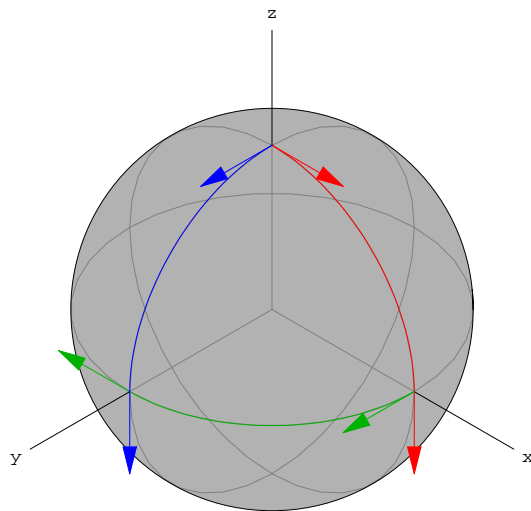


# Riemann'sche Geometrie

Andreas Kriegl

email:andreas.kriegl@univie.ac.at

250067, WS 2018, Mo.+Do. 9<sup>45</sup>-10<sup>30</sup> SR9



Dies ist das Skriptum zu meiner gleichnamigen Vorlesung im Wintersemester 2018. Es besteht aus ausgewählten Teilen des viel umfassenderen Skriptums zur Differentialgeometrie, welches ebenfalls als PDF-Datei unter <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/diffgeom.pdf> downloadbar ist.

Bei der Auswahl des Inhalts habe ich mich an die Studienpläne gehalten, demnach sollen folgende Themen behandelt werden:

- Levi-Civita Konnexion
- Geodäten
- Vollständigkeit
- Satz von Hopf-Rhinov
- ausgewählte weiterführende Themen aus der Riemann'schen Geometrie.

Voraussetzung dafür ist der Stoff aus der Vorlesung und Skriptum 'Analysis auf Mannigfaltigkeiten'.

Der Aufbau des Skriptums ist somit der folgende:

Im Kapitel I geht es um Isometrien und konforme Abbildungen sowie um Riemann'sche Flächen – also 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten – und deren Bezug zur komplexen Analysis.

In Kapitel II sehen wir uns Differentialformen nochmals im Kontext von Riemann'schen Mannigfaltigkeiten an, also insbesondere Gradient, Divergenz, Hodge-Stern und vor allem den Laplace-Beltrami-Operator. Als mögliche erste Anwendung ist ein Abschnitt über klassische Mechanik inkludiert.

Im Kapitel III entwickeln wir das Konzept der Krümmung zuerst für ebene Kurven und Raum-Kurven, dann für Hyperflächen und schließlich für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten. Dabei werden wir natürlich auch Geodäten, Paralleltransport und Kovariante Ableitung behandeln.

Ich werde am Ende des Semesters eine Liste der im Detail behandelten Abschnitte unter <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/LVA-2018-WS.html> online stellen.

Natürlich wird die aufmerksame LeserIn (Tipp-)Fehler finden können. Ich möchte hier gleich die Bitte aussprechen, mir diese mitzuteilen (Geteiltes Leid ist halbes Leid). Zukünftige Generationen von StudentInnen werden es zu schätzen wissen.

Andreas Kriegl, Wien im Juli 2018



## Inhaltsverzeichnis

I.	Konforme Struktur und Riemann'sche Flächen	1
1.	Konforme Abbildungen	1
2.	Riemann-Flächen	6
3.	Riemann'scher Abbildungssatz und Uniformisierungssatz	8
II.	Differentialformen auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten	11
4.	Volumsform und Hodge-Stern-Operator	11
5.	Der Laplace-Beltrami-Operator	14
6.	Klassische Mechanik	25
III.	Krümmung und Geodäten	37
7.	Krümmung von Kurven in der Ebene	37
8.	Krümmung von Kurven im höher Dimensionalen	44
9.	Krümmungen von Hyperflächen	49
10.	Geodäten	69
11.	Integralsatz von Gauß-Bonnet	77
12.	Paralleltransport	88
13.	Kovariante Ableitung	90
14.	Krümmungen Riemann'scher Mannigfaltigkeiten	107
15.	Jacobi-Felder	122
16.	Die Begleitbeinmethode von Cartan	133
	Literaturverzeichnis	143
	Index	145

# I. Konforme Struktur und Riemann'sche Flächen

## 1. Konforme Abbildungen

### 1.1 Rekapitulation

Eine RIEMANN-METRIK auf eine glatten Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein 2-fach kovariantes Tensorfeld

$$g \in \mathfrak{T}_0^2(M) = \Gamma(T^*M \otimes T^*M \rightarrow M) \cong L_{C^\infty(M, \mathbb{R})}^2(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M); C^\infty(M, \mathbb{R})),$$

welches punktweise eine positiv-definite symmetrische Bilinearform ist, siehe [31, 24.1] und [31, 20.1]. Sie hat also bzgl. lokaler Koordinaten  $(u^i)$  eine Darstellung der Form

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} du^i \otimes du^j.$$

Eine RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT  $(M, g)$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit  $M$  welche mit einer ausgezeichneten Riemann-Metrik  $g$  versehen ist, siehe [31, 18.11]. Auf Riemann-Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  können wir die LÄNGE VON TANGENTIALVEKTOREN  $\xi_x \in T_x M$  als  $|\xi_x| := \sqrt{g_x(\xi_x, \xi_x)}$  definieren und in Analogie zu [25, 6.5.12] für glatte Kurven  $c : [0, 1] \rightarrow M$  die LÄNGE  $c$  durch

$$L(c) := \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

### 1.2 Definition (Parametrisierung nach der Bogenlänge).

Eine Parametrisierung  $c$  einer Kurve heißt PARAMETRISIERUNG NACH DER BOGENLÄNGE falls  $|c'(t)| = 1$  für alle  $t$ . Für die Länge bezüglich solcher Parametrisierungen gilt nach [28, 2.7] also  $L_a^b(c) = b - a$ .

### 1.3 Satz (Bogenlängenparametrisierung).

*Jede Kurve besitzt eine Parametrisierung nach der Bogenlänge. Je zwei derartige Parametrisierungen der gleichen Kurve sind vermöge eines Parameterwechsels der Form  $t \mapsto \pm t + a$  äquivalent.*

**Beweis.** Zur Existenz: Sei  $c : I \rightarrow (M, g)$  eine Kurve,  $a$  ein Punkt im Intervall  $I$  und  $s(t) := L_a^t(c) = \int_a^t |c'(t)| dt$  die Längenfunktion  $s : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ , mit Ableitung  $s'(t) = |c'(t)| > 0$ . Insbesondere ist  $s(I)$  zusammenhängend und somit wieder ein Intervall (siehe [24, 3.4.3]). Die Umkehrfunktion  $\varphi : s(I) \rightarrow I$ ,  $s \mapsto t(s)$  ist nach dem inversen Funktionensatz (siehe [24, 4.1.10] und [25, 6.3.5])  $C^\infty$ . Die Parametrisierung  $\bar{c} := c \circ \varphi$  ist die gesuchte Parametrisierung nach der Bogenlänge, da

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{1}{|c'(t)|} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{1}{\left|\frac{dc}{dt}\right|}.$$

Zur Eindeutigkeit: Seien  $c$  und  $c \circ \varphi$  zwei Parametrisierungen nach der Bogenlänge, dann gilt:

$$1 = |(c \circ \varphi)'(t)| = |c'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)| = |\varphi'(t)|,$$

da  $|(c \circ \varphi)'(t)| = 1 = |c'(\varphi(t))|$ . Es folgt:  $|\varphi'(t)| = 1$  für alle  $t$ , also  $\varphi' = \pm 1$ . Wir erhalten schließlich  $\varphi(t) = \varphi(a) + \int_a^t \varphi'(r) dr = \varphi(a) \pm (t - a) = \pm t + (\varphi(a) \mp a)$ .  $\square$

Auf zusammenhängenden Riemann-Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  erhalten wir eine Metrik  $d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  im Sinne der Topologie durch

$$d_g(p, q) := \inf \left\{ L(c) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, M); c(0) = p, c(1) = q \right\}.$$

Wir haben in [31, 18.12] gezeigt, daß diese Metrik  $d_g$  die Topologie von  $M$  erzeugt.

#### 1.4 Definition (Isometrie).

Seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten und  $f : M \rightarrow N$  glatt, dann heißt  $f$  genau dann ISOMETRIE, wenn

$$T_x f : (T_x M, g_x) \rightarrow (T_{f(x)} N, h_{f(x)})$$

für alle  $x$  eine lineare Isometrie (siehe [28, 1.2]) ist. Beachte, daß  $f$  genau dann eine Isometrie ist, wenn  $f^* h = g$  ist.

#### Bemerkung.

1. Falls  $f$  eine Isometrie ist und  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  glatt ist, so gilt:

$$L_h(f \circ c) = L_{f^* h}(c) = L_g(c).$$

Wir erhalten für die Distanz  $d_h(f(x), f(y)) \leq d_{f^* h}(x, y) = d_g(x, y)$ , d.h. die Isometrie kann die Distanz nicht vergrößern. Falls  $f$  ein Diffeomorphismus und eine Isometrie ist, so gilt:  $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ .

2. Falls die Menge der Fixpunkte einer Isometrie als glatte Kurve  $c$  parametrisiert werden kann, so ist diese Kurve lokal die kürzeste Verbindung je zweier ihrer Punkte: Wir werden in [10.8] sehen, daß lokal die kürzesten Verbindungen existieren und eindeutig sind. Da aber das isometrische Bild solch einer Kurve gleiche Länge hat, muß es mit dieser übereinstimmen, also in der Fixpunktmenge enthalten sein.

#### 1.5 Satz von Nash.

Jede abstrakte und zusammenhängende  $m$ -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  läßt sich isometrisch in den  $\mathbb{R}^{(2m+1)(6m+14)}$  einbetten.

Ohne Beweis, siehe [38].

#### 1.6 Satz (Existenz von Riemann-Metriken).

Jede parakompakte glatte Mannigfaltigkeit besitzt vollständige Riemann-Metriken, d.h. Riemann-Metriken  $g$ , deren zugehörige Metriken  $d_g$  auf  $M$  vollständig sind.

**Beweis.** Wir brauchen nur (die Zusammenhangskomponenten von)  $M$  in einen  $\mathbb{R}^n$  einzubetten und dann die von der Standardmetrik induzierte Metrik zu nehmen, um eine Riemann-Metrik auf  $M$  zu erhalten.

Oder wir verwenden, daß wir mittels Karten lokal Riemann-Metriken finden können, die wir mit Hilfe einer Partition der Eins zu einer globalen Riemann-Metrik verkleben dürfen, da "eine Riemann-Metrik zu sein" eine konvexe Bedingung ist.

Die Existenz vollständiger Riemann-Metriken werden wir in [13.14] zeigen.  $\square$

**1.7 Satz (Lie-Gruppe der Isometrien).**

Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende  $m$ -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit, dann ist

$$\text{Isom}(M) := \{f \in \text{Diff}(M) : f \text{ ist Isometrie}\}$$

(zu) eine(r) Lie-Gruppe der Dimension höchstens  $\frac{1}{2}m(m+1)$  (machbar).

Die Gruppe  $\text{Isom}(M)$  ist also im Unterschied zur Gruppe  $\text{Diff}(M)$  aller Diffeomorphismen endlichdimensional. Z.B. haben  $\text{Isom}(\mathbb{R}^m) = O(m) \times \mathbb{R}^m$  und  $\text{Isom}(S^m) = O(m+1)$  beide Dimension  $\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{(m+1)(m+1-1)}{2}$ .

**Ohne Beweis.** Siehe [22, 2.1.2].

Da man mittels eines inneren Produktes Winkel zwischen Vektoren durch

$$\cos \sphericalangle(x, y) := \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}}$$

definieren kann, können wir auf jeder Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  Winkel  $\alpha$  zwischen Tangentialvektoren und somit zwischen Kurven  $c_1$  und  $c_2$  in ihren Schnittpunkten (sagen wir  $c_1(0) = c_2(0)$ ) auf folgende Weise messen:

$$\cos \alpha := \frac{g(c'_1(0), c'_2(0))}{\sqrt{g(c'_1(0), c'_1(0))} \sqrt{g(c'_2(0), c'_2(0))}}.$$

**1.8 Definition (Konforme Abbildungen).**

Eine glatte Abbildung  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  heißt WINKELERHALTEND (KONFORM), falls  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  für alle  $x \in M$  winkelerhaltend ist.

**1.9 Satz (Lie-Gruppe der konformen Diffeomorphismen).**

Die Gruppe der konformen Isomorphismen einer  $m$ -dimensionalen parakompakten zusammenhängenden Riemann-Mannigfaltigkeit bilden eine Lie-Gruppe der Dimension höchstens  $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ .

Z.B. ist diese Gruppe nach dem Satz [28, 52.11] (bzw. [1.12]) von Liouville für  $M = \mathbb{R}^m$  die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen von Dimension  $\dim(O(m)) + \dim(\mathbb{R}^m) + 1 = \frac{m(m-1)}{2} + m + 1 = \frac{m^2+m+2}{2}$  und für  $M = S^2$  ist nach [1.12] die Zusammenhangskomponente  $SL_{\mathbb{C}}(2)/\mathbb{Z}_2$  (der Moebius-Transformationen) dieser Gruppe von Dimension  $6 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ .

**Ohne Beweis.** Siehe [22, 4.6.1].

**1.10 Lemma (Lineare konforme Abbildungen).**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear und injektiv, dann sind äquivalent:

1.  $f$  ist winkelerhaltend,
2.  $\exists \lambda > 0 : \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ;
3.  $\exists \mu > 0 : \mu f$  ist Isometrie.

**Beweis.** ([2]  $\Leftrightarrow$  [3]) ist offensichtlich mit  $\lambda \mu^2 = 1$ .

([1]  $\Leftrightarrow$  [2]) Sei  $\alpha$  der von den Vektoren  $x$  und  $y$  aufgespannte Winkel und  $\alpha'$  der von den Vektoren  $f(x)$  und  $f(y)$  aufgespannte Winkel. Dann gilt:

$$\cos \alpha' = \frac{\langle f(x), f(y) \rangle}{|f(x)| \cdot |f(y)|} = \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{\sqrt{\lambda} |x| \sqrt{\lambda} |y|} = \cos \alpha.$$

Also ist  $\alpha = \alpha'$ , und  $f$  winkelerhaltend.

(1)  $\Rightarrow$  (2) Wir definieren  $\lambda(v) \geq 0$  implizit durch  $\langle f(v), f(v) \rangle =: \lambda(v) \langle v, v \rangle$ .

Für Vektoren  $v$  und  $w$  ist  $v + w \perp v - w \Leftrightarrow 0 = \langle v + w, v - w \rangle = |v|^2 - |w|^2 \Leftrightarrow |v| = |w|$ . Da  $f$  konform ist gilt somit für Vektoren mit  $|v| = 1 = |w|$ :

$$0 = \langle f(v + w), f(v - w) \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle - \langle f(w), f(w) \rangle = \lambda(v) - \lambda(w).$$

Also ist  $\lambda$  konstant auf der Einheits-Sphäre und damit auch auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , denn mit  $w = |w|v$  mit  $v := \frac{1}{|w|}w \in S^{n-1}$  ist

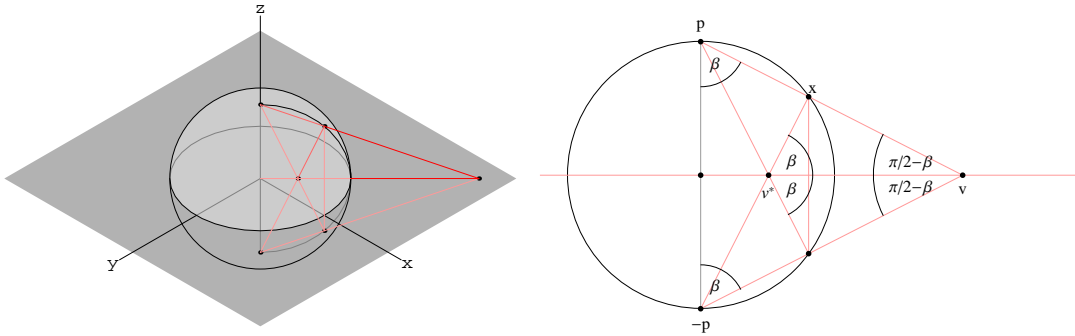
$$\begin{aligned} \lambda(w) \langle w, w \rangle &= \langle f(w), f(w) \rangle = \langle f(|w|v), f(|w|v) \rangle = \langle |w|f(v), |w|f(v) \rangle \\ &= |w|^2 \langle f(v), f(v) \rangle = \langle w, w \rangle \lambda(v) \cdot 1. \end{aligned}$$

Somit ist für zwei beliebige Vektoren  $v$  und  $w$ :

$$\begin{aligned} \langle f(v), f(w) \rangle &= \frac{1}{4} \left( |f(v) + f(w)|^2 - |f(v) - f(w)|^2 \right) = \frac{1}{4} \left( |f(v + w)|^2 - |f(v - w)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \lambda \left( |v + w|^2 - |v - w|^2 \right) = \lambda \langle v, w \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

### 1.11 Beispiele konformer Abbildungen.

1. Spiegelung  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$  an der Einheitssphäre. Dies ist die Kartenwechselabbildung für zwei stereographische Projektionen bzgl. antipodaler Punkte:



Die Abbildung  $f$  ist konform, da  $f'(z)(v) = \frac{v \langle z, z \rangle - 2z \langle z, v \rangle}{\langle z, z \rangle^2}$  und somit

$$\begin{aligned} \langle f'(z)(v), f'(z)(w) \rangle &= \left\langle \frac{v \langle z, z \rangle - 2z \langle z, v \rangle}{\langle z, z \rangle^2}, \frac{w \langle z, z \rangle - 2z \langle z, w \rangle}{\langle z, z \rangle^2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\langle z, z \rangle^4} \left( \langle v, w \rangle \langle z, z \rangle^2 - 4 \langle z, z \rangle \langle z, v \rangle \langle z, w \rangle + 4 \langle z, z \rangle \langle z, v \rangle \langle z, w \rangle \right) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle z, z \rangle^2}. \end{aligned}$$

2. Stereographische Projektion  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (siehe [29, 2.20]).

### 1.12 Proposition.

Es sei  $f$  eine glatte (nicht notwendig reguläre) Abbildung auf einer zusammenhängenden Menge. Wir nennen sie in Verallgemeinerung zu [1.10] KONFORM, falls  $T_z f$  für jedes  $z$  (reelles) Vielfaches einer Isometrie ist. Dann gilt:

1.  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  ist konform  $\Leftrightarrow f$  oder  $\bar{f}$  ist holomorph.
2.  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  ist konform  $\Leftrightarrow f$  ist konstant.
3.  $f \neq \infty : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow S^2$  ist konform  $\Leftrightarrow$  bezüglich stereographischer Parametrisierung  $\mathbb{C} \subseteq S^2$  ist  $f$  oder  $\bar{f}$  meromorph, d.h. ist holomorph bis auf Pole.
4.  $f : S^2 \rightarrow S^2$  ist konform  $\Leftrightarrow$  bezüglich stereographischer Parametrisierung  $\mathbb{C} \subseteq S^2$  ist  $f$  oder  $\bar{f}$  rational, d.h. Quotient zweier Polynome.



5.  $f : S^2 \rightarrow S^2$  ist konformer Diffeomorphismus  $\Leftrightarrow$  bezüglich stereographischer Parametrisierung  $\mathbb{C} \subseteq S^2$  ist  $f$  oder  $\bar{f}$  eine Möbiustransformation, d.h. ist Quotient der Form  $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$  mit  $ad - bc \neq 0$ .
6.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist konformer Diffeomorphismus  $\Leftrightarrow f$  ist eine Ähnlichkeitsabbildung, d.h. eine Bewegung zusammengesetzt mit einer Streckung.

Hierbei wird  $S^2$  als komplexe Mannigfaltigkeit aufgefaßt, siehe [29, 2.18] bzw. [2.5.1].

In Analogie zur Definition von holomorph in [28, 30.9] (siehe [29, 2.3, 2.5]) heißt eine Funktion  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  ANTIHOLOMORPH, falls  $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2$  glatt ist und  $f'(z)$  konjugiert komplex-linear ist, d.h.  $f'(z)(iv) = -if'(z)(v)$  für alle  $v, z$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\bar{f}$  holomorph ist.

**Beweis.** Die Implikationen ( $\Leftarrow$ ) sind leicht zu verifizieren, siehe [29, 2.10]. In [5] geht das wie folgt. Es sei  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  eine Möbiustransformation. Dann ist  $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$  ein konformer Diffeomorphismus, mit Inverser  $w \mapsto \frac{dw-b}{-cw+a}$ , denn

$$f(z) = w \Leftrightarrow az + b = (cz + d)w \Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Falls  $c \neq 0$  so erweitern wir diesen nun durch  $f(-d/c) := \infty$  und  $f(\infty) := a/c$  zu einer Bijektion  $S^2 \rightarrow S^2$ . Diese Erweiterung ist holomorph bei  $-d/c$ , denn  $z \mapsto 1/f(z) = (cz + d)/(az + b)$ , ist holomorph nahe  $z = -d/c$ , da  $a(-d/c) + b = -(ad - bc)/c \neq 0$ . Sie ist holomorph bei  $\infty$  (siehe [29, 2.18]), denn

$$z \mapsto f(1/z) = (a/z + b)/(c/z + d) = (bz + a)/(dz + c),$$

ist holomorph nahe 0, da  $d \cdot 0 + c = c \neq 0$ .

Falls  $c = 0$ , so erweitern wir  $f$  durch  $f(\infty) := \infty$ . Dann ist die Erweiterung holomorph bei  $\infty$ , da

$$1/f(1/z) = (c/z + d)/(a/z + b) = (dz + c)/(bz + a)$$

und  $a \neq 0$  wegen  $ad = ad - bc \neq 0$ . Also definiert jede Möbiustransformation  $f$  einen konformen Diffeomorphismus  $S^2 \rightarrow S^2$  (siehe auch [29, 2.18])

Für die umgekehrte Richtungen ( $\Rightarrow$ ) gehen wir wie folgt vor:

[1] Jede Isometrie  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine Drehung (eventuell mit einer Spiegelung zusammengesetzt), siehe [28, 1.2]. Also ist  $f'(z)$  oder  $\overline{f'(z)} = \bar{f}'(z)$  Multiplikation mit einer komplexen Zahl und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $\frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{\partial v}{\partial y}$  und  $-\frac{\partial u}{\partial y} = \pm \frac{\partial v}{\partial x}$  sind für  $f =: u + iv$  erfüllt. Bleibt zu zeigen, daß diese Vorzeichen  $\pm$  der Determinante der Jacobi-Matrix von  $f$  unabhängig von  $z$  ist: Wir erhalten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \pm \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \mp \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

d.h.  $u = \Re f$  ist harmonisch. Wir suchen ein  $w$ , s.d.  $u + iw$  holomorph ist, d.h. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Es soll also  $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$  gelten, was wegen der Integrabilitätsbedingung

$$d\left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = 0$$

durch den Ansatz

$$w(z) := \int_{z_0}^z \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

erreichbar ist. Da nun  $u + iw$  holomorph ist, sind die Stellen  $z$  mit  $(u + iw)'(z) = 0$  ( $\Leftrightarrow f'(z) = 0$ ) isoliert, also die Determinante der Jacobi-Matrix von  $f$  lokal um diese Punkte von konstanten Vorzeichen und somit ist  $f$  oder  $\bar{f}$  holomorph.

(2) Es sei  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  konform. Dann ist auch die Zusammensetzung  $\mathbb{C} \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  mit der stereographischen Parametrisierung konform, also holomorph oder antiholomorph nach (1). Da  $f(S^2)$  kompakt ist, ist diese Zusammensetzung beschränkt, und nach dem Satz von Liouville (siehe [29, 3.42] oder [39, S.116]) konstant.

(3) Es sei  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow S^2$  konform und  $z_0 \in U$ . Falls  $f(z_0) \in \mathbb{C} \subseteq S^2$  liegt, dann ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  lokal konform und nach (1) also (anti-)holomorph. Andernfalls ist  $f(z_0) = \infty$  und somit  $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$  (anti-)holomorph und hat folglich  $z_0$  als isolierte Nullstelle und ist lokal beschränkt. Also hat  $f$  eine isolierte Singularität in  $z_0$  und kommt lokal um  $z_0$  den Wert 0 nicht nahe und hat folglich nach dem Satz von Casorati-Weierstrass (siehe [39, S. 166]) in  $z_0$  keine wesentliche Singularität, sondern einen Pol. Also ist  $f$  oder  $\bar{f}$  meromorph.

(4) Nach (3) ist  $f|_{\mathbb{C}} : S^2 \supseteq \mathbb{C} \rightarrow S^2$  (oder  $\bar{f}$ ) meromorph und hat nur endlich viele Pole  $z_j$ , da diese auf  $S^2$  isoliert sind. Dort ist die Laurent-Entwicklung  $f(z) = \sum_{k=-n_j}^{\infty} (z - z_j)^k f_k^j$  für ein  $n_j \in \mathbb{N}$ . Also ist  $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{n_j} (z - z_j)^{-k} f_{-k}^j$  holomorph um  $z_j$ . Falls auch  $\infty$  ein Pol ist, dann ist die Laurent-Entwicklung  $f(\frac{1}{z}) = \sum_{k=-n_{\infty}}^{\infty} z^k f_k^{\infty}$ , also  $f(z) - \sum_{k=1}^{n_{\infty}} z^k f_{-k}^{\infty}$  holomorph bei  $\infty$ . Also ist

$$z \mapsto f(z) - \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} (z - z_j)^{-k} f_{-k}^j - \sum_{k=1}^{n_{\infty}} z^k f_{-k}^{\infty}$$

holomorph  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  und nach (2) konstant, d.h.  $f$  ist rational.

(5) Nach (4) ist  $f = \frac{p}{q}$  für relativ prime Polynome  $p$  und  $q$ . Falls der Grad von  $p$  oder von  $q$  größer als 1 ist, dann hat  $h(z) := p(z) - cq(z)$  (für geeignetes  $c$ ) Grad größer als 1. Da  $f$  injektiv ist, darf nur eine Lösung  $z = z_0$  von  $h(z) = 0$  existieren, d.h.  $h(z) = k(z - z_0)^n$  für ein  $n \geq 2$  und  $k \neq 0$ . Dann ist  $p(z_0) = cq(z_0)$  und auch  $0 = h'(z_0) = p'(z_0) - cq'(z_0)$  und somit  $f'(z_0) = \frac{qp' - pq'}{q^2}(z_0) = 0$ , ein Widerspruch dazu, daß  $f$  ein Diffeomorphismus ist.

(6) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein konformer Diffeomorphismus. O.B.d.A. (ersetze wenn nötig  $f$  durch  $\bar{f}$ ) ist somit  $f$  holomorph nach (1) und erfüllt  $f(0) = 0$  (ersetze  $f$  durch  $f - f(0)$ ). Sei  $\iota : z \mapsto \frac{1}{z}$ . Dann ist  $\tilde{f} := \iota \circ f \circ \iota : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ein holomorpher Diffeomorphismus. Da  $f$  ein Diffeomorphismus bei 0 ist und somit  $f^{-1}$  lokal beschränkt ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit  $|f^{-1}(z)| < \delta$  für alle  $|z| < 1$ . Somit gilt  $|z| \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow |\iota(z)| \geq \delta \Rightarrow |f(\iota(z))| \geq 1 \Rightarrow |\tilde{f}(z)| = |\iota(f(\iota(z)))| \leq 1$ , d.h.  $\tilde{f}$  ist nahe 0 beschränkt und somit zu einer holomorphen Funktion auf  $\mathbb{C}$  erweiterbar mit  $\tilde{f}(0) = 0$  (siehe [29, 3.31] oder [39, S.115]). Gleiches Argument gilt auch für die Umkehrfunktion  $\tilde{f}^{-1}$ , d.h.  $f$  läßt sich zu einem konformen Diffeomorphismus  $S^2 \rightarrow S^2$  erweitern. Damit ist  $f$  nach (5) eine Möbiustransformation  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $\infty \mapsto \infty$ , also  $c = 0$ , d.h. eine Ähnlichkeitsabbildung.  $\square$

## 2. Riemann-Flächen

### 2.1 Definition (Riemann-Fläche).

Eine RIEMANN-FLÄCHE ist eine 2-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit.

### 2.2 Satz von Korn-Lichtenstein.

Auf jeder Riemann-Fläche existieren konforme lokale Koordinaten (auch ISOTHERMALE KOORDINATEN genannt).

**Ohne Beweis.** Siehe [9] oder [40, Vol.II, Addendum 2]

### 2.3 Definition (Komplexe Mannigfaltigkeit).

Eine KOMPLEXE MANNIGFALTIGKEIT ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel komplex differenzierbar (holomorph) sind.

Eine ORIENTIERTE MANNIGFALTIGKEIT ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel orientierungserhaltend sind. Für ein detaillierteres Studium von Orientierbarkeit siehe Abschnitt [31, 27].

### 2.4 Folgerung.

*Jede orientierte Riemann-Fläche ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

**Beweis.** Man wähle nach [2.2] einen Atlas, dessen Kartenwechsel konform und orientierungserhaltend also nach [1.12.1] holomorph sind.  $\square$

### 2.5 Beispiele konformer Diffeomorphismen.

(1) Die  $S^2$  hat als Atlas die stereographische Projektion vom Nord- und Südpol. Der Kartenwechsel ist die Inversion am Einheitskreis, ist also konform aber vertauscht die Orientierungen. Wir ändern die Orientierung einer Karte und erhalten so einen holomorphen Atlas. Dies nennt man auch die RIEMANN'SCHE ZAHLENKUGEL oder besser RIEMANN'SCHE ZAHLENSPHÄRE, siehe auch [29, 2.22]. Wir betrachten nun die AUTOMORPHISMENGRUPPE der  $S^2$ . Das ist die Menge aller biholomorphen Abbildungen  $f : S^2 \rightarrow S^2$ , wobei die BIHOLOMORPHEN ABBILDUNGEN, genau die konformen, orientierungserhaltenden Diffeomorphismen sind. Nach [1.12.5] gilt bezüglich der stereographischen Projektion von  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  folgende Beschreibung:

$$\text{Aut}(S^2) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Diese Gruppe der MÖBIUSTRANSFORMATIONEN kann man auch mit folgender Matrixengruppe bis auf eine Multiplikation mit  $\pm 1$  identifizieren:

$$\text{SL}_{\mathbb{C}}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Die Gruppe  $\text{Aut}(S^2)$  ist also isomorph zu  $\text{SL}_{\mathbb{C}}(2)/\mathbb{Z}_2$ , wobei die Untergruppe  $\mathbb{Z}_2$  gegeben ist durch  $\mathbb{Z}_2 := \{\text{id}, -\text{id}\}$ . Dies ist eine Lie-Gruppe der Dimension  $4 \cdot 2 - 2 = 6$ .

