbilder hat, ist  $\bar{p}$  eine zweiblättrige Überlagerung. Außerdem gilt  $\bar{p}^{-1}(\text{Möb}) = S^1 \times (-1, 1) \times \{0\}$ . Sei nun die glatte Abbildung  $f : S^1 \times D^2 \rightarrow S^2$  gegeben durch

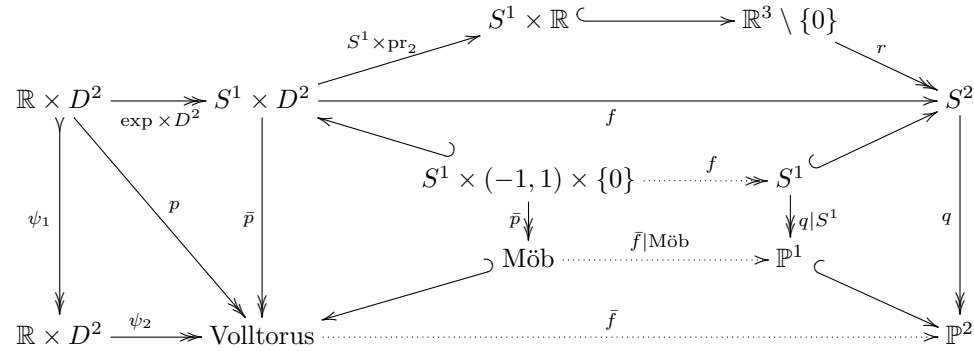
$$f : (x, y; t, s) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} (x, y, s)$$

dann ist  $f^{-1}(S^1) = S^1 \times (-1, 1) \times \{0\} = \bar{p}^{-1}(\text{Möb})$ , wobei  $S^1 \subseteq S^2$  der Äquator ( $s = 0$ ) ist.

Da die kanonische Abbildung  $q : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  per Definition eine Überlagerung ist, und

$$\begin{aligned} \bar{p}(x, y; t, s) &= \bar{p}(x_1, y_1; t_1, s_1) \\ \Rightarrow (x, y; t, s) &= \pm(x_1, y_1; t_1, s_1) \\ \Rightarrow f(x, y; t, s) &= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(x, y, s) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(x_1, y_1, s_1) = \pm f(x_1, y_1; t_1, s_1) \\ \Rightarrow q(f(x, y; t, s)) &= q(f(x_1, y_1; t_1, s_1)), \end{aligned}$$

läßt sich also  $\bar{f}$ :Volltorus  $\rightarrow \mathbb{P}^2$  und deren Einschränkung auf Möb durch folgendes kommutatives Diagramm wohldefinieren:



und

$$\begin{aligned} \bar{f}^{-1}(\mathbb{P}^1) &= \bar{p}(\bar{p}^{-1}(\bar{f}^{-1}(\mathbb{P}^1))) = \bar{p}((\bar{f} \circ \bar{p})^{-1}(\mathbb{P}^1)) = \bar{p}((q \circ f)^{-1}(\mathbb{P}^1)) \\ &= \bar{p}(f^{-1}(q^{-1}(\mathbb{P}^1))) = \bar{p}(f^{-1}(S^1)) = \bar{p}(S^1 \times (-1, 1) \times \{0\}) = \text{Möb}. \end{aligned}$$

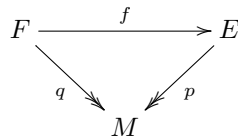
Es ist  $f$  transversal zu  $S^1 \subseteq S^2$ : Sei nämlich  $v := (v_0, v_1, v_2) \in T_{(x,y,0)}S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ . Dann ist  $v \perp (x, y, 0) = f(x, y, t, 0)$ , d.h.  $(v_0, v_1) \perp (x, y)$ , i.e.  $(v_0, v_1) \in T_{(x,y)}S^1$ . Wegen  $\frac{d}{ds}|_{s=0} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = 0$  und  $\frac{d}{ds}|_{s=0} \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = 1$  ist  $T_{(x,y,t,0)}f(0, 0; t, v_2) = (0, 0, v_2)$ , also  $T_{f(x,y,t,0)}S^2 = T_{(x,y,0)}S^1 + \text{Bild } T_{(x,y,t,0)}f$ .

Da  $q$  eine Überlagerungsabbildung ist, ist somit auch  $\bar{f}$  transversal zu  $\mathbb{P}^1$ .  $\square$

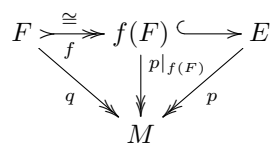
Man rufe sich nun die Begriffe Vektorbündel (siehe [14.5](#)), Vektorbündel-Homomorphismus (siehe [14.8](#)) und Teilvektorbündel (siehe [14.9](#)) in Erinnerung.

**27.11 Proposition (Bild eines Vektorbündelmonomorphismuses).**

Seien  $q : F \rightarrow M, p : E \rightarrow M$  zwei VB,  $f : F \rightarrow E$  ein VB-Monomorphismus (d.h. ein faserweise injektiver VB-Homomorphismus) über  $\text{id}_M$ , d.h. folgendes Diagramm kommutiert:



Dann gilt:  $f(F)$  ist ein Teilvektorbündel von  $E$  und ist via  $f$  isomorph zu  $F \rightarrow M$ :



Insbesondere ist jeder faserweis bijektive VB-Homomorphismus ein VB-Isomorphismus.

**Beweis.** Da lokal beide VB trivial sind, nehmen wir o.B.d.A. an, daß  $F = M \times \mathbb{R}^k$  und  $E = M \times \mathbb{R}^l$  ist, und somit  $f : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M \times \mathbb{R}^l$  die Form  $f(x, v) = (x, f_x(v))$  hat. Da  $f_{x_0} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  injektiv und linear ist, können wir weiters  $f_{x_0} = \text{incl} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  annehmen. Sei  $\text{pr}$  die Projektion  $\mathbb{R}^l = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{l-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit Kern  $\mathbb{R}^{l-k}$  zu  $\text{incl}$ , d.h.  $\text{pr} \circ \text{incl} = \text{id} \in GL(k)$ . Als VB-Karte von  $E$  drängt sich  $\psi : M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{l-k} \ni (x; v, w) \mapsto (x; f_x(v) + (0, w)) \in M \times \mathbb{R}^l$ , denn da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{f} & f(F) & \hookrightarrow & E \\ \parallel & & \cong \uparrow \psi|_{M \times \mathbb{R}^k \times \{0\}} & & \cong \uparrow \psi \\ M \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\sim} & M \times \mathbb{R}^k \times \{0\} & \hookrightarrow & M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{l-k} \end{array}$$

kommutiert, trivialisiert  $\psi$  das Bild von  $f$ , d.h.  $f(F)$  entspricht  $M \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$ . Bleibt also zu zeigen, daß  $\psi$  ein lokaler Diffeomorphismus ist: Die Abbildung  $x \mapsto \text{pr} \circ f_x$  ist eine Abbildung von  $M$  nach  $L(k, k)$  mit  $x_0 \mapsto \text{id}$ , und hat somit lokal um  $x_0$  Werte in der offenen Teilmenge  $GL(k) \subseteq L(k, k)$  hat. O.B.d.A. sei  $M$  diese Umgebung von  $x_0$ . Wegen  $z = f_x(v) + (0, w) \Rightarrow \text{pr}(z) = (\text{pr} \circ f_x)(v) \Rightarrow v = (\text{pr} \circ f_x)^{-1}(\text{pr}(z))$  ist dann die Umkehrabbildung von  $\psi$  gegeben durch

$$\psi^{-1} : (x, z) \mapsto \left( x, \left( (\text{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \text{pr} \right) (z), z - f_x \left( \left( (\text{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \text{pr} \right) (z) \right) \right). \quad \square$$

**27.12 Folgerung (Tangentialbündel einer Teilmannigfaltigkeit).**

Sei  $\text{incl} : A \subseteq M$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Dann ist  $(T \text{incl})(TA) \cong TA$  ein Teilbündel vom  $TM|_A$ .

**Beweis.**

$$\begin{array}{ccccccc} TA & \xrightarrow[\cong]{T \text{incl}} & (T \text{incl})(TA) & \hookrightarrow & TM|_A & \hookrightarrow & TM \\ & \searrow \pi_A & \downarrow & \nearrow \pi_M & & \nearrow \pi_M & \\ & & A & \hookrightarrow & M & & \end{array}$$

Man wende 27.11 auf den VB-Monomorphismus  $T \text{incl}$  an. □

**27.13 Folgerung (Tangentialbündel von Summen und Produkten).**

Die folgenden Diagramme beschreiben Vektorbündel-Isomorphismen:

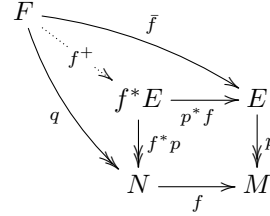
$$\begin{array}{ccc} T(\prod M_i) & \xrightarrow[\cong]{(T \text{pr}_i)_i} & \prod TM_i \\ \pi_{\prod M_i} \downarrow & & \prod \pi_{M_i} \downarrow \\ \prod M_i & \xrightarrow{\cong} & \prod M_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T(\bigsqcup M_i) & \xleftarrow[\cong]{\bigcup T \text{incl}_i} & \bigsqcup TM_i \\ \pi_{\bigsqcup M_i} \downarrow & & \bigsqcup \pi_{M_i} \downarrow \\ \bigsqcup M_i & \xrightarrow{\cong} & \bigsqcup M_i \end{array} \quad \square$$

**27.14 Lemma (Pull-back Bündel).**

Sei  $p : E \rightarrow M$  ein VB und  $f : N \rightarrow M$  glatt. Dann existiert am Pull-back  $f^*E := N \times_M E$  eine eindeutig bestimmte VB-Struktur  $f^*p := \text{pr}_1|_{f^*E} : f^*E \rightarrow N$  für welche  $p^*f := \text{pr}_2|_{f^*E} : f^*E \rightarrow E$  ein faserweise bijektiver VB-Homomorphismus

über  $f$  ist.

Dieses Bündel hat folgende universelle Eigenschaft: Für jedes andere VB  $q : F \rightarrow N$  und VB-Homomorphismus  $\bar{f} : F \rightarrow E$  über  $f$  existiert ein eindeutiger VB-Homomorphismus  $f^+ : F \rightarrow f^*E$  über  $\text{id}_N$ , der das nebenstehende Diagramm kommutativ macht:

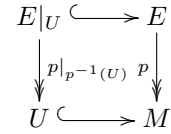


Beachte, daß die Faser  $(f^*E)_x := (f^*p)^{-1}(x)$  von  $f^*p : f^*E \rightarrow N$  über  $x \in N$  gegeben ist durch  $\{(x, v) : v \in p^{-1}(f(x)) = E_{f(x)}\}$  und durch  $p^*f = \text{pr}_2$  bijektiv auf  $E_{f(x)}$  abgebildet wird, also  $f^*E \cong \bigsqcup_{x \in M} E_{f(x)}$  als Reparametrisierung vermöge  $f : N \rightarrow M$  des Bündels  $E = \bigsqcup_{y \in N} E_y$  aufgefaßt werden kann.

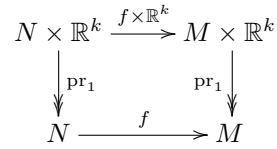
**Beweis.** Da  $p : E \rightarrow M$  submersiv ist, sind  $f$  und  $p$  transversal zueinander und somit  $f^*E := N \times_M E$  eine Teilmannigfaltigkeit von  $N \times E$  nach [27.8] mit der universellen Eigenschaft für glatte Abbildungen  $q$  und  $\bar{f}$ .

Um zu zeigen, daß  $f^*p : f^*E \rightarrow N$  ein Faserbündel ist müssen wir lokale Trivialisierungen finden. Sei dazu  $\psi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow E|_U$  eine lokale Trivialisierung von  $E|_U$ .

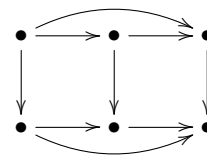
Beachte, daß das Pull-back einer offenen Teilmenge  $U \subseteq M$  vermöge einer glatten Abbildung  $p : E \rightarrow M$  gegeben ist durch  $E|_U = p^{-1}(U)$ , wie ein direkter Nachweis der universellen Eigenschaft zeigt. Explizit ist der Diffeomorphismus  $p^{-1}(U) \cong U \times_M E$  gegeben durch  $z \mapsto (p(z), z)$  und  $z \leftarrow (u, z)$ , cf. [27.15].



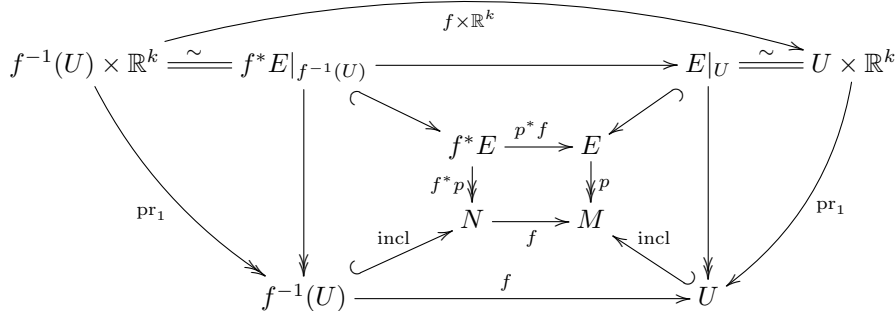
Weiters ist das Pull-back eines trivialen Bündels  $\text{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$  längs  $f : N \rightarrow M$  das triviale Bündel  $\text{pr}_1 : N \times \mathbb{R}^k \rightarrow N$ , wie ebenfalls ein direkter Nachweis der universellen Eigenschaft zeigt. Explizit ist der Diffeomorphismus  $N \times \mathbb{R}^k \cong N \times_M (M \times \mathbb{R}^k)$  gegeben durch  $(x, v) \mapsto (x, (f(x), v))$  und  $(x, v) \leftarrow (x, (y, v))$ .



Betrachtet man ein Rechteck, welches vertikal in zwei Quadrate zerlegt ist, wobei das rechte Quadrat ein Pull-back ist, so ist das Rechteck genau dann ein Pull-back wenn es das linke Quadrat ist, wie eine einfache Diagramm-Jagd zeigt, siehe [88, 3.8.3] und [88, 3.8.4].



Wir wenden dies alles nun auf  $\text{incl} \circ f$  und  $f \circ \text{incl}$  an:



Daß die so konstruierten Bündelkarten sowie  $p^*f$  und  $\bar{f}$  faserweise linear sind, entnimmt man ebenfalls dieses Diagramm.  $\square$

**27.15 Lemma (Einschränkung als Pull-back).**

Ist  $p : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel und  $A$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M$ , dann gilt  $E|_A := E|_A \cong \text{incl}^* E$ .

**Beweis.** Da  $p$  eine Submersion ist, ist  $p$  transversal zu  $A$  und somit  $p^{-1}(A) \cong E \times_M A = \text{incl}^* E$  nach [27.9].  $\square$

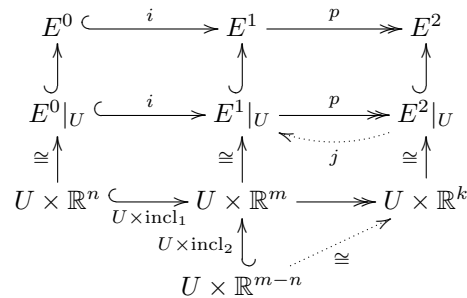
**27.16 Lemma (Exakte Vektorbündelsequenzen splitten).**

Sei  $E^0 \xrightarrow{i} E^1 \xrightarrow{p} E^2$  eine kurze exakte Sequenz von VB über einer parakompakten Mannigfaltigkeit  $M$ , d.h.  $i$  und  $p$  sind VB-Homomorphismen über  $\text{id}_M$  und faserweise ist  $i$  injektiv,  $p$  surjektiv und  $\text{Bild}(i_x) = \text{Ker}(p_x)$ .  
Dann ist  $E^1 \cong E^0 \oplus E^2$ .

**Beweis.** Nach [27.11] induziert  $i : E^0 \rightarrow E^1$  einen Isomorphismus auf ein Teilvektorbündel, d.h. o.B.d.A. ist  $i$  die Inklusion eines Teilbündels. ist.

Wir konstruieren nun einen rechtsinversen Vektorbündelhomomorphismus  $j : E^2 \rightarrow E^1$  zu  $p : E^1 \rightarrow E^2$ :

Lokal ist  $E^1|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$  und  $E^2|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$  für geeignete  $m, k \in \mathbb{N}$ . Unter dem ersten Isomorphismus entspricht  $E^0$  den Teilbündel  $U \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$  für ein  $n \leq m$ . Damit induziert die lokale Darstellung von  $p$  einen Isomorphismus  $U \times \mathbb{R}^{m-n} \cong U \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n} \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$  und dessen Inverse ist ein lokales Rechtsinverses zu  $p$ .



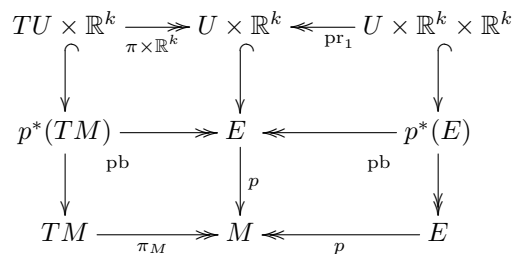
Mittels einer Partition der 1, welche der Überdeckung mit diesen trivialisierenden Umgebungen  $U$  untergeordnet ist, können wir diese lokalen Rechtsinversen verkleben und erhalten klarerweise ein Rechtsinverses  $j : E^2 \rightarrow E^1$  zu  $p$ . Der Isomorphismus  $E^0 \times_M E^2 \cong E^1$  ist dann durch  $(z^0, z^2) \mapsto i(z^0) + j(z^2)$  gegeben und hat als Inverses  $z \mapsto (i^{-1}(z - j(p(z))), p(z))$ , denn  $z - j(p(z)) \in \text{Ker}(p) = \text{Bild}(i)$ .  $\square$

**27.17 Tangentialbündel eines Vektorbündels.**

Wir wollen nun das Tangentialbündel  $\pi_E : TE \rightarrow E$  (des Totalraums eines) Vektorbündels  $p : E \rightarrow M$  genauer untersuchen. Das Interesse daran ist insbesondere in Hinblick auf  $T^2M = T(TM)$  gegeben.

Lokal ist  $E$  durch  $M \times \mathbb{R}^k$  und damit  $TE$  durch  $T(M \times \mathbb{R}^k) = TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  gegeben.

Andererseits ist das Pull-back-Bündel  $p^*(TM) = E \times_M TM$  lokal durch  $TM \times \mathbb{R}^k$  und  $p^*(E) = E \times_M E$  lokal durch  $M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  gegeben.



Somit ist  $TE$  lokal isomorph zu  $(TM \times \mathbb{R}^k) \times_{M \times \mathbb{R}^k} (M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  und damit zu  $p^*(TM) \times_E p^*(E)$ . Um diese lokalen Isomorphismen zu globalen zu machen, werden wir eine natürliche kurze exakte Sequenz  $p^*(E) \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM)$  von Vektorbündeln über  $E$  konstruieren und auf diese dann [27.16] anwenden.

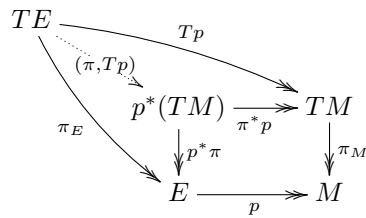
**Theorem.**

Sei  $p : E \rightarrow M$  ein VB. Dann existiert eine kurze exakte Sequenz von VB über  $E$ :

$$E \times_M E =: p^*(E) \xrightarrow{\text{vl}_E} TE \xrightarrow{(\pi, Tp)} p^*(TM) := E \times_M TM.$$

Nach [27.16] ist somit  $TE \cong (E \times_M E) \times_E (E \times_M TM) \cong E \times_M E \times_M TM$ , allerdings ist kein natürlicher Isomorphismus vorhanden, siehe jedoch [27.19]. Das Bild von  $\text{vl}$  wird VERIKALES TEILBÜNDEL  $VE$  von  $TE$  genannt und das Bild eines Rechtsinversen zu  $(\pi, Tp)$  kann als Wahl eines horizontalen Teilbündels gesehen werden.

**Beweis.**



Wir können einen Vektorbündelhomomorphismus  $(\pi, Tp) : TE \rightarrow p^*(TM)$  durch nebenstehendes Diagramm definieren.

Lokal ist  $TE$  durch  $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  und  $p^*(TM)$  durch  $(M \times \mathbb{R}^k) \times_M TM \cong TM \times \mathbb{R}^k$  sowie  $Tp : TE \rightarrow TM$  durch  $(\xi, v, w) \mapsto \xi$  gegeben. Somit ist  $(\pi, Tp)$  lokal durch  $(\xi, v, w) \mapsto (\xi, v)$  beschrieben. Insbesondere ist  $(\pi, Tp)$  faserweise surjektiv.

Der faserweise Kern von  $(\pi, Tp)$  über  $E$  besteht aus jenen Vektoren, die durch  $Tp$  auf 0-Vektoren abgebildet werden, anscheinend also aus den Tangentialvektoren an Kurven in den Fasern  $p^{-1}(x)$  von  $E$ . Deshalb definieren wir einen VB-Homomorphismus (den sogenannten VERTIKALEN LIFT)  $\text{vl}_E : p^*(E) = E \times_M E \rightarrow TE$  durch  $p^*(E) = E \times_M E \ni (v_x, w_x) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} v_x + t w_x \in TE$ . Bezüglich der lokalen Beschreibungen  $M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  von  $p^*(E)$  und  $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  von  $TE$  ist er durch  $(x, v, w) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} (x, v + tw) = (0_x, v, w)$  gegeben. Faserweise ist er somit injektiv und es gilt

$$\text{Bild}\left((\text{vl}_E)_{(x,v)}\right) = \left\{ (0_x, v; w) : w \in \mathbb{R}^k \right\} = \text{Ker}\left((\pi, Tp)_{(x,v)}\right),$$

also ist die Sequenz exakt. □

**27.18 Proposition.**

Es sei  $p : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel. Dann ist  $TE|_M := 0^*(TE) \cong E \oplus TM$  (kanonisch) als Vektorbündel über  $M$ , wobei  $0 : M \hookrightarrow E$  den Nullschnitt bezeichnet.

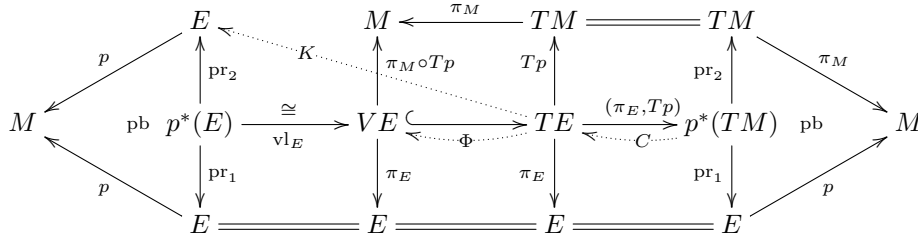
Wir werden dies in [86, 62.8] auf  $E := TM \rightarrow M$  und in [86, 62.9] auf  $(TN)^\perp \rightarrow N$  anwenden.



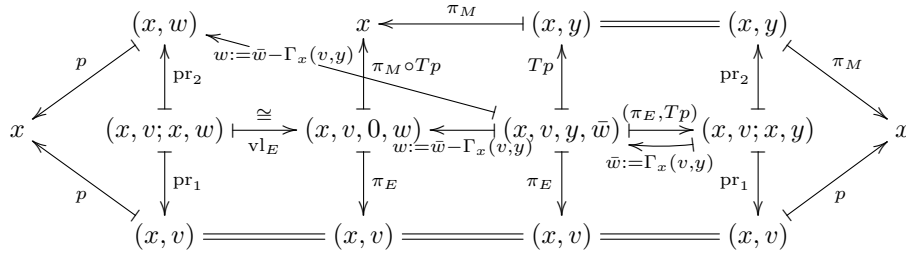


5. Eine KOVARIANTE ABLEITUNG  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ , welche  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear in der ersten und  $\mathbb{R}$ -linear in der zweiten Variable ist und  $\nabla_\xi(f \cdot s) = f \cdot \nabla_\xi s + \xi(f) \cdot s$  erfüllt für alle  $s \in \Gamma(E)$  und  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

**Beweis.** Die Morphismen in [1]–[3] sind durch folgendes Diagramm beschrieben:



Bezüglich lokaler Trivialisierungen  $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ ,  $TU \cong U \times \mathbb{R}^m$  und somit  $T(E|_U) \cong (E|_U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \cong U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  haben die Abbildungen des obigen Diagramms folgende Gestalt



wobei  $\Gamma_x : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  bilinear und  $x \mapsto \Gamma_x$  glatt ist.

[1]  $\Leftrightarrow$  [2] Eine kurze exakte Sequenz  $E^0 \xrightarrow{i} E^1 \xrightarrow{p} E^2$  splittet (d.h.  $E^1 \cong E^0 \oplus E^2$ ) genau dann wenn  $p$  ein Rechtsinverses  $s$ , bzw. wenn  $i$  ein Linksinverses  $q$  besitzt: Die Relation zwischen  $s$  und  $q$  ist durch  $q(z_1) := i^{-1}(z_1 - s(p(z_1)))$  und  $s(p(z_2)) := z_2 - i(q(z_2))$  gegeben.

[2]  $\Leftrightarrow$  [3] Da  $v1_E : p^*(E) \rightarrow TE$  ein VB-Isomorphismus auf das vertikale Bündel ist, ist eine Projektion  $TE \rightarrow VE$  eindeutig durch ihre zweite Komponente  $K : TE \xrightarrow{\Phi} VE \cong E \oplus E \xrightarrow{pr_2} E$  gegeben.

[3]  $\Rightarrow$  [5] Mittels Konnektor  $K : TE \rightarrow E$  erhalten wir zu  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $s \in \Gamma(E)$  einen Schnitt  $\nabla_\xi s : M \xrightarrow{\xi} TM \xrightarrow{Ts} TE \xrightarrow{K} E$  von  $p : E \rightarrow M$ , da  $p \circ \nabla_\xi s = p \circ K \circ Ts \circ \xi = \pi \circ Tp \circ Ts \circ \xi = \pi \circ T \text{id} \circ \xi = \pi \circ \xi = \text{id}$ .

Bezüglich lokaler Trivialisierungen  $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ ,  $TU \cong U \times \mathbb{R}^m$  und somit  $T(E|_U) \cong (E|_U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \cong U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  hat  $\nabla$  folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \xi(x) &= (x, y(x)), \quad s(x) = (x, \bar{s}(x)), \\ Ts(x, y) &= (x, \bar{s}(x), y, \bar{s}'(x)(y)), \quad K(x, v, y, \bar{w}) = (x, \bar{w} - \Gamma_x(v, y)) \\ \nabla_\xi s(x) &= (K \circ Ts \circ \xi)(x) = K(x, \bar{s}(x), y(x), \bar{s}'(x)(y(x))) \\ &= (x, \bar{s}'(x)(y(x)) - \Gamma_x(\bar{s}(x), y(x))) \end{aligned}$$

[4]  $\Leftrightarrow$  [5] Es sei  $(\nabla s)(\xi_x) := (\nabla_\xi s)(x)$ . Wegen der  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Linearität von  $\xi \mapsto \nabla_\xi s$  wird dadurch  $\nabla s \in \Omega^1(M; E)$  definiert.

[3]  $\Leftrightarrow$  [4] Jeder nicht-vertikale Vektor  $\sigma \in TE$  läßt sich schreiben als  $\sigma = Ts \cdot \xi$  für gewisse  $\xi \in T_x M$  und  $s \in \Gamma(E)$  mit  $x = \pi_M(Tp \cdot \sigma)$  und  $s(x) = \pi_E(\sigma) \in E_x$ . Wegen

$p \circ s = \text{id}$  ist dabei  $\xi = Tp(Ts \cdot \xi) = Tp(\sigma)$  eindeutig bestimmt.