(2) Die Automorphismengruppe von  $\mathbb{C}$  besteht aus jenen Möbiustransformationen von  $\text{Aut}(S^2)$ , welche  $\mathbb{C} \subset S^2$  oder – äquivalent – den Nordpol  $\hat{=} \infty \in \mathbb{C}$  invariant lassen (siehe [1.12.6]). Also gilt:

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : a \neq 0, a, b \in \mathbb{C}\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0, a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Man nennt dies auch die “ $az + b$ -Gruppe”, siehe [28, 14.2]. Sie ist komplex 2-dimensional.

(3) Für die offene Einheitscheibe  $\mathbb{D}$  besteht die Automorphismengruppe aus jenen Möbiustransformationen von  $S^2$ , die  $\mathbb{D}$  invariant lassen, d.h.

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{bz + \bar{a}} : a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\} \cong \text{SU}(2, 1)/\mathbb{Z}_2.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jede solche Möbiustransformation  $\mathbb{D}$  invariant läßt. Für die Umkehrung benötigen wir dafür das

**Schwarz'sche Lemma.**

Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Dann ist  $|f'(0)| \leq 1$  und  $|f(z)| \leq |z|$  für alle  $z$ . Genauer gesagt, es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

- $|f'(0)| < 1$  und  $|f(z)| < |z|$  für  $z \neq 0$ ;
- $f(z) = e^{i\theta}z$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}$  und alle  $z$ .

Für einen Beweis siehe [29, 3.43].

Es sei  $f$  ein Automorphismus von  $\mathbb{D}$  mit  $f(0) =: c$ . Die Abbildung  $z \mapsto \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$  ist eine Möbiustransformation der angegebenen Gestalt. Setzt man  $f$  mit dieser zusammen so wird 0 invariant gelassen. O.B.d.A. ist also  $f(0) = 0$ . Nach dem Schwarzschen Lemma ist  $|f'(0)| \leq 1$  und da  $f$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $f'(0) \neq 0$  und gleiches gilt für die Inverse  $f^{-1}$ . Wegen  $f^{-1} \circ f = \text{id}$  ist also  $(f^{-1})'(0) \circ f'(0) = 1$  und somit  $|f'(0)| = 1$ , d.h.  $f(z) = e^{i\theta}z$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}$  nach dem Schwarzschen Lemma. Dies ist ebenfalls eine Möbiustransformation der gesuchten Gestalt.

Es ist  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  eine 3-dimensionale Gruppe. Sei dazu  $a = a_1 + ia_2$  und  $b = b_1 + ib_2$ . Dann ist  $a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 1$  und durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & r_{1,1} = a_1 + b_1 & r_{1,2} = a_2 + b_2 \\ (2) \quad & r_{2,1} = a_2 - b_2 & r_{2,2} = a_1 - b_1 \end{aligned}$$

wird ein Element  $\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{pmatrix} \in \text{SL}(2)/\mathbb{Z}_2$  definiert. Somit erhalten wir einen Isomorphismus  $\text{Aut}(\mathbb{D}) \cong \text{SL}(2)/\mathbb{Z}_2$ , siehe Aufgabe [28, 72.62].

**2.6 Die Hyperbolische Scheibe.**

Wir definieren eine neue Riemann-Metrik auf  $\mathbb{D}$  durch

$$g_z(v, w) := \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Dies ist eine konform äquivalente Metrik, d.h.  $\text{id} : (\mathbb{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{D}, g)$  ist ein konformer Diffeomorphismus. Es ist also

$$\text{Aut}(\mathbb{D}, g) = \text{Aut}(\mathbb{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Für  $f(z) := \frac{az+b}{bz+a}$ , d.h.  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , ergibt sich

$$g_z(v, v) = \frac{|v|^2}{(1 - |z|^2)^2} = \frac{|f'(z)(v)|^2}{(1 - |f(z)|^2)^2} = g_{f(z)}(f'(z)v, f'(z)v),$$

denn es gilt

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| = 1 - |f(z)|^2.$$

Es ist demnach  $\text{Aut}(\mathbb{D}, g) = \text{Isom}(\mathbb{D}, g)$ , man nennt diese Riemann-Fläche  $(\mathbb{D}, g)$  die HYPERBOLISCHE SCHEIBE. Für sie ist jeder winkelerhaltende Diffeomorphismus also längenerhaltend.

**3. Riemann'scher Abbildungssatz und Uniformisierungssatz****3.1 Riemann'scher Abbildungssatz.**

Jede 2-dimensionale, komplexe, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist biholomorph zu  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $S^2$ .

Dies ist eine Verallgemeinerung von [28, 5.3].

**Ohne Beweis.** siehe [1, S.158].

Die in [28, 24.31] (siehe auch [30, 6.29]) konstruierte universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  einer komplexen Mannigfaltigkeit  $M$  ist selbst eine komplexe Mannigfaltigkeit und die Überlagerungsabbildung ist lokal eine biholomorphe Abbildung. Das ist offensichtlich, denn die Kartenwechselabbildungen des kanonischen Atlases von  $\tilde{M}$  sind ident mit solchen von  $M$ .

Wegen [3.1] ist die universelle Überlagerung einer 2-dimensionalen, komplexen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $S^2$ .

### 3.2 Die universelle Überlagerung der punktierten Ebene.

Die Abbildung  $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^1 \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $(r, \varphi) \mapsto (r, e^{i\varphi}) \mapsto re^{i\varphi}$  ist offensichtlich eine Überlagerung. Da  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  einfach zusammenhängend ist, ist  $p$  zugleich universelle Überlagerung. Wegen

$$p'(r, \varphi)(s, \psi) = \frac{\partial p}{\partial r} s + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \psi = e^{i\varphi} s + ie^{i\varphi} r\psi$$

ist  $p$  eine Isometrie bzgl. folgender Riemann-Metrik auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$|(s, \psi)|_{(r, \varphi)}^2 := |p'(r, \varphi)(s, \psi)|^2 = s^2 + r^2\psi^2.$$

Die Abbildung  $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$h : (r, \varphi) \mapsto \ln(r) + i\varphi = (\ln(r), \varphi)$$

ist ein konformer Diffeomorphismus: Daß  $h$  ein Diffeomorphismus ist, ist wegen  $h^{-1} : (x, y) \mapsto (e^x, y)$  klar. Es ist

$$\begin{aligned} h'(r, \varphi)(s, \psi) &= \left(\frac{1}{r}s, \psi\right) \\ |h'(r, \varphi)(s, \psi)|^2 &= \frac{s^2}{r^2} + \psi^2 = \frac{1}{r^2}(s^2 + r^2\psi^2) = \frac{1}{r^2}|(s, \psi)|_{(r, \varphi)}^2, \end{aligned}$$

also ist  $h$  auch konform. Und somit ist

$$\begin{aligned} p \circ h^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z = x + iy &\mapsto (e^x, y) \mapsto e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z. \end{aligned}$$

universelle Überlagerung als Riemann-Flächen.

Wir wollen nun Riemann'sche Flächen  $X$  mittels ihrer universellen Überlagerungen  $\tilde{X}$  beschreiben. Dazu werden wir [28, 24.18] verwenden:  $X \cong \tilde{X}/G$ , wobei  $G$  die Gruppe der Decktransformationen der universellen Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow X$  ist.

### 3.3 Die Decktransformationen von $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Wir wollen die Decktransformationen der universellen Überlagerung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z \mapsto e^z$  bestimmen. Wir wissen bereits, daß

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{C}) &= \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist biholomorph}\} \\ &= \text{Gruppe der Möbiustransformationen } z \mapsto az + b \text{ mit } a \neq 0. \end{aligned}$$

Nun definieren wir für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :

$$z_1 \sim z_2 : \Leftrightarrow \exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 - y_2 \in 2\pi\mathbb{Z}).$$

Jede Decktransformation  $g \in \{h \in \text{Aut}(\mathbb{C}) : h(z) \sim z \forall z\}$  können wir als  $z \mapsto az + b$  schreiben. Sei also  $az + b \sim z$  für alle  $z$ . Für  $z := 0$  folgt  $b \sim 0$  und somit  $b \in 2i\pi\mathbb{Z}$ . Weiters folgt für  $z := 1$ , daß  $a \sim 1$  ist, d.h.  $\Re(a) = 1$  und  $\Im(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Wenn  $z := i$  ist, schließen wir analog, daß  $ai = -\Im(a) + i\Re(a) \sim i$  ist, d.h.  $\Im(a) =$

$0 \Rightarrow a = \Re(a) = 1$ . Somit haben wir also die Gruppe  $G$  der Decktransformationen zu obiger universeller Überlagerung gefunden:

$$G = \{z \mapsto z + 2i\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

### 3.4 Uniformisierungssatz.

Sei  $M$  eine 2-dimensionale, zusammenhängende, orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann ist  $M$  konform-isomorph zu  $\tilde{M}/G$ , wobei  $\tilde{M} \in \{S^2, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$  und  $G$  eine Gruppe von Möbiustransformationen in  $\text{Aut}(\tilde{M})$  ist. Umgekehrt, ist  $G$  eine Gruppe von Möbiustransformationen auf  $M_1 \in \{S^2, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$ , welche STRIKT DISKONTINUIERLICH wirkt, d.h.  $\forall x \exists U(x) : U(x) \cap g(U(x)) = \emptyset$  for all  $g \neq \text{id}$ , dann ist

1.  $M_1/G$  eine Mannigfaltigkeit,
2. die Quotientenabbildung  $M_1 \rightarrow M_1/G$  eine Überlagerungsabbildung, und
3.  $G$  ist die Gruppe der Decktransformationen der Überlagerung.

**Beweis.** Die nach [28, 24.31] existierende universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  ist wegen des Riemannschen Abbildungssatzes [3.1] eine der drei Räume  $S^2$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{D}$  und nach [28, 24.18] ist  $M$  isomorph zu  $\tilde{M}/G$ , wobei  $G$  die Gruppe der Decktransformationen ist, also eine Gruppe von Möbius-Transformationen die nach [28, 24.18] (siehe auch [30, 6.27]) strikt diskontinuierlich auf  $\tilde{M}$  wirkt. Umgekehrt liefert jede solche Gruppe  $G$  eine Überlagerung  $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/G =: M$  nach [28, 24.19] (siehe auch [30, 6.2]).  $\square$

## II. Differentialformen auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten

### 4. Volumsform und Hodge-Stern-Operator

#### 4.1 Rekapitulation: Musikalische Isomorphismen

Nach [31, 24.2] haben wir die “musikalischen” Isomorphismen  $\sharp : T_x M \xrightarrow{\cong} (T_x M)^*$  mit Inversen  $\flat$ . Die Basis-Elemente  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  von  $T_x M$  werden dabei abgebildet auf  $\sharp(\frac{\partial}{\partial u^i}) = \sum_j g_{j,i} du^j$  mit  $g_{j,i} := g(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^i})$ . Es folgt, daß auf kanonische Weise  $TM \cong T^*M$  ist, und somit der Raum der Vektorfelder  $\mathfrak{X}(M)$  kanonisch isomorph zum Raum der 1-Formen  $\Omega^1(M)$  ist. Insbesondere ist somit für Funktionen  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  der Gradient  $\text{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$  definiert durch  $\sharp(\text{grad } f) = df \in \Omega^1(M)$ . Und allgemeiner gilt für Tensorfelder (siehe [31, 23.1]):

$$\mathcal{T}_p^q(M) \cong \mathcal{T}_{p+q}^0(M) \cong \mathcal{T}_0^{p+q}(M)$$

#### 4.2 Rekapitulation: Volumsform

Die Determinanten-Funktion  $\det$  für orientierte euklidische Vektorräume lieferte uns in [4.2] die VOLUMSFORM  $\text{vol}_M \in \Omega^m(M)$  orientierter Riemannscher Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  durch

$$\text{vol}_M(x) := \det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M; \mathbb{R}).$$

Ihr Wert auf der Basis  $(g_i := \frac{\partial}{\partial u^i})$  von  $T_x M$  ist

$$\text{vol}(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}) = \det(g_1, \dots, g_m) = \sqrt{G} \text{ mit } G := \det(g_{i,j})_{i,j}.$$

Und wir erhalten folgenden Isomorphismus:

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \Omega^{\dim M}(M), \quad f \mapsto f \cdot \text{vol}_M.$$

In [31, 28.10] haben wir orientierte Teilmannigfaltigkeiten  $N$  der Kodimension 1 in  $(n+1)$ -dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeiten  $M$  betrachtet. Wenn  $\nu_x$  für  $x \in N$  den eindeutig bestimmten Vektor in  $T_x M$  bezeichnet, für welchen  $(\nu_x, e_1, \dots, e_n)$  eine positiv-orientierte Orthonormalbasis in  $T_x M$  ist für eine (jede) orientierte Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $T_x N$ , und  $\nu$  zu einem Vektorfeld gleichen Namens auf ganz  $M$  fortgesetzt ist, so gilt

$$\text{vol}_N = \text{inkl}^*(\iota_\nu(\text{vol}_M)) \text{ auf } N.$$

Insbesondere gilt das für den kanonisch orientierten Rand  $N = \partial M$  einer berandeten orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit  $M$ . Der Vektor  $\nu$  ist in diesem Fall der nach außen weisende Einheitsnormalvektor, siehe [31, 28.9].

### 4.3 Rekapitulation: Erweiterung des inneren Produkts

In Aufgabe [32, 33] haben wir ein inneres Produkt am Dualraum  $E^*$  eines orientierten Euklidischen Vektorraums  $E$  definiert, indem wir forderten, daß die duale Basis  $(e^i)$  von  $E^*$  einer positiv-orientierten Orthonormalbasis  $(e_i)$  von  $E$  ebenfalls eine Orthonormalbasis sei. Auf  $\otimes^k E$  definieren wir ein skalares Produkt indem wir fordern, daß die Basis  $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})_{i_1, \dots, i_k}$  eine Orthonormalbasis ist und analog auf  $\wedge^k E$  durch die Orthonormalbasis  $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$ . Diese Definition ist von der Basis unabhängig, denn das skalare Produkt auf  $E^*$  ist durch folgende Formel gegeben:

$$\langle x^*, y^* \rangle_{E^*} = \langle \flat x^*, \flat y^* \rangle_E, \text{ da } \langle e^i, e^j \rangle_{E^*} = \langle e_i, e_j \rangle_E = \delta_{i,j}.$$

Auf  $\otimes^k E$  ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_k, y_1 \otimes \dots \otimes y_k \rangle_{\otimes^k E} = \langle x_1, y_1 \rangle_E \cdot \dots \cdot \langle x_k, y_k \rangle_E$$

Auf  $\wedge^k E$  ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\begin{aligned} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_k \rangle_{\wedge^k E} &= \det \left( (\langle x_i, y_j \rangle_E)_{i,j} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_k \rangle_{\otimes^k E}. \end{aligned}$$

Achtung: Die Einschränkung des skalaren Produkts von  $\otimes^k E$  auf den Teilraum  $\wedge^k E$  hat noch einen Faktor  $k!$ , denn

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = k! \operatorname{alt}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, x_1 \wedge \dots \wedge x_k \rangle_{\otimes^k E} &= \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi) \langle x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}, x_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes x_{\pi(k)} \rangle_{\otimes^k E} \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(1)} \rangle \dots \langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(k)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(\sigma(1))} \rangle \dots \langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(\sigma(k))} \rangle \\ &= k! \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \langle x_1, x_{\pi(1)} \rangle \dots \langle x_k, x_{\pi(k)} \rangle \\ &= k! \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, x_1 \wedge \dots \wedge x_k \rangle_{\wedge^k E} \end{aligned}$$

### 4.4 Rekapitulation: Hodge-Sternoperator

In Aufgabe [32, 30] haben wir für orientierte  $m$ -dimensionale euklidische Vektorräume  $E$  den Hodge-Sternoperator  $*$  :  $\wedge^k E \rightarrow \wedge^{m-k} E$  durch folgende implizite Gleichung definiert:

$$\eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \cdot \det \text{ für } \eta, \omega \in \wedge^k E.$$

In Aufgabe [32, 31] haben wir nachgerechnet, daß

$$* \circ * = (-1)^{k(m-k)} : \wedge^k E \rightarrow \wedge^{m-k} E \rightarrow \wedge^k E.$$



Und in Aufgabe [32, 32] haben wir für orientierte Riemann-Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  der Dimension  $m$  den HODGE-STERNOPERATOR  $*$  :  $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$  definiert durch  $(*\omega)(x) := *\omega(x)$  und gezeigt, daß

$$\begin{aligned} * : C^\infty(M, \mathbb{R}) &= \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^m(M) \text{ gegeben ist durch } f \mapsto f \cdot \text{vol} \text{ und} \\ * : \mathfrak{X}(M) &\cong \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{m-1}(M) \text{ gegeben ist durch } \xi \mapsto i_\xi \text{vol}. \end{aligned}$$

#### 4.5 Rekapitulation: Divergenz

In Aufgabe [32, 34] haben wir die Divergenz eines Vektorfelds  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  durch

$$\text{div } \xi := *(d(\iota_\xi \text{vol}_M)) \stackrel{\text{Aufgabe [32, 32]}}{=} (* \circ d \circ * \circ \sharp)(\xi) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

definiert und  $\text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M$  gezeigt. Also lokale Formel erhielten wir

$$\text{div } \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G}\xi^i)}{\partial u^i}.$$

#### 4.6 Bemerkung

Für Vektorfelder  $\xi$  auf berandeten Riemann-Mannigfaltigkeiten  $M$  gilt:

$$\text{incl}^*(\iota_\xi \text{vol}_M) = \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M},$$

denn für eine Orthonormalbasis  $(e_i)_{i=1}^m$  von  $T_x(\partial M)$  ist

$$\begin{aligned} (\iota_\xi \text{vol}_M)(e_1, \dots, e_m) &= \text{vol}_M(\xi, e_1, \dots, e_m) = \\ &= \text{vol}_M \left( \underbrace{\langle \xi, \nu \rangle \nu}_{\in (T(\partial M))^\perp} + \underbrace{\xi - \langle \xi, \nu \rangle \nu}_{\in T(\partial M)}, e_1, \dots, e_m \right) \\ &= \langle \xi, \nu \rangle \cdot \text{vol}_M(\nu, e_1, \dots, e_m) + 0 \\ &\stackrel{\boxed{4.2}}{=} \langle \xi, \nu \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}(e_1, \dots, e_m). \end{aligned}$$

#### 4.7 Greensche Satz.

Sei  $M$  eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}.$$

Diese Formel rechtfertigt die Bezeichnung QUELLDICHTe für  $\text{div}$ .

**Beweis.** Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M &\stackrel{\boxed{4.5}}{=} \int_M \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M \stackrel{\boxed{31, 25.9}}{=} \int_M (d \circ \iota_\xi + \iota_\xi \circ d) \text{vol}_M \\ &= \int_M d(\iota_\xi \text{vol}_M) + 0 \stackrel{\text{Stokes } \boxed{31, 28.11}}{=} \int_{\partial M} \text{incl}^*(\iota_\xi \text{vol}_M) \\ &\stackrel{\boxed{4.6}}{=} \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}. \quad \square \end{aligned}$$

## 5. Der Laplace-Beltrami-Operator

### 5.1 Laplace-Operator.

Wir verallgemeinern nun den Laplace-Operator auf allgemeine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeiten. Dazu ist der KODIFFERENTIALOPERATOR  $d^*$  definiert durch:

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^p \xrightarrow{(-1)^p d^*} \Omega^{p-1} & & \Omega^p \xrightarrow{d^*} \Omega^{p-1} \\
 \downarrow \cong \quad \downarrow * & \text{oder} & \downarrow \cong \quad \uparrow * \\
 \Omega^{m-p} \xrightarrow{d} \Omega^{m-p+1} & & \Omega^{m-p} \xrightarrow{(-1)^{pm+m+1} d} \Omega^{m-p+1}
 \end{array}$$

Man sollte beachten, daß dieser keine gradierte Derivation ist. Das Vorzeichen ist so gewählt, daß  $d^*$  formal adjungiert zu  $d$  wird, wie wir in [5.5](#) zeigen werden. Um die Gleichwertigkeit der beiden Diagramme zu zeigen rechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned}
 d \circ * &= * \circ (-1)^p d^* \Leftrightarrow * \circ (-1)^{pm+m+1} d \circ * = * \circ (-1)^{pm+m+1} * \circ (-1)^p d^* \quad \underline{\underline{4.4}} \\
 &= (-1)^{(pm+m+1)+p+(p-1)(m-p+1)} d^* = d^*
 \end{aligned}$$

Für 3-dimensionale orientierte Riemann-Mannigfaltigkeiten (und insbesondere für  $M$  offen im  $\mathbb{R}^3$ ) ist somit (vgl. mit [31](#), [25.11](#)) und [4.5](#)):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^3 & \xrightarrow{-d^*} & \Omega^2 & \xrightarrow{d^*} & \Omega^1 & \xrightarrow{-d^*} & \Omega^0 \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\
 \parallel & & \uparrow \cong & & * \circ \uparrow \cong & & \cdot \text{vol} \uparrow \cong \\
 C^\infty & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty
 \end{array}$$

Die Abbildung  $\Delta := dd^* + d^*d : \Omega^p \rightarrow \Omega^p$  heißt LAPLACE-BELTRAMI-OPERATOR. Allgemein gilt für Funktionen  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  die Formel  $\Delta f = -\text{div grad } f$ , denn

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= d^*df + 0 = (-1)^{1m+m+1} * d * df \\
 &= - * d * \sharp \text{grad } f \quad \underline{\underline{4.5}} - * d \iota_{\text{grad } f} \text{vol}_M \quad \underline{\underline{4.5}} - \text{div}(\text{grad } f).
 \end{aligned}$$

Der hier definierte Laplace-Operator hat somit ein vielleicht ungewohntes Vorzeichen, welches dazu dient, ihn zu einen positiven Operator zu machen, siehe [5.5](#).

### 5.2 Produktregeln.

Für  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  und  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \text{grad}(f) + f \cdot \text{grad}(g) \\
 \text{div}(f \cdot \xi) &= f \cdot \text{div}(\xi) + df \cdot \xi = f \cdot \text{div}(\xi) + \langle \text{grad}(f), \xi \rangle \\
 \Delta(f \cdot g) &= f \cdot \Delta(g) + \Delta(f) \cdot g - 2\langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle,
 \end{aligned}$$

siehe Aufgabe [\[28, 72.69\]](#).

### 5.3 Greensche Formeln.

Sei  $M$  eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und seien  $f$  und  $h$  in  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Dann gilt:

$$(1) \quad \int_M (\langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle - f \cdot \Delta h) \cdot \text{vol} = \int_{\partial M} f \cdot \langle \text{grad } h, \nu \rangle \cdot \text{vol}$$

$$(2) \quad \int_M (f \cdot \Delta h - h \cdot \Delta f) \cdot \text{vol} = - \int_{\partial M} (f \, dh - h \, df)(\nu) \cdot \text{vol}$$

**Beweis.** 1 Es gilt

$\text{div}(f \cdot \text{grad } h) \stackrel{5.2}{=} f \cdot \text{div}(\text{grad } h) + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle = -f \cdot \Delta h + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle$   
und somit für  $\xi := f \cdot \text{grad } h$ :

$$\begin{aligned} \int_M (\langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle - f \cdot \Delta h) \cdot \text{vol}_M &= \int_M \text{div}(f \cdot \text{grad } h) \cdot \text{vol}_M = \\ &= \int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M \stackrel{4.7}{=} \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M} \\ &= \int_{\partial M} \langle f \cdot \text{grad } h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M} = \int_{\partial M} f \cdot \langle \text{grad } h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M} \\ &= \int_{\partial M} f \cdot dh(\nu_{\partial M}) \cdot \text{vol}_{\partial M}. \end{aligned}$$

2 Vertauscht man  $f$  und  $h$  in 1 und zieht das Resultat von 1 ab, so erhält man die zweite Greensche Formel. □

#### 5.4 Folgerung (Subharmonische Funktionen sind konstant).

Sei  $M$  eine kompakte, orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann ist jede SUBHARMONISCHE FUNKTION  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  – d.h.  $\Delta f \leq 0$  – konstant. Insbesondere gilt dies für harmonische Funktionen, d.h. die stationären Punkte  $f$  der Wärmeleitungsgleichung  $\Delta f = 0$ .

**Beweis.** Wählen wir in der 2. Greenschen Formel 5.3.2 die Funktion  $h$  konstant 1, so erhalten wir  $\int_M -\Delta f \cdot \text{vol}_M = \int_{\emptyset} df(\nu) \cdot \text{vol} = 0$ . Wegen  $\Delta f \leq 0$  ist also  $\Delta f = 0$ , d.h.  $f$  ist harmonisch. Nach der 1. Greenschen Formel 5.3.1 für  $h = f$  erhalten wir analog

$$0 \stackrel{5.3.1}{=} \int_M \left( |\text{grad } f|^2 - \underbrace{f \cdot \Delta f}_{=0} \right) \cdot \text{vol}_M = \int_M |\text{grad } f|^2 \cdot \text{vol}_M,$$

also ist  $\text{grad } f = 0$  und somit ist  $f$  konstant. □

#### 5.5 Der Laplace-Beltrami-Operator ist symmetrisch.

Was läßt sich allgemein über den Laplace-Beltrami-Operator  $\Delta := dd^* + d^*d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  einer kompakten orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit  $M$  aussagen? Auf jedem homogenen Teil  $\Omega^k(M)$  haben wir nach 4.3 ein inneres Produkt, welches gegeben ist durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \alpha(\cdot), \beta(\cdot) \rangle_{\Lambda^k T^*M} \text{vol}_M \in \mathbb{R}.$$

Es sind  $d$  und  $d^*$  formal adjungierte Operatoren bezüglich diesem inneren Produkt, denn

$$\alpha \wedge * \beta \stackrel{4.4}{=} \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \text{vol} \quad \text{für } \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

und für  $\alpha \in \Omega^k$  und  $\beta \in \Omega^{k-1}$  rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left( \langle \alpha, d\beta \rangle - \langle d^* \alpha, \beta \rangle \right) &\stackrel{\boxed{5.1}}{=} \text{vol} \langle d\beta, \alpha \rangle - \left\langle \beta, (-1)^{km+m+1} * d * \alpha \right\rangle \text{vol} \\
&= d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge * * d * \alpha \\
&\stackrel{\boxed{4.4}}{=} d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge (-1)^{(m-k+1)(k-1)} d * \alpha \\
&= d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{k-1} \beta \wedge d * \alpha \\
&= d(\beta \wedge * \alpha). \\
\Rightarrow \int_M \langle \alpha, d\beta \rangle \text{vol} &= \int_M \langle d^* \alpha, \beta \rangle \text{vol} + \underbrace{\int_M d(\beta \wedge * \alpha)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Somit ist der Laplace-Beltrami-Operator  $\Delta = dd^* + d^*d$  symmetrisch, d.h.

$$\langle \Delta \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta \beta \rangle$$

Er ist auch positiv, denn

$$\langle \Delta \alpha, \alpha \rangle = \langle (dd^* + d^*d)\alpha, \alpha \rangle = \langle d^* \alpha, d^* \alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle \geq 0.$$

Wegen dieser Gleichung gilt auch:

$$\Delta \alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0 = d^* \alpha, \text{ also } \text{Ker}(\Delta) = \text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(d^*).$$

Die Formen im Kern von  $\Delta$  werden auch als HARMONISCHE FORMEN bezeichnet.

Der Operator  $\Delta$  ist ein linearer Differentialoperator vom Grad 2. Man kann zeigen, daß er elliptisch ist, siehe [43, 6.35 S.258] und damit folgende Lemmas gelten:

### 5.6 Lemma.

Eine Folge von  $k$ -Formen  $\alpha_n \in \Omega^k(M)$ , für die sowohl  $\{\|\alpha_n\|^2 := \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$  als auch  $\{\|\Delta(\alpha_n)\|^2 : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist, besitzt eine Cauchy-Teilfolge im normierten Raum  $\Omega^k(M)$ .

**Ohne Beweis,** siehe [43, 6.6 S.231] und [43, 6.33 S.258].

Jedes  $\alpha \in \Omega^k(M)$  definiert ein stetig lineares Funktional  $\tilde{\alpha} \in L(\Omega^k(M), \mathbb{R})$  durch  $\tilde{\alpha}(\varphi) := \langle \alpha, \varphi \rangle$  aber nicht umgekehrt! Jedoch gilt:

### 5.7 Lemma.

Jede SCHWACHE LÖSUNG  $\alpha$  von  $\Delta \alpha = \gamma$  mit  $\gamma \in \Omega^k(M)$  ist eine wirkliche Lösung, d.h. aus  $\tilde{\alpha} \in L(\Omega^k(M), \mathbb{R})$  mit  $\langle \gamma, \varphi \rangle = \tilde{\alpha}(\Delta(\varphi))$  für alle  $\varphi \in \Omega^k(M)$  folgt, daß ein  $\alpha \in \Omega^k(M)$  existiert mit  $\tilde{\alpha}(\varphi) = \langle \alpha, \varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in \Omega^k(M)$ .

Beachte:  $\Delta \alpha = \gamma \Leftrightarrow \forall \varphi : \langle \gamma, \varphi \rangle = \langle \Delta \alpha, \varphi \rangle = \langle \alpha, \Delta \varphi \rangle = \tilde{\alpha}(\Delta \varphi)$ .

**Ohne Beweis,** siehe [43, 6.5 S.231] und [43, 6.32 S.253].

### 5.8 Theorem von Hodge.

Sei  $M$  eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit so gilt:

1.  $\dim(\text{Ker } \Delta) < \infty$ .
2.  $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Bild } \Delta$  ist eine offene Abbildung.
3.  $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ .

**Beweis.**

[1] Angenommen  $\text{Ker } \Delta$  ist unendlich-dimensional, dann existiert eine orthonormale Folge von  $\alpha_n \in \text{Ker } \Delta$ . Diese hat nach [5.6] eine Cauchy-Teilfolge, ein Widerspruch zu  $\|\alpha_n - \alpha_m\|^2 = \|\alpha_n\|^2 + \|\alpha_m\|^2 = 2$ .

[2] Klarerweise ist  $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Bild } \Delta$  bijektiv.

**Behauptung:**  $\exists c \forall \alpha \in (\text{Ker } \Delta)^\perp : \|\alpha\| \leq c \|\Delta\alpha\|$  (also ist  $\Delta^{-1} : \text{Bild } \Delta \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp$  stetig bzgl. der Norm).

Sei indirekt angenommen  $\exists \alpha_n \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$  mit  $\|\alpha_n\| = 1$  und  $\|\Delta\alpha_n\| \rightarrow 0$ . Nach Lemma [5.6] dürfen wir annehmen, daß  $\alpha_n$  eine Cauchy-Folge ist. Also existiert

$$\tilde{\alpha}(\varphi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha_n, \varphi \rangle \text{ für jedes } \varphi \in \Omega^k.$$

Das lineare Funktional  $\tilde{\alpha} : \Omega^k \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt, denn  $|\tilde{\alpha}(\varphi)| \leq \sup_n |\langle \alpha_n, \varphi \rangle| \leq 1 \cdot \|\varphi\|$  und es gilt  $\tilde{\alpha}|_{\text{Ker } \Delta} = 0$ , denn

$$\varphi \in \text{Ker } \Delta \Rightarrow \tilde{\alpha}(\varphi) = \lim_n \langle \alpha_n, \varphi \rangle \stackrel{\alpha_n \in (\text{Ker } \Delta)^\perp}{=} \lim_n 0 = 0$$

aber auch  $\tilde{\alpha}|_{\text{Bild } \Delta} = 0$ , denn  $\tilde{\alpha}(\Delta\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \alpha_n, \Delta\varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Delta\alpha_n, \varphi \rangle = 0$ , d.h.  $\tilde{\alpha}$  ist eine schwache Lösung von  $\Delta\tilde{\alpha} = 0$ . Nach Lemma [5.7] ist es eine wirkliche Lösung, d.h.  $\exists \alpha \in \Omega^k : \tilde{\alpha}(\varphi) = \langle \alpha, \varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in \Omega^k$ . Somit ist  $\alpha \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$ , denn  $\langle \alpha, \varphi \rangle = \tilde{\alpha}(\varphi) = 0$  für  $\varphi \in \text{Ker } \Delta$ , und  $\alpha \neq 0$ , ja sogar  $\|\alpha\| = \lim_n \|\alpha_n\| = 1$ . Aber es ist  $0 = \tilde{\alpha}(\Delta\varphi) = \langle \alpha, \Delta\varphi \rangle = \langle \Delta\alpha, \varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in \Omega^k$  und somit  $\Delta\alpha = 0$ . Das ist ein Widerspruch zu  $0 \neq \alpha \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$ .

[3] Die Idee zum Beweis von  $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$  ist die Gleichung  $(\text{Ker } T)^\perp = \text{Bild}(T^*)$  aus der linearen Algebra für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Im unendlich-Dimensionalen stimmt diese so nicht mehr, aber mittels der Elliptizität können wir sie nun für  $T := \Delta$  zeigen.

( $\subseteq$ ) Es gilt  $\text{Bild } \Delta \subseteq (\text{Ker } \Delta)^\perp$ , denn für  $\varphi \in \text{Ker } \Delta$  ist  $\langle \Delta\alpha, \varphi \rangle = \langle \alpha, \Delta\varphi \rangle = 0$  da  $\Delta$  symmetrisch ist.

( $\supseteq$ ) Sei  $\gamma \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$ . Wir definieren  $\tilde{\alpha}(\Delta\varphi) := \langle \gamma, \varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in \Omega^k$ . Dann ist  $\tilde{\alpha} : \text{Bild } \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert, denn aus  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$  folgt  $\varphi_1 - \varphi_2 \in \text{Ker } \Delta$  und somit  $\langle \gamma, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$ . Und  $\tilde{\alpha} : \text{Bild } \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt, denn für den auf  $\text{Ker } \Delta$  orthogonal stehenden Anteil  $\psi$  von  $\varphi$  gilt  $\Delta\varphi = \Delta\psi$  und somit nach [2]:

$$|\tilde{\alpha}(\Delta\varphi)| = |\tilde{\alpha}(\Delta\psi)| = |\langle \gamma, \psi \rangle| \leq \|\gamma\| \cdot \|\psi\| \leq c \cdot \|\gamma\| \cdot \|\Delta\psi\| = c \cdot \|\gamma\| \cdot \|\Delta\varphi\|$$

Also ist  $\tilde{\alpha}$  nach dem SATZ VON HAHN-BANACH (siehe [27, 7.2]) erweiterbar zu einem  $\|\cdot\|$ -beschränkten linearen Funktional auf  $\Omega^k$ . Diese Erweiterung ist aber eine schwache Lösung von  $\Delta\tilde{\alpha} = \gamma$ , und somit existiert nach Lemma [5.7] ein  $\alpha \in \Omega^k$  mit  $\langle \alpha, \varphi \rangle = \tilde{\alpha}(\varphi)$  für alle  $\varphi$ , also  $\langle \Delta\alpha, \varphi \rangle = \langle \alpha, \Delta\varphi \rangle = \tilde{\alpha}(\Delta\varphi) = \langle \gamma, \varphi \rangle$ . Somit ist  $\gamma = \Delta\alpha \in \text{Bild } \Delta$ .  $\square$

**5.9 Folgerung (Orthogonale Zerlegung der Formen).**

Für kompakte orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten  $M$  haben wir folgende orthogonale Zerlegungen:

$$\Omega = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } \Delta \quad \text{und} \quad \text{Bild } \Delta = \text{Bild } d \oplus \text{Bild } d^*$$

**Beweis.** Die erste direkte Summenzerlegung haben wir in [5.8] gezeigt. Nun zur zweiten:

( $\supseteq$ ) Die linearen Unterräume Bild  $d$  und Bild  $d^*$  sind in Bild  $\Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$  enthalten, da  $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$  und  $\langle d^*\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d\beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$  für alle  $\beta \in \text{Ker } \Delta = \text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(d^*)$  nach [5.5](#).

( $\subseteq$ ) Dies ist wegen  $\Delta = dd^* + d^*d$  offensichtlich.

( $\oplus$ ) Die Summe ist orthogonal, denn wegen  $\langle d\alpha, d^*\beta \rangle = \langle d^2\alpha, \beta \rangle = \langle 0, \beta \rangle = 0$  steht Bild  $d$  auf Bild  $d^*$  normal.  $\square$

### 5.10 Definition (Green-Operator).

Wegen [5.8.2](#) und [5.8.3](#) ist  $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$  eine offene Bijektion und, wenn wir mit  $H : \Omega \rightarrow \text{Ker } \Delta$  die orthonormale Projektion bezeichnen, so ist der durch  $G := (\Delta|_{\text{Bild } \Delta})^{-1} \circ H^\perp : \Omega \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp$  mit  $H^\perp := \text{id}_\Omega - H$  definierte GREEN-OPERATOR  $G$  der eindeutig bestimmte Lösungoperator von  $\Delta(G(\alpha)) = H^\perp(\alpha)$  für alle  $\alpha \in \Omega$ .

Folglich ist  $G$  beschränkt und – als Inverse des symmetrischen elliptischen Differentialoperators  $\Delta$  – symmetrisch und kompakt.

### 5.11 Folgerung.

Sei  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  ein linearer Operator, welcher mit  $\Delta$  kommutiert, d.h.  $T \circ \Delta = \Delta \circ T$ , so kommutiert er auch mit  $G$ . Insbesondere gilt das für  $d$ ,  $d^*$  und  $\Delta$ .

**Beweis.** Aus  $T \circ \Delta = \Delta \circ T$  folgt, daß  $\text{Ker } \Delta = \text{Bild } H$  und  $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp = \text{Bild } H^\perp$  beide  $T$ -invariant sind. Somit kommutiert  $T$  mit  $H$  und  $H^\perp$  (denn  $T(H(x)) \in \text{Ker } \Delta$  und  $T(H^\perp(x)) \in \text{Bild } \Delta$  und wegen  $T(H(x)) + T(H^\perp(x)) = T(x) = H(T(x)) + H^\perp(T(x))$  ist  $T(H(x)) = H(T(x))$  und  $T(H^\perp(x)) = H^\perp(T(x))$ ) also auch mit  $G = \Delta^{-1} \circ H^\perp$ .  $\square$

### 5.12 Folgerung (Harmonische Repräsentanten).

Die Kohomologie  $H(M)$  von  $M$  ist isomorph zum Raum  $\text{Ker } \Delta$  der harmonischen Formen. Genauer, in jeder Kohomologiekategorie gibt es genau einen harmonischen Repräsentanten.

**Beweis.** Nach [5.9](#) ist  $\Omega = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d \oplus \text{Bild } d^*$ . Wir behaupten  $\text{Ker } d = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d$ :

( $\supseteq$ ) Nach [5.5](#) ist  $\text{Ker } \Delta = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^* \subseteq \text{Ker } d$  und wegen  $d^2 = 0$  ist  $\text{Bild } d \subseteq \text{Ker } d$ .

( $\subseteq$ ) Sei  $\omega \in \text{Ker } d$ . Nach [5.9](#) ist  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$  mit  $\omega_1 \in \text{Ker } \Delta$ ,  $\omega_2 \in \text{Bild } d$  und  $\omega_3 \in \text{Bild } d^*$  und somit  $0 = d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3$  mit  $d\omega_1 = 0 = d\omega_2$  wegen ( $\supseteq$ ) also auch  $d\omega_3 = 0$ . Da  $\omega_3 \in \text{Bild } d^*$  existiert ein  $\alpha$  mit  $d^*\alpha = \omega_3$  und somit  $\|\omega_3\|^2 = \|d^*\alpha\|^2 = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle = \langle dd^*\alpha, \alpha \rangle = \langle d\omega_3, \alpha \rangle = \langle 0, \alpha \rangle = 0$ . Also ist  $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d$ .  $\square$

### 5.13 Folgerung (Kohomologie ist endlichdimensional).

Die Kohomologie jeder kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit ist endlichdimensional, d.h. alle Betti-Zahlen sind endlich.

**Beweis.** Wir wählen eine Riemann-Metrik auf  $M$ , dann ist  $H(M) \cong \text{Ker } \Delta$  nach [5.12](#) und somit endlichdimensional nach [5.8](#).  $\square$

### 5.14 Definition (Poincaré-Dualität).

Für jede kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  induziert die Abbildung  $\Omega^{m-k}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche durch  $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$  gegeben ist,

eine bilineare Abbildung  $H^{m-k}(M) \times H^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , die sogenannte POINCARÉ-DUALITÄT.

Diese Definition macht Sinn, denn aus  $\alpha_2 - \alpha_1 = d\alpha$  folgt  $\alpha_2 \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta = d\alpha \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta) \pm \alpha \wedge d\beta$ , wo  $d\beta = 0$ , da  $[\beta] \in H^k(M) = \text{Ker } d/\text{Bild } d$  ist. Somit ist nach den Satz [31, 28.11] von Stokes  $\int_M \alpha_2 \wedge \beta = \int_M \alpha_1 \wedge \beta$ .

### 5.15 Lemma.

Die Poincaré-Dualität induziert einen Isomorphismus  $H^{m-k} \cong (H^k)^*$ , i.e. für die Betti-Zahlen gilt  $\beta_k = \beta_{m-k}$ .

In [31, 29.22] haben wir das zu einen Isomorphismus  $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$  für zusammenhängende orientierte (triangulierbare) Mannigfaltigkeiten  $M$  verallgemeinert.

**Beweis.** Wir zeigen zuerst, daß die Poincaré-Dualität nicht degeneriert ist.

Sei dazu  $0 \neq [\alpha] \in H^{m-k}$ , wegen [5.12] dürfen wir annehmen, daß  $\alpha$  harmonisch und damit auch  $d^*\alpha = 0$  ist. Wählen wir  $\beta := *\alpha$ , so gilt:  $d\beta = d*\alpha = \pm *d^*\alpha = 0$  und  $\int_M \alpha \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge *\alpha = \int_M \langle \alpha, \alpha \rangle \text{vol} > 0$ , da  $\alpha \neq 0$ .

Bekanntlich induziert jede bilineare nicht-degenerierte Abbildung  $b : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  auf endlichdimensionalen Vektorräumen einen Isomorphismus  $b^\vee : E \rightarrow F^*$ :

Die induzierte Abbildung  $E \ni v \mapsto b(v, \cdot) \in F^*$  ist injektiv, denn  $b(v, w) = 0$  für alle  $w \in F$  impliziert  $v = 0$ . Also ist  $\dim E \leq \dim(F^*) = \dim F$ , und aus Symmetriegründen  $\dim E = \dim F$ . Somit ist die induzierte Abbildung ein Isomorphismus.  $\square$

### Bemerkung.

Da  $H^k$  nach [5.13] endlich-dimensional ist, liefert jedes innere Produkt auf  $H^k$  einen Isomorphismus  $\sharp : H^k \rightarrow (H^k)^*$  und somit nach [5.15] einen Isomorphismus  $H^{m-k} \rightarrow (H^k)^* \leftarrow H^k$ . Verwenden wir insbesondere den Isomorphismus  $H(M) \cong \text{Ker } \Delta \subseteq \Omega(M)$  und das von  $\Omega(M)$  induzierte innere Produkt aus [5.5] so läßt sich obiger Isomorphismus  $H^{m-k} \cong H^k$  wie folgt beschreiben:

$$\begin{array}{ccc}
 H^{m-k} \times H^k & \longrightarrow & \mathbb{R} \longleftarrow H^k \times H^k \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 Z^{m-k} \times Z^k & \xrightarrow{\int_M} & \text{Ker } \Delta \times \text{Ker } \Delta \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^{m-k} \times \Omega^k & \xrightarrow{\wedge} & \Omega^m & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \Omega^k \times \Omega^k \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & \cong \\
 & & & & H^k \times H^k
 \end{array}$$

$$H^{m-k} \xrightarrow[\cong]{[5.15]} (H^k)^* \xleftarrow[\cong]{\sharp} H^k$$

$$[\alpha] \leftrightarrow \left( [\beta] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \right) \leftrightarrow \gamma \in \text{Ker } \Delta,$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit } \int_M \alpha \wedge \beta &= \sharp(\gamma)(\beta) := \langle \gamma, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \gamma, \beta \rangle_{\wedge^k(M)} \text{vol}_M \\
 &= \int_M \beta \wedge *\gamma = (-1)^{k(m-k)} \int_M *\gamma \wedge \beta
 \end{aligned}$$

für alle  $[\beta] \in H^k(M)$ , also ist  $[\alpha] = (-1)^{k(m-k)}[*\gamma]$  bzw.  $[\gamma] = (-1)^{k(m-k)}[*\alpha] = [*[\beta]]$ , d.h. der Isomorphismus ist durch den Hodge-Stern-Operator auf Repräsentanten gegeben. Beachte dabei, daß

$$\begin{aligned} \Delta(*\gamma) &= (dd^* + d^*d) * \gamma \\ &= (-1)^{1+m+m(m-k)} d * d * * \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\ &= (-1)^{1+m+m(m-k)+k(m-k)} d * d \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\ &= * \left( (-1)^{m(m-1-2k)} (-1)^{1+m+m(k+1)} * d * d + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m(m-1-2k)} (-1)^{2m} (-1)^{1+m+m k} d * d * \right) \gamma \\ &= (-1)^{m(m-1-2k)} * (d^*d + dd^*) \gamma = *\Delta\gamma = *0 = 0, \quad \text{für } \gamma \in \text{Ker } \Delta, \end{aligned}$$

d.h.  $*$  bildet die harmonischen Formen wieder auf solche ab.

### 5.16 Folgerung.

*Ist  $M$  eine kompakte zusammenhängende orientierbare  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist  $H^m(M) \cong \mathbb{R}$ , i.e.  $\beta_m = 1$ . Dabei ist der Isomorphismus durch Integrieren der Repräsentanten gegeben.*

Vgl. dies mit [31, 29.5].

**Beweis.** Die Poincaré-Dualität liefert den Isomorphismus  $H^m \cong (H^0)^*$ , und  $H^0 \cong \mathbb{R}$ , nach [31, 26.5.2] da  $M$  zusammenhängend ist. Die Zusammensetzung der Isomorphismen  $H^m \cong (H^0)^* \cong H^0 \cong \mathbb{R}$  ist:  $[\omega] \mapsto \int_M \omega \wedge 1 = \int_M \omega$ .  $\square$

### 5.17 Folgerung.

*Ist  $M$  kompakt, orientierbar und von ungerader Dimension so verschwindet die Euler-Charakteristik  $\chi = \sum_k (-1)^k \beta_k$ .*

**Beweis.** Sei  $\dim M = 2n + 1 = m$  so gilt

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k + \sum_{k=n+1}^m (-1)^k \beta_k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k + \sum_{k=0}^n (-1)^{m-k} \beta_{m-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \underbrace{(\beta_k - \beta_{m-k})}_{=0, \text{ nach } \boxed{5.15}} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

### 5.18 Kann man die Form einer Trommel hören? [19].

Um diese sehr anschauliche Problem in eine mathematische Formulierung zu bekommen, denken wir uns eine Trommel als ein berandetes Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ . Lassen wir diese nun mit festgehaltenem Rand schwingen, so besitzt sie gewisse Eigenfrequenzen, die wir – zumindest mit absolutem Gehör – hören könnten. Es stellt sich nun die Frage, ob das Gebiet durch dieses Spektrum von Eigenfrequenzen bereits bis auf Isometrien eindeutig festgelegt ist.

Allgemeiner können wir das Problem auch für beliebig-dimensionale, abstrakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten stellen. Da wir diese nur ein wenig aus der Ruhelage bringen wollen, ist es egal in welchem umgebenden Raum die Mannigfaltigkeit isometrisch eingebettet ist, am einfachsten in  $M \times \mathbb{R}$ . Sei nun  $u(x, t)$  die Entfernung des Punktes  $x \in M$  von seiner Ruhelage zum Zeitpunkt  $t$ . Dann erfüllt



$u$ , wie bei der üblichen Gleichung der schwingenden Saite (siehe z.B. [26, 9.3.1]), die partielle Differentialgleichung 2.ter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \text{ mit } u|_{\partial M} = 0,$$

wobei  $\Delta$  der Laplace-Beltrami-Operator der Riemann-Mannigfaltigkeit ist.

Die übliche Lösungsmethode verwendet den Ansatz der getrennten Variablen (vgl. [26, 9.3.2]), d.h.  $u(x, t) := \varphi(x) \cdot \psi(t)$ . Die Gleichung übersetzt sich dann in  $\frac{\Delta \varphi}{\varphi}(x) = -\frac{\psi''}{\psi}(t)$  und somit müssen beide Seiten konstant – z.B. gleich  $\lambda$  – sein. Insbesondere suchen wir also Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{R}$  und Eigenfunktionen  $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  des Operators  $\Delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Falls  $M$  kompakt ist, so sind nach [5.5] alle Eigenwerte reell und die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten stehen orthogonal (da  $\Delta$  symmetrisch ist). Die Eigenwerte sind alle nicht negativ (da  $\Delta$  positiv ist) und lassen sich zu einer monoton wachsenden Folge  $(\lambda_k)$  anordnen, die sich nur im Unendlichen häuft, denn andernfalls besäße eine zugehörige orthonormale Folge von Eigenfunktionen nach [5.6] einen Häufungswert. Vermöge einer orthonormalen Folge von zugehörigen Eigenfunktionen  $\varphi_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  läßt sich die Wellengleichung mittels Fourierreihen

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \cdot \varphi_k(x)$$

lösen, wobei die Konstanten  $a_k$  und  $b_k$  durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die Klangwelle der Mannigfaltigkeit ist dann ein geeigneter Mittelwert:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right).$$

Und somit können wir (in einem gewissen Sinn) die  $\lambda_k$  hören.

Diese Folge  $(\lambda_k)$  heißt das SPEKTRUM DER RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT. Z.B. kann man zeigen, daß das Spektrum der  $S^n$  die Folge  $(k(k+n-1))_{k=0}^{\infty}$  ist, wobei jedes  $k > 0$  mit Vielfachheit  $\frac{(n+2k-1)!(n+k-2)!}{(n-1)!k!}$  auftritt.

Man konnte zeigen, daß folgende Dinge gehört werden können, d.h. durch das Spektrum bereits eindeutig bestimmt sind: Die Dimension, das Volumen und die Euler-Charakteristik und damit das Geschlecht (einer 2-dimensionalen unberandeten Mannigfaltigkeit) und die totale skalare Krümmung (siehe [14.13]).

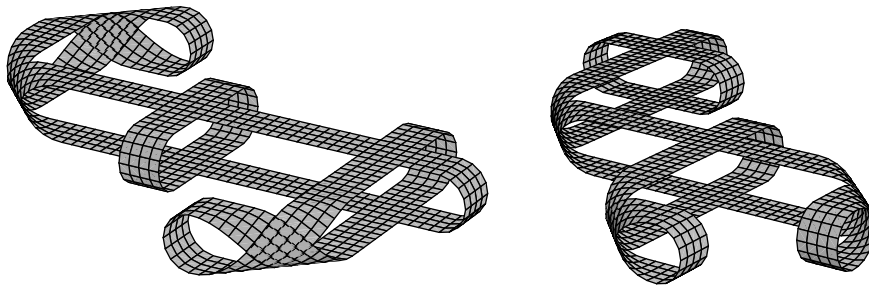
Man konnte weiters zeigen, daß man die folgenden Riemann-Mannigfaltigkeiten mit ihrer kanonischen Metrik durch Hören erkennen kann: die Sphären  $S^n$ , die reellen projektiven Räume  $\mathbb{P}^{2n-1}$  für  $n \leq 3$ , den flachen Torus  $S^1 \times S^1$ , sowie alle kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung  $K > 0$ .

Jedoch gibt es ISOSPEKTRALE RIEMANN-MANNIGFALTIGKEITEN die nicht isometrisch sind. Das erste Beispiel wurde von Milnor in [36] gefunden und waren zwei 16-dimensionale Tori. Marie-France Vignéras [42, Théorème 8, S.31] konstruierte 2-dimensionale Beispiele die als Quotienten der hyperbolischen Halbebene nach diskreten Gruppen von Isometrien erhalten werden. Daß es sogar isospektrale Deformationen von Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, wurde von Gordon und Wilson [14] gezeigt. Sunada adaptierte in [41, Theorem 1, S.170] eine Methode aus der Zahlentheorie: Sei  $M \rightarrow M_0$  eine normale Riemann'sche Überlagerung mit endlicher Decktransformationsgruppe  $G$ . Falls die Konjugiertheitsklassen von  $G$  zwei Untergruppen  $G_1$  und  $G_2$  und jeweils gleich vielen Elementen treffen, so sind die Totalräume der zugehörigen Überlagerungen  $M_1 \rightarrow M_0$  und  $M_2 \rightarrow M_0$  isospektral. Darauf aufbauend konstruierten schließlich Gordon, Webb und Wolpert in [13]

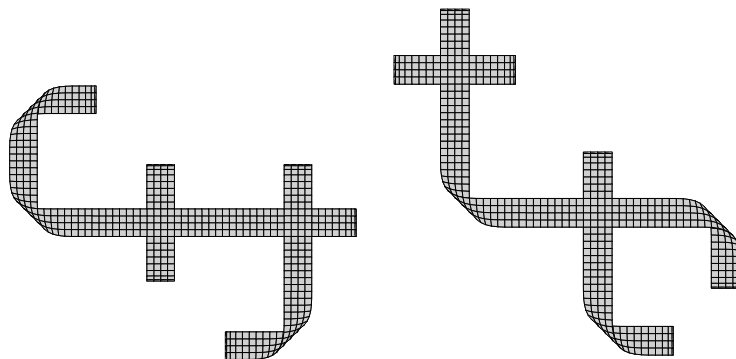
eine berandete Fläche  $M$  die aus  $168 = 7 \cdot 24$  Kreuzen zusammengesetzt ist und auf welcher die Elemente der Gruppe  $SL_{\mathbb{Z}_2}(3)$  der Ordnung 168 als fixpunktfreie Isometrien wirken. Die jeweils  $24 = 2 \cdot 2 \cdot 6$  elementigen Untergruppen

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

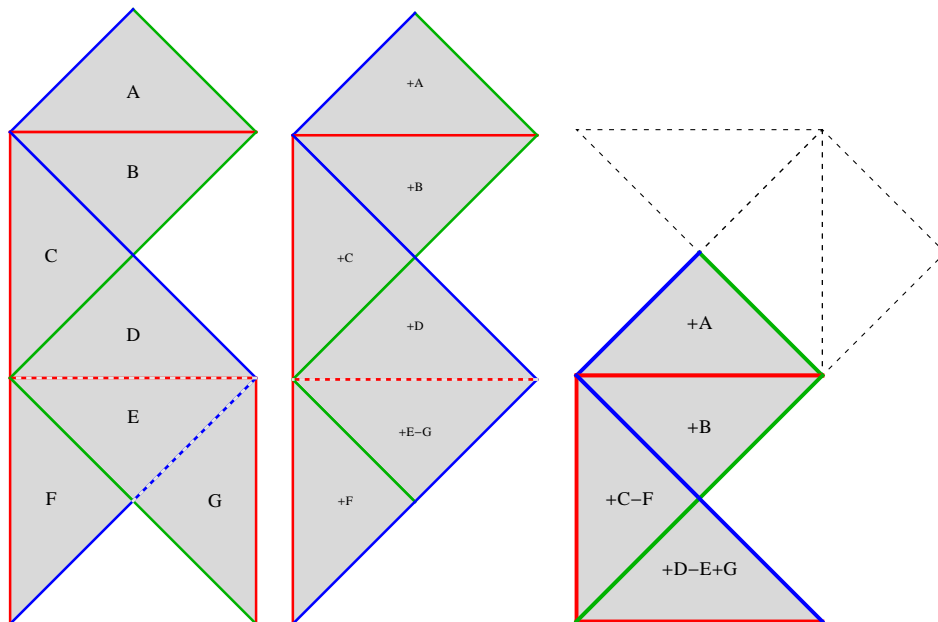
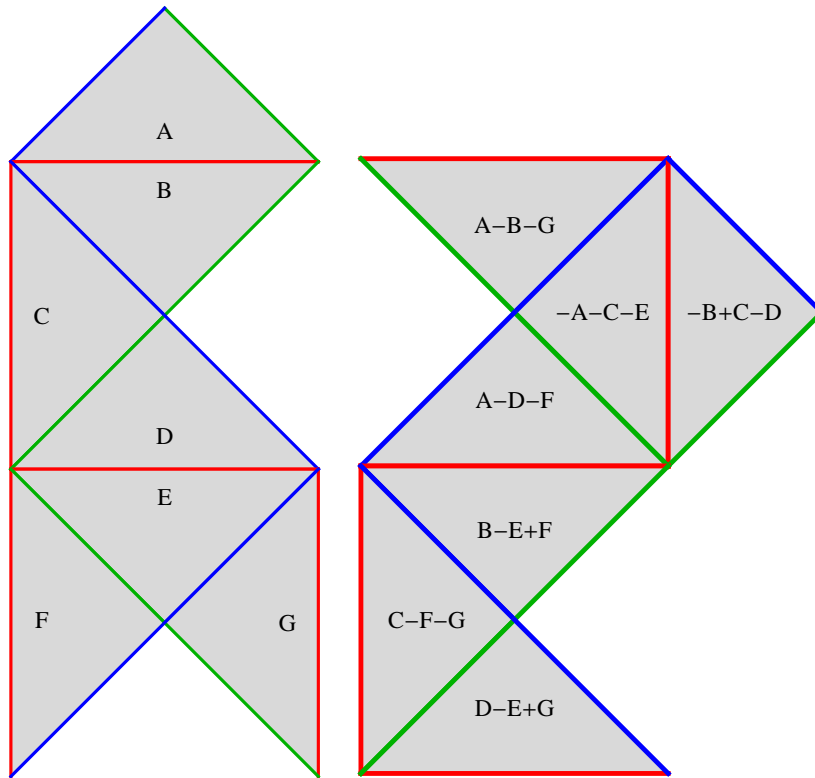
liefern dann zwei 24-blättrige Überlagerungen  $M \rightarrow M/G_i =: M_i$  mit  $M_1$  und  $M_2$  isospektral aber nicht isometrisch.