Wir definieren  $K(\sigma) := (\nabla s)(\xi) \in E_x \subseteq E$ . Diese Definition hängt nur von  $\sigma$  und nicht von  $s$  ab: Aus der geforderten Produktregel folgt, daß  $\nabla$  ein lokaler Operator ist. Sei eine lokale Trivialisierung  $U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U$  beschrieben durch lokale Schnitte  $g_i : U \ni x \mapsto g_i(x) \in E_x$ , also  $s = \sum_i \bar{s}^i \cdot g_i$  lokal mit gewissen Koeffizienten  $\bar{s}^i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Dann ist

$$\nabla s(\xi) = \nabla \left( \sum_i \bar{s}^i \cdot g_i \right) (\xi) = \sum_i \left( \bar{s}^i(x) \cdot \nabla g_i(\xi) + d\bar{s}^i(\xi) \cdot g_i(x) \right).$$

und hängt somit nur von  $\bar{s}^i(x)$  und  $d\bar{s}^i(\xi)$ , also von  $Ts \cdot \xi = \sigma$  ab.

Bezüglich lokaler Trivialisierungen  $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ ,  $TU \cong U \times \mathbb{R}^m$  und somit  $T(E|_U) \cong (E|_U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \cong U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  hat  $\nabla s(\xi)$  und damit  $K$  folgende Gestalt:

$$\sigma = (x, v, y, w) = Ts \cdot \xi, \quad \text{mit } \xi = (x, y) \text{ und } s(x) = (x, \bar{s}(x)),$$

$$(x, v, y, w) = Ts(x, y) = \left( x, \bar{s}(x), y, \bar{s}'(x)(y) \right), \quad w = \bar{s}'(x)(y) = ((\bar{s}^i)')(x)(y)_i$$

$$\Gamma_x(v, y) := - \sum_i v^i \cdot \nabla g_i(x, y) \in \mathbb{R}^k \text{ ist bilinear in } v \text{ und } y$$

$$\Rightarrow \nabla s(\xi) = \left( x, -\Gamma_x(v, y) + \bar{s}'(x)(y) \right) \text{ nach obiger Formel}$$

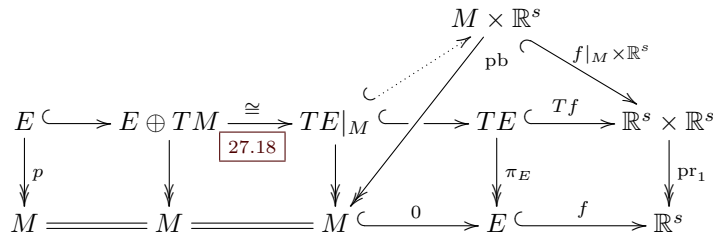
$$K(x, v, y, w) = \nabla s(\xi) = \left( x, \bar{s}'(x)(y) - \Gamma_x(v, y) \right) = \left( x, w - \Gamma_x(v, y) \right).$$

Wir können also  $K$  auf  $VE$  (d.h.  $y = 0$ ) durch diese lokale Formel glatt erweitern, sodaß  $K \circ \nu|_E = \text{pr}_2 : E \times_M E \cong VE \subseteq TE \rightarrow E$ . □

**27.20 Proposition.**

Jedes Vektorbündel  $p : E \rightarrow M$  ist isomorph zu einem Teilvektorbündel eines trivialen Bündels  $\text{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^s \rightarrow M$  mit geeigneten  $s \in \mathbb{N}$ .

**Beweis.**



Es sei  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$  eine Einbettung (oder auch nur eine Immersion) der Mannigfaltigkeit  $E$  in einen  $\mathbb{R}^s$ . Dann ist  $Tf : TE \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$  ein Vektorbündelmonomorphismus über  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$  und somit  $Tf \circ \iota : E \hookrightarrow TE|_M \hookrightarrow TE \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$  ein Vektorbündelmonomorphismus über  $M \rightarrow E \rightarrow \mathbb{R}^s$ , also  $(p, \text{pr}_2 \circ Tf \circ \iota) : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s = (f \circ 0)^*(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$  ein Vektorbündelmonomorphismus über  $\text{id}_M$ . □

Wir werden in [27.36] zeigen, daß so ein Vektorbündelmonomorphismus bereits für  $s = \dim(E)$  existiert.

**27.21 Folgerung (Existenz inverser Bündel).** [65, S100, 4.3.3].

Es sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit Faserdimension  $k$  über einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein Vektorbündel  $F \rightarrow M$  (mit Faserdimension  $m$ ) so, daß  $E \oplus F$  ein triviales Bündel (mit Faserdimension  $k + m$ ) ist.

**Beweis.** Sei  $\varphi : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$  ein VB-Monomorphismus über  $\text{id}_M$  nach [27.20](#) (bzw. [27.36](#) für  $s = k + m$ ). Für  $F$  genügt es nun  $\varphi(E)^\perp \subseteq M \times \mathbb{R}^s$  zu nehmen.  $\square$

### 27.22 K-Theorie.

Für eine fixe Mannigfaltigkeit  $M$  betrachten wir die Menge der Isomorphieklassen von endlich dimensionalen Vektorbündeln über  $M$ . Bezüglich der Whitney-Summe  $E_1 \oplus E_2$  und dem Tensorprodukt  $E_1 \otimes E_2$  bilden diese einen Halbring mit 0-Element  $[\varepsilon_0]$  und 1-Element  $[\varepsilon_1]$ , wobei  $\varepsilon_k$  das triviale Bündel  $\text{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$  bezeichnet. Wie bei der Konstruktion von  $\mathbb{Z}$  aus dem Halbring  $\mathbb{N}$  betrachtet man Äquivalenzklassen von Paare  $(E, F)$  von Vektorbündeln über  $M$  bzgl. der Äquivalenzrelation  $(E_1, F_1) \equiv (E_2, F_2) :\Leftrightarrow E_1 \oplus F_2 \cong F_1 \oplus E_2$  und addiert diese Repräsentantenweise durch  $(E_1, F_1) + (E_2, F_2) := (E_1 \oplus E_2, F_1 \oplus F_2)$  bzw. multipliziert sie durch  $(E_1, F_1) \cdot (E_2, F_2) := (E_1 \otimes E_2 \oplus F_1 \otimes F_2, E_1 \otimes F_2 \oplus F_2 \otimes E_1)$ . Da aber für Isomorphieklassen die (additiven) Kürzungsregeln nicht gelten (z.B. ist  $TS^2 \oplus \varepsilon_1 \cong \varepsilon_3 \cong \varepsilon_2 \oplus \varepsilon_1$  aber  $TS^2$  ist nicht trivial; da aber  $[E]_{\cong} \rightarrow [(E, 0)]_{\equiv}$  injektiv ist, kann auch im Bild (eine vermeindliche Gruppe) die Kürzungsregel nicht gelten) müssen wir statt dessen die gröbere Äquivalenzrelation  $(E_1, F_1) \approx (E_2, F_2) :\Leftrightarrow \exists F : E_1 \oplus F_2 \oplus F \cong F_1 \oplus E_2 \oplus F$  verwenden. Dann wird die Menge aller  $\approx$ -Äquivalenzklassen von Paaren von Vektorbündeln über  $M$  ein kommutativen Ring mit 1, der mit  $K(M)$  bezeichnet wird. Bezüglich Pull-back längs glatter Abbildungen  $f : N \rightarrow M$  wird  $K$  ein kontravarianter Funktor. Vektorbündel über 1-punktigen  $M = \{x\}$  sind Vektorräume und Paare von solchen sind genau dann  $\approx$ -äquivalent, wenn die Differenz der Dimension der Komponenten gleich ist. Also ist  $K(\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ .

Eine zweite Möglichkeit die K-Theorie  $K(M)$  zu bestimmen ist die Äquivalenzrelation  $E_1 \sim E_2 :\Leftrightarrow \exists k_1, k_2 : E_1 \oplus \varepsilon_{k_1} \cong E_2 \oplus \varepsilon_{k_2}$  zu betrachten. Die Menge dieser Äquivalenzklassen bildet einen kommutativen Ring  $\tilde{K}(M)$  bezüglich der Addition  $([E_1]_{\sim}, [E_2]_{\sim}) \mapsto [E_1 \oplus E_2]_{\sim}$  und der Multiplikation  $([E_1]_{\sim}, [E_2]_{\sim}) \mapsto [E_1 \otimes E_2]_{\sim}$ . Das neutrale Element ist offensichtlich durch  $[\varepsilon_0]_{\sim}$  gegeben. Das additive Inverse (siehe [27.21](#)) zu  $[E]_{\sim}$  finden wir wie folgt: Nach [27.20](#) existiert ein  $s \in \mathbb{N}$ , s.d.  $E$  isomorph zu einem Teilbündel von  $\varepsilon_s$  ist. Es gilt somit  $E \oplus E^\perp \cong \varepsilon_s \sim \varepsilon_0$ , wobei  $E^\perp$  das orthogonale Komplementärbündel zu diesem Teilbündel in  $\varepsilon_s$  bezeichnet. Es ist  $\tilde{K}(\{x\}) = \{0\}$ , darum nennt man  $\tilde{K}$  die reduzierte K-Theorie.

Wir beschreiben nun einen Ring-Homomorphismus  $K(M) \rightarrow \tilde{K}(M)$ :

Sei dazu  $(E_1, F_1)$  gegeben. Dann existiert wie zuvor ein  $s \in \mathbb{N}$  und ein  $F_1^\perp$  mit  $F_1 \oplus F_1^\perp \cong \varepsilon_s$ . Somit ist  $(E_1, F_1) \approx (E_1 \oplus F_1^\perp, \varepsilon_s)$ . Wir bilden dies auf  $[E_1 \oplus F_1^\perp]_{\sim}$  ab. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn aus  $(E_1, \varepsilon_{s_1}) \approx (E_2, \varepsilon_{s_2})$ , d.h.  $\exists F : E_1 \oplus \varepsilon_{s_2} \oplus F \cong E_2 \oplus \varepsilon_{s_1} \oplus F$ , folgt  $E_1 \oplus \varepsilon_{s_2} \oplus \varepsilon_s \cong E_1 \oplus \varepsilon_{s_2} \oplus F \oplus F^\perp \cong E_2 \oplus \varepsilon_{s_1} \oplus F \oplus F^\perp \cong E_2 \oplus \varepsilon_{s_1} \oplus \varepsilon_s$ , i.e.  $E_1 \sim E_2$ . Dieser Homomorphismus ist offensichtlich surjektiv und sein Kern besteht genau aus jenen Klassen  $[(E, \varepsilon_k)]_{\approx}$  für welche  $E \sim \varepsilon_0$ , d.h.  $\exists l, n \in \mathbb{N} : E \oplus \varepsilon_l \cong \varepsilon_n$ , also  $(E, \varepsilon_k) \approx (E \oplus \varepsilon_l, \varepsilon_k \oplus \varepsilon_l) \approx (\varepsilon_n, \varepsilon_{k+l})$ . Die Abbildung  $(n, m) \mapsto (\varepsilon_n, \varepsilon_m)$  faktorisiert zu einem Ringmonomorphismus  $\mathbb{Z} \hookrightarrow K(M)$  mit Linksinversen  $K(\text{incl}) : K(M) \rightarrow K(\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ . Somit ist der Kern isomorph zu  $\mathbb{Z}$ , also splittet die kurze exakte Sequenz Abelscher Gruppen  $\mathbb{Z} \hookrightarrow K(M) \rightarrow \tilde{K}(M)$ , d.h.

$$K(M) \cong \tilde{K}(M) \oplus \mathbb{Z}.$$

### 27.23 Definition. Universelles Vektorbündel.

Es sei  $p : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit Faserdimension  $k$  (ein sogenanntes  $k$ -Ebenenbündel) über  $M$  und  $f : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$  ein Vektorbündel-Monomorphismus wie in [27.20](#) über  $\text{id}_M$ . Wir werden in [27.35](#) zeigen, daß so einer existiert falls  $s \geq$

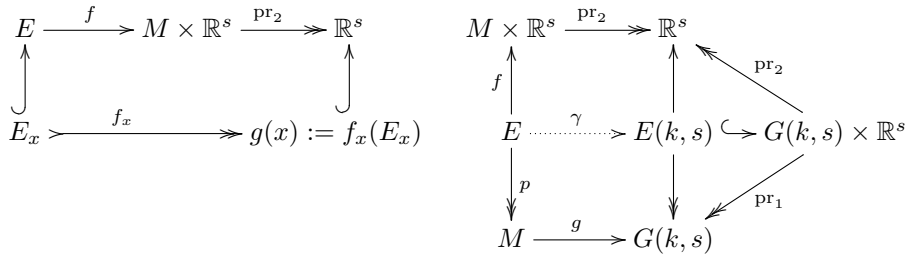
$k + m$  ist. Daraus erhalten wir eine Abbildung  $g : M \rightarrow G(k, s)$  mit Werten in der Graßmann-Mannigfaltigkeit der  $k$ -Ebenen im  $\mathbb{R}^s$  indem wir  $x$  auf das Bild von  $f_x : \mathbb{R}^k \cong E_x \rightarrow \mathbb{R}^s$  abbilden. Nun betrachten wir das UNIVERSELLE VEKTORBÜNDEL  $E(k, s) \rightarrow G(k, s)$ , wobei

$$E(k, s) := \{(\varepsilon, v) \in G(k, s) \times \mathbb{R}^s : v \in \varepsilon\}$$

und den Vektorbündelhomomorphismus

$$\gamma : E \rightarrow E(k, s), \quad v \mapsto (g(p(v)), f_{p(v)}(v)).$$

Damit ist  $E \cong g^*(E(k, s))$  und  $g$  heißt KLASSIFIZIERENDE ABBILDUNG des Vektorbündels  $p : E \rightarrow M$ :



Wir wollen nun zeigen, daß für  $s > m + k$  das Pull-back-Bilden eine Bijektion zwischen Homotopieklassen von Abbildungen  $M \rightarrow G(k, s)$  und Isomorphieklassen von VB der Faserdimension  $k$  über  $M$  liefert.

Da Homotopien Abbildung  $f : M \times I \rightarrow N$  sind sollten wir Vektorbündel über der berandeten (siehe [28.6](#)) Mannigfaltigkeit  $M \times I$  (mit Rand  $M \times \{0, 1\}$ ) behandeln. Wir könnten die Homotopie natürlich auch ausdehnen zu einer Abbildung  $M \times \mathbb{R} \rightarrow N$  und damit berandete Mannigfaltigkeiten vermeiden, allerdings hat  $I := [0, 1]$  den Vorteil kompakt zu sein.

**27.24 Lemma.** [\[65, S89, 4.1.1\]](#).

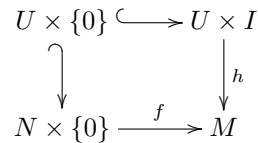
Sei  $p : E \rightarrow M \times I$  ein Vektorbündel. Dann existiert zu jedem  $x \in M$  eine Umgebung  $U \subseteq M$ , sodaß  $E|_{U \times I}$  trivial ist.

**Beweis.** Da  $I$  kompakt ist existierten  $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$  und Umgebungen  $U_i$  von  $x$ , sodaß  $E$  auf einer Umgebung von  $U_i \times [t_i, t_{i+1}]$  trivial ist. Sei  $U := \bigcap U_i$ . Wir zeigen mittels Induktion nach  $i$ , daß  $E$  auf einer Umgebung von  $U \times [0, t_i]$  ebenfalls trivial ist. Es genügt dazu den Fall  $i = 2$  zu betrachten. Seien also  $\varphi^j$  Trivialisierungen längs Umgebungen von  $U \times [t_j, t_{j+1}]$ . Auf den Durchschnitt für  $j = 0$  und  $j = 1$  – eine Umgebung von  $U \times \{t_1\}$  – können wir die Transitionsfunktion  $z \mapsto (\varphi_z^1)^{-1} \circ \varphi_z^0 \in GL(k)$  betrachten. Deren Keim können wir (durch Aufblasen des Definitionsbereichs) zu dem Keim einer Abbildung  $g : U \times [t_1, t_2] \rightarrow GL(k)$  ausdehnen Damit können wir  $\varphi^0$  durch  $(z, v) \mapsto \varphi^1(z, g(z) \cdot v)$  zu einer Trivialisierung auf eine Umgebung von  $U \times [t_0, t_2]$  erweitern.  $\square$

Um das global auf ganz  $M$  zu erreichen, benötigen wir die folgenden beiden Resultate:

**27.25 Lemma (Homotopieerweiterung von Keimen).** [\[65, S90, 4.1.3\]](#).

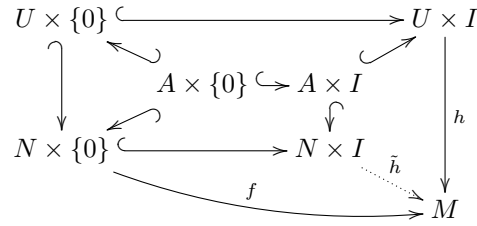
Es sei das nebenstehende kommutative Diagramm mit  $U \subseteq N$  offen und  $A \subseteq U$  abgeschlossen in  $N$  gegeben. Dann existiert ein  $\tilde{h} : N \times I \rightarrow M$  mit  $\tilde{h}|_{A \times I} = h|_{A \times I}$  und  $\tilde{h}|_{N \times \{0\}} = f$ .



**Beweis.** Es sei  $\rho : N \rightarrow [0, 1]$   $C^\infty$  mit  $\rho|_A = 1$  und  $\text{Trg}(\rho) \subseteq U$ . Dann erfüllt  $\tilde{h} : N \times I \rightarrow M$  definiert durch

$$\tilde{h}(x, t) := \begin{cases} f(x, 0) & \text{für } x \notin \text{Trg}(\rho) \\ h(x, \rho(x)t) & \text{für } x \in U \end{cases}$$

das Gewünschte.  $\square$



**27.26 Globalisierungslemma.** [65, S53, 2.2.11].

Es sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{B}$  eine Menge von Teilmengen von  $X$ , die  $X$  enthält und unter Vereinigungen abgeschlossen ist. Sei weiters  $\Phi$  ein Funktor von der bzgl. Inklusionen geordneten Kategorie  $\mathcal{B}$  in die Kategorie der Mengen, also ist zu  $B_2 \supseteq B_1$  in  $\mathcal{B}$  eine Abbildung  $\Phi(B_2) \rightarrow \Phi(B_1)$  gegeben. Dieser sei stetig, d.h. falls  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  linear geordnet ist, so ist

$$\Phi\left(\bigcup \mathcal{B}'\right) = \varprojlim_{B \in \mathcal{B}'} \Phi(B) := \left\{ x \in \prod_{B \in \mathcal{B}'} \Phi(B) : x_{B'} \xrightarrow{\Phi} x_B \text{ für alle } B' \supseteq B \text{ in } \mathcal{B}' \right\};$$

und lokal erweiterbar, d.h.

$$\forall x \in X \exists B_x \in \mathcal{B} \forall B \in \mathcal{B} : \Phi(B \cup B_x) \rightarrow \Phi(B) \text{ ist surjektiv und } x \in B_x.$$

Dann ist  $\Phi(X) \rightarrow \Phi(B)$  surjektiv für alle  $B \in \mathcal{B}$  mit  $\Phi(B) \neq \emptyset$ .

Falls  $\Phi$  nicht trivial ist, d.h.  $\exists B \in \mathcal{B}$  mit  $\Phi(B) \neq \emptyset$ , so ist  $\Phi(B) \neq \emptyset$  für alle  $B \in \mathcal{B}$ .

**Beweis.** Es sei  $B_0 \in \mathcal{B}$  und  $y_0 \in \Phi(B_0)$ . Es ist  $\mathcal{M} := \{(B, y) : B_0 \subseteq B \in \mathcal{B}, y \in \Phi(B), y \mapsto y_0\}$  partiell geordnet durch  $(B_1, y_1) \preceq (B_2, y_2) \Leftrightarrow B_1 \subseteq B_2$  und  $y_2 \mapsto y_1$ . Jede linear geordnete Teilmenge  $\mathcal{M}_0$  von  $\mathcal{M}$  besitzt wegen der Stetigkeit von  $\Phi$  ein maximales Element  $(B_\infty, y_\infty)$  mit  $B_\infty := \bigcup_{M \in \mathcal{M}_0} \text{pr}_1(M)$  und  $y_\infty := (\text{pr}_2(M))_{M \in \mathcal{M}_0} \in \varprojlim_{B \in \mathcal{B}_0} \Phi(B) = \Phi(B_\infty)$ .

Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element von  $\mathcal{M}$ , welches wir wieder mit  $(B_\infty, y_\infty)$  bezeichnen. Angenommen  $B_\infty \subset X$ . Sei  $x \in X \setminus B_\infty$ . Da  $\Phi$  lokal erweiterbar ist, existiert ein  $B_x \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B_x$  und  $\Phi(B \cup B_x) \rightarrow \Phi(B)$  surjektiv für alle  $B \in \mathcal{B}$ . Sei  $B' := B_\infty \cup B_x \supset B_\infty$  und  $y'$  ein Urbild in  $\Phi(B')$  von  $y_\infty \in \Phi(B_\infty)$ . Dann steht  $(B', y')$  im Widerspruch zur Maximalität.

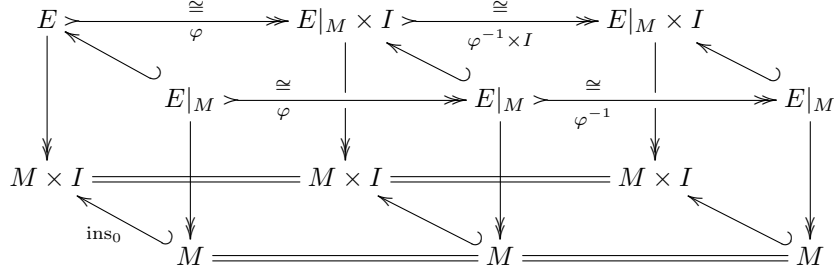
Sei  $\Phi(B_0) \neq \emptyset$ . Dann ist  $\Phi(X) \neq \emptyset$  da  $\Phi(X) \rightarrow \Phi(B_0)$  surjektiv ist und somit  $\Phi(B) \neq \emptyset$  für jedes  $B \in \mathcal{B}$ , denn nach Voraussetzung existiert eine Abbildung  $\Phi(X) \rightarrow \Phi(B)$ .  $\square$

**27.27 Theorem.** [65, S90, 4.1.5].

Jedes Vektorbündel  $p : E \rightarrow M \times I$  ist isomorph zu  $E|_{M \times \{0\}} \times I$ .

Wir werden im folgenden kurz  $E|_M = \text{ins}_0^*(E)$  an Stelle von  $E|_{M \times \{0\}}$  schreiben, wenn klar ist, daß dies bzgl. der Insertion  $\text{ins}_0$  bei 0 gemeint ist. Der Isomorphismus

im Theorem kann als Identität auf  $E|_M$  gewählt werden:



**Beweis.** Wir betrachten eine lokalendliche Überdeckung  $\mathcal{A}$  mit abgeschlossenen Mengen  $A \subseteq M$ , sodaß  $E$  längs einer Umgebung von  $A \times I$  trivial ist. Eine Überdeckung mit solchen Mengen existiert wegen [27.24] und sie kann lokalendlich gewählt werden wegen da  $M$  parakompakt ist. Sei  $\mathcal{B}$  die Menge aller (automatisch abgeschlossenen) Vereinigungen von Teilmengen von  $\mathcal{A}$ .

Für  $B \in \mathcal{B}$  betrachten wir Paare  $(f, \tilde{B})$ , wobei  $\tilde{B} \subseteq M$  eine offene Umgebung von  $B$  ist und  $f : E|_{\tilde{B} \times I} \rightarrow E|_{\tilde{B}} \times I$  ein VB-Isomorphismus, dessen Einschränkung auf  $E|_{\tilde{B} \times \{0\}}$  die Identität ist. Mit  $\Phi(B)$  bezeichnen wir die Menge der Keime solcher VB-Isomorphismen, also die Äquivalenzklassen solcher Paare, wobei  $(f_1, \tilde{B}_1) \sim (f_2, \tilde{B}_2)$  falls eine Umgebung  $\tilde{B} \subseteq \tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2$  von  $B$  existiert mit  $f_1|_{\tilde{B} \times I} = f_2|_{\tilde{B} \times I}$ . Klarerweise ist der Funktor  $\Phi$  stetig und wegen [27.24] ist er nicht trivial und sogar lokal erweiterbar: Sei nämlich  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$ . Dann müssen wir zeigen, daß  $\Phi(B \cup A) \rightarrow \Phi(B)$  surjektiv ist, also der Keim eines Vektorbündelisomorphismuses  $f : E \cong E|_M \times I$  über  $B \times I$  sich zu einem solchen über  $(B \cup A) \times I$  erweitern läßt. Sei  $f : E|_{\tilde{B} \times I} \rightarrow E|_{\tilde{B}} \times I$  der Vektorbündelisomorphismus mit offenen  $\tilde{B} \supseteq B$ . Nach Voraussetzung ist  $E|_{\tilde{A} \times I} \cong (\tilde{A} \times I) \times \mathbb{R}^k$  für ein offenes  $\tilde{A} \supseteq A$ . Um  $f$  zu einem Keim über  $(B \cup A) \times I$  zu erweitern genügt es den eingeschränkten Keim von  $f$  über  $(B \cap A) \times I$  zu einem über  $A$  zu erweitern. Mit  $E|_{\tilde{A} \times I}$  sind auch  $E|_{\tilde{A}}$  sowie  $E|_{(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \times I}$  und  $E|_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} \times I$  triviale Bündel und die Einschränkung von  $f$  zwischen den beiden letzteren ein VB-Isomorphismus, welcher somit durch eine Abbildung  $g : (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \times I \rightarrow GL(k)$  mit  $g(z, 0) = \text{id} \ \forall z$  beschrieben wird. Nach [27.25] kann deren Keim auf  $(A \cap B) \times I$  zu einer Abbildung  $\tilde{g} : \tilde{A} \times I \rightarrow GL(k)$  erweitert werden die seinerseits eine VB-Isomorphismus  $E|_{\tilde{A} \times I} \cong E_{\tilde{A}} \times I$  definiert, welcher den Keim von  $f$  über  $(B \cap A) \times I$  erweitert.

Nach [27.26] ist also  $\Phi(M) \neq \emptyset$  und somit  $f : E \rightarrow E|_M \times I$  eine VB-Isomorphismus für (jedes)  $(f, M) \in \Phi(M)$ . □

**27.28 Proposition (Pull-back ist homotopieinvariant).** [65, S97, 4.2.4].

Es seien  $f_0, f_1 : N \rightarrow M$  homotop und  $p : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel. Dann ist  $f_0^* E \cong f_1^* E$  als Vektorbündel über  $N$ .

**Beweis.** Es sei  $H : N \times I \rightarrow M$  eine Homotopie zwischen  $f_0$  und  $f_1$ . Für  $j \in \{0, 1\}$  ist  $H^* E \cong (H^* E)|_{N \times \{j\}} \times I \cong \text{ins}_j^*(H^* E) \times I = f_j^* E \times I$  nach [27.27] und somit

$$f_0^* E \cong (f_0^* E \times I)|_N \cong (f_1^* E \times I)|_N \cong f_1^* E. \quad \square$$

**27.29 Folgerung.** [65, S97, 4.2.5].

Jedes Vektorbündel über einem kontrahierbaren Raum ist trivial.



**Beweis.** Für kontrahierbare Räume  $M$  ist die Identität  $\text{id}$  auf  $M$  homotop zu einer konstanten Abbildung  $\text{const}_{x_0}$ . Nach [27.28] ist  $E = \text{id}^* E \cong \text{const}_{x_0}^* E = M \times E_{x_0}$ , also trivial.  $\square$

### 27.30 Definition. Funktionenraumtopologien.

Für  $0 \leq r < \infty$  benötigen zwei Topologien am Raum  $C^r(M, N)$  der  $C^r$ -Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$ , die wir im folgenden als  $\sigma$ -kompakt voraussetzen:

Die GROBE oder KOMPAKT-OFFENE  $C^r$ -TOPOLOGIE hat als Umgebungsbasis von  $f \in C^r(M, N)$  die Mengen

$$\left\{ g \in C^r(M, N) : g(K) \subseteq \text{Bild } \psi \text{ und } \forall x \in K, k \leq r \text{ ist} \right. \\ \left. \left\| (\psi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{(k)}(x) - (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)^{(k)}(x) \right\| < \varepsilon \right\},$$

wobei  $\varphi$  eine Karte von  $M$ ,  $\psi$  eine von  $N$ , weiters  $K \subseteq \text{Bild } \varphi$  kompakt mit  $f(K) \subseteq \text{Bild } \psi$ , sowie  $\varepsilon > 0$  ist.