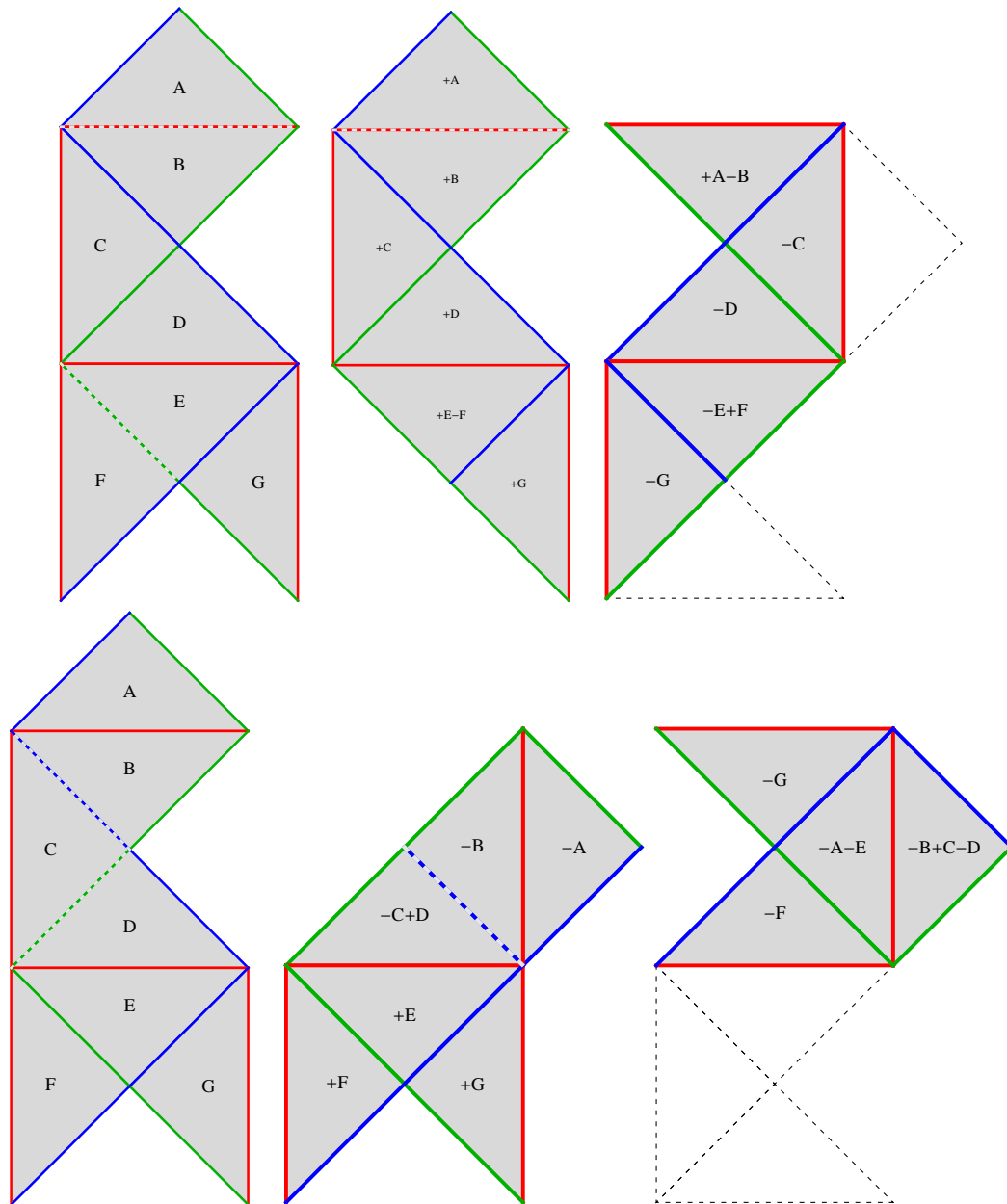


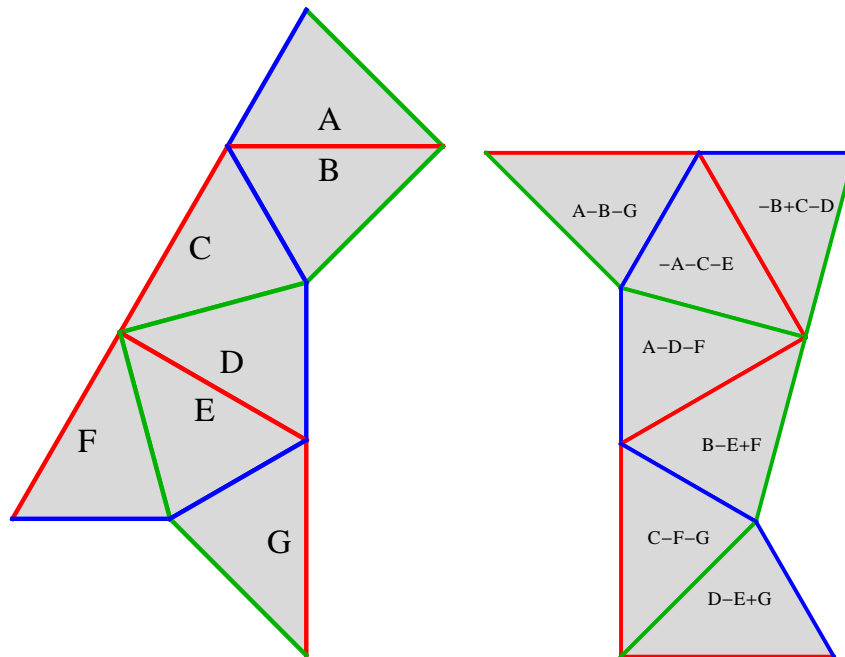
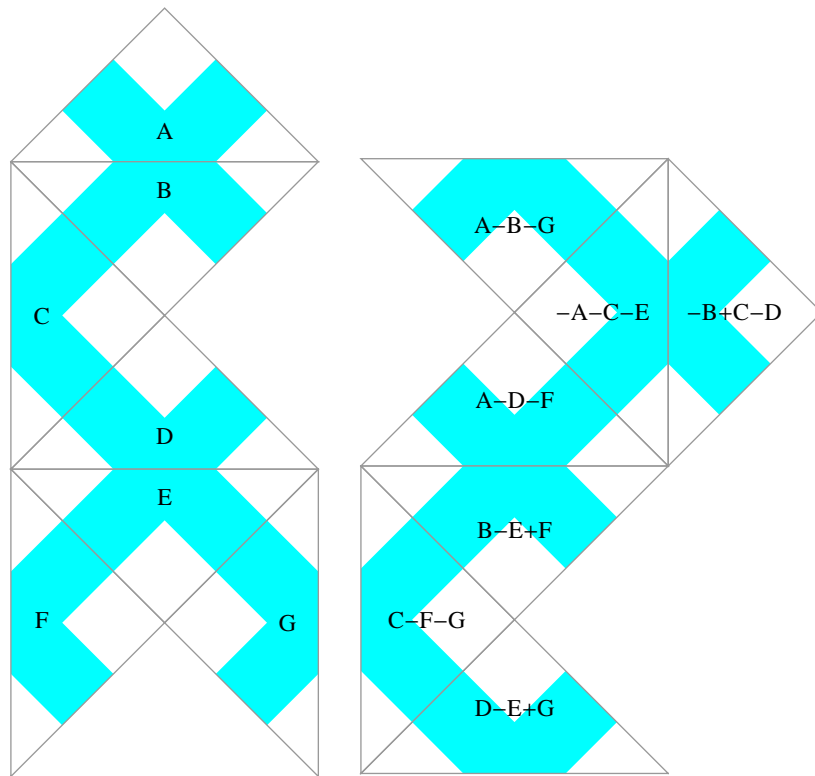
Faktoriert man noch die offensichtliche isometrische Involution  $\tau_i : M_i \rightarrow M_i$  heraus, so erhält man zwei isospektrale aber nicht isometrische Gebiete mit Ecken in  $\mathbb{R}^2$ .



Einen elementaren geometrischen Beweis für Sunada's Theorem lieferte Buser in [6] indem er eine Isometrie  $L^2(M_1) \rightarrow L^2(M_2)$  konstruierte, welche die Eigenräume zum gleichen Eigenwert aufeinander abbildet. Dies wurde auch von Berard in [2] angewendet um unter anderen das Beispiel von [13] zu erhalten. Für ein noch einfacheres Beispiel siehe [7, S.3].







## 6. Klassische Mechanik

### 6.1 Kraftgesetz von Newton.

Für die KRAFT  $F$ , die MASSE  $m$ , und die BESCHLEUNIGUNG  $\ddot{x}$  gilt folgende Formel:

$$F(x) = m \cdot \ddot{x},$$

wobei wir uns hier und im Folgendem der Einfachheit halber auf zeitunabhängige Kräfte beschränken. Weiters setzen wir  $m = 1$ , denn ein allgemeines  $m$  läßt sich in  $F$  absorbieren.

Sei vorerst der Raum  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  der Orte  $x$  offen. Die Funktion  $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  kann dann als Vektorfeld interpretiert werden. Besonders wichtig ist der Fall, wo  $F$  ein GRADIENTEN-FELD ist, d.h. ein POTENTIAL  $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit  $F = -\text{grad} U$ . Dies ist eine lokale (INTEGRABILITÄTS-)Bedingung  $dF = 0$  und eine globale (KOHOMOLOGISCHE) Bedingung  $H^1(Q) = 0$  an  $Q$ , siehe [31, 26.5.6] und [31, 26.5.7].

Die Newton'sche Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung. Eine solche läßt sich als (System) gewöhnliche(r) Differentialgleichung(en) 1-ter Ordnung auf  $TQ = Q \times \mathbb{R}^n$  umschreiben indem man als zusätzliche Variable den Geschwindigkeitsvektor  $v = \dot{x}$  verwendet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &=: v \\ \dot{v} &= F(x).\end{aligned}$$

Die einfachste Bewegungsinvariante dieser DG ist die ENERGIE

$$E(x, v) := \frac{|v|^2}{2} + U(x),$$

denn

$$\frac{d}{dt}E(x, \dot{x}) = \langle \dot{x}, \ddot{x} \rangle + U'(x) \cdot \dot{x} = \langle \dot{x}, -\text{grad}(U)(x) \rangle + U'(x) \cdot \dot{x} = 0.$$

Dabei heißt  $m \frac{|\dot{x}|^2}{2}$  die KINETISCHE und  $U(x)$  die POTENTIELLE Energie.

## 6.2 Newton'sches Gesetz auf Mannigfaltigkeiten.

Wie wir in [31, 14.1] bemerkt haben, wird eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung auf einer Mannigfaltigkeit  $Q$  durch ein Vektorfeld  $\xi : Q \rightarrow TQ$  beschrieben, denn die erste Ableitung einer Kurve  $x : \mathbb{R} \rightarrow Q$  ist eine Kurve  $\dot{x} : \mathbb{R} \rightarrow TQ$  mit Werten im Tangentialbündel  $TQ$ . Wenn  $(x^1, \dots, x^n)$  lokale Koordinaten auf  $Q$  sind, dann bilden die Derivationen  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  eine Basis des Tangentialraums  $T_x Q$ . Seien  $(v^1, \dots, v^n)$  die Koordinaten bezüglich dieser Basis, so sind  $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$  lokale Koordinaten des Tangentialbündels  $TQ$ , die Fußpunkt-Abbildung  $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$  ist in lokalen Koordinaten durch die Zuordnung

$$(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

gegeben und die Ableitung der Kurve  $t \mapsto x(t) \in Q$  ist durch

$$t \mapsto (x^1(t), \dots, x^n(t); \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$$

gegeben.

Was entspricht einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2-ter Ordnung, wie sie das Kraftgesetz darstellt? Die zweite Ableitung einer Kurve  $x : \mathbb{R} \rightarrow Q$  ist eine Kurve  $\ddot{x} : \mathbb{R} \rightarrow T(TQ) =: T^2Q$  mit Werten im 2-ten Tangentialbündel von  $Q$ . Seien  $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$  obige lokale Koordinaten auf  $TQ$ , dann bilden die Derivationen  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^1}, \dots)$  eine Basis des Tangentialraums  $T_{(x,v)}(TQ)$  an die Mannigfaltigkeit  $TQ$  im Punkte  $(x, v) \in TQ$ . Seien  $(y^1, \dots, y^n; w^1, \dots, w^n)$  die Koordinaten bezüglich dieser Basis, so sind  $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n; y^1, \dots, y^n; w^1, \dots, w^n)$  lokale Koordinaten des zweiten Tangentialbündels  $T^2Q$  und die zweite Ableitung der Kurve  $t \mapsto x(t) \in Q$  sieht wie folgt aus:

$$\ddot{x} = (x^1, \dots, x^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n; \ddot{x}^1, \dots, \ddot{x}^n; \dot{v}^1, \dots, \dot{v}^n).$$

Bezüglich dieser Koordinaten von  $T^2Q$  ist die Fußpunkt-Abbildung  $\pi_{TQ} : T^2Q \rightarrow TQ$  gegeben durch  $(x^1, \dots; v^1, \dots; y^1, \dots; w^1, \dots) \mapsto (x^1, \dots; v^1, \dots)$ , hingegen ist die Ableitung  $T\pi_Q : T^2Q \rightarrow TQ$  der Fußpunkt-Abbildung  $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$  durch  $(x^1, \dots; v^1, \dots; y^1, \dots; w^1, \dots) \mapsto (x^1, \dots; y^1, \dots)$  gegeben. Eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung  $\ddot{x} = X(x, \dot{x})$  ist demnach durch eine Abbildung  $X : TQ \rightarrow T(TQ)$  gegeben, welche in Koordinaten folgendes Aussehen hat:

$$X(x, v) = (x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n; v^1, \dots, v^n; X^1(x, v), \dots, X^n(x, v)).$$

Oder unter Verwendung der Basis-Vektorfelder

$$X(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n X^i(x, v) \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Die Abbildung  $X : TQ \rightarrow T(TQ)$  ist also ein Vektorfeld auf  $TQ$ , welches zusätzlich die Eigenschaft hat, daß auch  $T\pi_Q \circ X = \text{id}$  ist, also die 2-te und 3-te Komponente gleich sind. Man kann diese zusätzliche Bedingung auch durch  $\kappa_Q \circ X = X$  formulieren, wobei  $\kappa_Q : T^2Q \rightarrow T^2Q$  den kanonischen Flip bezeichnet, welcher gerade die beiden mittleren Komponenten vertauscht (Dieser ist global definiert!). Ein Vektorfeld  $X$  auf  $TQ$  mit dieser zusätzlichen Eigenschaft nennt man einen SPRAY. Diese beschreiben also gerade gewöhnliche Differentialgleichungen 2-ter Ordnung auf  $Q$ . Für die Lösungskurven  $c : \mathbb{R} \rightarrow TQ$  der entsprechenden Differentialgleichung 1-ter Ordnung auf  $TQ$  ist somit

$$\frac{d}{dt}(\pi_Q \circ c) = T\pi_Q \circ X \circ c = \text{id} \circ c = c.$$

### 6.3 Variationsproblem.

Mit der Philosophie, daß die Natur minimalistisch vorgeht, wird man versucht sein ein Funktional am Raum der Kurven zu finden, dessen kritische Punkte gerade die Lösungskurven der Differentialgleichung sind. Betrachten wir vorerst wieder den Fall, daß  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  offen ist. Die KRITISCHEN PUNKTE eines Funktionals  $I$  der Gestalt

$$I(x) := \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

sind gerade die Lösungen der EULER-LAGRANGE GLEICHUNG

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L(x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L(x, \dot{x}) \text{ für } i = 1, \dots, n$$

einer impliziten Differentialgleichung 2-ter Ordnung.

Um das einzusehen, beachten wir, daß das Funktional

$$x \mapsto I(x) := \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

genau  $x$  als kritischen Punkt hat, wenn die Richtungsableitung  $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I(x + sv)$  für alle  $v$  (mit  $v(a) = 0 = v(b)$ ) verschwindet. Diese berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I(x + sv) &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot v(t) + \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \dot{v}(t) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \right) \cdot v(t) dt \\ &\quad + \int_a^b \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot v(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \right) \cdot v(t) dt + 0. \end{aligned}$$

Da  $v$  beliebig war, müssen folglich alle Komponenten

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i}(x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0$$

sein.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Variablen  $x$  und  $\dot{x}$  in  $L$  getrennt sind, d.h.  $L(x, \dot{x}) = f(x) + g(\dot{x})$  ist, dann lautet die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(x) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} g(\dot{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} g(\dot{x}) \cdot \ddot{x}^j \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Durch Vergleich mit der Newton-Gleichung  $-\text{grad} U(x) = F(x) = \ddot{x}$ , erhalten wir als einfachste Lösung für  $L$  die Terme

$$g(\dot{x}) := \frac{|\dot{x}|^2}{2} \quad \text{und} \quad f(x) := -U(x)$$

und somit die sogenannte LAGRANGE-FUNKTION

$$L(x, v) = f(x) + g(v) = \frac{|v|^2}{2} - U(x).$$

Die Zeitentwicklung ist also anstelle des komplizierteren Objekts eines Sprays  $X : TQ \rightarrow T(TQ)$  durch eine reellwertige Funktion  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  festgelegt. Allerdings ist die schöne gewöhnliche explizite Differentialgleichung 2-ter Ordnung (das Newton'sche Kraftgesetz) durch eine in Koordinaten implizite Differentialgleichung 2-ter Ordnung (die Euler-Lagrange Gleichung) zu ersetzen, für die wir keine Theorie auf Mannigfaltigkeiten entwickelt haben.

### 6.4 Lagrange-Formalismus.

Versuchen wir nun umgekehrt aus einer allgemeinen Lagrange-Funktion  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  einer Mannigfaltigkeit  $Q$  das Vektorfeld  $X : TQ \rightarrow T^2Q$  und die Energie  $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  zu erhalten. Die Euler-Lagrange Gleichung sieht in Koordinaten wieder wie folgt aus:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L = \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L + \sum_j \ddot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L$$

Schreiben wir auch das gesuchte Vektorfeld  $X_L$  in den lokalen Koordinaten als:

$$X_L(x, v) = (x^1, \dots; v^1, \dots; v^1, \dots; X^1(x, v), \dots, X^n(x, v)).$$

so erhalten wir für die Koeffizienten  $X^i$  durch Einsetzen von  $\ddot{x}^i = X^i(x, \dot{x})$  die implizite Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L = \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L + \sum_j X^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L$$

Falls die Matrix  $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j})_{i,j=1}^n$  invertierbar ist können wir durch Multiplikation mit der inversen Matrix  $L^{k,i}$  die  $X^i$  berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_i L^{k,i} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} L - \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L \right) &= \sum_i \sum_j L^{k,i} X^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L \\ &= \sum_j X^j \delta_j^k = X^k \end{aligned}$$

Das dadurch definierte Vektorfeld

$$X_L = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i \sum_k L^{i,k} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} L - \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^k} L \right) \frac{\partial}{\partial v^i}$$



heißt dann LAGRANGE-VEKTORFELD zu  $L$ . Wir müßten allerdings noch überprüfen ob diese Definition wirklich etwas Koordinaten-unabhängiges definiert. Das werden wir später zeigen.

Da wir die implizite Gleichung für das Lagrange-Vektorfeld nur unter zusätzlichen Bedingungen lösen können, wollen wir versuchen die einfachste Bewegungsinvariante, die Energie  $E$ , direkt aus  $L$  zu bestimmen.

Im speziellen Fall wo  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $L(x, v) = \frac{|v|^2}{2} - U(x)$  ist, versuchen wir die kinetische Energie  $|v|^2/2$  aus  $L$  zu gewinnen. In Koordinaten können wir das durch

$$|v|^2 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} L(x, tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(x, v + tv) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v)$$

erreichen. Für ein allgemeines Vektorbündel  $V \rightarrow Q$  und eine Funktion  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir folglich die sogenannte FASERABLEITUNG  $d_f L : V \rightarrow V^*$  von  $L$  durch

$$d_f L(\xi)(\eta) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\xi + t\eta).$$

Wenn  $(x^1, \dots, v^1, \dots)$  lokale Vektorbündel-Koordinaten von  $V$  mit Fußpunkt-Koordinaten  $(x^1, \dots, x^n)$  sind, dann ist

$$(d_f L)(x, v)(x, w) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v) \cdot w^i.$$

Für eine Lagrange-Funktion  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  einer allgemeinen Mannigfaltigkeit  $Q$  definieren wir die WIRKUNG  $A : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$A(\xi) := d_f L(\xi) \cdot \xi, \text{ d.h. } A(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v)$$

und die ENERGIE  $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$E := A - L, \text{ d.h. } E(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v) - L(x, v).$$

Wir können nun leicht nachrechnen, daß die Energie in der Tat eine Bewegungsinvariante ist, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i v^i(t) \frac{\partial}{\partial v^i} L(x(t), v(t)) - L(x(t), v(t)) \right) \\ &= \sum_i \dot{v}^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + \sum_i v^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{v}^i \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wegen der Euler-Lagrange Gleichung.

### 6.5 Mechanik auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Auf einer (Pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(Q, g)$  wird die Lagrange-Funktion bezüglich eines Potentials  $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$  in Analogie durch

$$L(\xi) = \frac{1}{2} g(\xi, \xi) - U(\pi(\xi))$$

definiert, d.h. in lokalen Koordinaten

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{i,j}(x) v^i v^j - U(x).$$

Die Faserableitung ist dann offensichtlich

$$d_f L(\xi) \cdot \eta = g(\xi, \eta)$$

und somit ist die Wirkung  $A(\xi) = g(\xi, \xi)$  und die Energie

$$E(\xi) = \frac{1}{2}g(\xi, \xi) + U(\pi(\xi)).$$

Im Falle, daß  $U = 0$  ist, heißt das Vektorfeld  $X_L$  geodätischer Spray. Es ist dann  $\frac{\partial}{\partial x^i}L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} v^j v^k$  und  $\frac{\partial}{\partial v^i}L = \sum_j g_{i,j}(x)v^j$ . Und somit ist die Matrix  $(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j})$  gerade die Koeffizienten Matrix  $(g_{i,j})$  der Metrik und ihre Inverse  $(L^{i,j})$  wird üblicherweise mit  $(g^{i,j})$  bezeichnet, siehe [31, 24.2]. Außerdem ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial v^i}L = \frac{\partial}{\partial x^k} \sum_j g_{i,j}(x)v^j = \sum_j \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} v^j$$

Also lautet die Euler-Lagrange Gleichung in expliziter Form (siehe [6.4])

$$\begin{aligned} \ddot{x}^k &= \sum_i g^{k,i} \left( \frac{1}{2} \sum_{j,r} \frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} v^j v^r - \sum_j \dot{x}^j \sum_r \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} v^r \right) \\ &= \sum_{i,j,r} g^{k,i} \dot{x}^j \dot{x}^r \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} \right) \\ &= - \sum_i g^{k,i} \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^r} \right) \\ &= - \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \sum_i g^{k,i} \Gamma_{j,r,i} \\ &= - \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \Gamma_{j,r}^k. \end{aligned}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Geodäten, wobei  $\Gamma_{j,r,i}$  die Christoffelsymbole der 1-ten Art und  $\Gamma_{j,r}^k$  jene der 2-ten Art sind, siehe [10.5]. Also sind die Integral-Kurven in  $Q$  des geodätischen Spray's  $X_L$  gerade die Geodäten, die wir auch als kritischen Punkten der Bogenlänge erkannt haben.

Für eine allgemeines  $U$  und ein  $\varepsilon > U(x)$  für alle  $x \in Q$  definiert man eine neue (die sogenannte JACOBI-METRIK)  $g_\varepsilon := (\varepsilon - U) \cdot g$ . Man kann dann zeigen, daß die Integralkurven  $c$  von  $X_L$  mit Energie  $\varepsilon = g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$  für alle  $t$  bis auf Reparametrisierung genau die Geodäten der Jacobi-Metrik  $g_\varepsilon$  mit Energie 1 sind.

### 6.6 Zusammenhang zwischen Lagrange-Vektorfeld $X_L$ und Energie $E$ .

Schön wäre wenn zwischen  $X_L$  und  $E$  ein ähnlicher Zusammenhang bestünde, wie er zwischen Gradient und Potential besteht. Dazu erinnern wir uns daran, daß der Gradient eines Potentials  $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich einer Riemann-Metrik  $g$  auf  $Q$  gegeben ist durch:

$$g_x(\text{grad } U(x), \eta) = dU(x) \cdot \eta \text{ für alle } \eta \in T_x Q,$$

wobei  $dU$  das totale Differential von  $U$  bezeichnet. Wir suchen also eine Bilinearform  $\omega$ , welche

$$\omega_{x,v}(X_L, Y) = dE(x, v) \cdot Y \text{ für alle } Y \in T_{(x,v)}(TQ)$$

erfüllt. Sei  $X_L$  das Vektorfeld auf  $TQ$ , welches die Euler-Lagrange Gleichung für eine hinreichen reguläre Lagrange-Funktion  $L$  beschreibt. In Koordinaten hat jedes Vektorfeld  $X_L$ , welches eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung beschreibt, nach dem in [6.2] Gezeigten die folgende Gestalt:

$$X_L(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n X^i(x, v) \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Für die Energie haben wir nach [6.4](#) die Formel

$$E(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v) - L(x, v)$$

und für ihr Differential

$$\begin{aligned} dE(x, v) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} E(x, v) dx^j + \sum_j \frac{\partial}{\partial v^j} E(x, v) dv^j \\ &= \sum_j \left( \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \right) dx^j \\ &\quad + \sum_j \left( \frac{\partial}{\partial v^j} L + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial v^j} L \right) dv^j \\ &= \sum_j \left( \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \right) dx^j + \sum_j \left( \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L \right) dv^j. \end{aligned}$$

Eine allgemeine Bilinearform  $\omega$  auf  $TQ$ , d.h. ein 2-fach kovariantes Tensorfeld auf  $TQ$  ist bezüglich der lokalen Koordinaten  $(x^1, \dots; v^1, \dots)$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^i \otimes dx^j + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) dx^i \otimes dv^j \\ &\quad + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) dv^i \otimes dx^j + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) dv^i \otimes dv^j. \end{aligned}$$

Folglich wäre

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \omega(X_L, \frac{\partial}{\partial x^j}) = dE \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \\ &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \\ \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= \omega(X_L, \frac{\partial}{\partial v^j}) = dE \cdot \frac{\partial}{\partial v^j} = \\ &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir durch Koeffizienten-Vergleich

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L \\ \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir die implizite Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v^i} L = \sum_j v^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial v^i} L + \sum_j X^j \frac{\partial^2}{\partial v^j \partial v^i} L$$

in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \\ &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial v^j} L - \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} L \end{aligned}$$

und es drängt sich auf  $\omega(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) := -\frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} L$  und

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) := \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial v^i} L - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial v^j} L.$$

zu setzen.

In den lokalen Koordinaten  $(x^1, \dots; v^1, \dots)$  ist also  $\omega$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} \right) dx^i \otimes dx^j \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dx^i \otimes dv^j - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dv^i \otimes dx^j \end{aligned}$$

Es zeigt sich also, daß die Bilinearform  $\omega$  schief-symmetrisch ist, und somit eine 2-Form  $\omega \in \Omega^2(TQ)$  darstellt. Unter Verwendung von  $du^i \wedge du^j := du^i \otimes du^j - du^j \otimes du^i$  ist sie in lokalen Koordinaten durch

$$\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dx^i \wedge dv^j$$

gegeben. Sie ist sogar exakt, denn die 1-Form

$$\vartheta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i \in \Omega^1(TQ)$$

hat als äußere Ableitung  $d\vartheta = -\omega$ .

Allerdings haben wir noch nicht überprüft, ob  $\omega$  und  $\vartheta$  wirklich Koordinaten-unabhängig definiert sind. Wir werden auch das in [6.7](#) nachholen.

Für jeden Spray  $X : TQ \rightarrow T^2Q$  ist

$$\vartheta X = \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i \right) \left( \sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j(x, v) \frac{\partial}{\partial v^j} \right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i = A.$$

Global läßt sich die definierende implizite Gleichung für das Lagrange Vektorfeld  $X$  als

$$\iota_X \omega = dE$$

schreiben, wobei  $\iota$  der Einsetz-Operator  $(\iota_X \omega)(Y) := \omega(X, Y)$  ist.

Leider hängen diese Differentialformen aber von  $L$  ab, und wir schreiben besser  $\omega_L := \omega$ ,  $\vartheta_L := \vartheta$ .

### 6.7 Hamilton-Formalismus.

Um diese Abhängigkeit der Differentialformen  $\omega_L$  und  $\vartheta_L$  von der Lagrange-Funktion  $L$  loszuwerden, wollen wir neue Koordinaten einführen. Es drängen sich natürlich die partiellen Ableitungen  $p_i := \frac{\partial L}{\partial v^i}$  auf. Die Koordinaten  $x^i$  in der Basis-Mannigfaltigkeit benennen wir bloß um in  $q^i := x^i$ .

Die Form  $\vartheta_L$  ist dann in den neuen Koordinaten gegeben durch

$$\vartheta_0 := \sum_{i=1}^n p_i dq^i$$

und ihre äußere Ableitung  $-\omega_0 := d\vartheta_0$  durch

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

Wir haben aber das Problem, ob die  $q^i$  und  $p_i$  wirklich Koordinaten einer Mannigfaltigkeit ( $TQ$ ?) sind. Dazu benötigen wir einerseits, daß die  $\frac{\partial p_i}{\partial v^j} := \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}$  eine invertierbare Matrix bilden und andererseits müssen wir den Koordinatenwechsel

bestimmen. Seien dazu  $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  andere Koordinaten auf  $Q$ , so gilt für die Basen von  $TQ$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

und für die Komponenten  $v^j$  bezüglich dieser Basen

$$v^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \bar{v}^i.$$

Weiters ist

$$\frac{\partial v^j}{\partial \bar{v}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} \left( \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \bar{v}^k \right) = \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{v}^k}{\partial \bar{v}^i} = \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \delta_i^k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}.$$

Somit gilt für die neuen Koordinaten:

$$\bar{p}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} L = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial \bar{v}^i} \frac{\partial}{\partial v^k} L = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} p_k$$

Dies ist nicht das richtige Transformationsverhalten für Punkte im Tangentialraum. Vergleichen wir es aber mit den Koordinaten-Wechsel im Kotangentialbündel  $T^*Q$  der Komponenten  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  bezüglich der Basis  $(dx^1, \dots, dx^n)$  (siehe [31, 19.5]):

$$dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j \quad \text{und} \quad \bar{\eta}_j = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \eta_i,$$

so zeigt sich, daß  $(q^1, \dots; p_1, \dots)$  gerade die üblichen Koordinaten eines Punktes des Kotangentialbündels  $T^*Q$  sind. Der Übergang von den Koordinaten  $(x^1, \dots; v^1, \dots)$  am Tangentialbündel  $TQ$  zu den Koordinaten  $(q^1, \dots; p_1, \dots)$  am Kotangentialbündel  $T^*Q$  ist gerade durch die Faserableitung  $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$  gegeben, welche bezüglich der Basen  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  und  $(dx^1, \dots, dx^n)$  nach [6.4] die Darstellung  $(d_f L)_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$  hat, also:

$$[d_f L] : (x^1, \dots; v^1, \dots) \mapsto (q^1, \dots; p_1, \dots) = \left( x^1, \dots; \frac{\partial L}{\partial v^1}, \dots \right).$$

Wir zeigen nun, daß die kanonische 1-Form  $\vartheta_0$  wirklich Koordinaten-unabhängig ist und damit auch  $\omega_0 = -d\vartheta_0$ :

Die beiden Abbildungen  $T\pi_Q^* : TT^*Q \rightarrow TQ$  und  $\pi_{T^*Q} : TT^*Q \rightarrow T^*Q$  welche lokal gegeben sind durch  $(q, p, v, \rho) \mapsto (q, v)$  und  $(q, p, v, \rho) \mapsto (q, p)$  definieren eine Abbildung  $(\pi_{T^*Q}, T\pi_Q^*) : TT^*Q \rightarrow T^*Q \times_Q TQ := \{(\alpha, \xi) : \pi^*(\alpha) = \pi(\xi)\}$ . Zusammengesetzt mit der Evaluation  $\text{ev} : T^*Q \times_Q TQ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(q, p; q, v) \mapsto \sum_i p_i v^i$  ist dies genau die kanonische 1-Form  $\vartheta_0$ , denn

$$\sum_i p_i v^i = \sum_i p_i dq^i(q, p, v, \rho) = \vartheta_0(q, p, v, \rho).$$

Man sieht nun sofort, daß

$$\vartheta_L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i = (d_f L)^* \left( \sum_i p_i dq^i \right) = (d_f L)^* \vartheta_0$$

und somit auch

$$\omega_L = -d\vartheta_L = -d(d_f L)^* \vartheta_0 = -(d_f L)^* d\vartheta_0 = (d_f L)^* \omega_0$$

ist, also sind auch diese Formen Koordinaten-unabhängig.