Die FEINE oder WHITNEY-TOPOLOGIE hat als Umgebungsbasis von  $f \in C^r(M, N)$  die Mengen

$$\left\{ g \in C^r(M, N) : g(K_i) \subseteq \text{Bild } \psi_i \text{ und } \forall i, x \in K_i, k \leq r \text{ ist} \right. \\ \left. \left\| (\psi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i)^{(k)}(x) - (\psi_i^{-1} \circ f \circ \varphi_i)^{(k)}(x) \right\| < \varepsilon_i \right\},$$

wobei  $\varphi_i$  Karten von  $M$  deren Bilder eine lokalendliche Familie bilden,  $\psi_i$  Karten von  $N$ , weiters  $K_i \subseteq \text{Bild } \varphi_i$  kompakt mit  $f(K_i) \subseteq \text{Bild } \psi_i$ , sowie  $\varepsilon_i > 0$  ist.

Die grobe (resp. feine)  $C^\infty$ -Topologie auf  $C^\infty$  ist definiert als initiale Topologie bzgl. der entsprechenden  $C^r$ -Topologien für  $r \in \mathbb{N}$ .

Auf  $C^r(M, N)$  für  $0 \leq r \leq \infty$  ist die grobe  $C^r$ -Topologie vollständig metrisierbar, siehe [65, S62, 2.4.4.a] und die feinen  $C^r$ -Topologie Baire'sch, siehe [65, S62, 2.4.4.b]. Beachte, folgende Eigenschaften für Teilmengen eines topologischen Raums:

- NIRGENDS DICHT, d.h. ihr Abschluß hat leeres Inneres.
- MAGER, d.h. ist abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen, oder äquivalent ist enthalten in der abzählbaren Vereinigung abgeschlossener Mengen mit leeren Inneren.
- RESIDUAL, d.h. ist das Komplement einer mageren Menge, oder äquivalent enthält einen abzählbaren Durchschnitt offen dichter Mengen.

Ein topologischer Raum heißt BAIRSCH falls jede residuale Teilmenge dicht ist, oder äquivalent falls jede magere Teilmenge leeres Inneres hat.

### 27.31 Transversalitätssatz von Thom.

Es seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten und  $L \subseteq N$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit.

1. Dann ist die Menge  $\pitchfork^L(M, N)$  der zu  $L$  transversalen glatten Abbildungen  $M \rightarrow N$  residual und somit dicht in  $C^\infty(M, N)$  bzgl. der groben und der Whitney  $C^\infty$ -Topologie, denn ihr Komplement ist mager.



2. Falls  $L$  abgeschlossen in  $N$  und  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $M$  ist, so ist die Menge  $\mathfrak{H}_A^L(M, N)$  der zu  $L$  längs  $A$  transversalen glatten Abbildungen  $M \rightarrow N$  offen und dicht in  $C^\infty(M, N)$  bzgl. der Whitney  $C^\infty$ -Topologie bzw. für kompaktes  $A$  auch bzgl. der groben  $C^\infty$ -Topologie.

Dabei heißt eine Abbildung  $f \in C^\infty(M, N)$  transversal zu  $L$  längs  $A$ , wenn  $T_{f(x)}N = T_{f(x)}L + \text{Bild } T_x f$  ist für jedes  $x \in A$  mit  $f(x) \in L$ .

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbereitung:

**27.32 Globalisierungslemma für Dichtheit.** [65, S.75, 3.2.2].

Für Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  und  $r \in \mathbb{N}$  sei eine Abbildung  $\Phi$  gegeben, die jedem Tupel  $(A, U, V)$  von offenen Teilmengen  $U \subseteq M$ ,  $V \subseteq N$  und abgeschlossenen  $A \subseteq M$  mit  $A \subseteq U$  eine Teilmenge  $\Phi_A(U, V) \subseteq C^\infty(U, V)$  mit folgenden Eigenschaften zuordnet:

**Funktoralität:** Für solche Tupel  $(A, U, V)$  und  $(A', U', V')$  mit  $A' \subseteq A$ ,  $U' \subseteq U$  und  $V' \subseteq V$  ist  $\{f|_{U'} : f \in \Phi_A(U, V) \text{ und } f(U') \subseteq V'\} \subseteq \Phi_{A'}(U', V')$ .

**Lokalisierung:** Für jedes Tupel  $(A, U, V)$  ist  $f \in C^\infty(U, V)$  in  $\Phi_A(U, V)$  falls ebensolche Tupel  $(A_i, U_i, V_i)$  existieren und  $f_i \in \Phi_{A_i}(U_i, V_i)$  mit  $A \subseteq \bigcup_i A_i$  und  $f = f_i$  auf einer Umgebung von  $A_i$  für alle  $i$ .

**Lokale Offen- und Dichtheit:** Es gibt offene Überdeckungen  $\mathcal{U}$  von  $M$  und  $\mathcal{V}$  von  $N$ , sodaß für Tupel  $(A, U, V)$  wie oben aber mit  $A$  kompakt und  $U$  und  $V$  enthalten in Elementen aus  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  die Menge  $\Phi_A(U, V)$  offen und dicht in  $C^\infty(U, V)$  in der groben  $C^r$ -Topologie ist.

Dann gilt für abgeschlossenes  $A \subseteq M$ :

1.  $\Phi_A(M, N)$  ist offen und dicht in  $C^\infty(M, N)$  bzgl. der Whitney  $C^r$ -Topologie.
2. Falls  $A$  sogar kompakt ist, so ist  $\Phi_A(M, N)$  offen (und dicht) bzgl. der groben  $C^r$ -Topologie.

**Beweis.** Wegen lokaler Dichtheit existieren offene Überdeckungen  $\mathcal{U}$  von  $M$  und  $\mathcal{V}$  von  $N$  mit  $\Phi_A(U, V) \subseteq C^\infty(U, V)$  offen und dicht in der groben Topologie falls  $A \subseteq U$  kompakt und  $U$  und  $V$  enthalten in Elementen aus  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  sind.

**Offenheit:** Sei  $f \in \Phi_A(M, N)$ . Die Mengen  $U \cap f^{-1}(V)$  mit  $U \in \mathcal{U}$  und  $V \in \mathcal{V}$  bilden eine Überdeckung von  $M$  können also wegen Parakompaktheit zu einer lokalendlichen abzählbare Überdeckung  $\{U_i : i \in \Lambda\}$  verfeinert werden und falls  $A$  kompakt ist reicht schon eine endliche Indexmenge  $\Lambda$  um  $A$  zu überdecken. Wir können weiters kompakte  $A_i \subseteq U_i$  wählen die ebenfalls noch  $A$  überdecken. Seien  $V_i$  die entsprechenden  $V \in \mathcal{V}$  mit  $U_i \subseteq U \cap f^{-1}(V)$ . Es sei  $\mathcal{C} := \{g \in C^\infty(M, N) : g|_{U_i} \in \Phi_{K_i}(U_i, V_i) \text{ for all } i\}$ . Wegen Lokalisierung ist  $\mathcal{C} \subseteq \Phi_A(M, N)$  und wegen Funktoralität ist  $f \in \mathcal{C}$ . Und mit der Offenheit von  $\Phi_{A_i}(U_i, V_i) \subseteq C^\infty(U_i, V_i)$  in der groben Topologie ist auch  $\mathcal{C} \subseteq \Phi_A(M, N) \subseteq C^\infty(U, V)$  offen in der groben (für endliches  $\Lambda$ ) bzw. in der Whitney  $C^r$ -Topologie.

**Dichtheit:** Sei  $f \in C^\infty(M, N)$  und

$$\mathcal{C} := \left\{ g \in C^\infty(M, N) : g(K_i) \subseteq V_i \text{ und } \forall i, x \in K_i, k \leq r \text{ ist} \right. \\ \left. \left\| (\psi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i)^{(k)}(x) - (\psi_i^{-1} \circ f \circ \varphi_i)^{(k)}(x) \right\| < \varepsilon_i \right\}$$

eine typische Umgebung in der Whitney  $C^r$ -Topologie, d.h.  $\varphi_i$  Karten von  $M$  deren Bilder  $U_i := \text{Bild } \varphi_i$  eine lokalendlich Familie bilden und o.B.d.A. Teilmengen von  $U \in \mathcal{U}$  sind,  $K_i \subseteq U_i$  kompakt und o.B.A. eine Überdeckung von  $A$  bilden,  $\psi_i$  Karten von  $N$  mit  $f(K_i) \subseteq V_i := \text{Bild}(\psi_i)$  und o.B.d.A.  $V_i$  Teilmengen von  $V \in \mathcal{V}$  und  $\text{Dom } \psi_i \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex, sowie  $\varepsilon_i > 0$ .

Für fixes  $j \in \Lambda$  sei  $U := U_j \cap f^{-1}(V_j)$ , also  $K_j \subseteq U$ . Sei  $\rho \in C^\infty(M, [0, 1])$  mit  $\rho|_{K_j} = 1$  und  $\text{Trg}(\rho)$  kompakt in  $U$ . Für  $g \in C^\infty(U, V_j)$  ist

$$\Gamma(g) : x \mapsto \begin{cases} f(x) + \rho(x)(g(x) - f(x)) & \text{für } x \in U \\ f(x) & \text{für } x \notin \text{Trg}(\rho) \end{cases}$$

wohldefiniert in  $C^\infty(M, N)$ , wobei wir  $V_j$  mit dem konvexen Definitionsbereich von  $\psi_j$  identifiziert haben. Falls  $g \rightarrow f|_U$  in der groben  $C^r$ -Topologie konvergiert, so konvergiert  $\Gamma(g) \rightarrow f$  in der Whitney  $C^r$ -Topologie, da das Netz nur auf dem kompakten  $\text{Trg}(\rho) \subseteq U$  variiert. Da  $\Phi_{K_j}(U, V_j)$  dicht ist können wir  $g \in \Phi_{K_j}(U, V_j)$  so wählen, daß  $\Gamma(g) \in \mathcal{C}$ . Wegen  $g = \Gamma(g)$  lokal um  $K_j$  ist  $\Gamma(g) \in \Phi_{K_j}(M, N)$ . Somit ist  $\Phi_{K_j}(M, N)$  (offen und) dicht in  $C^\infty(M, N)$  bzgl. der Whitney  $C^r$ -Topologie, also ist  $\bigcap_i \Phi_{K_i}(M, N) \subseteq \Phi_A(M, N)$  residual und wegen deren Baire-Eigenschaft (siehe [65, S62, 2.4.4.b]) somit dicht.  $\square$

**27.33 Lemma.** [65, S.76, 3.2.3].

Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge einer Mannigfaltigkeit  $M$  und  $r \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$\mathfrak{h}_K^{\mathbb{R}^k}(M, \mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n) : f \text{ ist transversal längs } K \text{ zu } \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

offen und dicht in  $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  bzgl. der groben  $C^r$ -Topologie.

Beachte, daß der selbe Beweis auch für einen Halbraum  $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \geq 0\}$  an Stelle von  $\mathbb{R}^k$  funktioniert.

**Beweis.** Sei  $\text{pr} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k$  die kanonische Projektion. Für  $x \in M$  ist  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  transversal längs  $\{x\}$  zu  $\mathbb{R}^k$  genau dann, wenn entweder  $f(x) \notin \mathbb{R}^k$  oder  $x$  regulärer Punkt von  $\text{pr} \circ f$  ist.

**Offenheit:** Angenommen  $f$  ist transversal zu  $\mathbb{R}^k$  längs  $K$ . Dann existiert eine endliche Überdeckung mit kompakten Mengen  $K_i$ , sodaß  $f(K_i) \cap \mathbb{R}^k = \emptyset$  oder jedes  $x \in K_i$  ist regulärer Punkt von  $\text{pr} \circ f$ . Die Menge der  $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  die längs  $K_i$  eine der beiden Bedingungen erfüllen ist offen und enthalten in den zu  $\mathbb{R}^k$  längs  $K_i$  transversalen Abbildungen. Also ist  $\{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n) : f \text{ ist transversal längs } K \text{ zu } \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n\}$  offen.

**Dichtheit:** Sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ . Dann existiert nach dem Satz [11.15] von Sard eine Folge  $y_i \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}^n$  für welche  $\text{pr}(y_i)$  ein regulärer Wert von  $\text{pr} \circ f$  ist. Dann konvergiert die Folge der Funktionen  $f_i := f - y_i \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$  gegen  $f$  in der groben Topologie und  $f_i$  ist transversal zu  $\mathbb{R}^k$  längs  $K$ , denn sei  $f_i(x) \in \mathbb{R}^k$ , d.h.  $\text{pr}(f(x)) = \text{pr}(y_i)$ , dann ist  $x$  ein regulärer Punkt von  $\text{pr} \circ f$ .  $\square$

**Beweis von [27.31].** Sei  $L \subseteq N$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit und vorerst abgeschlossen. Es erfüllt

$$\Phi_A(U, V) := \mathfrak{h}_A^L(U, V) := \{f \in C^\infty(U, V) : f \text{ ist transversal längs } A \text{ zu } L \cap V\}$$

die Voraussetzungen von [27.32]:

**Funktoralität:** Seien  $(A, U, V)$  und  $(A', U', V')$  entsprechende Tupel mit  $A' \subseteq A$ ,  $U' \subseteq U$  und  $V' \subseteq V$ .

Dann ist offensichtlich  $\{f|_{U'} : f \in \mathfrak{h}_A^L(U, V) \text{ und } f(U') \subseteq V'\} \subseteq \mathfrak{h}_{A'}^{L'}(U', V')$ .

**Lokalisierung:** Seien  $(A, U, V)$  sowie  $(A_i, U_i, V_i)$  entsprechende Tupel mit  $A \subseteq \bigcup_i A_i$ . Weiters sei  $f \in C^\infty(U, V)$  und  $f_i \in \Phi_{A_i}(U_i, V_i)$  mit  $f = f_i$  lokal um  $A_i$ . Dann ist  $f \in \Phi_A(U, V)$ , denn sei  $f(x) \in L$  für ein  $x \in A$ , dann ist  $x \in A_i \subseteq U_i$  für ein  $i$  und  $\text{Bild}(T_x f) = \text{Bild}(T_x f_i)$  erzeugt zusammen mit  $T_{f(x)}(L \cap V) = T_{f_i(x)}(L \cap V_i)$  ganz  $T_{f(x)}V$ .

**Lokale Offen- und Dichtheit:** Sei  $U \subseteq M$  offen,  $V$  eine Kartenumgebung die  $L$  als Teilmannigfaltigkeit beschreibt oder leeren Durchschnitt mit dieser hat (also o.B.d.A.  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $L \cap V = \mathbb{R}^k \cap V$ ) und  $A \subseteq U$  kompakt. Nach Lemma [27.33] ist  $\mathring{\mathcal{H}}_A^{\mathbb{R}^k}(U, \mathbb{R}^n)$  offen und dicht in  $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$  bzgl. der groben  $C^r$ -Topologie für  $1 \leq r < \infty$ , und somit auch  $\Phi_A(U, V) = \mathring{\mathcal{H}}_A^{\mathbb{R}^k}(U, V) = \mathring{\mathcal{H}}_A^{\mathbb{R}^k}(U, \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(U, V)$  im topologischen Teilraum  $C^\infty(U, V)$  von  $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ . Dichtheit kann dabei wie folgt gesehen werden: Approximiere  $f \in C^\infty(U, V)$  durch ein  $g \in \mathring{\mathcal{H}}_A^{\mathbb{R}^k}(U, \mathbb{R}^n)$ , von welchen wir annehmen dürfen, daß es local um  $A$  Werte in  $V$  hat; nun modifiziere  $g$  außerhalb  $A$  so, daß es noch immer in der Umgebung von  $f$  ist aber Werte in  $V$  hat.

Nach [27.32] ist somit  $\mathring{\mathcal{H}}_A^L(M, N)$  offen und dicht in der Whitney-Topologie auf  $C^\infty(U, V)$  und falls  $A$  kompakt ist auch in der groben.

Falls  $L$  nicht abgeschlossen ist wählen wir eine abzählbare Familie von kompakten Kartenbereichen  $L_i$  (Teilmannigfaltigkeiten mit Rand) mit  $L = \bigcup_i L_i$ . Dann ist  $\mathring{\mathcal{H}}_A^L(M, N) = \bigcap_i \mathring{\mathcal{H}}_A^{L_i}(M, N)$  mit  $\mathring{\mathcal{H}}_A^{L_i}(M, N)$  offen und dicht in der Whitney-Topologie, also ist das Komplement von  $\mathring{\mathcal{H}}_A^L(M, N)$  mager.

Bzgl. der groben Topologie verwenden wir eine Überdeckung von  $A$  mit abzählbar vielen kompakten Mengen  $A_j$ . Dann ist  $\mathring{\mathcal{H}}_A^L(M, N) = \bigcap_j \mathring{\mathcal{H}}_{A_j}^{L_i}(M, N)$ , wobei nach dem zuvor gezeigten  $\mathring{\mathcal{H}}_{A_j}^{L_i}(M, N) \subseteq C^\infty(M, N)$  offen und dicht in der groben Topologie ist.  $\square$

**27.34 Proposition.** [19, S160, 14.8].

*Es sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und als Keim auf einer abgeschlossenen Menge  $A \subseteq M$  glatt. Dann existiert beliebig nahe an  $f$  (in der Whitney- $C^0$ -Topologie) ein glattes  $\tilde{f}$  mit  $\tilde{f} = f$  auf  $A$ .*

**Beweis.** Sei  $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $\varepsilon(x) > 0$  für alle  $x$ . Sei  $f \in C^\infty$  auf einer Umgebung  $U_\infty$  von  $A$ . Für jedes  $x \notin A$  wähle eine offene Umgebung  $U_x \subseteq M \setminus A$  mit  $|f(x') - f(x)| < \varepsilon(x')$  für alle  $x' \in U_x$ . Sei  $\{\rho_x : x \in \{\infty\} \cup (X \setminus A)\}$  eine untergeordnete Partition der 1 und  $\tilde{f} := \rho_\infty \cdot f + \sum_{x \neq \infty} f(x) \cdot \rho_x$ . Klarerweise ist  $\tilde{f} \in C^\infty$ ,  $\tilde{f} = f$  auf  $A$  und für  $x' \notin A$ :

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x') - f(x')| &= \left| \rho_\infty(x')f(x') + \sum_{x \neq \infty} \rho_x(x')f(x) - f(x') \sum_x \rho_x(x') \right| \\ &\leq \sum_{\{x \neq \infty : x' \in U_x\}} |f(x') - f(x)| \cdot \rho_x(x') \leq \varepsilon(x') \sum_x \rho_x(x') = \varepsilon(x'). \quad \square \end{aligned}$$

Die VB-Monomorphismen  $\varphi : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$  entsprechen offensichtlich bijektiv den glatten Abbildungen  $\varphi^\vee : M \rightarrow L_k(k, s)$ . Für diese gilt nun:

**27.35 Theorem.** [65, S78, 3.2.6].

*Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $A \subseteq M$  abgeschlossen. Dann läßt sich jeder glatte Keim  $M \supseteq A \rightarrow L_k(k, s)$  mit  $s \geq m + k$  zu einer glatten Abbildung  $M \rightarrow L_k(k, s)$  erweitern.*

**Beweis.** Nach dem Erweiterungssatz von Tietze kann  $f$  zu einer stetigen Abbildung  $\tilde{f} : M \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s) =: L(k, s)$  erweitert werden. Nach [27.34] können wir ein glattes  $\tilde{f}$  wählen. Für  $x \in A$  sei  $2\varepsilon_x := d(f(x), L(k, s) \setminus L_k(k, s)) > 0$  und  $U_x := \{y \in M : |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon_x\} := \tilde{f}^{-1}(U_{\varepsilon_x}(f(x)))$ . Es existiert eine localendliche abzählbare Verfeinerung durch relativkompakte Kartenumgebungen  $U_i$ . Wähle  $\rho \in$

$C^\infty(M, [0, 1])$  mit  $\rho = 1$  local um  $A$  und  $\text{Trg } \rho \subseteq \bigcup_i U_i$  und wähle weiters kompakte Teilmengen  $K_i \subseteq U_i$ , s.d.  $\text{Trg } \rho \subseteq \bigcup_i K_i$ . Es ist  $L(k, s) \setminus L_k(k, s) = \bigcup_{r < k} L_r(k, s)$ , wobei  $L_r(k, s)$  eine  $r(k+s-r)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von  $L(k, s)$  ist nach [3.8]. Nach [27.31.1] existiert ein  $g : M \rightarrow L(k, s)$  in der Whitney- $C^0$ -Umgebung  $\{g : |g(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon_i \ \forall x \in K_i\}$  welches transversal zu  $L_r(k, s)$  für alle  $r < k$  ist. Wegen

$$\begin{aligned} \dim L(k, s) - \dim L_r(k, s) &= ks - r(k + s - r) = (k - r)(s - r) \\ &\geq (k - (k - 1))(s - (k - 1)) = s - k + 1 \geq m + 1 > m \end{aligned}$$

ist dies nur möglich falls  $g$  die Menge  $\bigcup_{r < k} L_r(k, s)$  überhaupt nicht trifft, d.h.  $g(M) \subseteq L_k(k, s)$ . Somit ist  $\tilde{g} := \rho \cdot \tilde{f} + (1 - \rho) \cdot g : M \rightarrow L_k(k, s)$  die gesuchte Abbildung:

In der Tat ist  $\tilde{g} = \tilde{f} = f$  auf  $A$  und  $\tilde{g} = g$  auf  $M \setminus \bigcup_i K_i$ . Für  $y \in K_i \subseteq U_i \subseteq U_{x_i}$  gilt ebenfalls  $\tilde{g}(y) \in L_k(k, s)$ , denn

$$|\tilde{g}(y) - f(x_i)| \leq |(\tilde{g} - \tilde{f})(y)| + |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x_i)| = (1 - \rho(y))|(g - \tilde{f})(y)| + |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x_i)| < 2\varepsilon_i.$$

Beachte, daß  $\tilde{g}$  nicht nur als Erweiterung von  $f|_A$  gewählt werden kann, sondern auch als eine des Keims von  $f$  längs  $A$ : Wir müssen dazu nur  $A$  durch eine abgeschlossene im Definitionsbereich von  $f$  gelegene Umgebung ersetzen.  $\square$

### 27.36 Proposition (Keime von VB-Monos erweitern). [65, S99, 4.3.1].

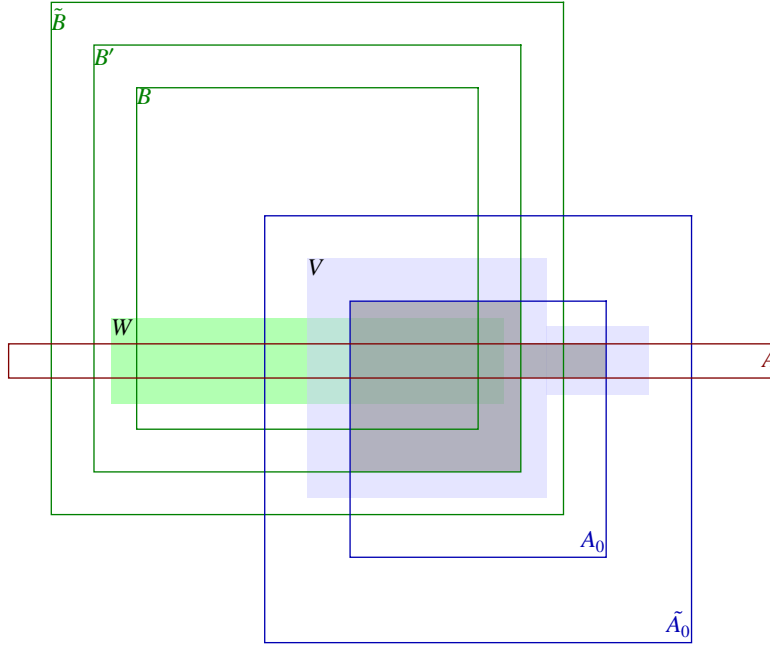
Es sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit Faserdimension  $k$  und  $m$ -dimensionalen  $M$ . Sei weiters  $A \subseteq M$  abgeschlossen,  $U \subseteq M$  offen mit  $A \subseteq U$  und  $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^s$  ein VB-Monomorphismus mit  $k+m \leq s$ . Dann existiert eine VB-Monomorphismus  $\tilde{\varphi} : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$  der auf einer Umgebung von  $A$  mit  $\varphi$  übereinstimmt.

**Beweis.** Falls  $E \rightarrow M$  trivial ist, so definiert  $\varphi$  eine Abbildung  $U \rightarrow L_k(k, s)$ . Wegen  $m \leq s - k$  existiert nach [27.35] eine Erweiterung  $M \rightarrow L_k(k, s)$  des Keims dieser Abbildung. Somit erhalten wir einen VB-Monomorphismus  $E = M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$  über  $\text{id}_M$ .

Der allgemeine Fall folgt durch Anwenden des Globalisierungslemmas [27.26]: Sei nämlich  $\mathcal{B}_0$  eine localendliche Überdeckung von  $M$  mittels abgeschlossener Mengen  $B_0 \subseteq M$ , für welche eine Umgebung  $U_0$  of  $B_0$  existiert, s.d.  $E|_{U_0}$  trivial ist. Sei  $\mathcal{B}$  die Menge aller (automatisch abgeschlossenen) Vereinigungen von Mengen in  $\mathcal{B}_0$ . Für  $B \in \mathcal{B}$  sei  $\Phi(B)$  die Menge der Keime von VB-Monomorphismen über  $B$ , d.h. es existiert eine Umgebung  $V \subseteq M$  von  $B$  und ein VB-Monomorphismus  $\tilde{\varphi} : E|_V \rightarrow V \times \mathbb{R}^s$ , welcher über einer Umgebung  $W \subseteq U \cup V$  von  $A \cap B$  mit  $\varphi$  übereinstimmt. Durch Verkleinern von  $U$  und  $V$  können wir dabei annehmen, daß  $W = U \cap V$  ist und somit  $\tilde{\varphi}$  auf  $E|_V$  sich via  $\varphi$  auf  $E|_U$  zu einem VB-Monomorphismus  $E|_{U \cup V} \rightarrow (U \cup V) \times \mathbb{R}^s$  erweitern läßt: In der Tat sind  $A' := A \setminus W$  und  $B' := B \setminus W$  disjunkte abgeschlossene Mengen, also existierten wegen der Normalität offene disjunkte Umgebungen  $U'$  und  $V'$ . Somit sind  $U'' := U' \cup W$  und  $V'' := V' \cup W$  offene Umgebungen von  $A$  und  $B$  (z.B. ist  $U'' \supseteq A' \cup W = (A \setminus W) \cup W \supseteq A$ ) and  $U'' \cap V'' = (U' \cap V') \cup W = \emptyset \cup W = W$ .

Der Funktor  $\Phi$  ist offensichtlich stetig und nicht trivial. Er ist auch **local erweiterbar**: Sei nämlich  $x \in B_0 \in \mathcal{B}_0$ , d.h.  $E|_{U_0}$  ist trivial für eine Umgebung  $U_0$  von  $B_0$ . Sei  $B \in \mathcal{B}$  und  $\tilde{\varphi} \in \Phi(B)$ , d.h.  $\tilde{\varphi}$  hat als Repräsentanten einen VB-Monomorphismus  $\tilde{\varphi} : E|_{V \cup U} \rightarrow (V \cup U) \times \mathbb{R}^s$  für Umgebungen  $U$  von  $A$  und  $V$  of  $B$  welcher den Keim  $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^s$  erweitert. Da  $E|_{U_0}$  trivial ist, können wir wegen dem Spezialfall den Keim des VB-Monomorphismes  $\tilde{\varphi}$  über der abgeschlossenen Teilmenge  $(A \cup B) \cap B_0$  zu einem VB-Monomorphism über  $U_0$  erweitern und wie eben

zuvor können wir annehmen, daß dieser mit  $\tilde{\varphi}$  auf dem Durchschnitt der Umgebungen von  $A \cup B$  und von  $B_0$  übereinstimmt, und somit zusammen mit  $\tilde{\varphi}$  den Keim eines VB-Monomorphismuses über  $A \cup B \cup B_0$  liefert, also ein Element in  $\Phi(B \cup B_0)$  mit Bild  $\tilde{\varphi} \in \Phi(B)$ .