Der Energie  $E = \sum_i v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  entspricht dann eine sogenannte HAMILTON-Funktion  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$H \circ d_f L := E$$

und dem Vektorfeld  $X_L$  entspricht nun das sogenannte HAMILTONSCHE Vektorfeld  $X_H$ , welches  $d_fL$ -verwandt zu  $X_L$  definiert ist durch

$$X_H \circ d_fL := T(d_fL) \circ X_L.$$

Die Gleichung  $\iota_{X_E}\omega_L = dE$  geht über in

$$\iota_{X_H}\omega_0 = dH, \text{ d.h. } \omega_0(X_H, Y) = dH \cdot Y \text{ f\u00fcr alle } Y.$$

Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} \iota_{X_H}\omega_0(T_x(d_fL)\xi) &= \omega_0\left((X_H)_{(d_fL)(x)}, T_x(d_fL)\xi\right) \\ &= \omega_0\left(T_x(d_fL)X_L, T_x(d_fL)\xi\right) = \omega_L(X_L, \xi) \\ &= (\iota_{X_L}\omega_L)(\xi) = dE(\xi) = d(H \circ d_fL)(\xi) \\ &= dH_{(d_fL)(x)} \cdot T_x(d_fL) \cdot \xi, \end{aligned}$$

wobei  $T_x(d_fL)\xi$  alle Tangentialvektoren in  $T_{(d_fL)(x)}^*Q$  durchl\u00e4uft.

Bez\u00fcglich der Koordinaten  $(q^i, p_i)$  ist  $X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$ .  
Denn  $\omega_0 = \sum_i dq^i \wedge dp_i$  und sei  $X_H = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial p_i}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i &= dH = \iota_{X_H}\omega_0 \\ &= \sum_{i,j} a^i \iota_{\frac{\partial}{\partial q^j}}(dq^j \wedge dp_j) + \sum_{i,j} b^i \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}}(dq^j \wedge dp_j) \\ &= \sum_i a^i dp_i - \sum_i b^i dq^i \end{aligned}$$

und ein Koeffizienten-Vergleich liefert  $a^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$  und  $b^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ .

Die Integralkurven  $t \mapsto (q(t), p(t))$  von  $X_H$  sind also die L\u00f6sungen von

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Da die Integral-Kurven von  $X_H$  die Ableitung von Kurven in der Basis  $Q$  sind und die Basiskoordinaten einander entsprechen, sind die Basiskurven f\u00fcr  $X_H$  und  $X_L$  die selben.

Es ist  $A = \vartheta_0(X_H) \circ d_fL$ :

$$\begin{aligned} \vartheta_0(X_H) \circ d_fL &= \text{ev} \circ (\pi_{T^*Q}, T\pi_Q^*) \circ X_H \circ d_fL = \text{ev} \circ (\text{id} \circ d_fL, T\pi_Q^* \circ T(d_fL) \circ X_L) \\ &= \text{ev} \circ (d_fL, T(\pi_Q^* \circ d_fL) \circ X_L) = \text{ev} \circ (d_fL, T\pi_Q \circ X_L) \\ &= \text{ev} \circ (d_fL, \text{id}_{TQ}) = A \end{aligned}$$

oder f\u00fcr  $\xi \in TQ$

$$\begin{aligned} (\vartheta_0(X_H) \circ d_fL)(\xi) &= \vartheta_0|_{d_fL \cdot \xi}(X_H|_{d_fL \cdot \xi}) = \vartheta_0|_{d_fL \cdot \xi}(T(d_fL)(X_L|_\xi)) \\ &= (d_fL)^*(\vartheta_0)(X_L|_\xi) = \vartheta_L(X_L|_\xi) = A(\xi) \end{aligned}$$

Wir haben als Vorteile der Hamilton-Mechanik, da\u00df die Zeitentwicklung beschreibende Objekt eine reell-wertige Funktion  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  ist die gleichzeitig auch eine Bewegungsinvariante darstellt und das zugeh\u00f6rige (Hamiltonsche) Vektorfeld  $X_H$  sich auf einfache Weise aus  $\iota_{X_H}\omega = dH$  berechnen l\u00e4\u00dft.

### Hamilton-Mechanismus auf Riemann-Mannigfaltigkeiten.

Es sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine Riemann-Metrik auf  $Q$  und  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  die Lagrange-Funktion, die durch ein Potential  $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$  vermöge  $L(v) := \frac{1}{2}\langle v, v \rangle - U(\pi(v))$  gegeben ist. Dann ist  $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$  die Abbildung  $\sharp : w \mapsto \langle w, \cdot \rangle$  und  $A(v) = \langle v, v \rangle$ . Also ist  $E = A - L = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle + U(\pi(v))$ . Ist insbesondere  $U = 0$ , so ist  $A = 2E = 2L$  und die Hamilton-Funktion  $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  ist dann durch  $H(\eta) = \frac{1}{2}\langle \eta^\flat, \eta^\flat \rangle$  gegeben, d.h. in Koordinaten durch  $H(\sum_i \eta_i dx^i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{i,j} \eta_i \eta_j$ .

### 6.8 Legendre-Transformation.

Um den Hamilton-Formalismus auf  $T^*Q$  zurück in den Lagrange Formalismus auf  $TQ$  zu übersetzen, benötigen wir eine Beschreibung der Inversen der Legendre-Transformation  $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$  ausschließlich durch die Hamilton-Funktion  $H$ .

Es ist  $d_f H \circ d_f L = \delta : TQ \rightarrow T^{**}Q$  der kanonische Isomorphismus:

Um dies zu sehen sei  $\xi \in T_x Q$  und  $\eta \in (T_x Q)^*$ . Sei  $\xi_t \in T_x Q$  so, daß  $d_f L \cdot \xi_t = d_f L \cdot \xi + t \eta \in (T_x Q)^*$ , also  $\xi_0 = \xi$  und  $\eta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d_f L \cdot \xi + t \eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_f L \cdot \xi_t$ . Dann ist einerseits

$$\begin{aligned} (d_f H \circ d_f L)(\xi)(\eta) &= d_f H(d_f L \cdot \xi)(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(d_f L \cdot \xi + t \eta) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(d_f L \cdot \xi_t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(\xi_t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A - L)(\xi_t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_f L(\xi_t) \cdot \xi_t - L(\xi_t) \\ &= \left( T(d_f L)(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0 + d_f L(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \right) - d_f L(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \\ &= T(d_f L)(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0 \end{aligned}$$

und andererseits auch

$$\delta(\xi)(\eta) = \eta(\xi_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d_f L \cdot \xi_t)(\xi_0) = T(d_f L)(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0$$

Unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit von  $d_f H$  können wir somit

$$\begin{aligned} E &:= (d_f H^{-1})^*(H), \\ A &:= (d_f H^{-1})^*(G) \text{ wobei } G := \vartheta_0(X_H), \\ L &:= A - E \text{ und} \\ X_L &:= (d_f H^{-1})^*(X_H) \end{aligned}$$

zurückgewinnen.

### 6.9 Symplektische Mechanik.

Allgemeiner betrachtet man anstelle von  $T^*Q$  nun SYMPLEKTISCHE MANNIGFALTIGKEITEN  $M$ , d.h. Mannigfaltigkeiten zusammen mit einer sogenannten SYMPLEKTISCHE FORM  $\omega$ , d.h. einer nicht-degenerierten geschlossenen 2-Form  $\omega \in \Omega^2(M)$ . Wir haben in [31, 4.6] gezeigt, daß solch eine Mannigfaltigkeit gerade-dimensional sein muß, und wir werden in [28, 50.39] weiters zeigen, daß man lokal immer Koordinaten  $(q^1, \dots, p_1, \dots)$  wählen kann, so daß  $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$  ist. Das  $n$ -fache wedge-Produkt von  $\omega$  definiert eine Volumensform

$$\text{vol}_\omega := \omega \wedge \dots \wedge \omega$$

auf  $M$ . Insbesondere ist  $M$  orientiert. Sei  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion (eine sogenannte HAMILTON-FUNKTION), so bezeichnet man mit  $X_H$  das sogenannte

HAMILTONSCHE VEKTORFELD, welches durch die implizite Gleichung

$$\iota_{X_H}\omega = dH$$

gegeben ist. In lokalen Koordinaten ist  $X_H$  durch

$$X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

gegeben.

Die Hamilton-Funktion  $H$  ist konstant längs der Integral-Kurven des Hamilton-Vektorfelds  $X_H$ :

Sei  $t \mapsto x(t)$  eine Integralkurve, d.h.  $x : \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$  mit  $\dot{x}(t) = X_H(x(t))$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (H \circ x)(t) &= dH_{x(t)}(\dot{x}(t)) = \iota_{X_H}\omega_{x(t)}(\dot{x}(t)) \\ &= \omega(X_H(x(t)), \dot{x}(t)) = \omega(X_H(x(t)), X_H(x(t))) = 0, \end{aligned}$$

also  $H \circ x$  konstant.

Der Fluß  $\text{Fl}_t$  des Vektorfelds  $X_H$  ist ein Symplektomorphismus, d.h. läßt die symplektische Form  $\omega$  invariant und folglich auch die symplektische Volumensform  $\omega^m = \text{vol}_\omega$ , d.h.

$$\left(\text{Fl}_t^{X_H}\right)^* \text{vol}_\omega = \text{vol}_\omega .$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{Fl}_t)^*\omega &= (\text{Fl}_t^*) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s)^*\omega = (\text{Fl}_t^*)\mathcal{L}_{X_H}\omega \\ &= (\text{Fl}_t^*)(\iota_{X_H}d\omega + d\iota_{X_H}\omega) = (\text{Fl}_t^*)(\iota_{X_H}0 + ddH) = 0, \end{aligned}$$

Also ist  $(\text{Fl}_t)^*\omega$  konstant gleich  $(\text{Fl}_0)^*\omega = \omega$ .

Nicht jedes Vektorfeld  $X$  auf  $M$  ist ein Hamiltonsches Vektorfeld. Um eines zu sein muß wieder eine lokale (Integrabilitäts-)Bedingung  $\mathcal{L}_X\omega = 0$  für  $X$  erfüllt sein, sowie eine globale (kohomologische) Bedingung  $H^1(M) = 0$  an  $M$ , siehe [28, 50.40].



### III. Krümmung und Geodäten

#### 7. Krümmung von Kurven in der Ebene

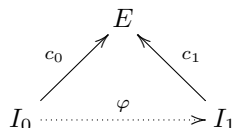
In diesem Abschnitt wird der zentrale Begriff der Krümmung für ebene Kurven studiert.

##### 7.1 Definition (Kurven).

Eine PARAMETRISIERTE KURVE in einem Euklidischen Raum  $E$  ist eine Abbildung  $c : I \rightarrow E$ , wobei  $I$  ein (zumeist) offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $c$  genügend oft differenzierbar ist (wir wollen der Einfachheit halber immer unendlich oft differenzierbar (kurz gesagt glatt) voraussetzen) und hinreichend regulär ist (d.h. zumindest  $c'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ ).

Da wir aber im wesentlichen nicht an der Parametrisierung der Kurve, sondern mehr an ihrer geometrischen Gestalt interessiert sind, geben wir noch folgende Definition:

Eine GEOMETRISCHE KURVE  $\Gamma$  ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei  $c_0 : I_0 \rightarrow E$  und  $c_1 : I_1 \rightarrow E$  ÄQUIVALENT heißen, falls ein DIFFEOMORPHISMUS  $\varphi : I_0 \rightarrow I_1$  (d.h.  $\varphi$  bijektiv und sowohl  $\varphi$  als auch  $\varphi^{-1}$  glatt sind) existiert, mit  $c_1 \circ \varphi = c_0$ .



Eine ORIENTIERTE GEOMETRISCHE KURVE ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei  $c_1$  und  $c_2$  ÄQUIVALENT heißen, falls ein  $\varphi$  wie oben existiert, welches zusätzlich  $\varphi'(t) > 0$  für alle  $t$  erfüllt (d.h. streng monoton wachsend ist).

Also ist eine (orientierte) geometrische Kurve durch Angabe einer PARAMETRISIERUNG, d.h. einer parametrisierten Kurve in dieser Klasse, bereits festgelegt. Wir können uns im folgenden also darauf beschränken, Konzepte für parametrisierte Kurven zu entwickeln, sollten aber immer darauf achten, daß diese Konzepte wirklich geometrischer Natur sind, d.h. nicht von der Auswahl der Repräsentanten (= Parametrisierungen) abhängen und auch invariant unter Bewegungen sind.

Unter dem BILD EINER GEOMETRISCHEN KURVE versteht man das Bild einer (jeder) Parametrisierung.

##### 7.2 Die Tangente.

Die TANGENTE an eine parametrisierte Kurve  $c$  im Punkt  $t$  ist die affine Gerade  $c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)$ .

**Lemma.**

Die Tangente ist ein GEOMETRISCHES KONZEPT, d.h. reparametrisierungsinvariant und auch invariant unter Bewegungen.

**Beweis.** Zuerst zeigen wir die Invarianz unter Reparametrisierungen. Seien  $(c, t)$  und  $(\bar{c}, \bar{t})$  zwei Repräsentanten des gleichen Punktes einer geometrischen Kurve, und  $\varphi$  ein zugehöriger Parameterwechsel, d.h.  $\bar{c} = c \circ \varphi$  und  $t = \varphi(\bar{t})$ . Die Tangente von  $\bar{c}$  in  $\bar{t}$  ist die von  $c$  in  $t$ , denn

$$\begin{aligned} \bar{c}(\bar{t}) + \mathbb{R} \cdot \bar{c}'(\bar{t}) &= (c \circ \varphi)(\bar{t}) + \mathbb{R} \cdot (c \circ \varphi)'(\bar{t}) = \\ &= c(t) + \mathbb{R} \cdot \varphi'(\bar{t}) \cdot c'(\varphi(\bar{t})) = c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t) \end{aligned}$$

(man verwende die Kettenregel und  $\mathbb{R} \cdot \varphi'(\bar{t}) = \mathbb{R}$ ).

Nun zur Bewegungs-Invarianz: Sei  $x \mapsto A(x) + b$  eine Bewegung und  $(c, t)$  ein Punkt einer Kurve. Die bewegte Kurve ist dann  $\bar{c} : t \mapsto A(c(t)) + b$ . Die bewegte Tangente von  $c$  in  $t$  ist die Tangente der bewegten Kurve  $\bar{c}$ , denn

$$\begin{aligned} A(c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)) + b &= A(c(t)) + b + \mathbb{R} \cdot A(c'(t)) = \\ &= (A(c(t)) + b) + \mathbb{R} \cdot (A \circ c)'(t) = \bar{c}(t) + \mathbb{R} \cdot \bar{c}'(t) \end{aligned}$$

(man verwende die Kettenregel (siehe [25, 5.5.2] oder [25, 6.1.9]) und  $A'(x)(v) = A(v)$  nach [28, 2.1], da  $A$  linear ist).  $\square$

### 7.3 Definition (Einheitstangentialvektor).

Der EINHEITSTANGENTIALVEKTOR  $\tau(t)$  im Punkt  $t$  einer parametrisierten Kurve ist definiert durch  $\tau(t) := \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$ . Für die Wohldefiniertheit verwenden wir die Regularität der Kurve, d.h.  $c'(t) \neq 0$ . Man beachte, daß auch dieser ein geometrisches Konzept für orientierte geometrische Kurven darstellt, dazu muß man allerdings beachten, daß  $c(t)$  zum Euklidischen Raum und  $c'(t)$  hingegen zum zugehörigen Vektorraum gehört.

### 7.4 Definition (Einheitsnormalvektor).

Unter dem EINHEITSNORMALVEKTOR  $\nu$  an eine parametrisierte Kurve  $c$  im Punkt mit Parameter  $t$  versteht man  $\nu(t) := \tau(t)^\perp$ , wobei wir für jeden Vektor  $x \neq 0$  im  $\mathbb{R}^2$  mit  $x^\perp$  den eindeutig bestimmten Vektor bezeichnen, welcher normal auf  $x$  steht, gleiche Länge wie  $x$  hat und links von  $x$  liegt (d.h.  $(x, x^\perp)$  ist positiv orientiert), siehe [28, 1.3]. Dieser ist also durch eine Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  von  $x$  gegeben:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

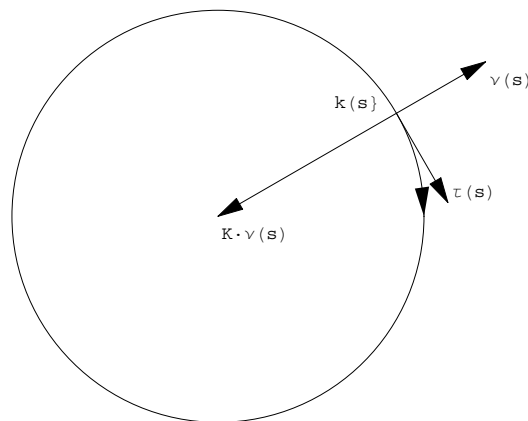
Wie der Tangentialvektor ist auch der Einheitsnormalvektor ein geometrisches Konzept für orientierte Kurven. Das Paar  $(\tau, \nu)$  nennt man das BEGLEITBEIN (engl.: moving frame) der Kurve. Für jeden Parameterwert  $t$  ist  $(\tau(t), \nu(t))$  eine gut zur Kurve passende Basis der Ebene.

### 7.5 Definition (Krümmung).

Da ein Kreis umso stärker gekrümmt ist, je kleiner der Radius  $r$  ist, wollen wir als Maß für die KRÜMMUNG  $K$  des Kreises den Kehrwert  $\frac{1}{r}$  verwenden. Wir versehen diese noch mit einem Vorzeichen, und zwar sei dieses positiv falls der Kreis positiv orientiert ist, also eine Linkskurve beschreibt, andernfalls negativ. Eine Gerade kann man als Grenzfall eines Kreises für  $r \rightarrow \infty$  betrachten, und die entsprechende Definition für ihre Krümmung als  $K := \frac{1}{\infty} = 0$  stimmt auch mit der Anschauung der nicht-Gekrümmtheit überein.

Wir können den Mittelpunkt  $M$  eines Kreises aus den ersten paar Ableitungen beim Punkt  $s$  einer Bogenlängenparametrisierung  $k(s) = r(\cos \frac{\pm s}{r}, \sin \frac{\pm s}{r}) + M$  errechnen:

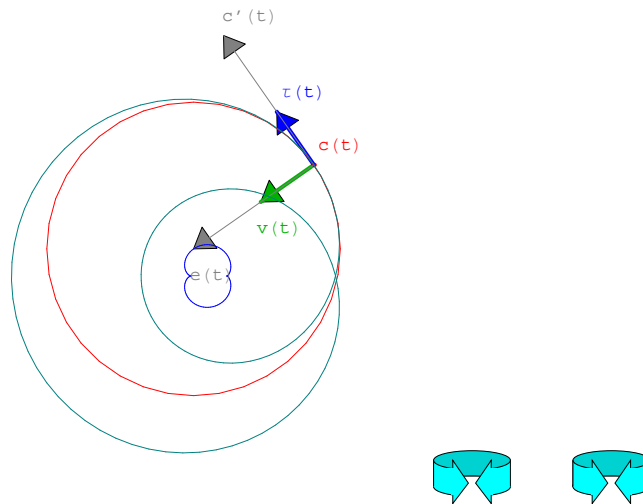
$$\begin{aligned} \tau(s) &= k'(s) = \pm(-\sin \frac{\pm s}{r}, \cos \frac{\pm s}{r}), \quad \nu(s) = \tau(s)^\perp = \mp(\cos \frac{\pm s}{r}, \sin \frac{\pm s}{r}) \Rightarrow \\ k''(s) &= -\frac{1}{r}(\cos \frac{\pm s}{r}, \sin \frac{\pm s}{r}) = \pm \frac{1}{r} \cdot \nu(s) = K \cdot \nu(s) \Rightarrow |k''(s)| = \frac{1}{r} = \pm K \quad \text{und} \\ M &= k(s) - r(\cos \frac{\pm s}{r}, \sin \frac{\pm s}{r}) = k(s) + r^2 \cdot k''(s) = k(s) + \frac{k''(s)}{|k''(s)|^2} \\ &= k(s) + \frac{1}{K} \cdot \nu(s). \end{aligned}$$



Sei allgemeiner  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $c''(s) \neq 0$ . Unter dem KRÜMMUNGSKREIS (engl.: osculating circle) im Punkt  $s$  versteht man jenen Kreis  $k$ , welcher  $c$  bei  $s$  von Ordnung 2 berührt, d.h.  $c(s) = k(s)$ ,  $c'(s) = k'(s)$  und  $c''(s) = k''(s)$ . Unter der KRÜMMUNG  $K(s)$  der Kurve  $c$  bei  $s$  versteht man die signierte Krümmung des Krümmungskreises. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist wegen obiger Formel durch

$$M = k(s) + \frac{k''(s)}{|k''(s)|^2} = c(s) + \frac{c''(s)}{|c''(s)|^2} = c(s) + \frac{1}{K(s)} \cdot \nu(s)$$

gegeben und sein Radius ist  $r = \frac{1}{|c''(s)|}$ . Mittels dieses Ansatzes folgt auch seine Existenz. Die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte (wohldefiniert, wo  $|c''| \neq 0$ ) heißt EVOLUTE.



Für den Krümmungskreis gilt:  $c''(s) = k''(s) = K(s) \cdot \nu(s)$ , wo  $\nu(s)$  die Einheitsnormale an  $k$  bzw.  $c$  und  $K(s)$  die Krümmung ist. Nach dem Newtonschen Gesetz “Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung” mißt  $K(s)$  die (skalare Größe der) Kraft, die nötig ist, um den, mit skalarer Geschwindigkeit  $|c'(s)| = 1$  bewegten Punkt (mit Einheitsmasse) auf der Kurve zu halten.

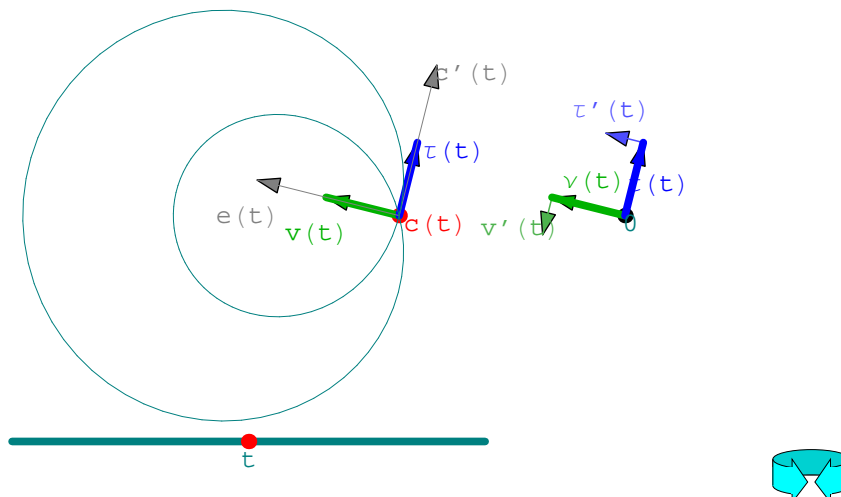
Wir können also  $K$  als den Koeffizienten von  $\tau' = c''$  bzgl. des zweiten Vektors  $\nu$  des Begleitbeins  $(\tau, \nu)$  auffassen. Wenn wir diese Gleichung  $\tau' = K \cdot \nu$  mit einer Rotation  $R$  um  $\pi/2$  drehen, dann erhalten wir

$$\nu' = (R \circ \tau)' = R \circ \tau' = R \circ (K \cdot \nu) = K \cdot (R \circ \nu) = K \cdot (R^2 \circ \tau) = -K \cdot \tau.$$

Zusammen sind das die sogenannten FRENET'SCHEN ABLEITUNGSGLEICHUNGEN:

$$\begin{aligned}\tau' &= K \cdot \nu \\ \nu' &= -K \cdot \tau,\end{aligned}$$

die die Ableitung des Begleitbeins in der Basis, welche durch das Begleitbein gegeben ist, ausdrücken.



Mit  $c(s) = (x(s), y(s))$  ergibt sich folgende explizite Formel für die Krümmung

$$\begin{aligned} K(s) &= \langle K(s) \cdot \nu(s) \mid \nu(s) \rangle = \langle \tau'(s) \mid \nu(s) \rangle = \langle \tau'(s) \mid \tau(s)^\perp \rangle \\ &= \det(\tau(s), \tau'(s)) = \det(c'(s), c''(s)), \end{aligned}$$

denn

$$\det(x, y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle y \mid x^\perp \rangle.$$

Falls  $c$  nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist, sei  $t \mapsto s(t)$  die Bogenlängenfunktion und  $\bar{c} = c \circ s^{-1}$  die Reparametrisierung nach der Bogenlänge. In diesem Fall erhalten wir für die Krümmung:

$$\begin{aligned} K_{\bar{c}}(s) &= \det(\bar{c}'(s), \bar{c}''(s)) = \det\left(c'(t) \frac{1}{s'}, (c''(t) - c'(t)s'') \frac{1}{(s')^2}\right) \\ &= \frac{1}{(s')^3} \det(c'(t), c''(t)) + 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow K_c(t) &= K_{\bar{c}}(s(t)) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{|c'(t)|^3} = \frac{\langle c'(t)^\perp \mid c''(t) \rangle}{|c'(t)|^3}, \end{aligned}$$

wobei wir Folgendes verwendeten:  $c = \bar{c} \circ s$ ,  $c' = (\bar{c}' \circ s)s'$ ,  $c'' = (\bar{c}'' \circ s)(s')^2 + (\bar{c}' \circ s)s''$ .

Wir wollen nun zeigen, daß der Krümmungskreis unter Bewegungen invariant ist. Dazu genügt es, die Invarianz des Mittelpunktes

$$M(s) = c(s) + \frac{c''(s)}{|c''(s)|^2} = c(s) + \frac{K(s)\nu(s)}{|K(s) \cdot \nu(s)|^2} = c(s) + \frac{\nu(s)}{K(s)}$$

zu zeigen: Sei  $c$  nach der Bogenlänge parametrisiert und sei  $\bar{c}(t) = R(c(t)) + a$  die durch  $x \mapsto Rx + a$  bewegte Kurve. Die Krümmung von  $\bar{c}$  ist dann:

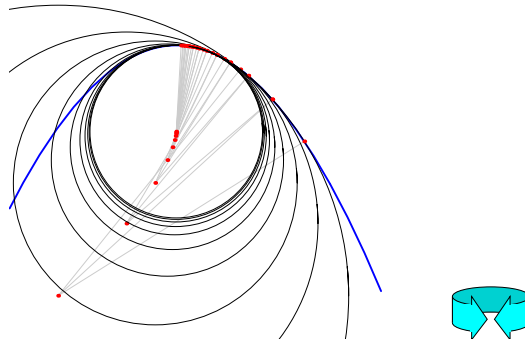
$$\begin{aligned} K_{\bar{c}}(t) &= \det(\bar{c}'(t), \bar{c}''(t)) = \det(R(c'(t)), R(c''(t))) \\ &= \det(R(c'(t), c''(t))) = \det R \cdot \det(c'(t), c''(t)) = K_c(t), \end{aligned}$$

da  $\det R = +1$ . Somit ist die Krümmung invariant und damit auch der Mittelpunkt.

### 7.6 Lemma (Krümmungskreis als Limes).

Sei  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve,  $c''(s) \neq 0$ . Für je drei verschiedene Punkte  $s_1, s_2, s_3$  sei  $M(s_1, s_2, s_3)$  der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte  $c(s_1), c(s_2), c(s_3)$  und  $M(s)$  der Mittelpunkt des Krümmungskreises von  $c$ .

Dann gilt:  $M(s_1, s_2, s_3) \rightarrow M(s)$  für  $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s$ . Gleiches gilt auch für die Radien.