Somit folgt das Resultat aus [27.26](#). □

**27.37 Proposition.** [\[65, S100, 4.3.2\]](#).

Es sei  $E \rightarrow M \times I$  ein Vektorbündel mit Faserdimension  $k$  und  $m$ -dimensionalen  $M$ . Für  $s > k + m$  und  $j \in \{0, 1\}$  sei  $\varphi_j : E|_{M \times \{j\}} \rightarrow (M \times \{j\}) \times \mathbb{R}^s$  ein VB-Monomorphismus. Dann existiert eine Erweiterung  $\varphi : E \rightarrow M \times I \times \mathbb{R}^s$  von  $\varphi_0 \cup \varphi_1$  zu einem VB-Monomorphismus über  $M \times I$ .

**Beweis.** Nach [27.27](#) läßt sich  $\varphi_j$  zu einem VB-Monomorphismus

$$E \cong E|_{M \times \{j\}} \times I \xrightarrow{\varphi_j \times I} (M \times \{j\}) \times \mathbb{R}^s \times I \cong (M \times I) \times \mathbb{R}^s$$

erweitern. Damit erhalten wir eine Erweiterung  $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^s$  zu einem VB-Monomorphismus über der offenen Umgebung  $U := M \times (I \setminus \{\frac{1}{2}\})$  von  $A := M \times \{0, 1\} \subseteq M \times I$ . Deren Keim über  $A$  läßt sich nach [27.36](#) zu einem globalen VB-Monomorphismus erweitern. □

**27.38 Theorem.** [\[65, S100, 4.3.4\]](#).

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Für  $s \geq k + m$  existiert zu jedem Vektorbündel  $E \rightarrow M$  mit Faserdimension  $k$  eine klassifizierende Abbildung  $g : M \rightarrow G(k, s)$ , d.h.  $E \cong g^*(E(k, s))$ .

Für  $s > k + m$  ist die Abbildung  $g \mapsto g^*(E(k, s))$  eine Bijektion zwischen den Homotopieklassen von Abbildungen  $g \in C^\infty(M, G(k, s))$  und Isomorphieklassen von Vektorbündeln  $E \rightarrow M$  der Faserdimension  $k$ .

**Beweis.** Nach [27.28](#) ist das Pull-back-Nehmen wohldefiniert für die entsprechenden Klassen, i.e. homotope Abbildungen erzeugen isomorphe Pull-backs.

Nach [27.36](#) existiert ein VB-Monomorphismus  $E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$  für  $s \geq m + k$  und nach [27.23](#) somit eine klassifizierende Abbildung  $g : M \rightarrow G(k, s)$ . Dies zeigt die Surjektivität.

Injektivität: Seien zwei Bündel über  $M$  isomorph und  $g$  eine klassifizierende Abbildung eines der beiden Bündel. Dann klassifiziert dieses klarerweise auch das andere Bündel. Bleibt also zu zeigen, daß je zwei klassifizierende Abbildung  $g^i : M \rightarrow G(k, s)$  eines Vektorbündels  $E \rightarrow M$  homotop sind. Nach Voraussetzung induzieren sie VB-Monomorphismen  $\varphi^i : E \times \{i\} \cong E \cong (g^i)^*(E(k, s)) = M \times_{G(k,s)} E(k, s) \hookrightarrow M \times_{G(k,s)} G(k, s) \times \mathbb{R}^s \cong M \times \mathbb{R}^s$  über  $M$  mit  $g^i(x) = \text{Bild}(\varphi^i_{(x,i)})$ . Nach [27.37](#) existiert ein VB-Monomorphismus  $\varphi : E \times I \rightarrow (M \times I) \times \mathbb{R}^s$  welcher  $\varphi^0 \cup \varphi^1$  erweitert. Dieser induziert eine Homotopie  $g : M \times I \rightarrow G(k, s)$  zwischen den  $g^i$  vermöge  $g(x, t) := \text{Bild}(\varphi_{(x,t)} : E_x = (E \times I)_{(x,t)} \rightarrow \mathbb{R}^s)$ .  $\square$

**27.39 Bemerkungen.**

1. Sind 2 der folgenden 3 Vektorbündel orientierbar, so auch das dritte:  $E_1 \rightarrow M$ ,  $E_2 \rightarrow M$ ,  $E_1 \oplus E_2 \rightarrow M$ . Aus faserweisen Orientierungen zweier dieser Bündel läßt sich leicht eine Orientierung auf dem dritten konstruieren.
2. Sei  $E_0 \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{p} E_2$  eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln. Falls zwei der Bündel orientierbar sind, so ist es auch das dritte (Benütze, daß jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündel nach [27.16](#) splittet, d.h.  $E_1 \cong E_0 \oplus E_2$ , und dann [1](#)).
3. Ist ein Vektorbündel  $E \rightarrow M$  orientierbar und  $f : N \rightarrow M$  glatt, so ist auch das induzierte Bündel  $f^*(E) \rightarrow N$  orientierbar (Wähle auf  $(f^*(E))_x \cong E_{f(x)}$  die Orientierung von  $E_{f(x)}$ ).
4. Sind 2 der folgenden 3 Objekte orientierbar, so auch das dritte:  $E \rightarrow M$  als Vektorbündel,  $E$  als Mannigfaltigkeit,  $M$  als Mannigfaltigkeit (Benütze die kurze exakte Sequenz aus [27.17](#):  $p^*(E) \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM)$ , sowie [2](#), [3](#) und die Tatsache, daß  $E \rightarrow M$  das von  $0 : M \hookrightarrow E$  induzierte Bündel zu  $p^*(E) \rightarrow E$  und  $TM \rightarrow M$  das von  $0 : M \hookrightarrow E$  induzierte Bündel zu  $p^*(TM) \rightarrow E$  ist, also  $M$  genau dann orientierbar ist, wenn  $p^*(TM) \rightarrow E$  es ist, und  $E$  genau dann, wenn  $p^*(E) \rightarrow E$  es ist).

$$\begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & p^*E & \longrightarrow & E \\
 p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\
 M & \xrightarrow{0} & E & \xrightarrow{p} & M \\
 & \searrow & \text{id} & \swarrow & \\
 & & & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 TM & \longrightarrow & p^*(TM) & \longrightarrow & TM \\
 \pi_M \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 M & \xrightarrow{0} & E & \xrightarrow{p} & M \\
 & \searrow & \text{id} & \swarrow & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

5.  $TM$  ist als Mannigfaltigkeit immer orientierbar, als Vektorbündel hingegen nach [4](#) genau dann, wenn  $M$  als Mannigfaltigkeit orientierbar ist:

Im Falle  $E = TM$  und  $p = \pi_M$  reduziert sich die in [4](#) verwendete Sequenz aus [27.17](#) auf  $\pi^*(TM) \rightarrow T(TM) \rightarrow \pi^*(TM)$ , also ist  $T^2M \rightarrow TM$  als Vektorbündel isomorph zu  $\pi^*(TM) \oplus \pi^*(TM)$ . Die Summe gleicher Bündel ist aber immer orientierbar: Wählt man auf den Fasern der beiden Summanden die gleiche Orientierung, so ergibt das auf der Summe offenbar eine Orientierung, die, unabhängig von der jeweiligen Wahl ist.

**27.40 Beispiele.**

1. Vektorbündel mit eindimensionaler Faser sind genau dann orientierbar, falls sie trivial sind (Eine Trivialisierung ist durch orientierte Einheitsvektoren gegeben).

Das Vektorbündel  $\text{Möb} \rightarrow S^1$  ist nicht orientierbar (da nicht trivial), ebensowenig das Möbiusband als Mannigfaltigkeit nach Bemerkung [27.39.4]. Alle 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.

2. Jedes komplexe Vektorbündel ist orientierbar, denn  $GL(\mathbb{C}^n) \subseteq GL_+(\mathbb{R}^{2n})$  nach [86, 14.14] oder auch weil  $GL(\mathbb{C}^n)$  zusammenhängend ist und die Orientierungserhaltende Identität enthält. Das Tangentialbündel einer komplexen Mannigfaltigkeit ist ein komplexes Vektorbündel und daher orientierbar. Somit ist also jede komplexe Mannigfaltigkeit selbst orientierbar nach [27.3].
3. Eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn eine komplexe Struktur existiert, siehe [29].
4. Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit einfach zusammenhängender Basismannigfaltigkeit  $M$ , dann ist das Vektorbündel  $E \rightarrow M$  orientierbar (aber nicht notwendig trivial wie  $S^2$  zeigt), da wir längs Kurven in der Basis die Orientierung der Fasern fortsetzen können und diese nicht von der gewählten Kurve abhängt, da die Basis einfach zusammenhängend ist. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit orientierbar.

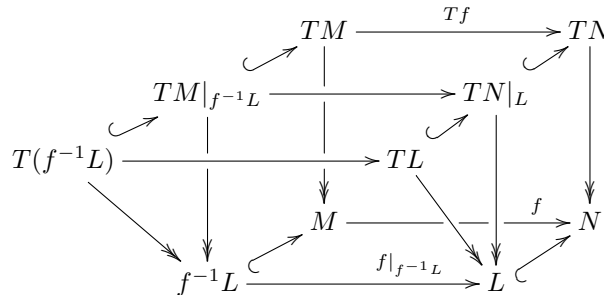
**27.41 Lemma (Orientierbarkeit inverser Bilder).**

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und transversal zu einer regulären Teilmannigfaltigkeit  $L \subseteq N$ . Falls  $M$  und  $(TL)^\perp \rightarrow L$  orientierbar sind, so ist es auch  $f^{-1}(L)$ . Falls  $L$  und  $N$  orientierbar sind, so gilt gleiches auch für das Normalenbündel  $(TL)^\perp \rightarrow L$ . Insbesondere ist dies der Fall, wenn  $L$  einelementig ist.

**Beweis.** Es ist  $(TL)^\perp$  faserweise  $T_y N / T_y L$  für  $y \in L$ , also haben wir die kurze exakte Sequenz  $TL \rightarrow (TN)|_L \rightarrow (TL)^\perp$  von VB über  $L$ .

Falls  $L$  und  $N$  orientierbar sind, so sind es auch die Bündel  $TL \rightarrow L$  und  $TN \rightarrow N$  und damit auch das Pull-back-Bündel  $(TN)|_L$  nach [27.39.3] und schließlich  $(TL)^\perp \rightarrow L$  nach [27.39.2].

Der Spezialfall mit  $L = \{y\}$  folgt, da  $(TL)^\perp$  als VB über den einpunktigen Raum trivial und somit orientierbar ist, oder auch weil wir  $N$  durch eine (orientierte) Kartenumgebung ersetzen können.



Es ist  $T(f^{-1}L) \rightarrow (TM)|_{f^{-1}L}$  ein VB-Monomorphismus über  $f^{-1}L$  und weiters  $(TM)|_{f^{-1}L} \xrightarrow{Tf} TN|_L \rightarrow (TL)^\perp$  ein VB-Epimorphismus über  $f|_{f^{-1}L} : f^{-1}L \rightarrow L$ , denn zu für  $x \in f^{-1}(L)$ ,  $y = f(x)$  und  $\dot{w} \in (TL)_y^\perp := T_y N / T_y L$  existiert ein  $w \in T_y N$  mit  $\dot{w} = [w]$  und wegen Transversalität somit ein  $v \in T_x M$  und  $v' \in T_y L$  mit  $w = T_x f \cdot v + v'$ . Also ist  $[T_x f \cdot v] = [T_x f \cdot v + v'] = [w] = \dot{w}$ . Faserweise ist der Kern dieses Epimorphismuses  $\{v \in T_x M : [T_x f \cdot v] = 0\} = \{v \in T_x M : T_x f \cdot v \in T_{f(x)} L\} = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)} L) = T_x(f^{-1}L)$  nach [27.9].



Somit ist  $T(f^{-1}L) \rightarrow (TM)|_{f^{-1}L} \rightarrow f^*((TL)^\perp)$  eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln und mit nach [27.39.3](#) orientierbaren Vektorbündel  $(TM)|_{f^{-1}L}$  und  $f^*((TL)^\perp)$  ist auch  $T(f^{-1}L) \rightarrow f^{-1}L$  orientierbar, also  $f^{-1}(L)$  orientierbar.  $\square$

### 27.42 Beispiele.

1. Alle  $S^n$  sind orientierbar.
2. Alle kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^3$  sind orientierbar, siehe Klassifikationssatz [1.2](#).
3.  $\mathbb{P}^1 \cong S^1$  ist orientierbar. Die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2$  enthält ein Möbiusband als offenen Teil, also ist sie nicht orientierbar. Allgemein gilt:  $\mathbb{P}^n$  ist orientierbar  $\Leftrightarrow n$  ungerade, siehe [6.12.5](#) und [27.44.2](#).

### 27.43 Die Orientierungsüberlagerung.

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $M^{or} := \{(p, \omega) : p \in M, \omega \text{ Orientierung auf } T_p M\}$ . Wir definieren einen Atlas  $\mathcal{A}$  für  $M^{or}$  mittels Karten  $\varphi$  von  $M$  durch  $\varphi_\pm : \text{Dom } \varphi \rightarrow M^{or}$ ,  $x \mapsto (\varphi(x), \pm\omega)$  wobei  $\omega$  die Orientierung ist, welche unter  $T\varphi$  aus der Standardorientierung des  $\mathbb{R}^n$  entsteht, ist. Es ist  $\mathcal{A}$  ein  $C^\infty$ -Atlas auf  $M^{or}$ , denn seien  $\varphi$  und  $\psi$  Karten von  $M$ , dann folgt  $\varphi_+^{-1} \circ \psi_+$  (und genauso  $\varphi_+^{-1} \circ \psi_-$ , etc.) ist genau auf der offenen Menge  $\{x \in \mathbb{R}^m : (\varphi^{-1} \circ \psi)'(x) \text{ ist orientierungserhaltend (vertauschend)}\}$  definiert und stimmt dort mit  $\varphi^{-1} \circ \psi$  überein:

$$\begin{aligned} & x \in \text{Dom}(\varphi_+^{-1} \circ \psi_+) \\ \Leftrightarrow & x \in \text{Dom}(\varphi^{-1} \circ \psi) \text{ s.d. } T_x \psi \text{ und } T_{(\varphi^{-1} \circ \psi)(x)} \varphi \text{ die gleiche Orientierung induzieren} \\ \Leftrightarrow & x \in \text{Dom}(\varphi^{-1} \circ \psi) \text{ s.d. } (\varphi^{-1} \circ \psi)'(x) \text{ orientierungserhaltend ist.} \end{aligned}$$

Es ist  $\text{pr}_1 : M^{or} \rightarrow M$  offensichtlich eine zweiblättrige Überlagerung von  $M$ , die sogenannte ORIENTIERUNGSÜBERLAGERUNG von  $M$ .

Die Mannigfaltigkeit  $M^{or}$  ist orientiert, wobei die Orientierung auf  $T_{(p,\omega)} M^{or} \cong T_p M$  gerade  $\omega$  ist.

Es gilt außerdem:  $M$  ist orientierbar  $\Leftrightarrow M^{or} \cong M \times \{-1, 1\}$ , denn:

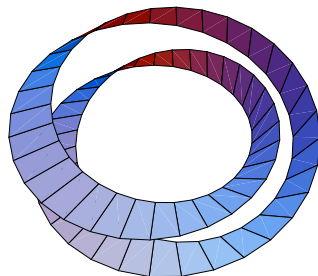
( $\Leftarrow$ ) Die Einbettung  $M \hookrightarrow M \times \{-1, 1\} \cong M^{or}$  ist offen also ist mit  $M^{or}$  auch  $M$  orientierbar.

( $\Rightarrow$ ) Ist  $M$  orientierbar, dann gibt es auf  $T_p M$  eine ausgezeichnete Orientierung  $\omega_p$ . Somit liefert  $(p, \pm 1) \mapsto (p, \pm \omega_p)$  eine Trivialisierung  $M \times \{-1, 1\} \cong M^{or}$ .

### 27.44 Beispiel.

(1) Ein zweifach verdrehtes Möbiusband (also ein Zylinder) ist die Orientierungsüberlagerung des Möbiusbandes.





(2)  $S^n = (\mathbb{P}^n)^{or}$  für  $n$  ungerade.

## 28. Integration und der Satz von Stokes

### 28.1 Proposition.

$M$  ist orientierbar  $\Leftrightarrow \Lambda^{\dim M} T^*M$  ist als Vektorbündel trivial.

**Beweis.** Es sei  $m := \dim M$ .

( $\Rightarrow$ ) Es genügt die Existenz eines nirgends verschwindenden Schnittes  $\omega \in \Omega^m(M)$  zu zeigen (Ein solcher liefert dann unmittelbar eine globale Trivialisierung  $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^m T^*M$  mit  $(x, t) \mapsto t \cdot \omega_x$  des eindimensionalen Bündels  $\Lambda^m T^*M \rightarrow M$ ). Auf dem Bild  $U$  jeder orientierungserhaltenden Karte  $(u^1, \dots, u^m)^{-1}$  können wir ein  $\omega_U \in \Omega^m(U)$  durch  $\omega_U(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}) := 1$  definieren. Es ist dann  $\omega_U(v_1, \dots, v_m) > 0$  für jede positiv orientierte Basis nach [25.4](#). Wir wählen eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $M$  mit solchen offenen Mengen  $U$  und zugehörigen  $\omega_U$ , und sei  $\{f_U : U \in \mathcal{U}\}$  eine untergeordnete Partition der Eins. Wir definieren  $\omega \in \Omega^m(M)$  durch  $\omega := \sum_U f_U \cdot \omega_U \in \Omega^m(M)$ . Dann ist  $\omega_x(v_1, \dots, v_m) > 0$  für jede positiv orientierte Basis von  $T_x M$ , also insbesondere  $\omega_x \neq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Sei  $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^m T^*M$  ein globaler VB-Isomorphismus, dann ist  $\omega := \Phi(\cdot \times \{1\})$  eine nirgends verschwindende  $m$ -Form. Wir orientieren  $T_x M$  indem wir eine Basis  $(v_i)_{i=1}^m$  von  $T_x M$  positiv orientiert nennen, falls  $\omega_x(v_1, \dots, v_m) > 0$  ist. Sei  $(u^1, \dots, u^m)^{-1}$  eine Karte mit zusammenhängender Domäne. Da  $\omega$  nirgends verschwindet ist  $\omega_p(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}) \neq 0$  und somit  $\omega_p(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m})$  überall positiv oder überall negativ, also ist  $TM \rightarrow M$  als Vektorbündel orientierbar nach [27.2.3](#) und damit auch  $M$  als Mannigfaltigkeit.  $\square$

### 28.2 Motivation.

Wir können Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  nicht so ohne weiteres über eine Mannigfaltigkeit integrieren. Sehen wir uns dazu den einfachsten Fall der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten an. Wenn  $M$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  mit Grenzen  $a$  und  $b$  ist, dann mißt das übliche Riemann-Integral  $\int_M f = \int_a^b f$  die orientierte Fläche unterhalb des Graphens von  $f$ . Damit wir das Integral für eine beliebige (1-dimensionale) Mannigfaltigkeit  $M$  definieren können, brauchen auf jeden Fall eine Orientierung auf  $M$ . In diesem Kapitel seien also alle Mannigfaltigkeiten orientiert. Weiters müssen wir aber auch (infinitesimale) Längen (bzw. Volumina) auf  $M$  messen können. Falls  $M$

eine Riemann-Mannigfaltigkeit ist, dann können wir das mittels der Volumsform  $\text{vol}_M$  tun, im eindimensionalen Riemann'schen Fall also mit dem Bogenelement.

Auf abstrakten Mannigfaltigkeiten brauchen wir ein Substitut für das Volumselement. Im 1-dimensionalen, wäre das eine 1-Form  $\omega \in \Omega^1(M)$  (welche in keinem Punkt verschwindet). Dann könnten wir das Integral  $\int_M f \cdot \omega$  von  $f$  bzgl.  $\omega$  über  $M$  definieren. Da aber  $f \cdot \omega$  selbst eine 1-Form ist, genügt es  $\int_M \omega$  für beliebige 1-Formen  $\omega \in \Omega^1(M)$  zu erklären. Sei dazu  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine orientierungserhaltende globale Parametrisierung, dann ist  $\int_M \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt$  das wie üblich definierte Kurvenintegral.

Auf allgemeinen orientierten  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $M$  wollen wir nun das Integral  $\int_M \omega$  für beliebige  $m$ -Formen  $\omega \in \Omega^m(M)$  mit kompaktem Träger definieren.

### 28.3 Definition (Integration von Differentialformen).

Sei  $M$  eine orientierte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \Omega^m(M)$  mit kompaktem Träger.

1. Falls  $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen ist, dann läßt sich  $\omega$  als

$$\omega(x^1, \dots, x^m) = f(x^1, \dots, x^m) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

mit  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  schreiben. Das Integral definieren wir dann als gewöhnliches Riemann-Integral:

$$\int_M \omega := \int_U f(x^1, \dots, x^m) d(x^1, \dots, x^m).$$

Man beachte, daß für jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus  $g : \mathbb{R}^m \supseteq V \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$  gilt:

$$\int_{g(V)} \omega = \int_V g^*(\omega),$$

denn falls  $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$  ist, so ist

$$(g^*(\omega))(x) = (f \circ g)(x) \underbrace{\det(g'(x))}_{>0} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

nach [\[25.3\]](#) und somit die Integrale gleich nach der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale, siehe z.B. [\[82, 7.5.10\]](#).

2. Falls  $\text{Trg } \omega \subseteq \varphi(U)$  für eine orientierungserhaltende Karte  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  ist, definieren wir:

$$\int_M \omega := \int_U \varphi^*(\omega).$$

Diese Definition macht Sinn, denn sei  $\text{Trg } \omega \subseteq \varphi(U) \cap \psi(V) =: W$  für zwei Karten  $\varphi$  und  $\psi$  mit orientierungserhaltenden Kartenwechsel  $g := \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \rightarrow \varphi^{-1}(W)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_U \varphi^*(\omega) &\stackrel{\text{Trg}(\varphi^*\omega) \subseteq \varphi^{-1}(W)}{=} \int_{\varphi^{-1}(W)} \varphi^*(\omega) = \int_{g(\psi^{-1}(W))} \varphi^*(\omega) = \\ &\stackrel{\text{[1]}}{=} \int_{\psi^{-1}(W)} \underbrace{g^*(\varphi^*(\omega))}_{(\varphi \circ g)^*(\omega)} = \int_{\psi^{-1}(W)} \psi^*(\omega) \stackrel{\text{Trg}(\psi^*\omega) \subseteq \psi^{-1}(W)}{=} \int_V \psi^*(\omega). \end{aligned}$$

3. Ist  $\text{Trg } \omega$  beliebig kompakt, so wählen wir eine endliche, offene Überdeckung mit Kartenumgebungen von  $\text{Trg } \omega$ , sowie eine Partition der Eins  $\{h_i\}$ , die der Überdeckung untergeordnet ist. Dann hat jedes  $h_i \cdot \omega$  Träger in einer Karte, und somit können wir nach [2] definieren:

$$\int_M \omega = \int_M \left( \sum_i h_i \right) \omega := \sum_i \int_M h_i \omega.$$

Auch diese Definition macht Sinn, denn sei  $\{g_j\}$  eine zweite Partition der Eins, die einer endlichen Überdeckung des Trägers mit Kartenumgebungen untergeordnet ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \int_M h_i \omega &= \sum_i \int_M \left( \sum_j g_j \right) h_i \omega = \sum_i \sum_j \int_M g_j h_i \omega = \\ &= \sum_j \int_M \left( \sum_i h_i \right) g_j \omega = \sum_j \int_M g_j \omega. \end{aligned}$$

#### 28.4 Bemerkung (Dichten).

Falls wir über nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeiten integrieren wollen, brauchen wir etwas anderes als  $m$ -Formen. Dazu definieren wir ein eindimensionales Vektorbündel  $\text{vol}(M)$  durch Angabe der Transitionsfunktionen  $x \mapsto |\det \psi'(x)| \in GL(1)$  zu den Kartenwechseln  $\psi$  von  $M$ . Schnitte von  $\text{vol}(M)$  heißen DICHTEN, solche kann man dann über  $M$  integrieren. Falls  $M$  orientierbar ist, ist  $\text{vol}(M) \cong \Lambda^m T^*M$ .

#### 28.5.

Wir steuern jetzt auf den Satz von Stokes zu: Nach dem Hauptsatz der Analysis (siehe z.B. [81, 5.2.2]) ist  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ . Insbesondere gilt:  $\int_{-\infty}^0 f' = \int_a^0 f' = f(0)$ , falls  $\text{Trg } f$  kompakt ist und  $a \leq \inf(\text{Trg } f)$  ist.

#### Lemma (Satz von Stokes für Halbräume).

Sei  $H = H^{m+1} := \{(t, x) : t \leq 0, x \in \mathbb{R}^m\}$  ein  $(m+1)$ -DIMENSIONALER HALBRAUM. Die Teilmenge  $\partial H := \{(0, x) : x \in \mathbb{R}^m\} \cong \mathbb{R}^m$  heißt der RAND von  $H$ .

Für jede  $m$ -Form  $\omega$  mit kompaktem Träger am  $\mathbb{R}^{m+1}$  gilt:

$$\int_H d\omega = \int_{\partial H} \omega := \int_{\partial H} \text{incl}^* \omega,$$

wo  $\text{incl} : \partial H \hookrightarrow H$  die Inklusion ist.

**Beweis.** Es gilt für  $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^{m+1})$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=0}^m \omega_i dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m; \\ d\omega &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m + 0 \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} (-1)^i dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_H d\omega &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \int_H \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} d(x^0, \dots, x^m) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x^0}(x^0, x^1, \dots, x^m) dx^0 \right) d(x^1, \dots, x^m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_{H_i} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i \right) d(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, x^1, \dots, x^m) d(x^1, \dots, x^m) + 0, \end{aligned}$$

wobei  $H_i := \{(t, x^1, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m) : t \leq 0\}$  ist, und der 2. Summand 0 ist, da  $\text{Trg } \omega$  kompakt ist. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} \omega &:= \int_{\partial H} \text{incl}^* \omega \\ &\stackrel{\text{25.2}}{=} \int_{\partial H} \sum_{i=0}^m \omega_i(0, x^1, \dots, x^m) \det \left( \frac{\partial(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, x^1, \dots, x^m) d(x^1, \dots, x^m) + 0, \end{aligned}$$

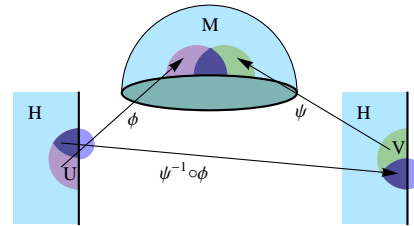
denn

$$\det \left( \frac{\partial(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

Wir wollen diese Überlegungen nun auf Räume übertragen, die nur lokal wie  $H$  aussehen:

**28.6 Definition (Berandete Mannigfaltigkeit).**

Eine  $C^\infty$ -MANNIGFALTIGKEIT MIT RAND ist eine Menge  $M$  zusammen mit einem Atlas  $\mathcal{A}$  von injektiven Abbildungen  $\varphi : U \rightarrow M$ , wobei  $U \subseteq H$  offen in einem abgeschlossenen Halbraum  $H := \{(t, x) : t \leq 0, x \in \mathbb{R}^{m+1}\}$ , und die Kartenwechsel  $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(U))$  auf offenen Teilmengen von Halbräumen definiert und glatt sind.