**Beweis von [7.6].** Die Streckensymmetrale zwischen  $c(t_1)$  und  $c(t_2)$  ist in Normalvektorform gegeben durch

$$\left\{ z : \left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid z - \frac{c(t_1) + c(t_2)}{2} \right\rangle = 0 \right\}$$

und die Streckensymmetrale zwischen  $c(t_2)$  und  $c(t_3)$  in Parameterform durch

$$\left\{ \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Mittelpunkt  $M(t_1, t_2, t_3)$  des Kreises durch die 3 Punkte  $c(t_1)$ ,  $c(t_2)$  und  $c(t_3)$  liegt somit am Schnittpunkt der beiden Streckensymmetralen, d.h. ist gegeben durch

$$M(t_1, t_2, t_3) := \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp,$$

wobei  $\lambda$  Lösung der Gleichung

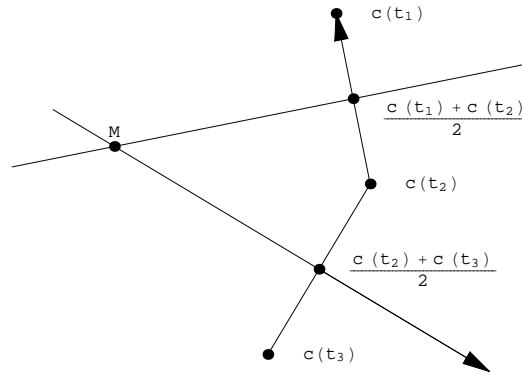
$$0 = \left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp - \frac{c(t_1) + c(t_2)}{2} \right\rangle,$$

also

$$\lambda = \frac{\left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \right\rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))}$$

ist, d.h.

$$M(t_1, t_2, t_3) = \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \frac{\left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \right\rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))} \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp.$$



Wegen

$$\begin{aligned} \frac{c(t_2) - c(t_1)}{t_2 - t_1} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c'(t) dt = \int_0^1 c'(t_1 + s(t_2 - t_1)) ds \\ \frac{\frac{c(t_1) - c(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2}}{t_1 - t_3} &= \int_0^1 \int_0^1 c''(t_2 + s_1(t_3 - t_2) + s_2 s_1(t_1 - t_3)) s_1 ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} c(t_1), c(t_2), c(t_3) &\rightarrow c(t) \\ \frac{c(t_2) - c(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{c(t_1) - c(t_3)}{t_1 - t_3}, \frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2} &\rightarrow c'(t) \\ \left( \frac{c(t_1) - c(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2} \right) / (t_1 - t_3) &\rightarrow c''(t)/2 \end{aligned}$$

für  $t_1, t_2, t_3 \rightarrow t$ , also

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2, t_3) &= \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \frac{\left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \right\rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))} \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp \\ &= \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \\ &\quad + \frac{\left\langle \frac{c(t_2) - c(t_1)}{t_2 - t_1} \mid \frac{c(t_1) - c(t_3)}{t_1 - t_3} \right\rangle}{2 \det\left(\frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2}, \frac{c(t_2) - c(t_1)}{(t_2 - t_1) \cdot (t_1 - t_3)} - \frac{c(t_3) - c(t_2)}{(t_3 - t_2) \cdot (t_1 - t_3)}\right)} \cdot \left(\frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2}\right)^\perp \\ &\rightarrow c(t) + \frac{\langle c'(t) \mid c'(t) \rangle}{\det(c'(t), c''(t))} \cdot (c'(t))^\perp = c(t) + \frac{1}{K(t)} \nu(t). \quad \square \end{aligned}$$

### 7.7 Lemma (Krümmung als Richtungsänderung).

Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{C}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit  $c' : I \rightarrow S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Sei  $s_0 \in I$  und  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  für  $s$  nahe  $s_0$  eine differenzierbare Lösung von  $e^{i\theta(s)} = c'(s)$ . Dann folgt  $K(s) = \theta'(s)$ . Das bedeutet, daß die Krümmung  $K$  die infinitesimale Änderung des Winkels der Tangente mißt.

**Beweis.** Durch Differenzieren der Gleichung  $c'(s) = e^{i\theta(s)}$  erhält man  $c''(s) = i\theta'(s)e^{i\theta(s)} = \theta'(s)ic'(s) = \theta'(s)\nu(s)$ , das ist aber die implizite Gleichung für die Krümmung  $\Rightarrow K(s) = \theta'(s)$ .  $\square$

### Zusammenfassung.

Die Krümmung einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve kann aufgefaßt werden als:

1. Der Kehrwert  $\frac{1}{r} = |c''(s)| = |K(s)|$  des Radius  $r$  des Krümmungskreises, d.h. jenes Kreises, der  $c$  am besten approximiert, versehen mit einem Vorzeichen welches sich daraus ergibt ob der Krümmungskreis positiv oder negativ orientiert ist, siehe [7.5](#).
2. Der skalare Wert der Beschleunigung  $c''(s) = K(s)\nu(s)$ , siehe [7.5](#).
3. Die infinitesimale Änderung des Winkels der Tangente  $K(s) = \theta'(s)$ , nach Lemma [7.7](#).

### 7.8 Satz (Die Krümmung charakterisiert die Kurve).

Sei  $K : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung, so gibt es, bis auf Bewegungen, genau eine Kurve, die eine Bogenlängenparametrisierung  $c$  besitzt, für die  $K_c(s) = K(s)$  gilt.

**Beweis.** Sei  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Krümmung  $K$ , d.h.  $|c'(s)| = 1$  für alle  $s$  und  $K(s) = \theta'(s)$  nach [7.7](#), wobei  $\theta$  ein Lift von  $c'$  ist, und somit  $e^{i\theta(s)} = c'(s)$  gilt. Also folgt

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta(0) + \int_0^s \theta'(\tau) d\tau = \theta(0) + \int_0^s K(\tau) d\tau \text{ und} \\ c(s) &= c(0) + \int_0^s c'(\tau) d\tau = c(0) + \int_0^s e^{i\theta(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Dabei ist  $c(0)$  der frei wählbare Anfangspunkt der Kurve, und  $\theta(0)$  der frei wählbare Winkel der Anfangsrichtung. Je zwei solche Anfangsdaten liefern eine Bewegung, welche die zugehörigen Kurven ineinander überführt. Sei  $c$  wie oben definiert. Dann

ist  $c'(s) = e^{i\theta(s)}$ , also  $|c'(s)| = 1$ , d.h.  $c$  ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Da  $\theta$  der Lift ist, gilt  $K_c(s) = \theta'(s) = K(s)$ .  $\square$

## 8. Krümmung von Kurven im höher Dimensionalen

### 8.1 Definition (Krümmung und Begleitbein).

Als Maß für die KRÜMMUNG einer nach der Bogenlänge parametrisierten Raumkurve  $c$  im Punkt  $t$  können wir  $|c''(t)|$  nehmen, habe nun aber keine vernünftige Möglichkeit dies mit einem Vorzeichen zu versehen. Falls  $c''(t) \neq 0$ , dann heißt  $\nu(t) := \frac{1}{|c''(t)|}c''(t)$  der HAUPTNORMALENVEKTOR von  $c$  in  $t$ .

Im  $\mathbb{R}^3$  können wir die beiden Vektoren  $\tau$  (siehe [7.3](#)) und  $\nu$  zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $\{\tau, \nu, \beta\}$  ergänzen, indem wir den BINORMALENVEKTOR  $\beta$  als  $\beta := \tau \times \nu$  definieren. Diese Basis heißt das BEGLEITBEIN der Kurve.

Im  $\mathbb{R}^{n+1}$  gehen wir wie folgt vor: Seien  $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n)}(t)$  linear unabhängig. Mittels des GRAM-SCHMIDT'SCHEN ORTHOGONALISIERUNGSVERFAHRENS läßt sich daraus eine orthonormale Familie  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$  konstruieren. (Dabei geht man induktiv vor, um zu zeigen, daß für  $k$  linear unabhängige Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ein eindeutig bestimmter Vektor  $v$  im Erzeugnis der  $a_1, a_2, \dots, a_k$  existiert, welcher normal auf die  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  steht und mit  $a_k$  einen Winkel  $\alpha$  mit  $|\alpha| < \pi/2$  einschließt. Wir ergänzen nun  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$  zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \nu_n$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Diese Orthonormalbasis heißt BEGLEITBEIN der Kurve.

### 8.2 Definition (Krümmungen).

Wir wollen nun das Analogon der Frenet'schen Ableitungsgleichungen herleiten. Dazu benötigen wir die Komponenten  $\langle \nu'_i | \nu_j \rangle$  von  $\nu'_i$  bzgl. der Basisvektoren  $\nu_j$ . Für jeden Vektor  $\nu'_i$  gilt:  $\nu'_i = \sum_{j=0}^n \langle \nu'_i | \nu_j \rangle \nu_j$ . Wir differenzieren die Gleichung  $\langle \nu_i(s) | \nu_j(s) \rangle = \delta_{ij}$  nach  $s$  und erhalten:

$$\langle \nu'_i | \nu_j \rangle + \langle \nu_i | \nu'_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nu'_i | \nu_j \rangle = -\langle \nu_i | \nu'_j \rangle.$$

Also ist die Matrix  $(\langle \nu'_i | \nu_j \rangle)_{i,j}$  schiefsymmetrisch. Da  $\nu_i \in \langle \{c', \dots, c^{(i+1)}\} \rangle$  ist, kann man  $\nu_i$  auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \nu_i &= \sum_{j=1}^{i+1} a_j \cdot c^{(j)} \\ \Rightarrow \nu'_i &= \sum_{j=1}^{i+1} (a'_j \cdot c^{(j)} + a_j \cdot c^{(j+1)}) \in \langle \{c', c'', \dots, c^{(i+2)}\} \rangle \end{aligned}$$

Da  $\nu_j$  normal steht auf  $\langle \{\nu_i : 0 \leq i < j\} \rangle = \langle \{c^{(i)} : 1 \leq i \leq j\} \rangle$  ist somit  $\langle \nu'_i | \nu_j \rangle = 0$  für  $i+2 \leq j$ . Außerdem ist offensichtlich  $\langle \nu'_i | \nu_i \rangle = 0$  für alle  $i$  und folglich stehen 0-en in der Diagonale der Matrix von  $(\langle \nu'_i | \nu_j \rangle)_{i,j}$ , und nur unmittelbar oberhalb und unterhalb der Diagonalen stehen auf schiefsymmetrische Weise Eintragungen.



Für eine Kurve  $c$  heißt  $\langle \nu'_i | \nu_{i+1} \rangle =: K_{i+1}$  die  $(i+1)$ -TE KRÜMMUNG.

$$\langle \nu'_i | \nu_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -K_1 & 0 & K_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -K_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & K_n \\ 0 & \dots & 0 & -K_n & 0 \end{pmatrix}$$

Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve  $c$  in  $\mathbb{R}^2$  ergibt sich:

$$K_1 = \langle \nu'_0 | \nu_1 \rangle = \left\langle (c')' \mid \frac{c''}{|c''|} \right\rangle = |c''| = |K|.$$

### 8.3 Frenet'sche Ableitungsgleichungen.

Für das Begleitbein  $(\nu_i)_{i=0}^n$  einer Kurve  $c$  im  $\mathbb{R}^{n+1}$  gilt:

$$\nu'_i = -K_i \cdot \nu_{i-1} + K_{i+1} \cdot \nu_{i+1},$$

wobei  $K_0 := 0$ ,  $K_{n+1} := 0$ ,  $\nu_{-1} := 0$  und  $\nu_{n+1} := 0$ .

**Beweis.**

$$\nu'_i = \sum_{j=0}^n \underbrace{\langle \nu'_i | \nu_j \rangle}_{\substack{=0 \\ \text{für } |i-j| \neq 1}} \cdot \nu_j = \underbrace{\langle \nu'_i | \nu_{i+1} \rangle}_{=K_{i+1}} \cdot \nu_{i+1} + \underbrace{\langle \nu'_i | \nu_{i-1} \rangle}_{=\langle \nu'_{i-1} | \nu_i \rangle = K_i} \cdot \nu_{i-1} \quad \square$$

### 8.4 Lemma.

Das Begleitbein und die Krümmungen sind geometrische Objekte.

**Beweis.** Bleibt dem Leser überlassen! □

### 8.5 Bemerkung.

Umgekehrt lassen sich die Ableitungen einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve wie folgt als Linearkombinationen des Begleitbeins schreiben:

$$\begin{aligned} c' &= \nu_0 \\ c'' &= \nu'_0 = K_1 \nu_1 - 0 \\ c''' &= (K_1 \nu_1)' = K'_1 \nu_1 + K_1 \nu'_1 = K'_1 \nu_1 + K_1 (K_2 \nu_2 - K_1 \nu_0) \\ &= K_1 K_2 \nu_2 + K'_1 \nu_1 - K_1^2 \nu_0. \end{aligned}$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatz läßt sich eine Kurve  $c$  nun wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} c(t) &= c(0) + \frac{c'(0)}{1!} t + \frac{c''(0)}{2!} t^2 + \frac{c'''(0)}{3!} t^3 + O(t^4) \\ &= c(0) + \nu_0(0)t + \frac{K_1(0)\nu_1(0)}{2} t^2 \\ &\quad + \frac{K_1(0)K_2(0)\nu_2(0) + K'_1(0)\nu_1(0) - (K_1(0))^2\nu_0(0)}{6} t^3 + O(t^4) \\ &= c(0) + \left( t - \frac{(K_1(0))^2}{6} t^3 \right) \nu_0(0) \\ &\quad + \left( \frac{K_1(0)}{2} t^2 + \frac{K'_1(0)}{6} t^3 \right) \nu_1(0) + \left( \frac{K_1(0)K_2(0)}{6} t^3 \right) \nu_2(0) + O(t^4) \end{aligned}$$

### 8.6 Definition (Torsion).

Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Raum-Kurve mit  $\tau := \nu_0$ ,  $\nu := \nu_1$ ,  $\beta := \tau \times \nu = \nu_2$ , dann nennt man  $K := K_1$  die KRÜMMUNG und  $T := K_2$  die TORSION der Kurve. Die Ableitungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}\tau' &= && +K\nu \\ \nu' &= -K\tau && +T\beta \\ \beta' &= && -T\nu\end{aligned}$$

Die von Hauptnormalenvektor  $\nu$  und Binormalenvektor  $\beta$  aufgespannte Ebene durch  $c(0)$  heißt NORMALEBENE, die von Einheitstangentialvektor  $\tau$  und Hauptnormalenvektor  $\nu$  aufgespannte heißt SCHMIEGEBENE und die von Einheitstangentialvektor  $\tau$  und Binormalenvektor  $\beta$  aufgespannte heißt REKTIFIZIERENDE EBENE.

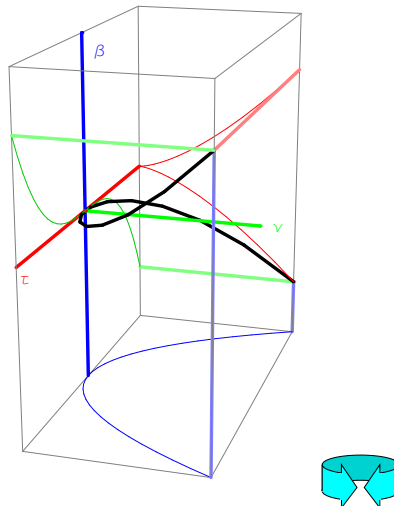
Sind  $x, y, z$  die Koordinaten von  $c$  bezüglich  $\tau, \nu, \beta$  im Punkt  $c(0)$ , dann gilt laut 8.5:

$$\begin{aligned}x(t) &= t && - \frac{K^2(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\ y(t) &= \frac{K(0)}{2}t^2 + \frac{K'(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\ z(t) &= \frac{K(0)T(0)}{6}t^3 + O(t^4)\end{aligned}$$

Wir betrachten die Projektion der Kurve in die Ebenen des begleitenden Dreibeins: Zuerst die Projektion auf die Schmiegeebene: Wir erhalten  $y = \frac{K}{2}t^2 + O(t^3)$ ,  $x = t + O(t^3)$  und nach Vernachlässigen der Glieder höherer Ordnung  $y \approx x^2 \frac{K}{2}$ .

Für die Projektion auf die rektifizierende Ebene erhalten wir  $x = t + O(t^3)$ ,  $z = \frac{KT}{6}t^3 + O(t^4)$  und somit  $z \approx x^3 \frac{KT}{6}$ .

Für die Projektion auf die Normalebene erhalten wir  $y = \frac{K}{2}t^2 + O(t^3)$ ,  $z = \frac{KT}{6}t^3 + O(t^4)$  und somit  $y^3 \approx (\frac{K}{2})^3 t^6 = \frac{9K}{2T^2} \frac{(KT)^2}{6^2} t^6 \approx z^2 \frac{9K}{2T^2}$ . Diese Projektionen ergeben als 3-dimensionales Bild:



### 8.7 Lemma.

Die Krümmungen  $K_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und das Begleitbein  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve sind durch folgende Bedingungen eindeutig

festgelegt:

$$c^{(j+1)} = \nu_0^{(j)} \equiv K_1 \cdot \dots \cdot K_j \cdot \nu_j \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle},$$

$$K_i > 0 \text{ für } i < n$$

und  $(\nu_1, \dots, \nu_n)$  ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

**Beweis.** Wir wissen bereits (wegen [8.5](#)), daß diese Gleichung für  $j \in \{1, 2, 3\}$  erfüllt ist. Nehmen wir an, sie ist für  $j$  erfüllt, d.h.

$$\nu_0^{(j)} = K_1 \cdot \dots \cdot K_j \cdot \nu_j + \sum_{i=0}^{j-1} a_i \nu_i \text{ mit } a_i \in \mathbb{R},$$

so müssen wir die Behauptung für  $j+1$  zeigen: Dazu differenzieren wir diese Gleichung und erhalten wegen der Frénet'schen Ableitungsgleichungen [8.3](#)

$$\begin{aligned} \nu_0^{(j+1)} &= (K_1 \dots K_j) \cdot \nu_j' + (K_1 \dots K_j)' \cdot \nu_j + \sum_{i=0}^{j-1} (a_i' \cdot \nu_i + a_i \cdot \nu_i') \\ &\equiv (K_1 \dots K_j)(K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} - K_j \cdot \nu_{j-1}) \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_j\} \rangle} \\ &\equiv K_1 \dots K_j K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_j\} \rangle}, \end{aligned}$$

da  $\nu_i'$  für  $i < j$  und auch  $K_j \nu_{j-1}$  im Erzeugnis der  $\nu_0, \dots, \nu_j$  liegen.

Nach Konstruktion ist für  $j < n$  der Winkel zwischen  $\nu_j$  und  $c^{(j+1)}$  kleiner als  $\pi/2$ . Also gilt:

$$0 < \langle \nu_j | c^{(j+1)} \rangle = \left\langle \nu_j \mid K_1 \cdot \dots \cdot K_j \nu_j + \sum_{i < j} a_i \nu_i \right\rangle = K_1 \cdot \dots \cdot K_j \underbrace{\langle \nu_j | \nu_j \rangle}_1.$$

Somit ist  $K_j > 0$  für jedes  $j < n$ .

Nach Konstruktion bilden die  $\nu_j$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Umgekehrt folgt rekursiv aus

$$c^{(j+1)} \equiv K_1 \cdot \dots \cdot K_j \nu_j \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle}$$

und  $K_j > 0$  für  $j < n$ , daß  $\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle = \langle \{c', \dots, c^{(j)}\} \rangle$  für  $1 \leq j < n$  sowie  $0 < \langle \nu_j | c^{(j+1)} \rangle$ . Wegen der Orthogonalität ist also  $\nu_j$  das Begleitbein. Weiters ist  $K_1 \cdot \dots \cdot K_j$  der eindeutig bestimmte Koeffizient von  $\nu_j$ , in der Entwicklung von  $\nu_0^{(j)}$  bzgl. der Basis  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$  und damit  $K_i$  die entsprechende Krümmung.  $\square$

### 8.8 Folgerung.

Es ist  $K_1^n K_2^{n-1} \cdot \dots \cdot K_{n-1}^2 K_n = \det(c', \dots, c^{(n+1)})$  und insbesondere hat  $K_n$  das gleiche Vorzeichen wie  $\det(c', \dots, c^{(n+1)})$ . Für Raumkurven  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist die Torsion somit durch  $T = \det(c', c'', c''')/K^2$  gegeben.

**Beweis.** Nach den Regeln für das Rechnen mit Determinanten erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(c', \dots, c^{(n+1)}) &= \det\left(\nu_0, K_1 \nu_1, \dots, K_1 \cdot \dots \cdot K_n \nu_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \nu_i\right) \\ &= \underbrace{K_1^n K_2^{n-1} \dots K_{n-1}^2 K_n^1}_{>0} \underbrace{\det(\nu_0, \dots, \nu_n)}_{=1 \text{ da pos. orientiert}} \quad \square \end{aligned}$$

### 8.9 Satz (Die Krümmungen charakterisieren die Kurve).

Seien  $K_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatte Funktionen für  $1 \leq i \leq n$  mit  $K_i(t) > 0$  für  $i < n$  und alle  $t$ . Dann gibt es eine bis auf Bewegungen eindeutig bestimmte Kurve im  $\mathbb{R}^{n+1}$ , welche nach der Bogenlänge parametrisiert genau die  $K_i$  als Krümmungen besitzt.

Die Devise lautet also:

“Sag mir, wie Du Dich krümmst und windest, und ich sag Dir wer Du bist”!

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $0 \in I$ . Wir behaupten vorerst: Es existiert genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit den gegebenen Krümmungen und den Anfangsbedingungen:  $c(0) = 0$  und der Standardbasis  $e_0, \dots, e_n$  als Begleitbein bei 0.

Nach den Frenet'schen Ableitungsgleichungen [8.3](#) muß  $\nu'_j = K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} - K_j \cdot \nu_{j-1}$  für  $j = 0, \dots, n$  und  $\nu_j(0) = e_j$  sein. Dies ist ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit  $(n+1)^2$  eindimensionalen Gleichungen und entsprechenden Anfangsbedingungen. Für ein solches System existiert eine eindeutige Lösung  $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ , für die wir zeigen werden, daß dieses das Begleitbein einer Kurve ist. Wir behaupten dazu, daß die  $\nu_i$  für jeden Zeitpunkt orthonormiert sind: Wir definieren  $g_{ij} := \langle \nu_i | \nu_j \rangle : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ . Mit

$$g'_{ij} = \langle \nu'_i | \nu_j \rangle + \langle \nu_i | \nu'_j \rangle = K_{i+1}g_{i+1,j} - K_i g_{i-1,j} + K_{j+1}g_{i,j+1} - K_j g_{i,j-1}$$

erhalten wir abermals ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit  $(n+1)^2$  eindimensionalen Gleichungen und entsprechenden Anfangsbedingungen  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ . Auch hier muß es eine eindeutige Lösung  $g_{ij}$  geben. Wir sehen andererseits, daß  $\delta_{ij}$  eine Lösung ist:

$$\begin{aligned} K_{i+1}\delta_{i+1,j} - K_i\delta_{i-1,j} + K_{j+1}\delta_{i,j+1} - K_j\delta_{i,j-1} = \\ = \begin{cases} K_{i+1} - K_j & \text{für } j = i + 1 \\ -K_i + K_{j+1} & \text{für } i = j + 1 \\ 0 & \text{für } |i - j| \neq 1 \end{cases} = 0 = \delta'_{i,j} \end{aligned}$$

Also ist  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , d.h. die  $\nu_i$  sind orthonormiert. Sie sind auch positiv orientiert, denn  $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(0) = 1$  und  $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(t) = \pm 1$  für alle  $t$ . Wegen des Zwischenwertsatzes folgt,  $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(t) = 1$  für alle  $t$ .

Es gibt höchstens eine Kurve  $c$ , welche die  $\nu_i$  als Begleitbein hat und  $c(0) = 0$  erfüllt, nämlich:  $c(t) := \int_0^t \nu_0$ , denn  $c'$  muß gleich  $\nu_0$  sein. Es ist  $|c'| = |\nu_0| = 1$ , also ist  $c$  nach der Bogenlänge parametrisiert. Durch Differenzieren erhalten wir  $c^{(j+1)}(t) = \nu_0^{(j)}$  und wegen der Differentialgleichung für die  $\nu_j$  gilt

$$\nu_0^{(j)} \equiv K_1 \cdot \dots \cdot K_j \nu_j \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle}$$

für  $j < n$  wie im Beweis von [8.7](#) gezeigt wurde. Also ist auch

$$c^{(j+1)}(t) \equiv K_1 \cdot \dots \cdot K_j \nu_j \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle}$$

und damit sind die  $K_j$  die Krümmungen von  $c$  und die  $\nu_i$  das Begleitbein nach Lemma [8.7](#).

Schließlich läßt sich jede andere Kurve mit diesen Krümmungen durch eine eindeutig bestimmte Bewegung in eine Kurve mit (denselben Krümmungen und) obigen Anfangsbedingungen transformieren. Letztere ist nach dem bisher Gesagten eindeutig bestimmt, also auch erstere.  $\square$

## 9. Krümmungen von Hyperflächen

### 9.1 Definition (Hyperfläche).

Eine HYPERFLÄCHE  $M$  im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmannigfaltigkeit der Kodimension 1, d.h. der Dimension  $m := n - 1$ . Sie kann lokal z.B. durch eine Gleichung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  oder eine Parametrisierung  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben sein.

### Beispiele.

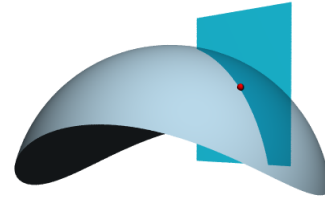
Flächen im  $\mathbb{R}^3$ , Sphären  $S^m \subset \mathbb{R}^n$  und  $SL(n) \subset L(n, n)$ .

### 9.2 Gaußabbildung.

In jedem Punkt  $p \in M$  haben wir genau zwei normierte Normalvektoren auf  $T_p M$  im  $\mathbb{R}^n$ . Falls  $M$  orientiert ist, können wir einen dieser Normalvektoren auszeichnen, nämlich so, daß  $(\nu_p, e_1, \dots, e_m)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$  ist, für eine (jede) positiv orientierte Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_m)$  von  $T_p M$ , cf. [31, 28.9]. Ist  $M$  lokal durch eine Gleichung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so ist der Gradient  $\text{grad } f$  ein Normalvektor, den wir nur noch normieren müssen, cf. [31, 27.41]. Es gibt also lokal und für orientierte Hyperflächen sogar global eine glatte Abbildung  $M \ni p \mapsto \nu_p \in S^m \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\nu_p \perp T_p M$ , also  $T_p M = \nu_p^\perp$ . Ein derart gewählte Funktion  $\nu$  wird GAUSS-ABBILDUNG genannt.

### 9.3 Normalkrümmung.

Wir wollen nun die Krümmung für Hyperflächen definieren. Es sei  $\nu_p \perp T_p M$  ein fix gewählter Einheits-Normalvektor und  $\xi \in T_p M$  ein Einheits-Tangentialvektor. Wir betrachten den Schnitt der Ebene  $(t, s) \mapsto p + t\nu + s\xi$  durch  $p$  mit den Richtungsvektoren  $\xi$  und  $\nu$ , mit  $M$ .



Sei  $f$  eine lokale reguläre Gleichung von  $M$  um  $p$ . O.B.d.A. sei  $\text{grad}_p f$  normiert und gleichorientiert wie  $\nu_p$ , also  $\nu_p = \text{grad}_p f$ . Der Schnitt der Ebene mit  $M$  ist dann durch die Gleichung  $f(p + t\nu_p + s\xi) = 0$  in  $(t, s)$  gegeben. Wir wollen in dieser impliziten Gleichung  $t$  nach  $s$  mittels impliziten Funktionensatz [31, 2.2] auflösen. Dies ist wegen

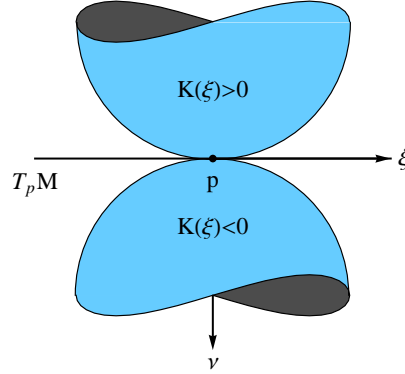
$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} f(p + t\nu_p + s\xi) \Big|_{s=0} = f'(p)(\nu_p) = \langle \text{grad}_p f | \nu_p \rangle = |\nu_p|^2 = 1 \neq 0$$

möglich. Wir erhalten also als Durchschnitt lokal eine Schnittkurve  $c : s \mapsto p + t(s)\nu_p + s\xi$  in  $M$  mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = \xi + t'(s)\nu_p = \xi$ , da  $c'(0) \in T_p M$ . Von der Kurve  $c$  können wir annehmen, daß sie proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Die in [7.5] definierte signierte Krümmung der ebenen Kurve  $c$ , wobei wir als positiv orientierte Basis  $(\nu_p, \xi)$  wählen, nennt man die NORMALKRÜMMUNG  $K(\xi) := K_M(\xi) := K_c(0)$  von  $M$  im Punkt  $p$  und Richtung  $\xi$ . Beachte, daß  $(\xi, -\nu_p)$  das Begleitbein von  $c$  im Punkte  $p = c(0)$  ist!

Eine Formel von  $K(\xi)$  erhalten wir wie folgt: Wegen  $c(t) \in M$  gilt  $c'(t) \in T_{c(t)} M = \nu_{c(t)}^\perp$ , also  $\langle c'(t), \nu_{c(t)} \rangle = 0$ . Durch Differenzieren an der Stelle 0 erhalten wir:  $\langle c''(0), \nu_p \rangle + \langle \xi, T_p \nu \cdot \xi \rangle = 0$ . Folglich gilt:

$$K(\xi) = K_c(0) = \langle c''(0), -\nu_p \rangle = \langle \xi, T_p \nu \cdot \xi \rangle$$

Diese Formel können wir als Definition von  $K(\xi)$  auch für  $|\xi| \neq 1$  verwenden.