Dabei heißt eine Abbildung zwischen solchen Teilmengen von Halbräumen glatt, wenn es eine glatte Fortsetzung auf offene Mengen im  $\mathbb{R}^m$  gibt. Wie üblich setzen wir voraus, daß die durch den Atlas induzierte finale Topologie Hausdorff und parakompakt ist. Der RAND von  $M$  (nicht im topologischen Sinn) ist dann definiert als

$$\partial M := \{p \in M : \exists \text{ eine Karte } \varphi \text{ um } p \text{ mit } \varphi^{-1}(p) \in \partial H\}.$$

Da der Kartenwechsel ein lokaler (Diffeomorphismus und somit) Homöomorphismus des  $\mathbb{R}^n$  ist, erhält er innere Punkte, und folglich ist  $p \in \partial M \Leftrightarrow \varphi^{-1}(p) \in \partial H$  für jede Karte  $\varphi$  um  $p$ . Der Rand  $\partial M$  ist dann eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand), wobei ein Atlas auf  $\partial M$  durch die Einschränkungen  $\varphi|_{\partial M}$  der Karten  $\varphi$  von  $M$  gegeben ist.

Man kann die Begriffe  $C^\infty(M, N)$ ,  $TM$ ,  $T^*M$ ,  $\Lambda^k T^*M$  und  $\Omega^k(M)$  wie auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand definieren.

**28.7 Definition (innerer Tangentialvektor).**

Ein Vektor  $v \in T_p M := \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}))$  heißt INNERER TANGENTIALVEKTOR falls  $p \notin \partial M$  oder  $T\varphi^{-1}(p, v) \in T_{\varphi^{-1}(p)}H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$  0-te Komponente kleiner als 0 hat.

**28.8 Lemma (Verlängern berandeter Mannigfaltigkeiten).**

Jede Mannigfaltigkeit mit Rand läßt sich zu einer Mannigfaltigkeit ohne Rand "verlängern", d.h. sie ist Teilmannigfaltigkeit der gleichen Dimension:

**Beweisskizze.** Mittels Partition der Eins findet man ein VF auf  $M$ , das nur aus inneren Tangentialvektoren besteht. Durch "Zusammenstauchen" des Vektorfelds kann dessen Fluß global gemacht werden und damit ist dann  $\text{Fl}(1, \cdot) : M \rightarrow M \setminus \partial M$  eine Einbettung von  $M$  in die Mannigfaltigkeit ohne Rand  $M \setminus \partial M$ .  $\square$

Einfache Beispiele für berandete Mannigfaltigkeiten sind das abgeschlossene Möbiusband und die abgeschlossene Kugel.

**28.9 Lemma (Orientierbarkeit des Randes).**

Der Rand jeder orientierten berandeten Mannigfaltigkeit ist in kanonischer Weise orientierbar.

**Beweis.** Dafür genügt es Basen  $(e_i)_{i=1}^m$  von  $T_p(\partial M)$  positiv orientiert zu nennen, falls für einen nach außen weisenden Tangentialvektor  $e_0$  (d.h.  $-e_0$  ist innerer Tangentialvektor) die Basis  $(e_0, \dots, e_m)$  in  $T_p M$  positiv orientiert ist.  $\square$

**28.10 Bemerkungen.**

Sei  $N$  eine orientierte Teilmannigfaltigkeit von Kodimension 1 der  $(n+1)$ -dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit  $M$  und sei  $\nu_x$  für  $x \in N$  der eindeutig bestimmte Vektor in  $T_x M$ , sodaß  $(\nu_x, e_1, \dots, e_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis in  $T_x M$  ist für eine (jede) orientierte Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $T_x N$ . Im Fall des kanonisch orientierten Randes  $N = \partial M$  einer berandeten Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $\nu$  der nach außen weisende Einheitsnormalvektor, siehe [28.9](#). Sei  $\nu$  zu einem Vektorfeld gleichen Namens auf ganz  $M$  fortgesetzt, so gilt

$$\text{vol}_N = \text{inkl}^*(\nu_N(\text{vol}_M)) \text{ auf } N,$$

denn  $\text{vol}_N(e_1, \dots, e_n) = 1 = \text{vol}_M(\nu_N, e_1, \dots, e_n) = (\nu_N \text{vol}_M)(e_1, \dots, e_n)$ .

**28.11 Satz von Stokes.**

Sei  $M$  eine  $(n+1)$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit kanonisch orientierten Rand  $\partial M$ . Für jedes  $\omega \in \Omega^n(M)$  mit kompakt Träger gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega := \int_{\partial M} \text{inkl}^* \omega \quad (\text{wobei } \text{inkl} : \partial M \hookrightarrow M)$$

**Beweis.** Sei  $\{h_i\}$  eine Partition der Eins, die einer Überdeckung mit Kartenbildern untergeordnet ist und  $\omega_i := h_i \cdot \omega$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_i \omega_i, \text{ wobei } \text{Trg } \omega_i \subseteq \text{Trg } h_i & \xrightarrow{\text{28.3.3}} & \int_{\partial M} \omega = \sum_i \int_{\partial M} \omega_i, \\ d\omega &= \sum_i d\omega_i, \text{ wobei } \text{Trg}(d\omega_i) \subseteq \text{Trg } \omega_i & \xrightarrow{\text{28.3.3}} & \int_M d\omega = \sum_i \int_M d\omega_i. \end{aligned}$$

Also ist der Beweis auf den in [28.5](#) bewiesenen Fall reduziert, wo  $\text{Trg } \omega$  in einer Kartenumgebung liegt, also o.B.d.A.  $M$  der Halbraum  $H^{n+1}$  und  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$  ist.  $\square$

## 29. Anwendungen der Integration auf die Kohomologie

Wir wollen nun für allgemeine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten  $M$  die höchste Kohomologie  $H^m(M)$  bestimmen.

### 29.1 Definition. Kohomologie mit kompakten Träger.

Indem wir die Teilräume  $\Omega_c^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : \text{Trg } \omega \text{ ist kompakt}\}$  anstelle von  $\Omega^k(M)$  verwenden definieren wir die Kohomologie mit kompakten Träger durch

$$\begin{aligned} Z_c^k(M) &:= \text{Ker}(d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M)), \\ B_c^k(M) &:= \text{Bild}(d : \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M)), \\ H_c^k(M) &:= Z_c^k(M) / B_c^k(M). \end{aligned}$$

Beachte dabei, daß  $B_c^k(M) \subset \{d\eta \in \Omega_c^k(M) : \eta \in \Omega_c^{k-1}(M)\}$  für  $M = \mathbb{R}^n$ : Für  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $0 \neq f \geq 0$  ist die Differentialform  $\omega := f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$  wegen dem Poincaré-Lemma [26.5.6](#) exakt, aber für kein  $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  ist  $d\eta = \omega$ , denn nach dem Satz [28.11](#) von Stokes wäre dann  $0 < \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} d\eta = \int_{\emptyset} \eta = 0$  ein Widerspruch.

Ein direkte Verallgemeinerung dieses Arguments zeigt, daß es für jede  $m$ -dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit  $M$  ein  $\omega_0 \in \Omega_c^m(M) = Z_c^m(M)$  mit  $\int_M \omega_0 = 1$  und  $\omega_0 \notin B_c^m(M)$  gibt, d.h.  $H_c^m(M) \neq 0$ . Wir wollen nun zeigen, daß  $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$  für alle solchen zusammenhängenden  $M$  ist, indem wir für alle  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  ein  $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$  finden mit  $\omega = (\int_M \omega) \omega_0 + d\eta$ , und damit  $\int : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$  einen Isomorphismus  $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ ,  $[\omega] \mapsto \int_M \omega$  induziert.

### 29.2 Lemma.

Es sei  $r : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^m$  die Retraktion  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$  und  $\nu \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{m+1})$  das Vektorfeld  $\nu : x \mapsto x$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (r^* \text{vol}_{S^m})(x) &= \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \iota_\nu \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}}(x) \\ &= \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m. \end{aligned}$$

**Beweis.** Da für  $x \neq 0$  der Tangentialraum  $T_x \mathbb{R}^{m+1}$  erzeugt wird von  $T_x(\|x\| S^m)$  und  $\nu_x$ , genügt es beide Seiten auf Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  aus diesen beiden Teilräumen auszutesten.

Falls  $v_i = \nu_x$  für mindestens ein  $i$  ist, so ist die linke Seite 0, denn  $T_x r \cdot \nu = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r(x + tx) = 0$  und ebenso die rechte Seite:

$$\frac{1}{\|x\|^{m+1}} (\iota_\nu \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}})_x(\dots, v_i, \dots) = \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}}(\nu_x, \dots, \nu_x, \dots) = 0.$$

Sind andernfalls alle Vektoren  $v_i \in T_x(\|x\| S^m)$ , somit ist  $T_x r \cdot v_i = \frac{1}{\|x\|} v_i$ , denn  $r|_{\|x\| S^m}$  ist eine Streckung mit Faktor  $\frac{1}{\|x\|}$ . Damit sind ebenfalls beide Seiten gleich,

denn nach [28.10](#) (siehe auch Aufgabe [98](#), [EX25](#)) ist

$$\text{vol}_{S^m} \stackrel{\text{28.10}}{=} \text{incl}^*(\iota_\nu(\text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}})) = \text{incl}^*\left(\sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m\right)$$

und somit

$$\begin{aligned} (r^* \text{vol}_{S^m})_x(v_1, \dots, v_m) &:= \\ &:= (\text{vol}_{S^m})_{r(x)}\left(\frac{1}{\|x\|}v_1, \dots, \frac{1}{\|x\|}v_m\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^m} \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i r^i(x) dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m\right)(v_1, \dots, v_m) \\ &= \frac{1}{\|x\|^{m+1}} (\iota_\nu \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}})_x(v_1, \dots, v_m). \quad \square \end{aligned}$$

### 29.3 Lemma. Integration nach Polarkoordinaten.

Es sei  $B := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1\}$  und  $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ . Dann ist

$$\int_B f = \int_B f \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}} = \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m} \quad \text{mit } g : x \mapsto \int_0^1 t^m f(tx) dt.$$

**Beweis.** Sei  $h : S^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $h(y, t) := t^m f(ty)$  und weiters  $dt \wedge \text{vol}_{S^m} := \text{pr}_2^*(dt) \wedge \text{pr}_1^*(\text{vol}_{S^m}) \in \Omega^{m+1}(S^m \times [0, 1])$ . Wenn wir auf  $S^m \times [0, 1]$  die von  $dt \wedge \text{vol}_{S^m} \neq 0$  wegen [28.1](#) induzierte Orientierung verwenden so ist

$$\int_{S^m} g \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m} \int_0^1 \underbrace{t^m f(t \cdot)}_{=h(\cdot, t)} dt \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m \times [0, 1]} h dt \wedge \text{vol}_{S^m}.$$

Es ist  $B \setminus \{0\} \cong S^m \times (0, 1]$  vermöge  $\varphi : x \mapsto (\frac{x}{\|x\|}, \|x\|)$  mit Umkehrabbildung  $(y, t) \mapsto ty$ . Mit  $\rho(x) := \|x\|$  ist dann

$$\rho^*(dt) \stackrel{\text{25.2}}{=} \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} dx^i = \frac{x^i}{\|x\|} dx^i \quad \text{und folglich}$$

$$\begin{aligned} \varphi^*(dt \wedge \text{vol}_{S^m}) &= \varphi^*(\text{pr}_2^*(dt) \wedge \text{pr}_1^*(\text{vol}_{S^m})) = (\text{pr}_2 \circ \varphi)^*(dt) \wedge (\text{pr}_1 \circ \varphi)^*(\text{vol}_{S^m}) \\ &= \rho^*(dt) \wedge r^*(\text{vol}_{S^m}) \\ &\stackrel{\text{29.2}}{=} \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{\|x\|} dx^j \wedge \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{\|x\|^{m+2}} \sum_{i=0}^m (x^i)^2 dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m = \frac{1}{\|x\|^m} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m \end{aligned}$$

und für  $x \neq 0$  somit

$$\begin{aligned} \varphi^*(h dt \wedge \text{vol}_{S^m})(x) &= h(\varphi(x)) \varphi^*(dt \wedge \text{vol}_{S^m})(x) \\ &= \|x\|^m f(x) \frac{1}{\|x\|^m} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m = f(x) dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_B f &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{B \setminus \varepsilon B} \varphi^*(h dt \wedge \text{vol}_{S^m}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varphi(B \setminus \varepsilon B)} h dt \wedge \text{vol}_{S^m} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{S^m \times [\varepsilon, 1]} h dt \wedge \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m \times [0, 1]} h dt \wedge \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m}. \quad \square \end{aligned}$$

**29.4 Theorem.**

Für jede zusammenhängende orientierbare  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$  vermöge  $[\omega] \mapsto \int_M \omega$ .

**Beweis.** Wir müssen nur zeigen, daß  $B_c^m(M)$  der Kern von  $\int_M : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$  ist, d.h. für jedes  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  mit  $\int_M \omega = 0$  ein  $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$  existiert mit  $\omega = d\eta$ .

**Beh.:** Das Theorem stimmt für  $M = \mathbb{R}$ .

Sei  $\omega \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$  mit  $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$ . Wegen dem Poincaré Lemma [26.5.6](#) existiert ein  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $\omega = df$ . Da  $\text{Trg } \omega = \text{Trg } f'$  kompakt ist, existiert ein  $N$ , s.d.  $f$  sowohl auf  $(-\infty, -N]$  als auch auf  $[N, +\infty)$  konstant ist. Wegen  $0 = \int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} df = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt = \int_{-N}^{+N} f'(t) dt = f(N) - f(-N)$  ist  $f(N) = f(-N)$  und somit  $g := f - f(N) \in C_c^\infty$  und  $\omega = dg$ .

**Beh.:** Falls das Theorem für  $S^m$  gilt, so auch für  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

Sei  $\omega = f dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m \in \Omega_c^{m+1}(\mathbb{R}^{m+1})$  mit  $\int_{\mathbb{R}^{m+1}} \omega = 0$  und o.B.d.A. sei  $\text{Trg}(\omega) \subseteq B := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| < 1\}$ . Wegen dem Poincaré Lemma [26.5.6](#) existiert ein  $\eta \in \Omega^m(\mathbb{R}^{m+1})$  mit  $\omega = d\eta$ . Nach Aufgabe [\[98, EX24\]](#) ist o.B.d.A.

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int_0^1 t^m f(tx) dt \cdot \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \dots \wedge \overline{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &\stackrel{(t = \frac{s}{\|x\|})}{=} \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \int_0^{\|x\|} s^m f\left(\frac{s}{\|x\|} x\right) ds \cdot \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \dots \wedge \overline{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &\stackrel{\text{29.2}}{=} \int_0^{\|x\|} t^m f\left(t \frac{x}{\|x\|}\right) dt \cdot (r^* \text{vol}_{S^m})(x). \end{aligned}$$

Es sei  $g : S^m \rightarrow \mathbb{R}$  wie in [29.3](#) definiert durch  $g(x) := \int_0^1 t^m f(tx) dt$ . Wegen

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \omega = \int_B f \stackrel{\text{29.3}}{=} \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m}$$

existiert nach Voraussetzung ein  $\lambda \in \Omega^{m-1}(S^m)$  mit  $g \text{vol}_{S^m} = d\lambda$ .

Wegen  $f|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 0$  ist

$$\eta(x) = \int_0^1 t^m f\left(t \frac{x}{\|x\|}\right) dt \cdot (r^* \text{vol}_{S^m})(x) \text{ für } \|x\| > 1$$

Also  $\eta = (g \circ r) \cdot r^* \text{vol}_{S^m} = r^*(g \text{vol}_{S^m}) = r^*(d\lambda) = d(r^*\lambda)$  auf  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus B$ .

Sei nun  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{m+1}, [0, 1])$  so, daß  $h = 0$  nahe 0 und  $h|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 1$ . Dann ist  $h \cdot r^*\lambda \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^{m+1})$  und

$$\omega = d\eta = d(\eta - d(h \cdot r^*\lambda)) \text{ mit } (\eta - d(h \cdot r^*\lambda))|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = (\eta - d(r^*\lambda))|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 0.$$

**Beh.:** Falls das Theorem für  $\mathbb{R}^m$  gilt, so auch für alle  $m$ -dimensionalen zusammenhängenden  $M$ .

Sei dazu  $\omega_0 \in \Omega_c^m(M)$  mit  $\int \omega_0 = 1$  und  $\text{Trg } \omega_0 \subseteq \text{Bild } \psi_0$  für eine Karte  $\psi_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow M$ . Wir zeigen, daß zu  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  ein  $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$  gibt mit  $\omega = (\int_M \omega) \cdot \omega_0 + d\eta$ . Daraus folgt insbesondere  $\omega = d\eta$  für alle  $\omega$  mit  $\int \omega = 0$ .

Betrachten wir zuerst den Fall  $\text{Trg } \omega \subseteq \text{Bild } \psi$  für eine Karte  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow M$ : Es gibt dann endlich viele Karten  $\psi_0, \dots, \psi_l : \mathbb{R}^m \rightarrow M$  mit  $\text{Bild } \psi_i \cap \text{Bild } \psi_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $\psi_0$  die obige Karte bei  $\omega_0$  und weiters  $\psi_l = \psi$  ist. Dazu gibt es  $\omega_i$  mit kompaktem Träger  $\text{Trg } \omega_i \subseteq \text{Bild } \psi_{i-1} \cap \text{Bild } \psi_i$  und  $\int \omega_i = 1$ . Da das Theorem für  $\mathbb{R}^m \cong \text{Bild } \psi_{i-1}$  vorausgesetzt ist, existieren  $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$  mit  $\text{Trg } \eta_i \subseteq \text{Bild } \psi_{i-1}$  und  $\omega_i - \omega_{i-1} =$



$d\eta_i$ . Schließlich existiert ebenso für  $c := \int \omega$  ein  $\eta_{l+1}$  mit  $\omega - c\omega_l = d\eta_{l+1}$ . Daraus folgt

$$\omega = c\omega_l + d\eta_{l+1} = \dots = c\omega_0 + c \sum_{i=1}^l d\eta_i + d\eta_{l+1} = c\omega_0 + d\left(\eta_{l+1} + c \sum_{i=1}^l \eta_i\right).$$

Sei nun  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  beliebig und  $\{f_i\}$  eine Partition der Eins, die einer Überdeckung mit offenen zu  $\mathbb{R}^m$  diffeomorphen Mengen untergeordnet ist, dann ist  $f_i\omega = c_i\omega_0 + d\eta_i$  für ein  $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$  und somit  $\omega = \sum_i f_i\omega = (\sum_i c_i)\omega_0 + d\sum_i \eta_i$  mit  $\int_M \omega = \sum_i c_i \int_M \omega_0 + \int_M d\sum_i \eta_i = \sum_i c_i$ , wobei wir nur über die endlich vielen  $i$  mit  $f_i\omega \neq 0$  summieren müssen.  $\square$

### 29.5 Satz (Höchste Kohomologie).

Für zusammenhängende  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten  $M$  ohne Rand gilt:

$$H^m(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ kompakt und orientierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$H_c^m(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ orientierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beweis.** Nach [29.4](#) ist  $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$  für alle **orientierbaren**  $M$  und damit  $H^m(M) = H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$  für alle **orientierbaren kompakten**  $M$ .

Sei als nächstes  $M$  **orientierbar aber nicht kompakt**:

Da  $M$  nicht kompakt ist existiert eine Überdeckung  $\{\text{Bild } \psi_i : i \in \mathbb{N}\}$  für Karten  $\psi_i$ , s.d. jede kompakte Menge nur endlich viele Bild  $\psi_i$  trifft (siehe [9.3.3](#)) und (durch Umordnen dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß)  $\text{Bild } \psi_i \cap \text{Bild } \psi_{i+1} \neq \emptyset$ . Sei  $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$  eine untergeordnete Partition der 1. Wir wählen wieder  $\omega_i \in \Omega_c^m(M)$  mit  $\text{Trg } \omega_i \subseteq \text{Bild } \psi_i \cap \text{Bild } \psi_{i+1}$  und  $\int_M \omega_i = 1$ . Sei nun  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  mit  $\text{Trg } \omega \subseteq \text{Bild } \psi_j$  für ein  $j$  und  $c := \int_M \omega$ . Für  $i \geq j$  existieren dann  $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$  mit  $\text{Trg } \eta_i \subseteq \text{Bild } \psi_i$ , und  $\omega = c\omega_j + d\eta_j$  sowie  $c\omega_{i-1} = c\omega_i + d\eta_i$  für  $i > j$  nach [29.4](#). Somit ist

$$\omega = c\omega_j + d\eta_j = \dots = c\omega_k + \sum_{i=j}^k d\eta_i = d\left(\sum_{i=j}^{\infty} \eta_i\right) = d\mu_j$$

wobei  $\mu_j := \sum_{i=j}^{\infty} \eta_i$  lokal endlich ist.

Sei nun  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  beliebig. Dann ist  $f_j\omega$  wie zuvor, also existiert nach dem eben gezeigten ein  $\mu_j \in \Omega_c^{m-1}(M)$  mit  $f_j\omega = d\mu_j$  und  $\text{Trg } \mu_j \subseteq \bigcup_{i \geq j} \text{Bild } \psi_i$ . Somit ist  $\sum_j \mu_j$  lokal endlich und

$$\omega = \sum_j f_j\omega = \sum_j d\mu_j = d\left(\sum_j \mu_j\right),$$

also ist  $H^m(M) = \{0\}$ .

Sei schließlich  $M$  **nicht orientierbar**:

Es sei  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  eine zweiblättrige Überlagerung und  $\chi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  die Decktransformation die jeden Punkt auf den jeweils anderen Punkt in der Faser abbildet.

Wir setzen

$$\begin{aligned}\Omega_{\pm}^k(\tilde{M}) &:= \{\omega \in \Omega^k(\tilde{M}) : \chi^*\omega = \pm\omega\} \\ \Omega_{\pm,c}^k(\tilde{M}) &:= \{\omega \in \Omega_c^k(\tilde{M}) : \chi^*\omega = \pm\omega\} \\ H_{\pm}^k(\tilde{M}) &:= \{\omega \in \Omega_{\pm}^k(\tilde{M}) : d\omega = 0\} / \{d\eta : \eta \in \Omega_{\pm}^{k-1}(\tilde{M})\} \\ H_{\pm,c}^k(\tilde{M}) &:= \{\omega \in \Omega_{\pm,c}^k(\tilde{M}) : d\omega = 0\} / \{d\eta : \eta \in \Omega_{\pm,c}^{k-1}(\tilde{M})\}.\end{aligned}$$

Wir behaupten, daß

$$\begin{aligned}\Omega^k(\tilde{M}) &= \Omega_+^k(\tilde{M}) \oplus \Omega_-^k(\tilde{M}) \\ H^k(\tilde{M}) &= H_+^k(\tilde{M}) \oplus H_-^k(\tilde{M}) \\ p^* : H^k(M) &\xrightarrow{\cong} H_+^k(\tilde{M})\end{aligned}$$

und analog für Formen mit kompakten Träger:

Sei  $\omega \in \Omega^k(M)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2} \left( (\omega + \chi^*\omega) + (\omega - \chi^*\omega) \right) \in \Omega_+^k \oplus \Omega_-^k, \text{ wobei } \Omega_-^k \cap \Omega_+^k = \{0\} \\ \Rightarrow \Omega^k(\tilde{M}) &= \Omega_-^k(\tilde{M}) \oplus \Omega_+^k(\tilde{M}) \quad \text{und} \\ d(\Omega_{\pm}^k) &\subseteq \Omega_{\pm}^{k+1}, \text{ wegen } \chi^*(d\omega) = d(\chi^*\omega) = \pm d\omega \text{ für } \omega \in \Omega_{\pm}^k \\ \Rightarrow H^k(\tilde{M}) &= H_-^k(\tilde{M}) \oplus H_+^k(\tilde{M})\end{aligned}$$

Es ist  $p^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(\tilde{M})$  injektiv (da  $p$  eine surjektive Submersion ist) mit Bild  $p^*(\Omega^k(M)) = \Omega_+^k(\tilde{M})$ :

( $\subseteq$ ) Weil  $\chi^*p^*\omega = (p \circ \chi)^*\omega = p^*\omega$ .

( $\supseteq$ ) Sei  $\omega \in \Omega_+^k(\tilde{M})$  und sei  $U \subseteq \tilde{M}$ , sodaß  $p|_U : U \rightarrow p(U)$  ein Diffeomorphismus ist. Sei  $\tilde{\omega}|_{p(U)} := ((p|_U)^{-1})^*\omega$ . Dann ist  $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$  (wegen  $\chi^*\omega = \omega$ ) wohldefiniert und  $p^*\tilde{\omega} = \omega$ .

Somit gilt  $p^* : \Omega^k(M) \xrightarrow{\cong} \Omega_+^k(\tilde{M}) \hookrightarrow \Omega^k(\tilde{M})$ . Wegen  $p^* \circ d = d \circ p^*$  folgt daraus  $p^* : H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_+^k(\tilde{M}) \hookrightarrow H^k(\tilde{M})$  und analog  $p^* : H_c^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{+,c}^k(\tilde{M}) \hookrightarrow H_c^k(\tilde{M})$ , was die letzte obige Behauptung ist.

Wir wenden dies nun auf die Orientierungsüberlagerung  $\tilde{M} := M^{or}$  mit der Decktransformation  $\chi : (x, \pm\omega) \mapsto (x, \mp\omega)$  an. Sei  $\omega \in \Omega_{+,c}^m(M^{or})$ . Dann ist  $\int \omega = 0$ , denn  $\int \omega = \int \chi^*\omega \xrightarrow{\chi \text{ orient. vert.}} - \int \omega$ . Somit existiert für die orientierte Mannigfaltigkeit  $M^{or}$  nach Obigem ein  $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M^{or})$  mit  $\omega = d\eta$  und damit ist  $\omega = \frac{1}{2}(\omega + \chi^*\omega) = \frac{1}{2}(d\eta + \chi^*d\eta) = d(\eta_+)$  mit  $\eta_+ := \frac{1}{2}(\eta + \chi^*\eta) \in \Omega_{+,c}^{m-1}(M^{or})$ , also  $[\omega] = [d(\eta_+)] = 0 \in H_{+,c}^m(M^{or})$ . Somit ist  $H_c^m(M) \cong H_{+,c}^m(M^{or}) = \{0\}$ . Und damit für kompaktes  $M$  auch  $H^m(M) = H_c^m(M) = \{0\}$ . Falls hingegen  $M$  nicht kompakt ist, so folgt  $H^m(M) = \{0\}$  aus dem orientierbaren Fall, denn  $p^* : H^m(M) \hookrightarrow H^m(M^{or}) = \{0\}$ .  $\square$

### 29.6 Beispiel.

Für die orientierte zweiblättrige Überlagerung  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  sei  $\chi$  die Antipodalabbildung  $x \mapsto -x$ . Dann ist  $H^k(\mathbb{P}^n) \cong H_+^k(S^n) \subseteq H^k(S^n)$  wegen der Behauptung am Ende des Beweises von [29.5](#) und somit

$$H^k(\mathbb{P}^n) \cong H_c^k(\mathbb{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \quad (\text{da } \mathbb{P}^n \text{ zush. ist}) \\ 0 & \text{für } k \notin \{0, n\} \quad (\text{da } H^k(S^n) = 0 \text{ ist}) \\ 0 & \text{für } k = n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} & \text{für } k = n \text{ ungerade} \end{cases}$$

In der Tat ist  $\chi$  auf  $S^n$  genau dann orientierungserhaltend, wenn  $n$  ungerade ist und somit ist  $\int_{S^n} \pm \omega = \int_{S^n} \chi^* \omega = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \omega$  für  $\omega \in \Omega_{\pm}^n(S^n)$ , also wie im Beweis von [29.5]  $H_+^n(S^n) = 0$  falls  $n$  gerade ist und für  $n$  ungerade ist  $H_-^n(S^n) = 0$  und damit  $H^n(\mathbb{P}^n) \cong H_+^n(S^n) = H^n(S^n) = \mathbb{R}$ .

**29.7 Brouwerscher Fixpunktsatz.**

Sei  $f : B^n \rightarrow B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  glatt, dann gibt es ein  $x \in B^n$  mit  $f(x) = x$ .