#### 9.4 Weingarten-Abbildung.

Man nennt die Tangentialabbildung

$$L_p := T_p \nu : T_p M \rightarrow T_p S^m = \nu_p^\perp = T_p M$$

der Gauß-Abbildung  $\nu : M \rightarrow S^m$  die WEINGARTEN-ABBILDUNG, nach Julius Weingarten, 1836–1910. Der Vektor  $L_p(\xi)$  mißt also die infinitesimale Änderung der Flächennormale, wenn man auf  $M$  von  $p$  in Richtung  $\xi \in T_p M$  geht. Nach dem gerade Gezeigten gilt

$$K(\xi) = \langle \xi, L \cdot \xi \rangle.$$

#### 9.5 Lemma.

Die Weingarten-Abbildung  $L_p : T_p M \rightarrow T_p M$  ist symmetrisch.

**1. Beweis.** Seien  $\xi_1$  und  $\xi_2$  zwei Vektorfelder auf  $M$ . Wir setzen sowohl  $\xi_i$ , als auch  $\nu$  lokal um  $p$  zu Vektorfeldern des  $\mathbb{R}^n$  fort. Wegen  $\langle \xi_1, \nu \rangle|_M = 0$  gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \xi_1, \nu \rangle'(p)(\xi_2(p)) = \langle \xi_1'(p)(\xi_2(p)), \nu(p) \rangle + \langle \xi_1(p), \nu'(p)(\xi_2(p)) \rangle \\ &= \langle \xi_1'(p)(\xi_2(p)), \nu_p \rangle + \langle \xi_1(p), L_p(\xi_2(p)) \rangle. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(p), L_p(\xi_2(p)) \rangle - \langle \xi_2(p), L_p(\xi_1(p)) \rangle &= \\ &= \langle \xi_2'(p)(\xi_1(p)) - \xi_1'(p)(\xi_2(p)), \nu_p \rangle = \underbrace{\langle [\xi_1, \xi_2](p), \nu_p \rangle}_{\in T_p M} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**2. Beweis.** Sei  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine lokale bei  $p$  zentrierte Parametrisierung. Mit  $\varphi_i$  bezeichnen wir die  $i$ -te partielle Ableitung von  $\varphi$ . Die  $\varphi_i(0)$  bilden für  $i = 1, \dots, m$  eine Basis von  $T_p M$  es gilt:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i(0), L_p \cdot \varphi_j(0) \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(t e_i), T_p \nu \cdot \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi(s e_j) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(t e_i), \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \nu(\varphi(s e_j)) \right\rangle \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(t e_i + s e_j), \nu(\varphi(s e_j)) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(t e_i + s e_j), \nu(\varphi(0 e_j)) \right\rangle \\ &= 0 - \langle \varphi_{i,j}(0), \nu_p \rangle, \end{aligned}$$

und ist somit offensichtlich symmetrisch in  $(i, j)$ , da die gemischten 2.ten partiellen Ableitungen  $\varphi_{i,j}$  von  $\varphi$  es sind. Da wir die  $\varphi_i(0)$  o.B.d.A. also orthonormal voraussetzen dürfen (setze  $\varphi$  mit der Inversen der Gramm-Schmidt-Orthonormalisierung von rechts zusammen) folgt die Symmetrie von  $L$ .  $\square$

### 9.6 Fundamentalformen.

Die symmetrische bilinear-Form  $\mathbb{I}_p(\xi_1, \xi_2) := \langle \xi_1, L_p(\xi_2) \rangle$  auf  $T_pM$  heißt 2. TE FUNDAMENTALFORM von  $M$ . Unter der 1. TE FUNDAMENTALFORM versteht man die Riemann-Metrik, d.h.  $\mathbb{I}(\xi, \eta) := \langle \xi, \eta \rangle$ . Wir haben in [9.3](#) gezeigt, daß  $K(\xi) = \mathbb{I}(\xi, \xi)$  gilt.

### 9.7 Spektrum der Weingarten-Abbildung.

Wir wollen jetzt die Extremalwerte der Normalkrümmung bestimmen. Wegen der Homogenität von  $L$  macht diese Aufgabe nur Sinn, wenn wir die Abbildung  $K$  auf die Einheitskugel  $S^{m-1} \subset T_pM$  einschränken. Damit  $\xi \in S^{m-1}$  ein kritischer Punkt ist, muß  $T_\xi K : T_\xi S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  konstant 0 sein, d.h.  $K'(\xi)(v) = 0$  für alle  $v \in T_\xi S^{m-1} = \xi^\perp$ . Es gilt:

$$K'(\xi)(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{I}(\xi + tv, \xi + tv) \stackrel{9.5}{=} 2\mathbb{I}(\xi, v) = 2\langle L\xi, v \rangle.$$

Es muß also  $L\xi \in T_xM$  normal stehen auf alle  $v$ , welche auf  $\xi$  normal stehen, d.h.  $L\xi$  muß proportional zu  $\xi$  sein. Dies zeigt den

### Satz von Rodriguez.

*Die kritischen Punkte  $\xi$  der Normalkrümmung sind genau die Eigenvektoren der symmetrischen linearen Abbildung  $L$ , und der zu  $\xi$  gehörige Eigenwert  $\lambda$  ist gegeben durch*

$$\lambda = \lambda\langle \xi, \xi \rangle = \langle \xi, \lambda\xi \rangle = \langle \xi, L\xi \rangle = \mathbb{I}(\xi, \xi) = K(\xi),$$

*die Normalkrümmung von  $M$  in Richtung von  $\xi$ . Im Fall  $m = 2$  sind die kritischen Punkte auch extremal, nämlich das Minimum und das Maximum von  $K(\xi)$  für  $|\xi| = 1$ . Für  $m > 2$  sind die kritischen Punkte nicht notwendig extremal.  $\square$*

### 9.8 Haupt- und Gauß-Krümmung.

Man nennt die Eigenwerte von  $L$  die HAUPTKRÜMMUNGEN und die zugehörigen Eigenvektoren HAUPTKRÜMMUNGSRICHTUNGEN. Da  $L$  symmetrisch ist, gibt es nur reelle Eigenwerte und dazu eine Orthonormalbasis von  $T_pM$  aus Eigenvektoren (Verwende:  $0 = \langle Av, w \rangle - \langle v, Aw \rangle = (\lambda - \mu)\langle v, w \rangle$ ). Seien  $K_i$  die Hauptkrümmungen und  $\xi_i$  eine Orthonormalbasis von zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen. Dann gilt nach Euler für die Normalkrümmung:

$$\begin{aligned} K(\xi) = \mathbb{I}(\xi, \xi) &= \mathbb{I}\left(\sum_i \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_j \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j\right) = \\ &= \sum_{i,j} \langle \xi, \xi_i \rangle \langle \xi, \xi_j \rangle \mathbb{I}(\xi_i, \xi_j) = \sum_i \langle \xi, \xi_i \rangle^2 K_i. \end{aligned}$$

Unter der GAUSS-KRÜMMUNG  $K \in \mathbb{R}$  im Punkt  $p$  versteht man das Produkt aller Hauptkrümmungen, also die Determinante von  $L$ .

Die MITTLERE KRÜMMUNG  $H \in \mathbb{R}$  ist das arithmetische Mittel der Hauptkrümmungen, also  $\frac{1}{m}$  der Spur von  $L$ .

Eine Kurve  $c$  in  $M$  heißt KRÜMMUNGSLINIE, falls ihre Ableitung in jedem Punkt eine Hauptkrümmungsrichtung ist.

Ein Vektor  $\xi \neq 0$  heißt ASYMPTOTENRICHTUNG, falls  $\mathbb{I}(\xi, \xi) = K(\xi) = 0$  ist. Eine Kurve  $c$  in  $M$  heißt ASYMPTOTENLINIE, falls ihre Ableitung in jedem Punkt eine Asymptotenrichtung ist.

Schließlich heißen zwei Vektoren  $\xi_1 \neq 0$  und  $\xi_2 \neq 0$  KONJUGIERT, falls  $\mathbb{I}(\xi_1, \xi_2) = 0$  ist.

Ein Punkt  $p$  heißt NABELPUNKT, falls alle Hauptkrümmungen gleich sind,  $L$  also ein Vielfaches der Identität ist. Dann ist die Normalkrümmung konstant gleich der mittleren Krümmung.

Sind alle Hauptkrümmungen 0, so spricht man von einem FLACHPUNKT.

### 9.9 Beispiele.

1. Hyperebene:  $\mathbb{R}^m := e_0^\perp \subset \mathbb{R}^n$ . Als Normalvektor verwenden wir  $e_0$ . Die Gaußabbildung ist somit konstant  $e_0$  und die Weingarten-Abbildung  $L = 0$ . Also sind die oben definierten Krümmungen alle gleich 0. Alle Punkte sind Flachpunkte und alle Richtungen Hauptkrümmungsrichtungen und Asymptotenrichtungen.
2. Kugel:  $S^m = \{x : |x| = R\} \subset \mathbb{R}^n$ . Hier können wir im Punkte  $x \in S^m$  als Normale  $\nu_x = \frac{1}{R}x$  nehmen. D.h. die Gaußabbildung ist die lineare Abbildung  $\frac{1}{R} \text{id}$  und somit ist dies auch die Weingarten-Abbildung. Also sind alle Punkte Nabelpunkte und alle Richtungen Hauptkrümmungsvektoren mit Hauptkrümmung  $\frac{1}{R}$ . Es gibt keine Asymptotenrichtungen. Die Gauß-Krümmung ist somit  $\frac{1}{R^m}$  und die mittlere Krümmung ist  $\frac{1}{R}$ .
3. Zylinder:  $M := \{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ . Als Normale in  $(x, t) \in M$  können wir  $\nu_{x,t} = (x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  verwenden. Der Tangentialraum von  $M$  in diesem Punkt ist also  $T_{(x,t)}M := \nu_{x,t}^\perp = \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \perp x\}$  und die Gaußabbildung ist die Einschränkung der linearen Abbildung  $\text{id} \oplus 0$  auf  $T_x S^{m-1} \times \mathbb{R}$ . Die Weingarten-Abbildung sieht somit genauso aus. Eine Hauptkrümmung ist also 0 mit Krümmungsrichtung  $(0, 1)$  und alle anderen Hauptkrümmungen sind 1. Die Erzeuger  $\{x\} \times \mathbb{R}$  sind die Asymptotenlinien. Eine Kurve  $c : s \mapsto (x(s), t(s))$  ist genau dann Krümmungslinie, wenn  $s \mapsto t(s)$  oder  $s \mapsto x(s)$  konstant ist.

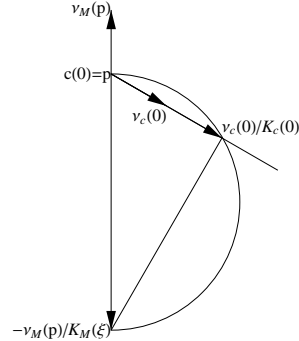
### 9.10 Lemma [35].

Ist  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve auf  $M$  mit  $c(0) = p \in M$  und  $c'(0) = \xi \in T_p M$ ,  $|\xi| = 1$ , so gilt:

1.  $(\nu \circ c)'(0) = L_p \cdot \xi$ ,  
d.h.  $L_p \cdot \xi$  mißt die infinitesimale Änderung von  $\nu$  längs  $c$ .
2.  $-\langle c''(0), \nu_p \rangle = \mathbb{I}(\xi, \xi) = \langle L_p \cdot \xi, \xi \rangle = K(\xi)$ ,  
d.h. die Normalkomponente der Beschleunigung hängt nur vom Geschwindigkeitsvektor ab, und ist die Normalkrümmung in dessen Richtung.



3. Es ist  $-K_M(\xi) = K_c(0)\langle \nu_M(p), \nu_c(0) \rangle = K_c(0) \cos \theta$ , wobei  $\theta$  der Winkel zwischen der Flächennormale  $\nu_M(p)$  und dem Hauptnormalenvektor  $\nu_c(0)$  (oder äquivalent der Schmiegeebene) von  $c$  in  $p$  ist und  $K_c(0) \geq 0$  die Krümmung der Raumkurve  $c$  ist.
4. Der Schmiegekreis an  $c$  in  $p$  hat seinen Mittelpunkt auf der Sphäre um  $p - \frac{1}{2K_M(\xi)}\nu_M(p)$  durch  $p$ .



**Beweis.** [1] ist gerade die Definition der Weingarten-Abbildung.

[2] Dazu differenzieren wir  $0 = \langle c'(t), \nu_M(c(t)) \rangle$  wie in [9.3] und erhalten

$$-\langle c''(0), \nu_M(c(0)) \rangle = \langle c'(0), (\nu \circ c)'(0) \rangle \stackrel{[1]}{=} \langle \xi, L \cdot \xi \rangle = \mathbb{II}(\xi, \xi) = K(\xi).$$

[3] Das Resultat folgt aus [2] wegen

$$-K_M(\xi) \stackrel{[2]}{=} \langle c''(0), \nu_M(p) \rangle \stackrel{[8.1]}{=} \langle K_c(0)\nu_c(0), \nu_M(p) \rangle = K_c(0)\langle \nu_c(0), \nu_M(p) \rangle.$$

[4] Nach [7.5] ist der Mittelpunkt des Schmiegekreises (die höherdimensionale Variante des Krümmungskreises) durch  $c(0) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$  gegeben. Nun betrachten wir das Dreieck mit den Ecken  $p$ ,  $p - \frac{1}{K(\xi)}\nu_M(p)$  und  $p + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$ . Dieses hat einen rechten Winkel bei  $p + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$ , denn nach [3] ist

$$\langle \nu_M(p), \nu_c(0) \rangle = -\frac{\mathbb{II}(\xi, \xi)}{K_c(0)} = -\frac{K_M(\xi)}{K_c(0)}$$

und somit

$$\left\langle \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0), \frac{1}{K_M(\xi)}\nu_M(p) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0) \right\rangle = -\frac{1}{K_c(0)K_M(\xi)}\frac{K_M(\xi)}{K_c(0)} + \frac{1}{K_c(0)^2} = 0.$$

Also liegt der Schmiegekreismittelpunkt auf dem Thaleskreis (oder in Wirklichkeit auf der Sphäre) mit der Strecke von  $p$  nach  $p - \frac{1}{K_M(\xi)}\nu_M(p)$  als Durchmesser.  $\square$

### 9.11 Formeln für parametrisierte Flächen.

Sei  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung der Hyperfläche  $M$ . Für einen Punkt  $p = \varphi(u) \in M$  ist eine Basis des Tangentialraums  $T_p M = \text{Bild } \varphi'(u)$  durch  $(\partial_1 \varphi(u), \dots, \partial_m \varphi(u))$  gegeben, wobei  $\partial_i \varphi(u) = \frac{\partial}{\partial u^i} \varphi(u)$  die  $i$ -te partielle Ableitung von  $\varphi$  in  $u$  ist, wir wollen dafür kurz  $\varphi_i(u)$  schreiben. Analog soll  $\varphi_{i,j}$  die zweite partielle Ableitung  $\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \varphi(u)$  sein. Es gilt  $\langle (\nu \circ \varphi)(u), \varphi_i(u) \rangle = 0$  für alle  $i$ . Als  $j$ -te partielle Ableitung davon erhalten wir:  $0 = \langle L \cdot \varphi_j, \varphi_i \rangle + \langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle$ , also  $\langle L \cdot \varphi_j, \varphi_i \rangle = -\langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle$ . Falls die  $\varphi_i$  orthonormal sind, hätten wir damit die Matrix von  $L$  bestimmt. Auch im allgemeinen Fall ist  $L$  durch alle diese inneren Produkte festgelegt. Um die Matrixdarstellung von  $L$  daraus zu erhalten benötigen wir folgendes Lemma aus der linearen Algebra.

### 9.12 Lemma.

Sei  $(g_1, \dots, g_m)$  eine Basis des euklidischen Vektorraums  $V$  und  $T : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Sei  $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$  und  $G = (g_{i,j})$  die zugehörige symmetrische positiv definite Matrix,  $[T] := (T_j^i)$  die Matrix von  $T$  bezüglich der Basis  $(g_1, \dots, g_m)$ , d.h.  $Tg_j = \sum_i T_j^i g_i$ , und schließlich  $A$  die Matrix mit Eintragungen  $A_j^i := \langle g_i, Tg_j \rangle$ . Dann gilt  $[T] = G^{-1} \cdot A$ .

**Beweis.** Es ist also  $Tg_j = \sum_i T_j^i g_i$ , wobei  $j$  die Spalten und  $i$  die Zeilen zählt, und somit

$$A_j^k := \langle g_k, Tg_j \rangle = \left\langle g_k, \sum_i T_j^i g_i \right\rangle = \sum_i \langle g_k, g_i \rangle T_j^i = \sum_i g_{k,i} T_j^i$$

Also ist  $A = G \cdot [T]$  und somit  $[T] = G^{-1} \cdot A$ .  $\square$

### 9.13 Folgerung (Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung).

Die Weingarten-Abbildung hat bezüglich der Basis  $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  folgende Matrixdarstellung

$$[L] = -(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)^{-1} \cdot (\langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle). \quad \square$$

### 9.14 Formeln für 2-Flächen.

Sei nun speziell  $m = 2$  (d.h.  $n = 3$ ) und  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(t, s) \mapsto \varphi(t, s)$  eine lokale Parametrisierung. Dann setzt man:

$$\begin{aligned} E &:= g_{11} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle, & F &:= g_{12} = \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle, & G &:= g_{22} = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle \\ \nu &:= \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, & |\varphi_t \times \varphi_s| &= \sqrt{|\varphi_t|^2 \cdot |\varphi_s|^2 - \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2} \\ e &:= -\langle \nu, \varphi_{t,t} \rangle, & f &:= -\langle \nu, \varphi_{t,s} \rangle, & g &:= -\langle \nu, \varphi_{s,s} \rangle. \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet daß die Länge eines Vektors der Form  $v \times w$ , also die Fläche des von  $v$  und  $w$  aufgespannten Parallelogramms wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned} |v \times w| &= |v| \cdot |w| \cdot \sin \angle(v, w) = |v| \cdot |w| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \angle(v, w)} \\ &= |v| \cdot |w| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{|v|^2 \cdot |w|^2}} = \sqrt{|v|^2 \cdot |w|^2 - \langle v, w \rangle^2}. \end{aligned}$$

Bezüglich der Basis  $(\varphi_t, \varphi_s)$  sehen die Fundamentalformen wie folgt aus:

$$[\text{I}] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\text{II}] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Die Weingarten-Abbildung ist:

$$\begin{aligned} [L] &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Gauß-Krümmung ist also

$$K = \det L = \frac{(eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

wie man auch aus  $K = \det L = \det(\mathbb{I}^{-1} \cdot \mathbb{II}) = \det \mathbb{II} / \det \mathbb{I}$  sieht, und die mittlere Krümmung ist

$$2H = \text{spur } L = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & * \\ * & Eg - Ff \end{pmatrix} = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}.$$

Die Hauptkrümmungen erhalten wir als Lösung der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 - \text{spur } L \cdot \lambda + \det L = 0$ , also

$$K_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen sind dann Vektoren  $\xi = a_t \varphi_t + a_s \varphi_s$  mit  $L(\xi) = K_i \xi$ , d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (EG - F^2) = \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \\ a_s \end{pmatrix} & [L] \begin{pmatrix} a_t \\ a_s \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot (EG - F^2) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_t & (Ge - Ff)a_t + (Gf - Fg)a_s \\ a_s & (Ef - Fe)a_t + (Eg - Ff)a_s \end{pmatrix} \\ &= a_t^2(Ef - Fe) + a_t a_s (Eg - Ge) + a_s^2(Fg - Gf) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_t^2 & -a_t a_s & a_s^2 \\ g & f & e \\ G & F & E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 9.15 Determinantenformeln für die Krümmung .

Wir wollen nun bestimmen, welche Größen INTRINSISCH sind, d.h. sich nicht ändern, wenn wir zu einer isometrischen Fläche übergehen. Das sind also jene Größen, die von einem in der Fläche lebenden Wesen erkannt werden können, ohne das sich diese eines umgebenden Raums bewußt sein müssen. Klarerweise können diese Längen und damit auch Winkel messen. D.h. die 1.te Fundamentalform ist intrinsisch. Nicht jedoch die 2.te Fundamentalform, da sie über die Ableitung des Normalenvektors definiert ist. Wir wissen also von vornherein von keiner der definierten Krümmungen, ob sie intrinsisch sind. Wenn wir Zylinder und Ebene vergleichen, so sehen wir, daß sowohl die Hauptkrümmungen als auch die mittlere Krümmung nicht intrinsisch sind. Wir wollen nun zeigen, daß die Gaußkrümmung es dennoch ist. Dazu benötigen wir zuerst Formeln für  $e$ ,  $f$  und  $g$ , in welchen  $\nu$  nicht vorkommt:

$$\begin{aligned} e &= -\langle \nu, \varphi_{t,t} \rangle = -\left\langle \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, \varphi_{t,t} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle \varphi_t \times \varphi_s, \varphi_{t,t} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t}) \\ \text{sowie } f &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s}) \text{ und } g = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s}). \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, daß  $|\varphi_t \times \varphi_s| = \sqrt{EG - F^2}$  nach [9.14](#).

Wir wollen nun versuchen die Gauß-Krümmung allein durch die Koeffizienten der 1.ten Fundamentalform, sowie deren partiellen Ableitungen darzustellen. Sei dazu  $D := \sqrt{EG - F^2}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}
KD^4 &\stackrel{9.14}{=} (eg - f^2)D^2 = (-eD)(-gD) - (-fD)^2 \\
&= \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t}) \cdot \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s}) - \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})^2 \\
&= \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t})^* \cdot (\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s})) - \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})^* \cdot (\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})) \\
&= \det \begin{pmatrix} \varphi_t^* \varphi_t & \varphi_t^* \varphi_s & \varphi_t^* \varphi_{s,s} \\ \varphi_s^* \varphi_t & \varphi_s^* \varphi_s & \varphi_s^* \varphi_{s,s} \\ \varphi_{t,t}^* \varphi_t & \varphi_{t,t}^* \varphi_s & \varphi_{t,t}^* \varphi_{s,s} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \varphi_t^* \varphi_t & \varphi_t^* \varphi_s & \varphi_t^* \varphi_{t,s} \\ \varphi_s^* \varphi_t & \varphi_s^* \varphi_s & \varphi_s^* \varphi_{t,s} \\ \varphi_{t,s}^* \varphi_t & \varphi_{t,s}^* \varphi_s & \varphi_{t,s}^* \varphi_{t,s} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{s,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle \end{pmatrix} \\
&\quad - \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{t,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{t,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{t,s} \rangle \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{s,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle - \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{t,s} \rangle \end{pmatrix} \\
&\quad - \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{t,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{t,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle & 0 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} E & F & F_s - \frac{1}{2}G_t \\ F & G & \frac{1}{2}G_s \\ \frac{1}{2}E_t & F_t - \frac{1}{2}E_s & F_{t,s} - \frac{1}{2}(E_{s,s} + G_{t,t}) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_s \\ F & G & \frac{1}{2}G_t \\ \frac{1}{2}E_s & \frac{1}{2}G_t & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wegen des Entwicklungssatzes von Matrizen und weil:

$$\begin{aligned}
E &= \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle, & G &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle, & F &= \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle \\
E_t &= 2\langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle, & G_t &= 2\langle \varphi_{s,t}, \varphi_s \rangle, & F_t &= \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{s,t} \rangle \\
E_s &= 2\langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle, & G_s &= 2\langle \varphi_{s,s}, \varphi_s \rangle, & F_s &= \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle, \\
F_s - \frac{1}{2}G_t &= \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle, & F_t - \frac{1}{2}E_s &= \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle, \\
\frac{1}{2}E_{s,s} &= \langle \varphi_{t,s,s}, \varphi_t \rangle + \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{t,s} \rangle, \\
F_{t,s} &= \langle \varphi_{t,t,s}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle + \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{s,t} \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{s,t,s} \rangle, \\
F_{t,s} - \frac{1}{2}E_{s,s} &= \langle \varphi_{t,t,s}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle, \\
\frac{1}{2}G_{t,t} &= \langle \varphi_{s,t,t}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t} \rangle, \\
F_{t,s} - \frac{1}{2}(E_{s,s} + G_{t,t}) &= \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle - \langle \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t} \rangle.
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren der Determinanten obiger Formel für  $K$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}
4(EG - F^2)^2 K &= E(E_s G_s - 2F_t G_s + G_t^2) \\
&\quad + F(E_t G_s - E_s G_t - 2E_s F_s + 4F_t F_s - 2F_t G_t) \\
&\quad + G(E_t G_t - 2E_t F_s + E_s^2) \\
&\quad - 2(EG - F^2)(E_{s,s} - 2F_{t,s} + G_{t,t}).
\end{aligned}$$

Eine symmetrischere Formel für  $K$  ist die folgende:

$$K = -\frac{1}{4D^4} \det \begin{pmatrix} E & E_t & E_s \\ F & F_t & F_s \\ G & G_t & G_s \end{pmatrix} - \frac{1}{2D} \left( \partial_s \frac{E_s - F_t}{D} + \partial_t \frac{G_t - F_s}{D} \right)$$

wobei wieder  $D := \sqrt{EG - F^2}$ . Diese kann leicht durch Auflösen der Determinante und durch Differenzieren verifiziert werden.

### 9.16 Theorema Egregium [12].

*Sind zwei Flächen aufeinander abwickelbar, d.h. sie sind (lokal) isometrisch, so haben sie in entsprechenden Punkten die gleiche Gauß-Krümmung. Die Gauß-Krümmung  $K$  ist also ein intrinsischer Begriff, d.h. sie hängt nur von der Metrik der Fläche und nicht vom umgebenden Raum ab.*

Für eine partielle Umkehrung siehe [11.11].

**Beweis.** Wegen obiger Formel in [9.15] hängt die Gauß-Krümmung nur von den Koeffizienten der Riemann-Metrik sowie deren 1.ten und 2.ten partiellen Ableitungen ab. Diese sind aber für zwei isometrische Flächen gleich, denn für eine Parametrisierung  $\varphi$  der einen ist  $\psi = g \circ \varphi$  eine Parametrisierung der anderen, wo  $g$  die lokale Isometrie ist, also ist  $\langle T_p g(\xi_1), T_p g(\xi_2) \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ . Wählt man nun für  $\xi_i = T\varphi \circ \eta_i$ , so folgt das Resultat.  $\square$

### 9.17 Lemma (Jacobi-Gleichung).

*Sind  $(t, s)$  geodätische Koordinaten auf  $M$  (d.h. für die zugehörige Parametrisierung gilt  $E = 1, F = 0$ ), so erfüllt die Gauß-Krümmung die JACOBI-GLEICHUNG:*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \sqrt{G}$$

Wir werden in [10.9] und [10.10] zeigen, daß solche Koordinaten immer existieren. Beachte, daß die Bedingung  $E = 1$  besagt, daß die Parameterlinien  $t \mapsto \varphi(t, s)$  nach Bogenlänge parametrisiert sind und  $F = 0$  besagt, daß die anderen Parameterlinien  $s \mapsto \varphi(t, s)$  dazu orthogonal stehen.

**Beweis.** Obige Determinanten-Formel für  $K$  liefert in diesem Fall:

$$\begin{aligned} K \cdot G^2 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}G_t \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_s \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}G_{t,t} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_t \\ 0 & \frac{1}{2}G_t & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}GG_{t,t} + \frac{1}{4}G_t^2 \\ \Rightarrow K &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \sqrt{G} \quad \square \end{aligned}$$

Da wir gezeigt haben, daß die Gauß-Krümmung eine intrinsische Größe für Flächen ist, liegt es nahe, daß wir die Determinantenformel aus [9.15] bzw. die Jacobi-Gleichung aus [9.17] auch verwenden können um eine entsprechende Krümmung für allgemeine Riemann'sche Flächen zu definieren. Wir müßten dazu allerdings deren Invarianz unter Koordinatentransformationen nachweisen, was wir in [14.8] auch machen werden.

### 9.18 Definition (Drehfläche).

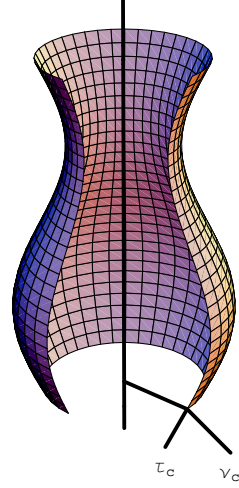
Unter einer DREHFLÄCHE versteht man jenes Gebilde, das entsteht, wenn eine Kurve in der  $(x, z)$ -Ebene um die  $z$ -Achse gedreht wird. Sei also  $c : s \mapsto (r(s), z(s))$  diese Kurve, von der wir annehmen dürfen, daß sie nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist die davon erzeugte Drehfläche  $M$  durch

$$M := \{(r(s)x, z(s)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : x \in S^{m-1}\}$$

gegeben. Ist also speziell  $m = 2$ , so können wir  $S^1$  durch  $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$  parametrisieren und erhalten somit eine **Parametrisierung**

$$\varphi : (s, \theta) \mapsto (r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, z(s))$$

von  $M$ .