**Beweis.** Indirekt: Sei  $f(x) \neq x$  für alle  $x$ , dann gibt es eine glatte Retraktion  $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ , d.h.  $r|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ , sei nämlich  $r(x)$  der auf der Seite von  $x$  liegende Schnittpunkt der wohldefinierten Geraden durch  $x$  und  $f(x)$  mit der Sphäre  $S^{n-1}$ . Für  $n = 1$  ist das nicht möglich wegen des Zwischenwertsatzes. Für  $m > 1$  erweitern wir  $r$  mittel radialer Projektion zu einer Retraktion gleichen Namens  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$ . Nun folgt wegen  $r \circ \text{incl} = \text{id}_{S^{n-1}}$ :

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{r^*} & H^{n-1}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{incl}^*} & H^{n-1}(S^{n-1}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{R} & & 0 & & \mathbb{R} \\ & \nearrow & \text{id} & \searrow & \\ & \mathbb{R} & & & \mathbb{R} \end{array}$$

Das ist ein Widerspruch. □

**29.8 Definition (Abbildungsgrad).**

Seien  $M, N$  zusammenhängende, kompakte und orientierte Mannigfaltigkeiten von gleicher Dimension  $m$  und sei  $f : M \rightarrow N$  glatt. Der **ABBILDUNGSGRAD**  $\text{deg } f \in \mathbb{R}$  sei durch nebenstehendes Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc} H^m(M) & \xleftarrow{H^m(f)} & H^m(N) \\ f \downarrow \cong & \text{deg } f & f \downarrow \cong \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\dots\dots\dots} & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{deg } f \cdot t \longleftarrow t$$

$$\text{D.h.: } \text{deg } f \cdot \int \omega = \text{deg } f \cdot \int [f^* \omega] = \int H^m(f)[\omega] = \int [f^* \omega] = \int f^* \omega.$$

Falls  $M$  und  $N$  orientierte aber nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension  $m$  sind und  $f : M \rightarrow N$  glatt und **PROPER** (d.h. die Urbilder kompakter Mengen sind kompakt) ist, so verallgemeinern wir den **ABBILDUNGSGRAD**  $\text{deg } f \in \mathbb{R}$  durch nebenstehendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(M) & \xleftarrow{H_c^m(f)} & H_c^m(N) \\ f \downarrow \cong & \text{deg } f & f \downarrow \cong \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\dots\dots\dots} & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{deg } f \cdot t \longleftarrow t$$

Beachte dabei, daß  $f^* : \Omega_c^k(N) \rightarrow \Omega_c^k(M)$  für properes  $f$  wohldefiniert ist und somit auch  $H_c^k(f) : H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$ .

**29.9 Proposition.**

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine *propere glatte Abbildung zwischen zusammenhängenden orientierten  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten* und  $y \in N$  ein regulärer Wert von  $f$ . Dann ist

$$\text{deg } f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}_x f \in \mathbb{Z},$$

wobei

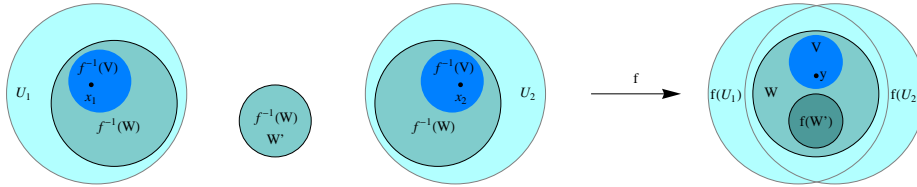
$$\text{sign}_x f := \begin{cases} +1 & \text{falls } T_x f : T_x M \rightarrow T_y N \text{ orientierungserhaltend,} \\ -1 & \text{falls } T_x f : T_x M \rightarrow T_y N \text{ orientierungsvertauschend ist.} \end{cases}$$

Beachte, daß nach dem Theorem [11.15](#) von Sard so ein regulärer Wert  $y$  immer existiert und weil  $f$  proper ist, ist  $f^{-1}(y)$  endlich.

**Beweis.** Sei  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Wir wählen paarweise disjunkte offene Koordinatenumgebungen  $U_i$  von  $x_i$ , s.d.  $f : U_i \rightarrow f(U_i)$  ein die Orientierung erhaltender oder vertauschender Diffeomorphismus ist. Wir wollen erreichen, daß  $V := f(U_i)$  unabhängig von  $i$  und  $f^{-1}(V) = \bigsqcup_i U_i$  ist. Sei dazu  $W \subseteq \bigcap_i f(U_i)$  eine kompakte Umgebung von  $y$ . Dann ist  $W' := f^{-1}(W) \setminus \bigcup_i U_i \subseteq M \setminus f^{-1}(y)$  kompakt und somit  $f(W')$  abgeschlossen und enthält nicht  $y$ . Sei  $V \subseteq W \setminus f(W')$  eine Umgebung von  $y$ . Dann ist

$$f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W \setminus f(W')) = f^{-1}(W) \setminus f^{-1}(f(W')) \subseteq f^{-1}(W) \setminus W' \subseteq \bigcup_i U_i,$$

und indem wir  $U_i$  durch  $f^{-1}(V) \cap U_i$  ersetzen dürfen wir o.B.d.A.  $f^{-1}(V) = \bigcup U_i$  und  $f(U_i) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V \subseteq f(U_i)$  also  $f(U_i) = V$  annehmen.



Sei nun  $\omega \in \Omega_c^m(N)$  mit  $\text{Trg } \omega \subseteq V$  und  $\int_M \omega = 1$ . Dann ist  $\text{Trg } f^*(\omega) \subseteq f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$  und

$$\int_M f^* \omega = \sum_i \int_{U_i} f^* \omega = \sum_i \text{sign}_{x_i} f \cdot \int_{f(U_i)} \omega = \sum_i \text{sign}_{x_i} f \cdot \int_M \omega. \quad \square$$

**29.10 Folgerung.**

1.  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ .
2.  $f \sim g$  zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten  $\Rightarrow \deg f = \deg g$ .
3.  $f$  ist Diffeomorphismus  $\Rightarrow \deg f = \pm 1$ ;  
Weiters ist  $\deg f = 1 \Leftrightarrow f$  orientierungserhaltend ist.
4.  $\deg f \neq 0 \Rightarrow f$  ist surjektiv.

**Beweis.** [1](#) da  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ .

[2](#) da dann  $H^k(f) = H^k(g)$  nach [26.3.2](#).

[3](#) folgt aus [1](#) unter Verwendung von  $\deg f \in \mathbb{Z}$  nach [29.9](#).

[4](#) Sei  $f$  nicht surjektiv. Dann ist  $\deg(f) = 0$  nach [29.9](#), da jedes  $y \in N \setminus f(M)$  regulärer Wert ist. Direkt sieht man das auch, indem man  $\omega \in \Omega^m(N)$  so wählt, daß  $\text{Trg } \omega \subseteq N \setminus f(M)$  und  $\int_N \omega = 1$ . Also ist  $\deg f = \deg f \cdot \int_M \omega = \int_M f^* \omega = \int_M 0 = 0$ .  $\square$

**29.11 Igelsatz.**

Sei  $\xi \in \mathfrak{X}(S^{2n})$ . Dann gibt es ein  $x \in S^{2n}$  mit  $\xi(x) = 0$ .

**Beweis.** Indirekt: Sei  $\xi(x) \neq 0$  für alle  $x$ . Dann gibt es eine Homotopie zwischen Identität und Antipodalabbildung  $\sigma$  (dazu verbinden wir  $x$  mit  $-x$  längs des Groß(halb)kreises in Richtung  $\xi(x)$ ) und somit folgt  $1 = \deg(\text{id}) = \deg(\sigma) = -1$  (siehe [29.6](#)), ein Widerspruch.  $\square$

**29.12 Mayer-Vietoris Sequenz für Kohomologie mit kompakten Träger.**

Sei  $M = U \cup V$  mit  $U, V \subseteq M$  offen, dann existieren lineare Abbildungen  $\delta_k$ , die die folgende lange Sequenz exakt machen:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{(j'_U, -j'_V)} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{i'_U + i'_V} H_c^k(U \cup V) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow H_c^{k+1}(U) \oplus H_c^{k+1}(V) \rightarrow H_c^{k+1}(U \cup V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

mit den Inklusionen  $i_U : U \hookrightarrow U \cup V$ ,  $i_V : V \hookrightarrow U \cup V$ ,  $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$  und  $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$  wobei die Abbildungen  $i'_U$ ,  $j'_U$ , etc. durch Fortsetzen mit 0 gegeben sind.

Vgl. dies mit [26.3.4](#).

**Beweis.** Wegen [26.4](#) genügt es die Exaktheit von

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(U \cap V) \rightarrow \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \rightarrow \Omega_c^k(U \cup V) \rightarrow 0$$

zu zeigen. Offensichtlich ist die erste Abbildung injektiv. Die zweite ist surjektiv, denn  $\omega = h_U \omega + h_V \omega$ , wobei  $\{h_U, h_V\}$  eine Partition der 1 sei, welche  $\{U, V\}$  untergeordnet ist. Die Zusammensetzung ist offensichtlich 0, und falls  $i'_U(\omega_1) + i'_V(\omega_2) = 0$  ist, so ist  $\text{Trg } \omega_1 = \text{Trg}(i'_U \omega_1) = \text{Trg}(i'_V \omega_2) = \text{Trg } \omega_2$ , also  $\omega := \omega_1|_{U \cap V} \in \Omega_c^k(U \cap V)$  und  $j'_U(\omega) = \omega_1$  und  $j'_V(\omega) = -\omega_2$ .  $\square$

**29.13 Bemerkung.**

Die Kohomologie  $H_c^*$  mit kompakten Träger ist viel schwerer auszurechnen als  $H^*$ , da das Homotopie-Axiom für sie nicht gilt. Z.B. ist  $\mathbb{R}^m$  Homotopie-äquivalent zu  $\{0\}$  und  $H_c^0(\{0\}) = H^0(\{0\}) = \mathbb{R}$  aber  $H_c^0(\mathbb{R}^m) = \{0\}$ , denn jedes  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$  mit  $df = 0$  muß konstant und somit gleich 0 sein. Ein anderes Beispiel ist  $H_c^2(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , da der Zylinder  $S^1 \times \mathbb{R}$  orientierbar und 2-dimensional ist, aber  $H_c^2(S^1) = H^2(S^1) = \{0\}$ .

**29.14 Theorem. Die exakte Sequenz eines Paares.**

Sei  $N \subseteq M$  eine kompakte Teilmannigfaltigkeit. Dann existiert eine lange exakte Sequenz in der Kohomologie:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_c^k(M \setminus N) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H_c^k(N) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(M \setminus N) \rightarrow H_c^{k+1}(M) \rightarrow H_c^{k+1}(N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

**Beweis.** Beachte, daß

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M) \xrightarrow{\text{incl}^*} \Omega_c^k(N) \rightarrow 0$$

nicht exakt bei  $\Omega_c^k(M)$  ist, denn  $\text{Ker } \text{incl}^*$  enthält alle  $\omega \in \Omega_c^k(M)$  welche auf  $N$  verschwinden, während das Bild des Erweiterungsoperators  $\Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M)$  aus jenen  $\omega \in \Omega_c^k(M)$  besteht, welche auf einer Umgebung von  $N$  verschwinden. Deshalb ersetzen wir  $\Omega_c^k(N) = \Omega^k(N)$  durch  $\Omega^k(N \subseteq M)$ , den Raum der Keime auf  $N \subseteq M$  von glatten  $k$ -Formen. Also  $\Omega^k(N \subseteq M) := \bigcup_{U \supseteq N} \Omega^k(U) / \sim$ , wobei  $U$  die offenen Umgebungen von  $N$  in  $M$  durchläuft und  $\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$  auf einer Umgebung von  $N$  in  $M$ .

Dann ist

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M) \xrightarrow{\text{incl}^*} \Omega^k(N \subseteq M) \rightarrow 0$$

offensichtlich exakt.

Aus [26.4](#) folgt nun die Existenz einer langen exakten Sequenz in der Kohomologie:

$$\dots \rightarrow H_c^k(M \setminus N) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H^k(\Omega^*(N \subseteq M)) \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(M \setminus N) \rightarrow \dots$$

Bleibt  $H(\Omega^*(N \subseteq M)) \cong H(N)$  zu zeigen: Sei dazu  $p : M \supseteq U \rightarrow N$  eine tubuläre Umgebung nach [\[86, 62.9\]](#), d.h.  $U$  ist offen in  $M$  und  $p$  diffeomorph zu einem Vektorbündel über  $N$ . Wenn wir eine Metrik  $g$  auf  $p : U \rightarrow N$  wählen, so bilden die Mengen  $U_j := \{\xi : g(\xi, \xi) < \frac{1}{j^2}\}$  eine Umgebungsbasis von  $N$  und  $0^* : H^k(U_j) \rightarrow H^k(N)$  ein Isomorphismus, da  $U_j$  Homotopie-äquivalent zu  $N$  ist. Einschränken  $\Omega^k(N \subseteq M) \rightarrow \Omega^k(N)$  induziert eine Abbildung  $H^k(\Omega^*(N \subseteq M)) \rightarrow H^k(N)$ . Diese ist surjektiv, denn die Zusammensetzung mit  $H^k(U_j) \rightarrow H^k(\Omega^*(N \subseteq M))$  ist ein Isomorphismus. Sie ist auch injektiv, denn sei  $[\omega] \in \Omega^k(N \subseteq M)$  geschlossen mit  $\omega \in \Omega^k(U_j)$  und  $\omega|_N \in \Omega^k(N)$  exakt. Dann ist  $0 = [\omega] \in H^k(U_j)$ , da  $\text{incl}^*([\omega]) = [\omega|_N] = 0$ , also  $\omega$  exakt und damit auch  $[\omega] \in \Omega^k(N \subseteq M)$  exakt, also verschwindet die Kohomologieklass  $[[\omega]]$  von  $[\omega]$  in  $H^k(\Omega^*(N \subseteq M))$ .  $\square$

### 29.15 Folgerung.

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit kompakten Rand  $\partial M$ . Dann existiert eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \rightarrow H_c^k(M \setminus \partial M) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H_c^k(\partial M) \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(M \setminus \partial M) \rightarrow H_c^{k+1}(M) \rightarrow H_c^{k+1}(\partial M) \rightarrow \dots \quad \square$$

### 29.16 Folgerung.

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m > 0 \end{cases}.$$

**1. Beweis.** Wir wenden [29.15](#) auf den abgeschlossenen Einheitsball  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  an. Dann ist  $M \setminus \partial M \cong \mathbb{R}^m$ ,  $\partial M = S^{m-1}$  und  $H_c^k(M) = H^k(M) \cong H^k(\{*\}) = \{0\}$  für  $k > 0$  und somit liefert [29.15](#) für  $k > 0$  die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^k(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow 0$$

mit Anfang

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^0(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta_0} H_c^1(\mathbb{R}^m) \rightarrow 0$$

wegen  $H_c^0(\mathbb{R}^m) = \{0\}$ , siehe [29.13](#). Daraus folgt

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = H^{k-1}(S^{m-1}) \stackrel{\text{26.5.13}}{=} \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } 1 < k = m \\ 0 & \text{für } 1 < k \neq m \end{cases}$$

und

$$H_c^1(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } m = 1 \\ 0 & \text{für } m > 1. \quad \square \end{cases}$$

**2. Beweis.** ( $k = 0$ ) haben wir in [29.13](#) schon eingesehen.

( $0 < k < n$ ) Es sei  $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$  mit  $d\omega = 0$ . Nach dem Poincaré-Lemma existiert ein  $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $d\eta = \omega$ . Sei  $B$  ein abgeschlossener Ball mit  $\text{Trg } \omega \subseteq B$ . Für  $k = 1$  ist also  $\eta$  außerhalb  $B$  konstant, sagen wir  $c$ , und somit  $\eta - c \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$  mit  $d(\eta - c) = d\eta = \omega$ . Ist  $k > 1$  so ist jedenfalls  $\eta|_{\mathbb{R}^n \setminus B}$  geschlossen und, wegen  $\mathbb{R}^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $H^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^{k-1}(S^{n-1}) = \{0\}$  nach [26.5.13](#), existiert ein  $\lambda \in \Omega^{k-2}(\mathbb{R}^n \setminus B)$  mit  $d\lambda = \eta|_{\mathbb{R}^n \setminus B}$ . Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  mit  $f = 1$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus 2B$

und  $f = 0$  auf einer Umgebung von  $B$ . Dann ist  $f \lambda \in \Omega^{k-2}(\mathbb{R}^n)$  wohldefiniert und  $\eta - d(f \lambda) \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  hat kompakten Träger in  $2B$  mit  $d(\eta - d(f \lambda)) = d\eta = \omega$ .  $\square$

### 29.17 Vorbereitung für den verallgemeinerten Jordanschen Kurvensatz.

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  eine kompakte zusammenhängende Hyperfläche. Wir wollen zuerst zeigen, daß  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$  mindestens 2 Zusammenhangskomponenten besitzt. Sei dazu vorerst  $M$  orientiert. Für  $p \notin M$  ist die Windungszahl von  $M$  bzgl.  $p$  definiert durch

$$w_M(p) := \deg(r_p|_M), \text{ wobei } r_p : x \mapsto \frac{1}{\|x - p\|}(x - p), \quad M \rightarrow S^m.$$

Es ist  $w_M$  konstant auf den Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$ : Sei nämlich  $t \mapsto p(t)$  eine Kurve in  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$ , dann ist  $(t, x) \mapsto r_{p(t)}(x)$  eine Homotopie und somit  $t \mapsto \deg(r_{p(t)}|_M) = w_M(p(t))$  konstant. Bis auf einen Diffeomorphismus (mit kompakten Träger) ist  $0 \in M$  und  $M$  nahe  $0$  durch eine Hyperebene  $v^\perp$  gegeben. Wir behaupten, daß  $w_M(p) - w_M(q) = \pm 1$  für  $p, q$  nahe  $0$  auf verschiedenen Seiten von  $v^\perp$  und somit hat  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$  mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. In der Tat ist  $[-1, 1] \ni t \mapsto r_{tv}|_{M \setminus \{0\}}$  eine Homotopie und für  $x \in v^\perp$  mit  $\|x\| \leq \delta$  ist das Bild eine Polkappe um  $v$  die für  $t = 0$  zum Äquator degeneriert und dann in die andere Polkappe mutiert.



Wir modifizieren diese Homotopie zu einer Homotopie  $H$  auf ganz  $M$  indem wir die Bilder von Punkten nahe  $0$  konstant nahe dem Pol  $v$  halten und die übrigen Punkte auch nicht in die Nähe des Pols  $-v$  gelangen lassen. Sei nun  $y$  nahe  $-v$  ein regulärer Wert für  $r_v$ . Dann besitzt der Endwert  $H_1$  der Homotopie ein Urbild  $x$  (nahe  $0$ ) weniger als  $r_v$  und somit ist  $w_M(-v) = \deg(r_{-v}|_M) = \deg(H_0) = \deg(H_1) = \deg(r_v|_M) - \text{sign}_x(r_v) = w_M(v) \pm 1$  nach [29.9](#).

Sei nun  $M$  und  $N$  kompakt zusammenhängend aber nicht notwendig orientierbar. Wir definieren den mod-2 Grad von  $f : M \rightarrow N$  durch  $\deg_2(f) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} 1 \in \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ , wobei  $y$  ein regulärer Wert von  $f$  sei.

Wir müssen zeigen, daß diese Anzahl modulo 2 nicht von der Wahl von  $y$  abhängt. Seien dazu vorerst  $f_0$  und  $f_1$  glatt homotop vermöge  $H : [0, 1] \times M \subseteq \mathbb{R} \times M \rightarrow N$  und  $y$  ein gemeinsamer regulärer Wert von  $f_0$  und  $f_1$ . O.B.d.A. ist  $H(t, x) = f_i(x)$  für  $t$  nahe  $i \in \{0, 1\}$  (Ersetze  $H$  durch  $(t, x) \mapsto H(h(t), x)$  mit  $h$  konstant nahe  $0$  und nahe  $1$ ). Nach dem Beweis von [29.9](#) sind alle Werte nahe regulärer Werte selbst regulär (und haben die gleiche Anzahl von Urbildern). Somit dürfen wir (wegen dem Satz [11.15](#) von Sard) annehmen, daß  $y$  ein regulärer Wert von  $H$  und auch von  $f_0$  und  $f_1$  ist. Damit ist  $H^{-1}(y)$  eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R} \times M$  die  $\{0, 1\} \times M$  transversal schneidet. Die Spur  $H^{-1}(y) \cap [0, 1] \times M$  ist somit eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen zusammenhängenden kompakten 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand  $\subseteq \partial([0, 1] \times M) = \{0, 1\} \times M$  und somit ist die Gesamtanzahl der Randpunkte  $\{(i, x) : i \in \{0, 1\}, f_i(x) = y\}$  gerade, also ist

$$\sum_{x \in f_0^{-1}(y)} 1 \equiv - \sum_{x \in f_1^{-1}(y)} 1 \equiv \sum_{x \in f_1^{-1}(y)} 1 \pmod{2}$$

Sind nun  $y_0$  und  $y_1$  beides reguläre Werte von  $f$ , dann existiert eine Diffeotopie  $h_1$  von  $N$  (d.h. ein Diffeomorphismus der mittels einer Homotopie bestehend aus lauter Diffeomorphismen mit der Identität verbunden werden kann) mit kompakten Träger die  $y_0$  auf  $y_1$  abbildet (die Äquivalenzklassen von Punkten bzgl. Diffeotopien sind offen: betrachte den Fluß  $\text{Fl}_t^\xi$  des Vektorfeld  $\xi = f \cdot \frac{\partial}{\partial u^1}$  mit geeigneten  $f$  mit kompakten Träger) und somit ist  $h_1 \circ f \sim f$  und  $y_1 = h_1(y_0)$  regulärer Wert von

$h_1 \circ f$  und von  $f$ , also nach dem zuvor Gezeigten  $|f^{-1}(y_0)| = |(h_1 \circ f)^{-1}(y_1)| \equiv |f^{-1}(y_1)| \pmod{2}$ .

Wenn wir die Windungszahl  $w_M(p) \in \mathbb{Z}_2$  nun wie zuvor aber mit  $\deg_2$  anstelle von  $\deg$  definieren, so können wir den Beweis wie oben führen und erhalten  $w_p(M) \neq w_q(M)$  für Punkte lokal auf verschiedenen Seiten von  $M$ .

### 29.18 Verallgemeinerter Jordanscher Kurvensatz.

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  eine kompakte zusammenhängende Hyperfläche. Dann ist  $M$  orientierbar und  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$  hat genau 2 Zusammenhangskomponenten und  $M$  ist der Rand beider. Insbesondere gilt dies für  $M \cong S^n$ .

**Beweis.** Die Kohomologiesequenz [29.14](#) des Paares  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  ist wegen [29.16](#)

$$\underbrace{H_c^n(\mathbb{R}^{n+1})}_{=0} \rightarrow H^n(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus M) \rightarrow \underbrace{H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})}_{\cong \mathbb{R}} \rightarrow \underbrace{H^{n+1}(M)}_{=0}$$

Somit ist  $\dim H^n(M) + 1$  nach [26.5.8](#) die Anzahl der (nach [29.17](#) mindestens 2) Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ . Also ist  $\dim H^n(M) \geq 1$  und damit  $M$  orientierbar, also  $\dim H^n(M) = 1$  nach [29.5](#) und damit hat  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$  genau  $2 = \dim H^n(M) + 1$  Zusammenhangskomponenten.

Da nach den Argumenten aus [29.17](#) nahe  $x \in M$  Punkte in jeder Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$  sind, ist  $M$  der Rand jeder Komponente.  $\square$

### 29.19 Folgerung.

Weder die projektive Ebene noch die Klein'sche Flasche läßt sich als Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  realisieren.

**Beweis.** Andernfalls wären sie nach [29.18](#) orientierbar.  $\square$

### 29.20 Beispiel.

Selbst für orientierbare zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten  $M$  muß  $H^1(M)$  nicht endlich dimensional sein. Sei z.B.  $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $V \subseteq \mathbb{C}$  die Vereinigung der offenen Bälle um alle  $z \in \mathbb{Z}$  mit Radius  $\frac{1}{3}$ . Dann ist  $U \cap V \sim \bigsqcup_{\mathbb{Z}} S^1$  und somit liefert die Mayer-Vietoris [26.3.4](#) Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(U) \oplus \{0\} \rightarrow H^1(U \cap V) \xrightarrow{\delta} 0.$$

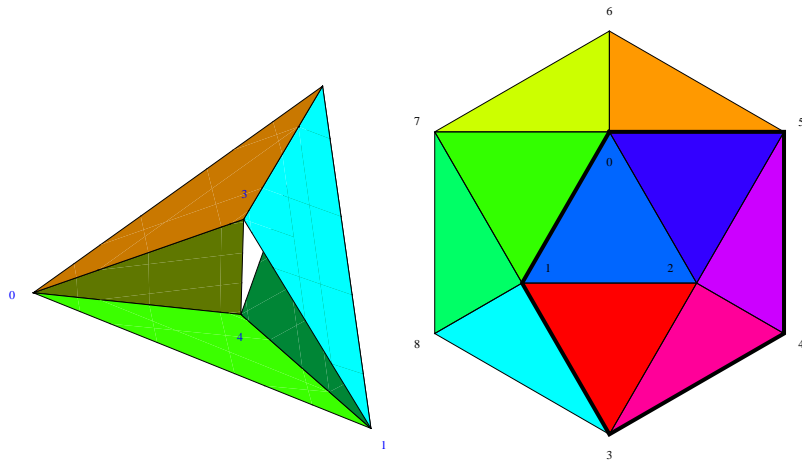
Also ist  $H^1(U) \cong H^1(U \cap V) \cong H^1(\bigsqcup_{\mathbb{Z}} S^1) = \prod_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ .

### 29.21 Definition.

Analog zur Poincaré-Dualität  $H^k(M) \rightarrow H^{m-k}(M)^*$  für kompakte zusammenhängende orientierbare  $M$  können wir  $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$  für allgemeine zusammenhängende orientierbare  $M$  definieren. Dazu sei das CUP-PRODUKT  $\cup : H^k(M) \times H_c^j(M) \rightarrow H_c^{k+j}(M)$  definiert durch  $[\alpha] \cup [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$  und die POINCARÉ-DUALITÄT  $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$  die vermöge  $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$  induzierte lineare Abbildung.

Eine TRIANGULIERUNG ist eine endliche Familie von diffeomorphen Bildern  $\{\sigma_i : i\}$  des STANDARD  $m$ -SIMPLEX  $\Delta_m := \{x = (x^0, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_i x^i = 1 \text{ und } \forall i : x^i \geq 0\}$ , s.d.  $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_i \cap \sigma_j$  ist eine  $k$ -Seite von  $\sigma_i$  und von  $\sigma_j$ , wobei eine  $k$ -SEITE das Bild der Teilmenge von  $\Delta_m$  ist, die durch 0-Setzen von  $m - k$  vielen Koordinaten  $x^i$  entsteht. Man kann mit einigem Aufwand zeigen, daß jede glatte Mannigfaltigkeit eine Triangulierung besitzt, siehe [\[122\]](#) oder [\[154\]](#).





Eine Triangulierung des Möbiusbandes und der projektiven Ebene

**29.22 Proposition.**

Sei  $M$  eine zusammenhängende orientierte Mannigfaltigkeit. Dann ist die Poincaré-Dualität ein Isomorphismus  $H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_c^{m-k}(M)^*$ .

**Beweis (für triangulierbare Mannigfaltigkeiten).** Falls  $M = U \cup V$  ist mit offenen  $U$  und  $V$ , s.d. der Satz für  $U$ ,  $V$  und  $U \cap V$  gilt, so folgt aus der Mayer-Vietoris Sequenz [26.3.4] und der dualen der Mayer-Vietoris Sequenz [29.12] für kompakte Träger

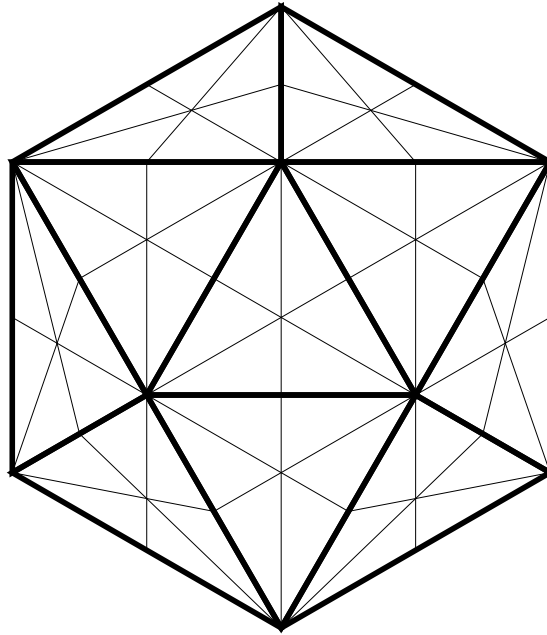
$$\begin{array}{ccccccccc}
 H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \rightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow & H^k(M) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \rightarrow & H^k(U \cap V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^{l+1}(U)^* \oplus H_c^{l+1}(V)^* & \rightarrow & H_c^{l+1}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^l(M)^* & \rightarrow & H_c^l(U)^* \oplus H_c^l(V)^* & \rightarrow & H_c^l(U \cap V)^*
 \end{array}$$

mittels nachstehenden 5-er Lemma [29.23] der Satz für  $M$  selbst, denn wie Aufgabe [98, EX30] zeigt kommutiert das Diagramm und die duale einer exakten Sequenz ist (wie man leicht zeigt) ebenfalls exakt.

Um dies für einen Induktionsbeweis zu nutzen wählen wir auf jedem Seitensimplex der Simplexe der Triangulierung einen "inneren" Punkt, z.B. den Schwerpunkt. Rekursiv definieren wir eine Überdeckung von  $M$  durch disjunkte Vereinigungen  $U_k$  offener kontrahierbarer Teilmengen von  $M$  wie folgt:

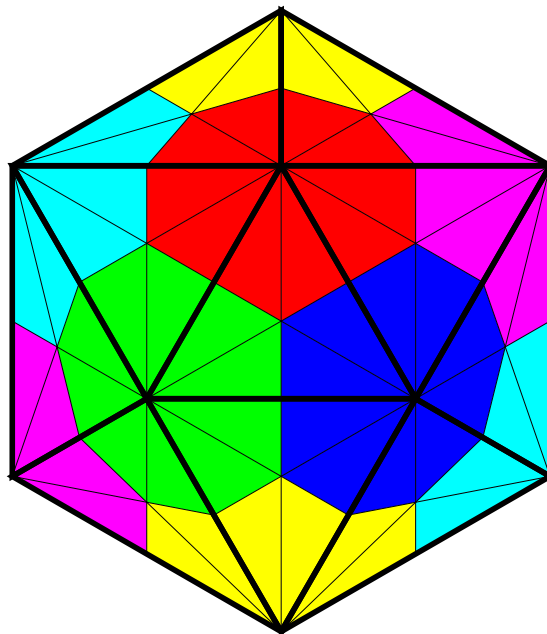
Es sei  $U_0$  die disjunkte Vereinigung von geeignet gewählten kontrahierbaren Umgebungen jeder Ecke, die keinen der anderen inneren Punkte enthält.

Die Menge  $U_k$  bestehe dann aus der disjunkten Vereinigung von geeignet gewählten offenen kontrahierbaren Umgebungen der gewählten Punkte auf den Seiten der Dimension  $k$ .

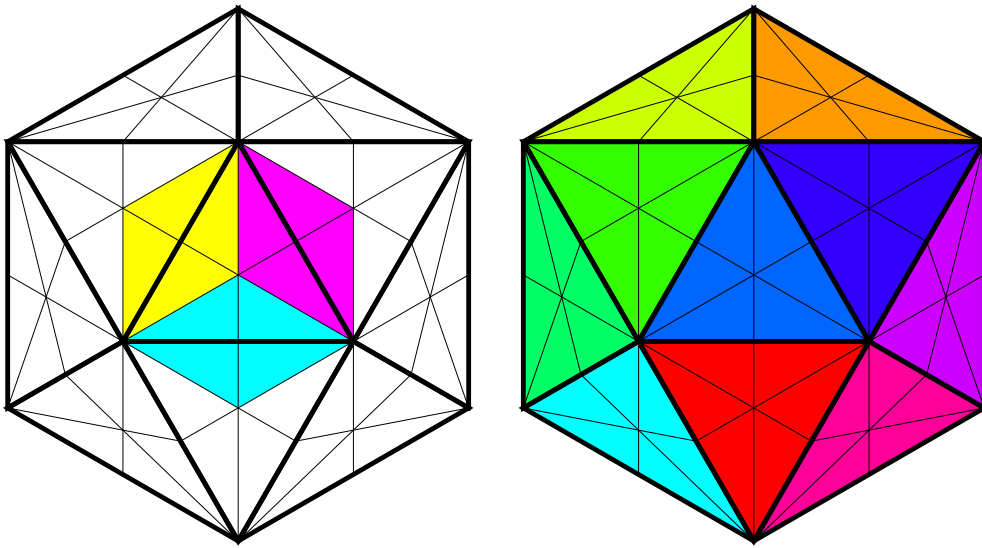


Explizit kann man das erreichen, indem man alle Simplexe betrachtet, die als Ecken die zuvor gewählten inneren Punkte haben, und zwar von aufsteigend geordneten Seiten eines Simplex der Triangulierung.

Nun wählt man  $U_0$  als die Vereinigung aller solcher "offener" Simplexe die jeweils eine der ursprünglichen Ecken als Ecke haben.



Und allgemeiner nimmt man für  $U_k$  die Vereinigung aller solcher "offener" Simplexe die jeweils einen der inneren Punkte eines  $k$ -Simplexes als Ecke haben.



Offensichtlich ist  $\sigma \subseteq \bigcup_{j \leq k} U_j$  für jeden (abgeschlossenen)  $k$ -Simplex  $\sigma$  und somit  $\bigcup_{k=0}^m U_k = M$ . Weiters ist  $U_k \cong \bigsqcup_{\alpha_k} \mathbb{R}^m$  und für  $k > 0$  ist  $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j \cong \bigsqcup_{\alpha_k} S^{k-1} \times \mathbb{R}^{m-k+1}$ .

Klarerweise gilt die Poincaré-Dualität für  $\mathbb{R}^m$  (denn  $H_0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R} = H_c^m(\mathbb{R}^m)^*$  und 0 sonst) und mittels Induktion folgt unter Benutzung der Mayer-Vietoris Sequenz, daß sie auch für  $S^m \times \mathbb{R}^k$  gilt (Siehe Aufgabe [98, EX29]).

Da  $H^k(\bigsqcup_{j \in J} M_j) \cong \prod_{j \in J} H^k(M_j)$  und  $H_c^k(\bigsqcup_{j \in J} M_j) \cong \bigoplus_{j \in J} H_c^k(M_j)$  gilt, folgt sie auch für  $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j$  und somit mittels Induktion für  $\bigcup_{j \leq k} U_j$  und damit auch für  $M = \bigcup_{j \leq \dim(M)} U_j$ .  $\square$

### 29.23 5'er Lemma.

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & A_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & A_5 \\
 f_1 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \cong & & f_5 \downarrow \cong \\
 B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten horizontalen Zeilen. Falls alle bis auf den mittleren vertikalen Pfeil Isomorphismen sind, so ist es auch dieser.

**Beweis.**

( $f_3$  ist injektive)

$$\begin{aligned}
 f_3 a_3 = 0 &\Rightarrow 0 = \psi_3 f_3 a_3 = f_4 \varphi_3 a_3 \\
 &\xrightarrow{f_4 \text{ inj.}} \varphi_3 a_3 = 0 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } A_3} \exists a_2 : a_3 = \varphi_2 a_2 \\
 &\Rightarrow 0 = f_3 a_3 = f_3 \varphi_2 a_2 = \psi_2 f_2 a_2 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } B_2} \exists b_1 : f_2 a_2 = \psi_1 b_1 \\
 &\xrightarrow{f_1 \text{ surj.}} \exists a_1 : b_1 = f_1 a_1 \\
 &\Rightarrow f_2 a_2 = \psi_1 f_1 a_1 = f_2 \varphi_1 a_1 \\
 &\xrightarrow{f_2 \text{ inj.}} a_2 = \varphi_1 a_1 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } A_2} a_3 = \varphi_2 a_2 = \varphi_2 \varphi_1 a_1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & a_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & a_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & 0 \\
 f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \\
 b_1 & \xrightarrow{\psi_1} & f_2(a_2) & \xrightarrow{\psi_2} & 0 & \xrightarrow{\psi_3} & 0
 \end{array}$$

( $f_3$  ist surjektiv)

$$\begin{aligned}
 b_3 &\xrightarrow{f_4 \text{ surj.}} \exists a_4 : f_4 a_4 = \psi_3 b_3 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } B_4} f_5 \varphi_4 a_4 = \psi_4 f_4 a_4 = \psi_4 \psi_3 b_3 = 0 \\
 &\xrightarrow{f_5 \text{ inj.}} \varphi_4 a_4 = 0 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } A_4} \exists a_3 : a_4 = \varphi_3 a_3 \\
 &\Rightarrow \psi_3 f_3 a_3 = f_4 \varphi_3 a_3 = f_4 a_4 = \psi_3 b_3 \\
 &\xrightarrow{\text{exakt bei } B_3} \exists b_2 : b_3 - f_3 a_3 = \psi_2 b_2 \\
 &\xrightarrow{f_2 \text{ surj.}} \exists a_2 : b_2 = f_2 a_2 \\
 &\Rightarrow b_3 = f_3 a_3 + \psi_2 b_2 = f_3 a_3 + \psi_2 f_2 a_2 = f_3(a_3 + \varphi_2 a_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & a_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & a_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & \varphi_4(a_4) \\
 f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\
 b_2 & \xrightarrow{\psi_2} & b_3 & \xrightarrow{\psi_3} & \psi_3(b_3) & \xrightarrow{\psi_4} & 0
 \end{array}$$

**29.24 Proposition.**

Sei  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung der kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  und  $\alpha_i$  die Anzahl der  $i$ -Simplexe von  $\mathcal{K}$ . Dann ist

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i \alpha_i.$$

**Beweis.** Wir verwenden die im Beweis von 29.22 konstruierten offene Mengen  $U_k \subseteq M$ , welche disjunkte Vereinigung von  $\alpha_k$  vielen Mengen diffeomorph zu  $\mathbb{R}^m$

sind und für die  $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j$  disjunkte Vereinigung  $\alpha_k$  vieler zu  $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{m-k+1} \sim S^{k-1}$  diffeomorpher Mengen sind. Somit gilt für die Euler-Charakteristik:

$$\begin{aligned} \chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + \alpha_k &= \chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + \chi(U_k) \stackrel{\boxed{26.5.8}}{=} \chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) + \chi\left(U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j\right) \\ &\stackrel{\boxed{26.5.9}}{=} \chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) + (1 + (-1)^{k-1})\alpha_k. \end{aligned}$$

Also

$$\chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) = \chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + (-1)^k \alpha_k$$

und damit

$$\chi(M) = \chi\left(\bigcup_{j \leq m} U_j\right) = \chi(\emptyset) + \sum_{j \leq m} (-1)^j \alpha_j = \sum_{j \leq m} (-1)^j \alpha_j. \quad \square$$

### 29.25 Definition. Thom- und Euler-Klasse eines Vektorbündels.

Sei  $p : E \rightarrow M$  ein orientiertes  $k$ -Ebenenbündel über einer  $m$ -dimensionalen kompakten orientierten zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $M$ . Das Cup-Produkt

$$\cup : H^m(E) \times H_c^k(E) \rightarrow H_c^{m+k}(E) \cong \mathbb{R}, \quad [\alpha] \cup [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$$

induziert nach [29.21](#) und [29.22](#) die Poincaré-Dualität

$$H_c^k(E) \xrightarrow{\cong} H^m(E)^*, \quad [\beta] \mapsto \left( [\alpha] \mapsto \int_E \alpha \wedge \beta \right).$$

Da  $0 : M \hookrightarrow E$  ein Deformationsretrakt mit Retraktion  $p$  ist, ist  $H^m(M) \cong H^m(E)$ , vermöge  $[\gamma] \mapsto [p^*(\gamma)]$  und somit

$$H_c^k(E) \cong H^m(E)^* \cong H^m(M)^*$$

vermöge

$$H_c^k(E) \ni [\beta] \mapsto \left( H^m(E) \ni [\alpha] \mapsto \int_E \alpha \wedge \beta \right) \mapsto \left( H^m(M) \ni [\gamma] \mapsto \int_E p^*(\gamma) \wedge \beta \right).$$

Nach [29.5](#) ist  $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^* \cong H^m(M)^*$ , vermöge  $1 \mapsto \int_M \left( : H^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, [\gamma] \mapsto \int_M \gamma \right)$ . Somit existiert eine eindeutige Klasse  $U(p) := [\tau] \in H_c^k(E)$ , die sogenannte THOM-KLASSE des  $k$ -Ebenenbündels  $p$ , mit

$$\int_E p^*(\gamma) \wedge \tau = \int_M \gamma \text{ für alle } [\gamma] \in H^m(M).$$

Die EULER-KLASSE  $\chi(p) \in H^k(M)$  des  $k$ -Ebenenbündels  $p$  ist dann als

$$\chi(p) := 0^*(U(p)) = s^*(U(p))$$

definiert, wobei  $0 : M \hookrightarrow E$  der 0-Schnitt bzw.  $s$  ein beliebiger (klarerweise dazu homotoper) Schnitt von  $p$  ist.

Falls  $p : E \rightarrow M$  einen nirgends verschwindenden Schnitt  $s$  besitzt, so ist  $\chi(p) = (K \cdot s)^*(U(p)) = 0$ , wobei  $K$  so groß gewählt wurde, daß  $\text{Bild}(K \cdot s) \cap \text{Trg}(\tau) = \emptyset$  für  $[\tau] = U(p)$ .

### 29.26 Proposition.

Sei  $M$  eine zusammenhängende kompakte orientierte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei weiters  $p : E \rightarrow M$  ein orientiertes  $k$ -Ebenenbündel und für  $x \in M$  sei  $j_x : E_x \hookrightarrow E$  die Inklusion der Faser  $E_x$  über  $x$ .

Dann ist die Thom-Klasse  $U(p) = [\tau]$  das eindeutige Element aus  $H_c^k(E)$  mit  $\int_{E_x} j_x^*(\tau) = 1$  für alle  $x \in M$ ,

**Beweis.** Die Thom-Klasse  $[\tau] \in H_c^k(E)$  ist implizit definiert durch  $\int_E p^*(\mu) \wedge \tau = \int_M \mu$  für alle  $\mu \in \Omega^m(M)$ . Sei nun  $W \cong \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge von  $M$  für welche  $E|_W$  trivial ist, also o.B.d.A.  $E|_W = W \times \mathbb{R}^k$  und  $p = \text{pr}_1$  sowie  $j_x : v \mapsto (x, v)$ . Dann existiert ein  $K > 0$  mit  $\text{Trg}(\tau|_{p^{-1}(W)}) \subseteq W \times \{v : \|v\| < K\}$  und sei vorerst  $\text{Trg}(\mu) \subseteq W$ . Die Kontraktion  $\underline{H} : W \times I \rightarrow W \times \mathbb{R}^k$  von  $W$  auf  $x \in W$  induziert eine glatte Homotopie  $H : W \times \mathbb{R}^k \times I \rightarrow W \times \mathbb{R}^k$ ,  $(x, v, t) \mapsto (\underline{H}(x, t), v)$  mit  $H_0 = \text{id}$  und  $H_1 = (\text{konst}_x, \text{pr}_2) = j_x \circ \text{pr}_2$ . Es gilt  $\text{Trg}(H^*\tau) \subseteq H^{-1}(\text{Trg} \tau|_{p^{-1}(W)}) \subseteq \{(y, v, t) : \|v\| < K\}$ . Für  $\lambda := G(\tau) \in \Omega^{k-1}(W \times \mathbb{R}^k)$ , wobei  $G := (I_0^1 \circ \iota_\xi \circ H^*)$  der Homotopie-Operator aus dem Beweis des Homotopie-Axioms [26.3.2](#) mit  $\xi := \frac{\partial}{\partial t}$  ist, ist somit  $\text{Trg}(\lambda) \subseteq \{(y, v) : \|v\| < K\}$  und damit

$$\text{pr}_2^* j_x^* \tau - \tau = (H_1)^*(\tau) - (H_0)^*(\tau) \stackrel{\text{26.3.2}}{=} (dG + Gd)(\tau) = d\lambda.$$

Somit ist (vgl. mit dem Beweis von [29.3](#) oder siehe Aufgabe [\[98, EX26\]](#))

$$\int_{p^{-1}(W)} p^*(\mu) \wedge \tau = \int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge \text{pr}_2^* j_x^* \tau - \int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \int_W \mu \cdot \int_{\mathbb{R}^k} j_x^* \tau,$$

denn  $\text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \pm d(\text{pr}_1^* \mu \wedge \lambda)$  und damit  $\int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \pm \int_{W \times \mathbb{R}^k} d(\text{pr}_1^* \mu \wedge \lambda) = 0$ . Folglich ist  $\int_{\mathbb{R}^k} j_x^* \tau$  unabhängig von  $x \in W$  und wir bezeichnen diesen Wert mit  $\int_{\mathbb{R}^k} j^* \tau$ .

Es sei  $\mathcal{W}$  eine Überdeckung von  $M$  mit trivialisierenden offenen Mengen  $W$  wie eben und  $\{\lambda_W : W \in \mathcal{W}\}$  eine untergeordnete Partition der 1, dann ist

$$\begin{aligned} \int_M \mu &= \int_E p^*(\mu) \wedge \tau = \sum_{W \in \mathcal{W}} \int_{p^{-1}(W)} p^*(\lambda_W \mu) \wedge \tau \\ &= \sum_{W \in \mathcal{W}} \int_W \lambda_W \mu \cdot \int_{\mathbb{R}^k} j^* \tau = \int_M \mu \cdot \int_{\mathbb{R}^k} j^* \tau \end{aligned}$$

uns somit  $\int_{\mathbb{R}^k} j^* \tau = 1$

**Eindeutigkeit:** Jedes  $U \in H_c^k(E) = \mathbb{R} \cdot [\tau]$  mit der geforderten Eigenschaft ist also von der Form  $U = c \cdot [\tau]$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  und damit  $1 = \int_{E_x} j_x^* U = \int_{E_x} j_x^*(c[\tau]) = c \int_{E_x} j_x^*(\tau) = c$ .  $\square$

### 29.27 Definition. Index eines Vektorfelds in einer isolierten Nullstelle.

Sei  $\xi$  ein Vektorfeld auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  mit isolierter Nullstelle 0. Dann ist der INDEX von  $\xi$  bei 0 definiert durch

$$\text{ind}_0(\xi) = \text{deg}\left(r \circ \xi \circ \iota : S^{m-1} \hookrightarrow U \setminus \{0\} \xrightarrow{-\xi} \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \twoheadrightarrow S^{m-1}\right),$$

wobei  $r(x) := \frac{1}{\|x\|}x$  und  $\iota : S^{m-1} \hookrightarrow U \setminus \{0\}$  die Einbettung einer samt ihrem Inneren in  $U \setminus (\xi^{-1}(0) \setminus \{0\})$  enthaltenen Sphäre ist.

Dieser Index ist invariant unter Diffeomorphismen: In der Tat, wenn  $h$  ein (vorerst) orientierungserhaltender Diffeomorphismus mit  $h(0) = 0$  ist, dann ist  $\text{id}$  glatt homotop zu  $h'(0)$  (da  $GL_+(\mathbb{R}^m)$  zusammenhängend ist, siehe [\[103, 1.10\]](#)) und weiters

$$H(x, t) := \begin{cases} \frac{h(tx)}{t} & \text{für } t > 0 \\ h'(0)(x) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

eine glatte Homotopie zwischen  $h'(0)$  und  $h$  lokal um 0. Somit ist  $r \circ \xi \sim r \circ h^* \xi$  nahe 0 und damit  $\text{deg}(r \circ \xi \circ \iota) = \text{deg}(r \circ h^* \xi \circ \iota)$ .

Um das auch für nicht-orientierungserhaltende  $h$  zu bekommen genügt es dies speziell für die lineare Isometrie  $h : (x^1, \dots, x^{m-1}, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^{m-1}, -x^m)$  zu zeigen. Für diese ist  $h^*\xi = h^{-1} \circ \xi \circ h$  und somit  $r \circ h^*\xi \circ \iota = r \circ h^{-1} \circ \xi \circ h \circ \iota = h|_{S^{m-1}}^{-1} \circ r \circ \xi \circ \iota \circ h|_{S^{m-1}}$  also

$$\deg(r \circ h^*\xi \circ \iota) = \deg(h|_{S^{m-1}}^{-1} \circ r \circ \xi \circ \iota \circ h|_{S^{m-1}}) \stackrel{\boxed{29.10.1}}{=} \deg(r \circ \xi \circ \iota).$$

Das radiale Vektorfeld  $x \mapsto x$  hat offensichtlich Index 1 bei 0. Allgemeiner hat ein lineares Vektorfeld  $\xi$  am  $\mathbb{R}^m$ , welches diagonalisierbar mit  $k$  negativen und  $m - k$  positiven Eigenwerten ist, Index  $(-1)^k$ , denn bis auf lineare orientierungserhaltende Isomorphismen ist es von der Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$$

und hat eingeschränkt auf  $S^{m-1}$  Abbildungsgrad  $(-1)^k$  (denn z.B. ist  $e_1$  ein regulärer Wert von  $\xi \circ \iota = r \circ \xi \circ \iota$  mit einzigem Urbild  $-e_1$  und  $\det(T_{-e_1}\xi|_{S^{m-1}}) = (-1)^k$ ).

Für ein Vektorfeld  $\xi$  auf einer Mannigfaltigkeit mit isolierter Nullstelle  $x$  definieren wir den INDEX  $\text{ind}_x \xi$  als  $\text{ind}_0 \bar{\xi}$  für eine Kartendarstellung  $\bar{\xi}$  von  $\xi$  zentriert bei  $x$ .

### 29.28 Proposition.

Sei  $M$  eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $[\mu] \in H^m(M)$  mit  $\int_M \mu = 1$ . Sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld mit ausschließlich isolierten Nullstellen. Dann ist

$$\chi(\pi_M : TM \rightarrow M) = \left( \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi \right) \cdot [\mu] \in H^m(M).$$

**Beweis.** Es sei  $\xi^{-1}(0) =: \{x_1, \dots, x_k\}$  und  $W_i$  paarweise disjunkte kompakte bei  $x_i$  zentrierte Kartenumgebungen welche diffeomorph zum abgeschlossenen Ball  $D := \{v \in \mathbb{R}^m : \|v\| \leq 1\}$  sind. Somit ist  $TM|_{W_i} \cong W_i \times \mathbb{R}^m$  trivial. Wir erweitern die Norm auf  $\mathbb{R}^m$  zu einer Riemann-Metrik  $g$  auf  $M$ . Sei  $[\tau] \in H_c^m(TM)$  die Thom-Klasse von  $\pi_M : TM \rightarrow M$  und somit existiert ein  $K > 0$  mit  $\text{Trg}(\tau) \subseteq \{\eta_x : g(\eta_x, \eta_x) < K^2\}$ . Es bezeichne  $K$  auch die Skalarmultiplikation  $TM \rightarrow TM, \eta \mapsto K\eta$ . Dann ist

$$\int_{E_x} j_x^*(K^*\tau) = \int_{E_x} K^*(j_x^*\tau) = \int_{E_x} j_x^*\tau = 1,$$

und somit  $\text{Trg}(\tau) \subseteq \{\eta_x \in TM : g(\eta_x, \eta_x) < 1\}$ , d.h.  $K = 1$ .

Wegen  $\chi(\pi_M) := \xi^*([\tau])$  nach [29.25](#) müssen wir  $\int_M \xi^*\tau = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi$  zeigen. Durch Strecken von  $\xi$  (welches  $\text{ind}_x \xi$  nicht ändert) können wir  $g(\xi_y, \xi_y) \geq K^2$  für  $y \notin \bigcup_i W_i$  erreichen, d.h.  $\text{Trg}(\xi^*\tau) \subseteq \xi^{-1}(\text{Trg} \tau) \subseteq \bigcup_{i=1}^k W_i$ . Somit ist

$$\int_M \xi^*\tau = \sum_{i=1}^k \int_{W_i} \xi^*\tau$$

und es genügt  $\int_{W_i} \xi^*\tau = \text{ind}_{x_i} \xi$  zu zeigen.

Der Einfachheit halber unterdrücken wir den Index  $i$  im Rest des Beweises und bezeichnen mit  $\iota : D \rightarrow \iota(D) =: W$  eine bei  $\{x\} := \xi^{-1}(0) \cap W$  zentrierte Karte und mit  $\psi = T\iota \circ (\iota^{-1} \times \mathbb{R}^m) : W \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM|_W$  die zugehörige VB-Karte. Sei  $\bar{\tau} := \psi^*\tau$  und  $\bar{\xi} := \psi^{-1} \circ \xi$  die Kartendarstellung von  $\xi$ . Dann ist  $\bar{\xi}^*\bar{\tau} = \bar{\xi}^*\psi^*\tau = (\psi \circ \bar{\xi})^*\tau = \xi^*\tau$ . Im Beweis von [29.26](#) haben wir wegen  $\text{Trg}(\bar{\tau}) = \psi^{-1}(\text{Trg} \tau) \subseteq \{(y, v) : \|v\| < 1\}$  gezeigt, daß  $\text{pr}_2^* j_x^* \bar{\tau} - \bar{\tau} = d\lambda$  für ein  $\lambda \in \Omega^{m-1}(W \times \mathbb{R}^m)$  mit

$\text{Trg}(\lambda) \subseteq \{(y, v) : \|v\| < 1\}$ . Für alle  $y \in \partial W = \iota(S^{m-1})$  ist  $g(\xi_y, \xi_y) \geq 1$  und somit  $\bar{\xi}^* \lambda|_{\partial W} = 0$ , also

$$\int_W \bar{\xi}^* \text{pr}_2^* j_x^* \bar{\tau} - \int_W \bar{\xi}^* \bar{\tau} = \int_W \bar{\xi}^* d\lambda = \int_W d\bar{\xi}^* \lambda \stackrel{28.11}{=} \int_{\partial W} \bar{\xi}^* \lambda = 0.$$

Wegen des Poincaré Lemmas [26.5.6](#) für  $W \cong D \subseteq \mathbb{R}^m$  ist  $j_x^* \bar{\tau} = d\rho$  für ein  $\rho \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ . Da die Retraction  $r : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow S^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$  homotop zur Identität ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_W \xi^* \tau &= \int_W \bar{\xi}^* \bar{\tau} = \int_W \bar{\xi}^* \text{pr}_2^* j_x^* \bar{\tau} = \int_W \bar{\xi}^* \text{pr}_2^* d\rho \stackrel{28.11}{=} \int_{\partial W} \bar{\xi}^* \text{pr}_2^* \rho \\ &= \int_{\partial W} \bar{\xi}^* (W \times r)^* \text{pr}_2^* \rho = \int_{\iota(S^{m-1})} (\text{pr}_2 \circ (W \times r) \circ \bar{\xi})^* \rho \\ &= \int_{S^{m-1}} (r \circ \text{pr}_2 \circ \bar{\xi} \circ \iota)^* \rho = \deg(r \circ \text{pr}_2 \circ \bar{\xi} \circ \iota) \cdot \int_{S^{m-1}} \rho = \text{ind}_x \xi \cdot 1, \end{aligned}$$

denn  $\text{Trg}(\bar{\tau}) \subseteq \{(y, v) : \|v\| < 1\}$  und somit ist

$$\int_{S^{m-1}} \rho = \int_{\partial D} \rho \stackrel{28.11}{=} \int_D d\rho = \int_D j_x^* \bar{\tau} = \int_{\mathbb{R}^m} j_x^* \bar{\tau} = \int_{T_x M} j_x^* \tau \stackrel{29.26}{=} 1. \quad \square$$

### 29.29 Satz von Poincaré-Hopf.

Sei  $M$  eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld mit ausschließlich isolierten Nullstellen. Dann ist

$$\chi(M) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \int_M \chi(\pi_M).$$

**Beweis (für triangulierbare Mannigfaltigkeiten).** Für  $\mu \in \Omega^m(M)$  mit  $\int_M \mu = 1$  gilt nach [29.28](#) für jedes Vektorfeld  $\xi$  mit ausschließlich isolierten Nullstellen

$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi \cdot [\mu] = \chi(\pi_M)$$

und somit

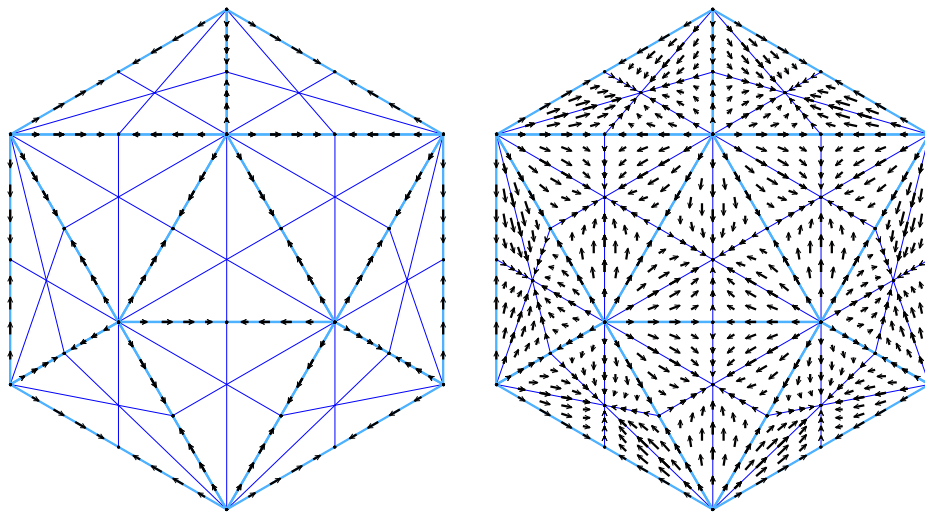
$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \int_M \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi \cdot \mu = \int_M \chi(\pi_M)$$

unabhängig von  $\xi$ . Es genügt also so ein  $\xi$  zu finden mit

$$\chi(M) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi.$$

Wir verwenden dazu eine endliche Triangulierung und wie im Beweis von [29.22](#) auf jedem Seitensimplex einen “inneren” Punkt. Nach [29.24](#) ist  $\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_k$ , wenn  $\alpha_k$  die Anzahl der  $k$ -Simplexe bezeichnet. Ein Vektorfeld  $\xi$  mit genau diesen Punkten als Nullstellen wählen wir nun rekursiv auf den  $k$ -Simplex so, daß es die gewählten inneren Punkte als Senken hat.





Nach dem in 29.27 Gesagten ist der Index von  $\xi$  in diesen inneren Punkten der  $k$ -Simplizes gerade  $(-1)^k$  und somit ist

$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_k = \chi(M). \quad \square$$

## Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Adams. Vector fields on spheres. *Ann. of Math.*, 75:603–632, 1962.
- [2] J.W. Alexander. An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA.*, 10:8–10, 1924.
- [3] C. Bankwitz. Über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. *Ann.of Math*, 31:129–130, 1930.
- [4] J.L.M. Barosa and A.G. Colares. *Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* . Springer Lecture Notes 1195, 1986.
- [5] Helga Baum. *Eichfeldtheorie*. Springer, Heidelberg, 2009.
- [6] A.F. Beardon. *A primer on Riemann Surfaces*. Cambridge Univ.Press, London, 1984.
- [7] Pierre Bérard. Domaines plans isospectraux à la Grodon-Webb-Wolpert: une preuve terre à terre. *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, 10(3):131–142, 1991-1992.
- [8] Pierre Bérard. Transplantation et isospectralité. I. *Math. Ann.*, 292(3):547–560, 1992.
- [9] Pierre Bérard. Transplantation et isospectralité. II. (Transplantation and isospectrality. II). *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 48(3):565–576, 1993.
- [10] M. Berger. Les variétés Riemanniennes (1/4)-pincées. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 14:161–170, 1960.
- [11] M. Berger. *Geometry 1*. Springer, Berlin, 1987.
- [12] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer, New York, 1988.
- [13] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1987.
- [14] S. Bernstein. Sur un théorème de Géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. *Comm.de la Soc.M. Kharkov*, 15:38–45, 1915.
- [15] Harald Biller. Characterizations of proper actions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 136(2):429–439, 2004.
- [16] O. Bonnet. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *Journ. de l'Ecole Polytechn.*, 19:1–146, 1848.
- [17] Simon Brendl and Richard Schoen. Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms. *Journal of the American Mathematical Society*, 22:287–307, 2009.
- [18] Simon Brendl and Richard Schoen. Curvature, sphere theorems, and the ricci flow. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48:1–32, 2011.
- [19] Th. Bröcker and K. Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, Heidelberg, 1973.
- [20] Brown. Smooth  $n$ -manifolds immerse in  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ . *Contemp. Math*, 12:73–79, 1982.
- [21] Peter Buser. Isospectral Riemann surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 36(2):167–192, 1986.
- [22] Peter Buser, John Conway, Peter Doyle, and Klaus-Dieter Semmler. Some planar isospectral domains. *Internat. Math. Res. Notices*, (9):391ff., approx. 9 pp. (electronic), 1994.
- [23] Eugenio Calabi and Maxwell Rosenlicht. Complex analytic manifolds without countable base. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4:335–340, 1953.
- [24] Carathéodory. Über die gegenseitigen Beziehungen der Ränder bei konformen Abbildungen des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. *Math. Annal.*, 73:305–320, 1913.
- [25] E. Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris: Gauthier-Villars (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de G. Julia, 2). VI, 273 p. , 1928.
- [26] Catalan. *Journal de Mathém.*, 7:203, 1842.
- [27] S. J. Chapman. Drums that sound the same. *Am. Math. Soc.*, 102.2:124–138, 1995.
- [28] S.S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. AMS.*, 6:771–782, 1955.
- [29] S.S. Chern. *Complex manifolds without potential theory*. Van Nostrand, Princeton, 1967.
- [30] Cohen. A proof of the immersion conjecture. *Proced. Math. Acad. Soc.*, 79:3390–3392, 1982.
- [31] St. Cohn-Vossen. Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, 1927:125–134, 1927.

- [32] J.H. Conway and N.J.A. Sloane. Four-dimensional lattices with the same theta series. *Int. Math. Res. Not.*, 4:93–96, 1992.
- [33] M. Dehn. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69:137–168, 1910.
- [34] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab. *Minimal Surfaces I*, volume 295. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- [35] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960.
- [36] Beno Eckmann. Systeme von richtungsfeldern in sphären und stetige lösungen komplexer linearer gleichungen. *Comment. Math. Helv.*, 15:1–26, 1943.
- [37] N. V. Efimov. The impossibility in Euclidean 3-space of a complete regular surface with a negative upper bound of the Gaussian curvature. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 150:1206–1209, 1963.
- [38] R. Engelking. *Outline of General Topology*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968.
- [39] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin, 1969.
- [40] C. Fefferman. The Bergman kernel of biholomorphic mappings of pseudo convex domains. *Inv. Math.*, 26:1–65, 1974.
- [41] G.M. Fischer. On the group of all homeomorphisms of a manifold. *Trans. AMS*, 97:193–212, 1960.
- [42] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Springer-Verlag, 1991.
- [43] Alexandre Gabard. A separable manifold failing to have the homotopy type of a CW-complex. *Arch. Math. (Basel)*, 90(3):267–274, 2008.
- [44] Gauß. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Regiae Sci. Göttingensis Rec.*, 6, 1828.
- [45] Oliver Giraud and Koen Thas. Hearing shapes of drums – mathematical and physical aspects of isospectrality. pages 1–42, 2011.
- [46] Gleason. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, 56:193–212, 1952.
- [47] M. Golubistky and V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities*. Springer, New York, 1973.
- [48] Robert E. Gompf. Three exotic  $\mathbb{R}^4$ 's and other anomalies. *Journal of Differential Geom.*, 18.2:317–328, 1983.
- [49] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110:1–22, 1992.
- [50] C. Gordon and E. Wilson. Isospektral deformations of compact solvmanifolds. *J. Diff. Geom.*, 19:241–256, 1984.
- [51] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *J.AMS.*, 2:371, 1989.
- [52] Carolyn Gordon, David L. Webb, and Scott Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 27:134–138, 1992.
- [53] Werner Greub. *Multilinear Algebra*. Springer,
- [54] Werner Greub, Stephen Halperin, and Ray Vanstone. *Connections, Curvature and Cohomology I-III*. Academic Press 773, 76, New York, 1972.
- [55] W. Gröbner. *Matrizenrechnung*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966.
- [56] H.W. Guggenheimer. *Differential Geometry*. Dover Publ., New York, 1963.
- [57] J. Hadamard. Les surfaces à corbures opposées. *J.Math.Pures Appl.*, 4:27–73, 1889.
- [58] Haeflinger and Reeb. Variétés a une dimension et structures feuilletés de plan. *l'Enseignement Math*, 2:107–125, 1957.
- [59] Philip Hartman and Louis Nirenberg. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. *Amer. J. Math.*, 81:901–920, 1959.
- [60] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Acad. Press, New York, 1978.
- [61] G. Herglotz. Über die Starrheit der Eiflächen. *Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg*, 15:127–129, 1943.
- [62] D. Hilbert. Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung. *Trans.AMS.*, 2:87–99, 1901.
- [63] S. Hildebrandt. Boundary behaviour of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35:47–82, 1969.
- [64] J. Hilgert and K.-H. Neeb. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [65] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, New York, 1976.
- [66] H. Hopf and W. Rinow. Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen. *Math. Ann.*, 116:749–766, 1938.
- [67] Chuan-Chih Hsiung. *A First Course in Differential Geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [68] I.M. James. Whitehead products and vector fields on spheres. *Proc. Cambridge*, 53:817–820, 1957.
- [69] H. Jarchow. *Locally convex spaces*. Teubner, Stuttgart, 1981.

- [70] Joris. Une  $c^\infty$ -application non-immersive qui possède la propriété universelle des immersions. *Archiv Math.*, 39:267–277, 1982.
- [71] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73:1–23, 1966.
- [72] M. Kervaire. A manifold which doesn't admit any differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 34:257–270, 1960.
- [73] Michel A. Kervaire. A manifold which doesn't admit a differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 35:1–14, 1961.
- [74] W. Klingenberg. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Springer, Heidelberg, 1973.
- [75] Wilhelm Klingenberg. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. *Comment. Math. Helv.*, 35:47–54, 1961.
- [76] S. Kobayashi. *On conjugate and cut loci*. The Mathem. Assoc. Am., Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [77] S. Kobayashi. *Transformation groups in Differential Geometry*. Springer, Ergebnisse der Math. 70, Berlin, 1972.
- [78] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience, New York, 1969.
- [79] A. Kriegl. *Topologie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 1999.
- [80] A. Kriegl. *Analysis 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004.
- [81] A. Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004.
- [82] A. Kriegl. *Analysis 3*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004/05.
- [83] A. Kriegl. *Funktionalanalysis 2*. Uni.Wien, Wien, 2005.
- [84] A. Kriegl. *Funktional Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2006.
- [85] A. Kriegl. *Differentialgeometrie 1*. Uni.Wien, Wien, 2007.
- [86] A. Kriegl. *Differentialgeometrie*. Univ. Wien, 2007.
- [87] A. Kriegl. *Differentialgeometrie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2007.
- [88] A. Kriegl. *Kategorien Theorie*. Vorlesung, Univ. Wien, 2008.
- [89] A. Kriegl. *Differentialgeometrie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2009.
- [90] A. Kriegl. *Komplexe Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2011.
- [91] A. Kriegl. *Algebraic Topology*. Lecture Notes, Univ. Vienna, 2014.
- [92] A. Kriegl. *Proseminar Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. Univ. Wien, SS 2013.
- [93] A. Kriegl. *Höhere Funktional-Analysis*. Univ. Wien, SS 2014.
- [94] A. Kriegl. *Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. Univ. Wien, SS 2015.
- [95] A. Kriegl. *Proseminar Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. Univ. Wien, SS 2015.
- [96] A. Kriegl. *Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. Univ. Wien, SS 2018.
- [97] A. Kriegl. *Analysis on Manifolds*. Univ. Wien, SS 2018.
- [98] A. Kriegl. *Proseminar Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. Univ. Wien, SS 2018.
- [99] A. Kriegl. *Proseminar Analysis on Manifolds*. Univ. Wien, SS 2018.
- [100] A. Kriegl. *Proseminar Lie-Gruppen*. Univ. Wien, WS 2008.
- [101] A. Kriegl. *Proseminar Lie-Gruppen*. Univ. Wien, WS 2010.
- [102] A. Kriegl. *Riemannsche Geometrie*. Univ. Wien, WS 2013.
- [103] A. Kriegl. *Lie-Gruppen*. Univ. Wien, WS 2016.
- [104] A. Kriegl. *Proseminar Lie-Gruppen*. Univ. Wien, WS 2016.
- [105] Andreas Kriegl and Peter W. Michor. *The Convenient Setting of Global Analysis*. Am. Math. Soc., 1997.
- [106] Lagrange. *Œuvres Vol. 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1868.
- [107] Diane J. Lane. Paracompactness in perfectly normal, locally connected, locally compact spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 80(4):693–696, 1980.
- [108] S. Lang. *Differentiable Manifolds*. Addison-Wesley, 1962.
- [109] H. Liebmann. Eine neue Eigenschaft der Kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys.*, 1899:44–55, 1899.
- [110] William S. Massey. Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space. *Tôhoku Math. J. (2)*, 14:73–79, 1962.
- [111] Meusnier. Mémoire sur la courbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers*, 10:477–510, 1776.
- [112] P. Michor. *Riemannsche Differentialgeometrie*. Vorlesung, Univ. Wien, WS 1988/89.
- [113] P. W. Michor. *Topics in Differential Geometry*. AMS, Providence, Rhode Island, 2008.
- [114] Peter W. Michor. A generalisation of Hamiltonian mechanics. *J. Geometry and Physics*, 2(2):67–82, 1985.
- [115] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64:399–405, 1956.
- [116] J. Milnor. Differentiable Structures on Spheres. *Ann. of Math.*, 81:962–972, 1959.
- [117] J. Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain mf's. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51:542, 1964.

- [118] Montgomery and Zippin. Small subgroups of finite dimensional groups. *Ann. of Math.*, 56:213–241, 1952.
- [119] B. Morin and J-P. Petit. Let retournement de la sphère. *CRAS.*, 287:767–770, 791–794, 879–882, 1978.
- [120] S. Mukhopadhyaya. New methods in the geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1:31–37, 1909.
- [121] Munkres. Obstruction to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphism. *Ann. of Math.*, 72:521–554, 1960.
- [122] Munkres. *Elementary Differential Geometry*. Princeton University Press, 1966.
- [123] Sumner Byron Myers. Connections between differential geometry and topology. I. Simply connected surfaces. *Duke Math. J.*, 1(3):376–391, 1935.
- [124] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–64, 1956.
- [125] Nomitzu and Ozeki. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. AMS.*, 12:889–891, 1961.
- [126] R. Osserman. Global Properties of minimal surfaces in  $e^3$  and  $e^n$ . *Ann. of Math.*, 80:340–364, 1964.
- [127] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, New York, 1969.
- [128] R. Osserman. A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateaus’s problem. *Ann. of Math.*, 91:550–569, 1970.
- [129] P. Painlevé. Sur la theorie de la Représentation conforme. *CRAS.*, 112:653–657, 1891.
- [130] C.D. Papakyriakopoulos. On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.*, 66:1–26, 1957.
- [131] E. Peschl. *Funktionentheorie*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1967.
- [132] Alexandre Preissman. Quelques propriétés globales des espaces de Riemann. *Comment. Math. Helv.*, 15:175–216, 1943.
- [133] Mary Ellen Rudin. Two nonmetrizable manifolds. *Topology and its Appl.*, 35:137–152, 1990.
- [134] H.F. Scherk. Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *Crelles Journal f. reine und angew. Math.*, 13:185–208, 1835.
- [135] J-P. Serre. *Complex Semi-simple Lie-Algebras*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [136] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry 1-4*. Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [137] J. Stallings. The piecewise-linear structure of euclidean space. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58:481–488, 1962.
- [138] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. Math. (2)*, 121:169–186, 1985.
- [139] Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Diffgeom.*, 25:363–430, 1987.
- [140] Jacques Tits. *Liesche Gruppen und Algebren*. Springer Hochschultext, Berlin, 1983.
- [141] Trotter. Non-invertible knots exist. *Topology*, 2:341–358, 1964.
- [142] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representation*. Springer Graduate Text, Berlin, 1984.
- [143] L. Vietoris. Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven. *Arch. Math.*, 3:304–306, 1952.
- [144] M.F. Vignéras. Variétés Riemanniennes isospektrales et non isométriques. *Ann. Math.*, 112:21–32, 1980.
- [145] R. Walter. *Differentialgeometry*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1978.
- [146] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Illinois, 1971.
- [147] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, Graduate Texts in Mathematics 94, New York, 1983.
- [148] S. Warschawski. Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformen Abbildungen. *Math.Z.*, 35:321–456, 1932.
- [149] Weierstrass. *Monatsber. der Berlin. Akad.*, 1866.
- [150] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [151] H. Whitney. A function not constant on a connected set of critical points. *Duke Math. J.*, 1:514–517, 1935.
- [152] H. Whitney. The selfintersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space. *Annals of Math.*, 45:220–446, 1944.
- [153] H. Whitney. The singularities of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n-1)$  space. *Annals of Math.*, 45:247–293, 1944.
- [154] Hassler Whitney. *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

- [155] David R. Wilkins. *A Course in Riemannian Geometry*. 2005.
- [156] F. Xavier. The Gauss map of a complete, non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Annals of Math.*, 113:211–214, 1981.
- [157] H. Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a Liegroup. *Osaka M.J.*, 2:14–15, 1950.
- [158] K. Zindler. Über konvexe Gebilde I. *Monatsh. Math. Phys.*, 31:87–102, 1921.



# Index

- $(m+1)$ -dimensionaler Halbraum, 190
- $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit Rand, 191
- $C^\infty$ -(Teil-)Mannigfaltigkeit (des  $\mathbb{R}^n$ ), 12
- $C^\infty$ -Atlas einer Mannigfaltigkeit, 35
- $O(n, k)$ , 26
- $SO(n, k)$ , 26
- $\Gamma(E)$ , 88
- $\Omega^1(M)$ , 119
- $\mathbb{P}^2$ , 5
- $\sigma$ -kompakt, 49
- $k$ -Form am  $\mathbb{R}^m$ , 124
- $k$ -Seite eines Simplex, 203
- $k$ -te Bettizahl, 154
- $k$ -te De-Rham Kohomologie, 154
- $n$ -Sphäre, 16
- (überall) linear unabhängige Vektorfelder, 90
- (reguläre) Teilmannigfaltigkeit, 74
- Überdeckungsdimension, 52
- Überlagerung, 81
- äquivalente Karten, 35
- äußeren kovarianten Ableitung, 172
- äußere Algebra, 130
- “Hack“-Produkt, 128
- 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit, 115
- 2-Form am  $\mathbb{R}^m$ , 124
- 2-Form auf einer Mannigfaltigkeit, 124
  
- Abbildungsgrad, 198
- abstrakte  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, 35
- algebraische Derivation, 151
- allgemeine lineare Gruppe, 24
- Alternator, 127
  
- Bairschr topologischer Raum, 179
- Blätter, 111
- Blätterung, 111
- Boy’s Surface, 5
- Brouwer’s Fixpunktsatz, 79
- Brouwerscher Fixpunktsatz, 198
  
- Charakterisierung von Diffeomorphismen, 69
- Charakterisierung von Einbettungen, 72
- Charakterisierung von Immersionen, 70
- Charakterisierung von Submersionen, 80
- Cup-Produkt, 203
  
- De-Rham Kohomologie, 154
- Deformationsretrakt, 78
- Deformationsretrakt, 158
- Derivation über einem Punkt, 60
- Dichte, 190
- Differentialform vom Grad  $k$ , 131
  
- Dimensionsaxiom, 154
- disjunkte Vereinigung, 154
- duale Basis, 115
- duale Vektorbündel, 119
  
- Einbettung, 72
- Einhängungsoperator, 154
- Einparametergruppen-Eigenschaft, 92
- Einpunktkompaktifizierung, 40
- Euler-Charakteristik, 154
- Euler-Klasse eines Vektorbündels, 208
- exakt, 155
- exakte 1-Form, 124
  
- Faserbündel, 81
- feine Funktionenraumtopologie, 179
- finale Abbildung, 72
- foliation, 111
- Frölicher-Nijenhuis Klammer, 152
- Fußpunktabbildung des Tangentialbündels, 83
- Funktor, 117
- funktorielle Konstruktion, 132
  
- glatte  $p$ - $q$ -Tensorfelder, 133
- glatte Abbildung, 32, 37
- glatte Partition der Eins, 45
- global triviales Faserbündel, 81
- Gradientenfeld einer Funktion, 137
- graduier antikommutativ, 144
- graduier-kommutative Algebra, 130
- graduierte Algebra, 127
- graduierte Jacobi-Identität, 144
- grobe Funktionenraumtopologie, 179
  
- Hausdorff, 36
- Hermite’scher Mannigfaltigkeit, 113
- Homologie eines Kettenkomplexes, 156
- homotopieäquivalente Räume, 158
- Homotopieaxiom, 154
- Hopffaserung, 19
- horizontaler Lift, 172
  
- Igelsatz, 199
- immersive Abbildung, 68
- immersive Teilmannigfaltigkeit, 72
- impliziter Funktionensatz, 9
- Index eines Vektorfelds, 209
- Index eines Vektorfelds in einer isolierten Nullstelle, 210
- initiale Abbildung, 72
- innerer Tangentialvektor, 192



- Integrabilitätstheorem von Frobenius, globale Version, 110
- Integralkurve eines Vektorfelds, 92
- Integralmannigfaltigkeit eines Teilvektorbündels, 106
- inverser Funktionensatz, 8
- isotrope Teilmenge, 27
- Karte einer Mannigfaltigkeit, 35
- Karten einer topologischen Mannigfaltigkeit, 37
- Kartendarstellung einer Abbildung, 37
- Kartenwechsel, 35
- Kartesische Koordinaten, 65
- Kategorie, 38
- Kegel, 14
- Ketten-Abbildungen, 156
- Kettenkomplexe, 156
- klassifizierende Abbildung, 176
- Klein'sche Flasche, 4
- kompakt-offene  $C^r$ -Topologie, 179
- Konformen Mannigfaltigkeit, 112
- Konnektor, 172
- Konnexion, 172
- kontrahierbar, 158
- kontravarianter Funktor, 117
- Kotangentialbündel einer Mannigfaltigkeit, 119
- kovariante Ableitung, 172, 173
- kovariante Vektorfelder, 118
- kovarianter Funktor, 117
- Kozykel, 154
- Kreuzhaube, 5
- kritischer Punkt, 76
- kritischer Wert, 76
- Kugelkoordinaten, 65
- Länge einer glatten Kurve, 113
- Längen-bewahrende glatte Abbildung, 13
- Lagrange Teilraum, 27
- Lebesgue-Null-Menge einer Mannigfaltigkeit, 76
- Lebesgue-Null-Menge, 76
- lichtartige Vektoren, 26
- Lie-Ableitung, 100
- Lie-Algebra, 96
- Lie-Klammer, 96
- Lindelöf, 45, 49
- linear Connection, 172
- lokale Gleichung, 10
- lokale Parametrisierung, 9, 12
- lokale Parametrisierung einer Mannigfaltigkeit, 35
- lokale Trivialisierung, 10
- lokaler Graph, 9
- Lorentz-Gruppe, 26
- Lorentz-Mannigfaltigkeit, 113
- mager, 179
- maximale Integralmannigfaltigkeit, 110
- Mayer-Vietoris Sequenz, 154
- metrisierbar, 49
- Modul über einem Ring, 89
- Morse-Funktionen, 160
- Nijenhuis-Richardson Klammer, 152
- nirgends dicht, 179
- okales Integrabilitätstheorem von Frobenius, 107
- Ordnung  $n + 1$ , 52
- orientierbare Mannigfaltigkeit, 163
- orientierbares Vektorbündel, 163
- Orientierungsüberlagerung, 187
- orthogonale Gruppe, 24
- orthogonale Komplement, 27
- parakompakt, 49
- parallelisierbare Mannigfaltigkeit, 90
- plaques, 108
- Poincaré-Dualität für nicht kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten, 203
- Poincaré-Lemma, 158
- Poincaré-Polynom, 154
- projektive Ebene, 5
- propere Abbildung, 198
- Pseudo-Riemann-Mannigfaltigkeiten, 113
- Pseudo-Riemann-Metrik, 112
- pseudoeuklidisches Produkt, 26
- Pull-back von Mannigfaltigkeiten, 165
- Rand des Halbraums, 190
- Rand einer Mannigfaltigkeit, 191
- Randoperatoren, 156
- Rangsatz, 68
- Raum der  $k$ -linearen Abbildungen, 125
- Raum der exakten Differentialformen, 154
- Raum der geschlossenen Differentialformen, 154
- Raum der glatten Schnitte eines Bündels, 88
- Raum der glatten Vektorfelder, 88
- raumartige Vektoren, 26
- reelle symplektische Gruppe, 27
- reguläre Abbildung, 8, 68
- residual, 179
- Retraktion, 78
- Retraktionssatz, 78
- Riemann-Mannigfaltigkeit, 112
- Riemann-Metrik, 112
- Satz von Frobenius für totale Differentialgleichungen, 109
- Satz von Stokes, 192
- spezielle lineare Gruppe, 24
- Sphäre, 15
- Spiegelungen, 28
- standard  $m$ -Simplex, 203
- standard symplektische Form am  $\mathbb{R}^{2k}$ , 27
- Stiefelmannigfaltigkeit, 25
- submersive Abbildung, 68
- symplektische Form, 27
- Tangentialabbildung einer Abbildung, 58, 63, 83
- Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit, 63
- Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit, 58, 83
- Tangentialvektor an eine Mannigfaltigkeit, 58

Teilvektorbündel, 88  
 Tensoralgebra, 127  
 Tensorprodukt von Formen, 125  
 Tensorprodukt von Vektorbündel, 132  
 Tensorprodukt von Vektorräumen, 125  
 Thom-Klasse eines Vektorbündels, 208  
 Topologie einer Mannigfaltigkeit, 35  
 topologische Mannigfaltigkeit, 37  
 Torus, 17  
 totale Differential einer Funktion, 115  
 Transitionsfunktion eines Vektorbündels, 86  
 transversale Abbildung zu Teilmannigfaltigkeit,  
     164  
 transversale Abbildungen, 164  
 transversale Teilmannigfaltigkeiten, 165  
 Transversalitätssatz von Thom, 179  
 Triangulierung, 203  
 Trivialisierung, 81  
 typische Faser eines Faserbündels, 81  
  
 universelle Vektorbündel, 176  
  
 VB, 85  
 Vektorbündel, 85  
 Vektorbündelhomomorphismus, 88  
 Vektorbündelkarte, 85  
 Vektorfeld, 88  
 Vektorraum aller graduierten Derivationen,  
     141  
 Vektorraum der glatten  $p$ -fach kontravariant  
     und  $q$ -fach kovarianten Tensorfelder, 133  
 Vektorraum der glatten Differentialformen  
     vom Grad  $p$ , 133  
 verikales Teilbündel, 171  
 vertikalen Lift, 171  
 verwandte Vektorfelder, 98  
 VF, 88  
 vollständiges Vektorfeld, 94  
 Volumsform, 138  
  
 Whitney-Summe von Vektorbündel, 132  
 Whitney-Topologie, 179  
  
 zeitartige Vektoren, 26  
 zentrierte Parametrisierung, 12  
 zurückgezogene Form, 139  
 Zylinder, 13  
 Zylinderkoordinaten, 65