Wir wollen die **Gauß-Krümmung** berechnen. Die partiellen Ableitungen von  $\varphi$  sind

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s(s, \theta) &= (r'(s) \cos \theta, r'(s) \sin \theta, z'(s)) \\ \varphi_\theta(s, \theta) &= (-r(s) \sin \theta, r(s) \cos \theta, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} E = r'(s)^2 + z'(s)^2 = 1 \\ F = 0 \\ G = r(s)^2 \end{cases}$$

$$\stackrel{\boxed{9.17}}{\implies} K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 \sqrt{G} = -\frac{1}{r(s)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 (r(s)) = -\frac{r''(s)}{r(s)}.$$

Man kann den Satz [28, 52.6] von Dupin verwenden um die **Krümmungslinien** zu bestimmen. Es sei

$$\Psi(u^1, u^2) := c(u^1) + u^2 \nu(u^1) = (r(u^1) - u^2 z'(u^1), z(u^1) + u^2 r'(u^1)),$$

wobei  $\nu$  die Einheitsnormale an  $c$  bezeichnet. Dann ist

$$\partial_1 \Psi(u^1, u^2) = c'(u^1) + u^2 \nu'(u^1) = (1 - u^2 K(u^1)) \tau(u^1) \perp \nu(u^1) = \partial_2 \Psi(u^1, u^2).$$

Folglich erfüllt  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi(u^1, u^2, u^3) &:= \\ &= ((r(u^1) - u^2 z'(u^1)) \cos(u^3), (r(u^1) - u^2 z'(u^1)) \sin(u^3), z(u^1) + u^2 r'(u^1)), \end{aligned}$$

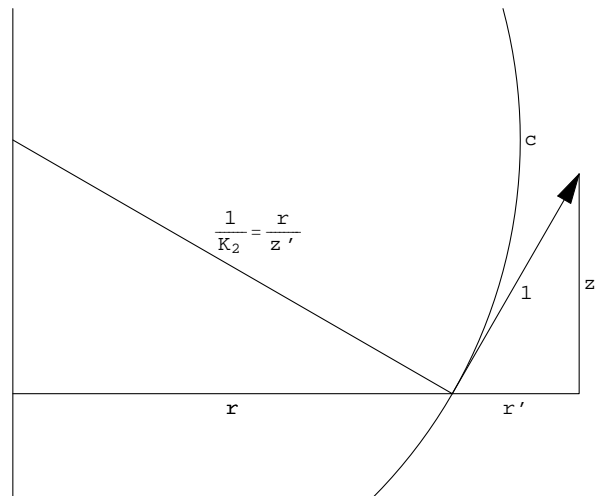
die Voraussetzungen des Satzes von Dupin. Damit sind sowohl die MERIDIANE  $s \mapsto \Phi(s, 0, \theta) = \varphi(s, \theta)$  als auch die BREITENKREISE  $\theta \mapsto \Phi(s, 0, \theta) = \varphi(s, \theta)$  Krümmungslinien.

**Hauptkrümmung in Richtung der Meridiane:** Ein Meridian ist der Schnitt von  $M$  mit einer Ebene durch die  $z$ -Achse. Die Normalkrümmung in Richtung  $\xi$  des Meridians ist also nach [9.3] gerade die Krümmung des Meridians bzw. der erzeugenden Kurve  $c$ , wenn wir  $-\nu_c = (z', -r')$  für  $\nu_M$  verwenden (siehe auch [9.10.3]). Daß dies eine Hauptkrümmung ist, sieht man übrigens auch direkt: Der Normalvektor  $\nu_M$  an die Fläche in einem Punkt des Meridians liegt in dieser Ebene. Wenn wir ihn also in Richtung  $\xi$  des Meridians differenzieren, liegt das Resultat  $L\xi$  wieder in der Ebene, muß also proportional zu  $\xi$  sein. Da  $c$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt nach [7.5]:  $(r'', z'') = \tau' = K_c \cdot \nu = K_c(-z', r')$  und somit ist  $K_1 := K(\xi) = K_c = -\frac{r''}{z'} = \frac{z''}{r'}$ .

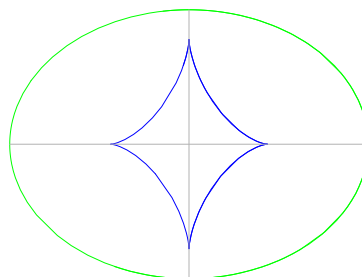
**Hauptkrümmung in Richtung der Breitenkreise:** Daß die Breitenkreise ebenfalls Krümmungslinien sind, folgt wegen [9.8] auch direkt daraus, daß sie normal auf die Meridiane stehen. Für die zweite Hauptkrümmung ergibt sich somit:  $K_2 = \frac{K}{K_1} = \frac{z'}{r} = -\frac{r''}{z''} \frac{r'}{r}$ . Der Satz [9.10.3] von Meusnier liefert aber auch eine geometrische Methode die zweite Hauptkrümmung und damit die Gauß-Krümmung zu berechnen: Die Einheitsnormale  $\nu_M$  an die Fläche ist bis auf eine Drehung um die  $z$ -Achse um den Winkel  $\theta$  gerade  $(z', 0, -r')$ . Die Hauptnormale an den Breitenkreis ist der ebenso gedrehte Vektor  $(-1, 0, 0)$ . Die Krümmung des Breitenkreises ist  $\frac{1}{r}$  und die Normalkrümmung in Richtung seiner Tangente also

$$K_2 \stackrel{\text{9.10.3}}{=} -\frac{1}{r} \langle (z', 0, -r'), (-1, 0, 0) \rangle = \frac{z'}{r}.$$

**Nabelpunkte:** Diese sind durch die Gleichung  $K_1 = K_2$  gegeben, also durch  $-\frac{r''}{z'} = \frac{z'}{r}$ , oder äquivalent  $-r''r = (z')^2 = 1 - (r')^2$ . Geometrisch liegt der Krümmungsmittelpunkt der Schnittkurve mit der von  $\nu_M$  und  $\varphi_\theta$  erzeugten Ebene durch den Punkt  $\varphi(s, 0)$  auf der Normalen  $\nu_c(s)$  im Abstand  $1/K_2 = \frac{r}{z'}$  also (wegen ähnlicher Dreiecke) am Schnittpunkt mit der Drehachse. Es ist somit  $\varphi(s, 0)$  (und damit  $\varphi(s, \theta)$  für alle  $\theta$ ) ein Nabelpunkt genau dann, wenn dieser Schnittpunkt auch der Krümmungsmittelpunkt des Meridians  $c$  an der Stelle  $s$  ist.



Z.B. sind die einzigen Nabelpunkte eines Rotationsellipsoids (das keine Sphäre ist) somit die Pole.



Evolute der Ellipse

**Asymptotenrichtungen:**  $\xi = \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta$  ist genau dann so eine Richtung, wenn

$$\begin{aligned} 0 = K(\xi) &= \langle \xi, L\xi \rangle = \langle \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta, \xi^1 K_1 \varphi_s + \xi^2 K_2 \varphi_\theta \rangle \\ &= (\xi^1)^2 K_1 E + (\xi^2)^2 K_2 G + \xi^1 \xi^2 (K_1 + K_2) F \\ &= K_1 (\xi^1)^2 + G K_2 (\xi^2)^2 \end{aligned}$$

gilt. Zusammen mit

$$\begin{aligned} 1 = |\xi|^2 &= \langle \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta, \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta \rangle \\ &= E(\xi^1)^2 + G(\xi^2)^2 + 2F\xi^1\xi^2 \\ &= (\xi^1)^2 + G(\xi^2)^2 \end{aligned}$$

hat dieses lineare Gleichungssystem in  $(\xi^1)^2$  und  $(\xi^2)^2$  genau dann eine eindeutige Lösung, wenn

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} K_1 & G K_2 \\ 1 & G \end{pmatrix} = G \cdot (K_1 - K_2),$$

also  $K_1 \neq K_2$  gilt, und zwar  $(\xi^1)^2 := \frac{K_2}{K_2 - K_1}$  und  $(\xi^2)^2 := -\frac{1}{G} \frac{K_1}{K_2 - K_1}$ . Nur für  $K = K_1 \cdot K_2 \leq 0$  existieren dazu reelle Lösungen  $(\xi^1, \xi^2)$ .

### 9.19 Beispiel.

Wir betrachten den Torus mit Radius  $A$  der Seele und Radius  $a < A$  der Meridiane. Dieser wird durch Rotation der bogenlängenparametrisierten Kurve

$$c(s) := (r(s), z(s)) := (A, 0) + a \left( \cos\left(\frac{s}{a}\right), \sin\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

erzeugt. Folglich ist  $K_1 := \frac{1}{a} > 0$  die Hauptkrümmung in Richtung der Meridiane, die Gaußkrümmung

$$K = -\frac{r''(s)}{r(s)} = \frac{\cos(s/a)/a}{A + a \cos(s/a)},$$

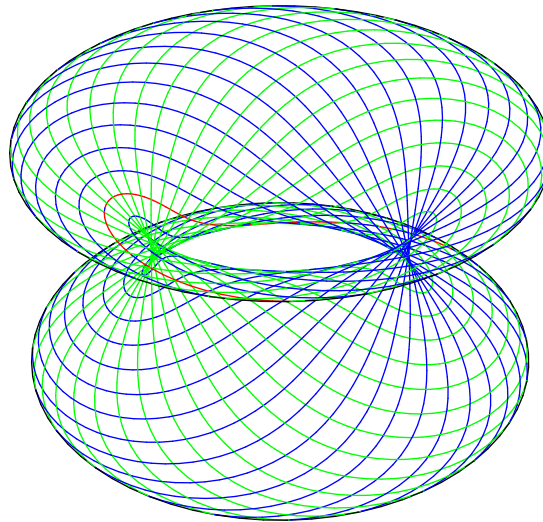
und schließlich die Hauptkrümmung in Richtung der Breitenkreise

$$K_2 := \frac{K}{K_1} = \frac{\cos(s/a)}{A + a \cos(s/a)} = \frac{1}{a + A/\cos(s/a)}.$$

Somit verschwindet die Gaußkrümmung am Nord- und am Südpolkreis ( $s/a = \pm\pi/2$ ). Sie ist positiv auf dem ÄUSSEREN HEMI-TORUS (gegeben durch  $|s/a| < \pi/2$ ) und negativ am inneren. Am äußeren Hemi-Torus existieren keine Asymptotenrichtungen. Die POL-KREISE sind Asymptotenlinien. In jedem Punkt des inneren Hemi-Torus existieren genau zwei Asymptotenrichtungen  $\xi = \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta$  mit

$$\begin{aligned} (\xi^1)^2 &= \frac{K_2}{K_2 - K_1} = \frac{\frac{1}{a + A/\cos(s/a)}}{\frac{1}{a + A/\cos(s/a)} - \frac{1}{a}} = -\frac{a \cos(s/a)}{A} \\ (\xi^2)^2 &= \frac{1}{G} \frac{K_1}{K_1 - K_2} = \frac{1}{A(A + a \cos(s/a))} \end{aligned}$$





Parametrisierung mittels Asymptotenlinien

### 9.20 Drehflächen konstanter Gauß-Krümmung.

Um Drehflächen zu finden, welche konstante Gauß-Krümmung  $K = -\frac{r''}{r}(s)$  haben, müssen wir also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} r''(s) + Kr(s) &= 0 \\ r'(s)^2 + z'(s)^2 &= 1 \end{aligned}$$

lösen. Die erste Gleichung hat als lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung einen 2-dimensionalen linearen Lösungsraum.

Der **Fall  $K = 0$**  ist nicht sehr interessant, denn dann ist  $r'' = 0$ , d.h.  $r(s) = as + b$  und somit  $z(s) = \sqrt{1-a^2} s$ . Also ist die Lösung ein Kegel für  $0 < a < 1$  und in den degenerierten Fällen  $a = 0$  ein Zylinder, bzw. für  $a = 1$  eine Ebene.

Für  $K \neq 0$  erhält man ein Erzeugendensystem des Lösungsraums durch den Ansatz  $r(s) := e^{\lambda s}$ , woraus sich  $\lambda^2 = -K$  ergibt.

Betrachten wir zuerst den **Fall  $K > 0$** , dann ist  $s \mapsto e^{\pm i\sqrt{K}s}$  ein komplexes Erzeugendensystem der Lösungen. Die allgemeine reelle Lösung ist also  $r : s \mapsto a \cos(\sqrt{K}s) + b \sin(\sqrt{K}s)$ . Wenn wir  $(a, b)$  in Polarkoordinaten darstellen, also

$$(a, b) =: r_0 \left( \cos(-\sqrt{K}s_0), \sin(-\sqrt{K}s_0) \right)$$

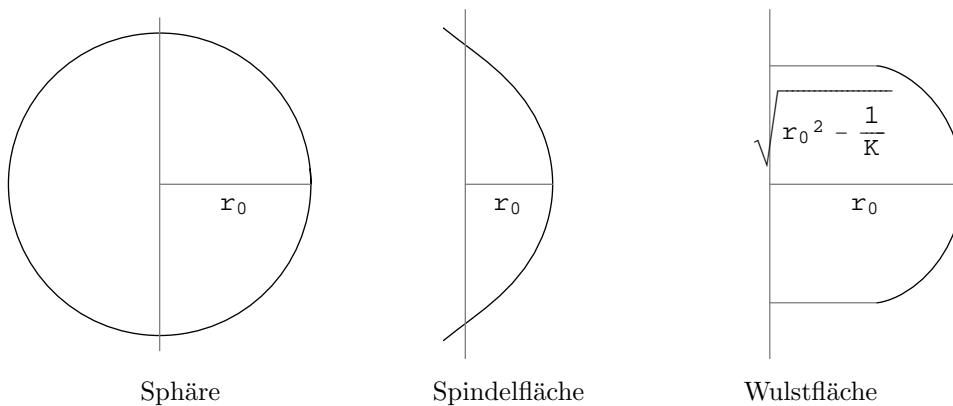
mit  $r_0 \geq 0$  setzen, dann ist

$$r(s) = r_0 \cos(\sqrt{K}(s - s_0)).$$

O.B.d.A. ist  $s_0 = 0$  (nach einer Zeitverschiebung) und  $r_0 > 0$  (für  $r_0 = 0$  parametrisiert  $\varphi$  keine Fläche). Folglich ist

$$z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2} d\sigma = \int_0^s \sqrt{1 - r_0^2 K \sin^2(\sqrt{K}\sigma)} d\sigma,$$

ein Legendre-Integral. Für  $r_0^2 K = 1$  liefert das eine Sphäre, für  $r_0^2 K < 1$  eine sogenannte SPINDELFLÄCHE und für  $r_0^2 K > 1$  eine WULSTFLÄCHE. Diese sind alle lokal isometrisch (siehe [11.11](#)), aber nicht ineinander durch Bewegungen überführbar.

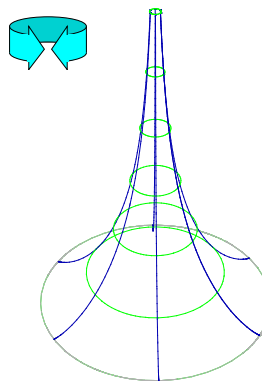
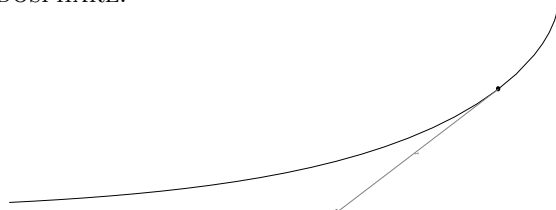


Nun betrachten wir den **Fall  $K < 0$** , dann ist  $r(s) = ae^{\sqrt{-K}s} + be^{-\sqrt{-K}s}$  mit beliebigem  $a$  und  $b$  die allgemeine Lösung.

Falls  $ab = 0$ , so können wir durch eine Spiegelung der Zeitachse erreichen, daß  $a = 0$  ist. Durch eine Zeitverschiebung um  $-\ln(b/\sqrt{-K})$  können wir  $b = 1/\sqrt{-K}$  erreichen und durch eine Streckung um  $\sqrt{-K}$  und gleichzeitige Umparametrisierung mit Faktor  $1/\sqrt{-K}$  ist die Lösung dann

$$r(s) = e^{-s}, \text{ und somit } z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2\sigma}} d\sigma \text{ für } s \geq 0.$$

Das ist die Bogenlängen-Parametrisierung der Traktrix. Die zugehörige Drehfläche heißt PSEUDOSPHERE.



Man kann  $z(s)$  explizit bestimmen:

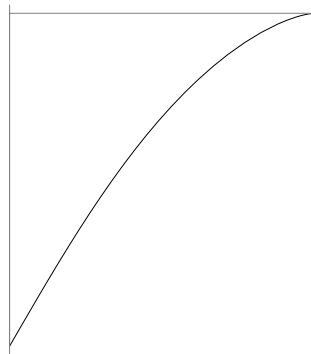
$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{-2s}} ds &= \int -\sqrt{1 - r^2} \frac{dr}{r} = \int -\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2} \frac{1+u^2}{2u} \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2} du \\ &= \int \frac{(1-u^2)^2}{u(1+u^2)^2} du = \int \frac{1}{u} - \frac{4u}{(1+u^2)^2} du \\ &= c + \ln u + \frac{2}{1+u^2} = c + \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r} \right) + 1 - \sqrt{1-r^2} \\ &= c + 1 + \operatorname{Arcosh} \left( \frac{1}{r} \right) - \sqrt{1-r^2}, \\ \text{also } z(s) &= \operatorname{Arcosh} \left( \frac{1}{r(s)} \right) - \sqrt{1-r(s)^2} \end{aligned}$$

Im Fall  $ab \neq 0$  kann man erreichen, daß  $a = -b$  oder  $a = b$  ist: Dazu ersetzen wir  $s$  durch  $s - c$ , erhalten  $r(s - c) = a e^{-\sqrt{-K}c} e^{\sqrt{-K}s} + b e^{\sqrt{-K}c} e^{-\sqrt{-K}s}$  und mit  $e^{2\sqrt{-K}c} := \left| \frac{a}{b} \right|$  ist  $|a e^{-\sqrt{-K}c}| = |b e^{\sqrt{-K}c}|$ .

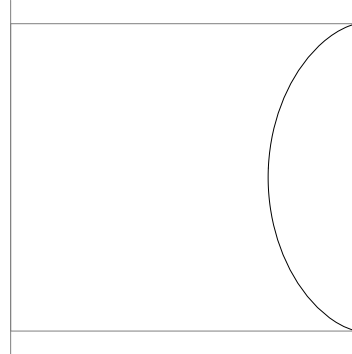
Die entstehenden Flächen

$$\begin{aligned} r(s) &:= a \sinh(\sqrt{-K}s), \text{ und somit } z(s) := \int_0^s \sqrt{1 + a^2 K \cosh^2(\sqrt{-K}\sigma)} d\sigma; \\ r(s) &:= a \cosh(\sqrt{-K}s), \text{ und somit } z(s) := \int_0^s \sqrt{1 + a^2 K \sinh^2(\sqrt{-K}\sigma)} d\sigma \end{aligned}$$

nennt man FLÄCHEN VOM KEGELTYP bzw. vom KEHLTYP.



Kegeltyp



Kehltyp

### 9.21 Geodätische Koordinaten der Poincaré'schen Halbebene.

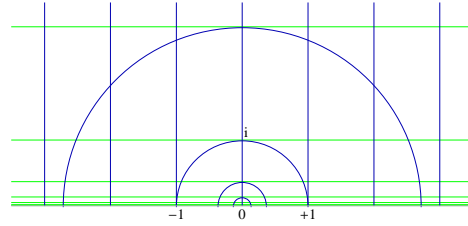
Die POINCARÉ'SCHE HALBEBENE  $M$  ist die obere Halbebene  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  versehen mit der Riemann-Metrik  $g : (ds)^2 = \frac{1}{y^2}((dx)^2 + (dy)^2)$ .

Wir wollen geodätische Koordinaten für sie finden. In [10.10](#) werden wir eine Methode kennenlernen diese mittels Geodäten zu konstruieren. Es zeigt sich, daß die Geodäten die Kreise mit Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse sind, also jene Kreise, die die  $x$ -Achse rechtwinklig schneiden.

Die Kreise durch  $\infty$  sind dabei die zur  $y$ -Achse parallele Geraden. Wir wollen letztere nach Bogenlänge parametrisieren. Sei also  $c(t) := (x, t)$ . Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) = \int |c'(t)|_{c(t)} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln(t)$$

mit Umkehrfunktion  $t(s) = e^s$ .



Als Parametrisierung von  $M$  verwenden wir nun

$$\varphi : (s, x) \mapsto (x, e^s).$$

Die Ableitung von  $\varphi$  ist somit

$$\varphi'(s, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^s & 0 \end{pmatrix}$$

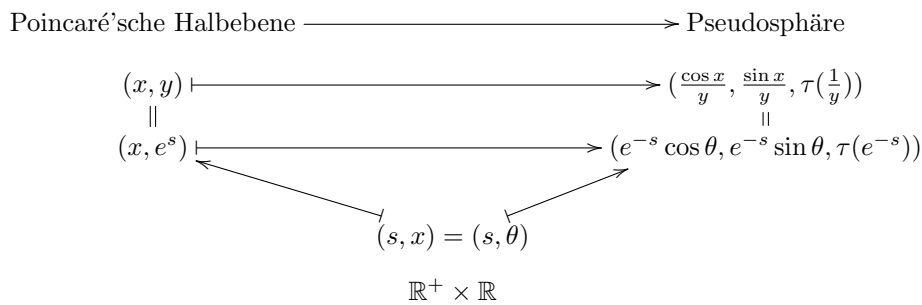
und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir:

$$E = g(\partial_s \varphi, \partial_s \varphi) = 1, \quad F = g(\partial_s \varphi, \partial_x \varphi) = 0, \quad G = g(\partial_x \varphi, \partial_x \varphi) = e^{-2s}.$$

Es gilt somit nach 9.17

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 \sqrt{G} = -1, \quad \sqrt{G}(0, x) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{G}(0, x) = -1.$$

Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform bzgl. dieser Koordinaten stimmen mit den in 9.18 konstruierten  $(G(s, \theta) = r(s)^2 = e^{-2s})$  für die Pseudosphäre aus 9.20 überein, also erhalten wir wie folgt eine Isometrie der Teilmenge  $\{(x, y) : y \geq 1\}$  der Poincaré'sche Halbebene auf die Pseudosphäre:



Dies kann auch mit einer direkten Rechnung verifiziert werden.

**9.22 Geodätische Koordinaten der hyperbolische Scheibe.**

Die hyperbolische Scheibe ist nach 2.6 die offene Einheitskreis  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  versehen (bis auf den konstanten Faktor 4) mit der Riemann-Metrik

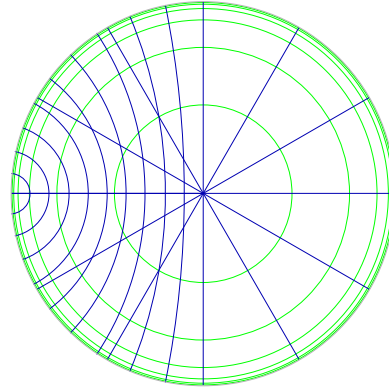
$$g : (ds)^2 = \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2} ((dx)^2 + (dy)^2).$$

Wieder wollen wir die Methode aus [10.10](#) verwenden um geodätische Koordinaten zu bestimmen.

Es sind die Geodäten jene Kreise (und Geraden), die den Einheitskreis orthogonal treffen. Wir wollen die Geodäten durch 0 wieder nach Bogenlänge parametrisieren. Sei also  $c(t) := (t, 0)$ . Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) = \int |c'(t)|_{c(t)} dt = \int \frac{2 dt}{1-t^2} = \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right)$$

mit Umkehrfunktion  $t(s) = \frac{e^s - 1}{e^s + 1} = \tanh\left(\frac{s}{2}\right)$ .



Als Parametrisierung von  $\mathbb{D}$  verwenden wir somit

$$\varphi : (s, \theta) \mapsto \left( \theta, \tanh\left(\frac{s}{2}\right) \right) \mapsto \left( \tanh\left(\frac{s}{2}\right) \cos \theta, \tanh\left(\frac{s}{2}\right) \sin \theta \right).$$

Deren Ableitung ist

$$\varphi'(s, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{s}{2}\right) & -\tanh\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \sin \theta \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{s}{2}\right) & \tanh\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \cos \theta \end{pmatrix}$$

und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir:

$$E = g(\partial_s \varphi, \partial_s \varphi) = 1, \quad F = g(\partial_s \varphi, \partial_\theta \varphi) = 0, \quad G = g(\partial_\theta \varphi, \partial_\theta \varphi) = \frac{\sinh^2(s)}{2}.$$

Dies sind gerade die Koeffizienten der ersten Fundamentalform einer Fläche von Kehltyp für  $a := 1/\sqrt{2} =: -b$  und  $K := -1$  mit Koordinaten

$$r(s) := \frac{1}{2\sqrt{2}} (e^s - e^{-s}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(s) \text{ und } z(s) := \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2} d\sigma$$

aus [9.20](#). Also erhalten wir analog zu [9.21](#) eine lokale Isometrie der hyperbolischen Scheibe mit einer Fläche von Kehltyp und damit (wie wir in [11.11](#) zeigen werden) auch mit der Pseudosphäre.

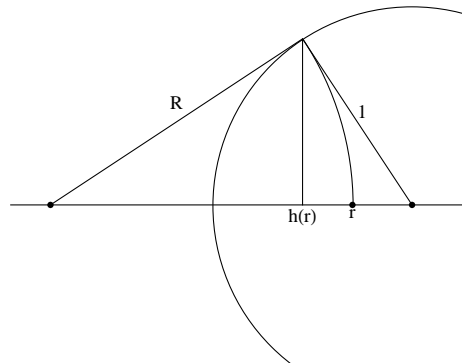
**9.23 Eine andere Beschreibung der hyperbolischen Scheibe .**

Wir wollen die hyperbolische Scheibe nun durch einen Diffeomorphismus so verzerren, daß die Geodäten genau die Geraden werden.

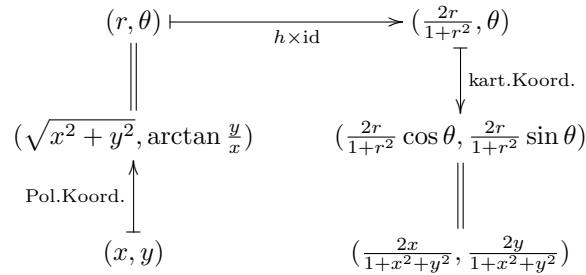
Dieser Diffeomorphismus soll die Scheibe invariant lassen und ihren Mittelpunkt und ihren Rand punktweise fix lassen.

Dazwischen müssen wir folglich die Kreise die den Rand orthogonal treffen so deformieren, daß aus Ihnen Geraden durch die gleichen Schnittpunkte mit den Rand werden.

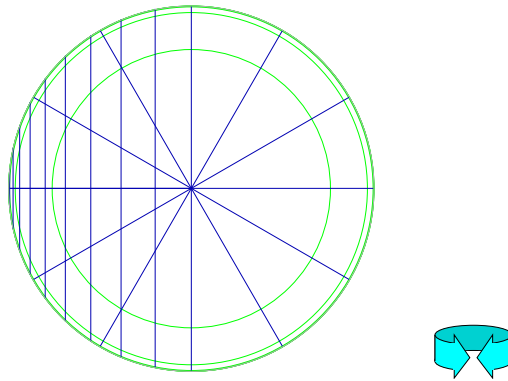
Die elementar-geometrische Überlegung  $h(r) : 1 = 1 : (R+r)$  und  $R^2 + 1 = (R+r)^2$  und somit  $R = \frac{1-r^2}{2r}$  zeigt, daß dies in Polarkoordinaten durch  $h \times \text{id} : (r, \theta) \mapsto \left( \frac{2r}{1+r^2}, \theta \right)$  erreicht wird.



Unseren gewünschten Diffeomorphismus erhalten wir also durch folgende Zusammensetzung:



Beachte noch, daß die Ableitung von  $r \mapsto \frac{2r}{1+r^2}$  durch  $r \mapsto \frac{2(1-r^2)}{(1+r^2)^2}$  und die Umkehrfunktion durch  $\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r} \leftarrow r$  gegeben ist (die Wahl der Lösung der quadratische Gleichung ergibt sich dabei aus  $r < \frac{2r}{1+r^2}$ ). Beachte aber, daß wir auf diese Weise keine geodätischen Koordinaten erhalten, denn dazu müßten wir die radialen Geodäten wie in [9.22](#) zurückparametrisieren.



**9.24 Isomorphie von Poincaré’scher Halbebene und hyperbolischer Scheibe.**

Wir betrachten die Möbius-Transformation (siehe [\[29, 2.16, 2.30\]](#))  $\mu : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , die folgende speziellen Werte hat:

$$0 \mapsto -i, \quad i \mapsto 0, \quad \pm 1 \mapsto \pm 1, \quad \infty \mapsto i.$$

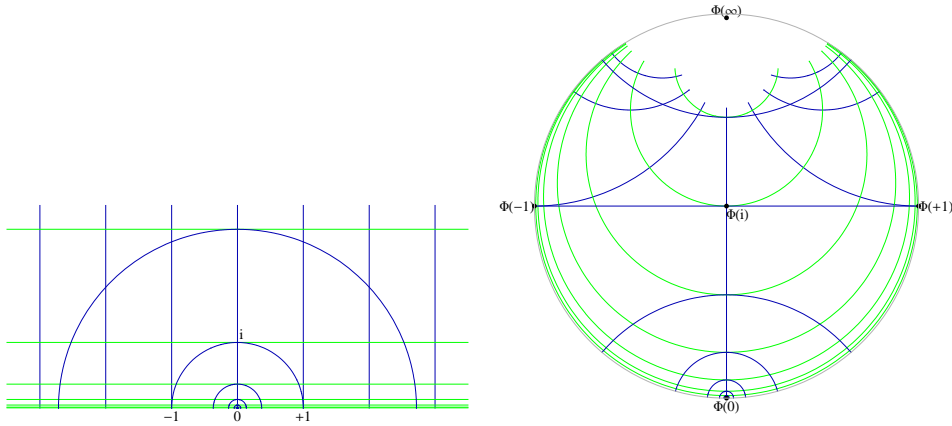
Aus diesen Gleichungen erhalten wir:  $d = ib, b = -ia, c = -ia$  und wegen  $1 = ad - bc = 2a^2$  schließlich  $a = d = 1/\sqrt{2}$  und  $b = c = -i/\sqrt{2}$ , d.h. (wenn wir mit  $i\sqrt{2}$  erweitern)

$$\mu : z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Sie bildet die obere Halbebene auf die Einheitsscheibe ab. Ihre Umkehrfunktion ist durch  $w \mapsto (w + i)/(iw + 1)$  gegeben. Wenn wir nun die hyperbolische Metrik aus [9.22](#) auf  $\mathbb{D}$  mittels  $\mu$  auf die obere Halbebene zurückziehen, so erhalten wir die Metrik:

$$|v|_z := |\mu'(z)v|_{\mu(z)} = \frac{2|\mu'(z)|}{1 - |\mu(z)|^2} |v| = \frac{2|v|}{i(\bar{z} - z)} = \frac{|v|}{\Im(z)}.$$

Dies ist die Metrik der Poincaré’schen Halbebene aus [9.21](#). Also ist die Poincaré’sche Halbebene isometrisch diffeomorph zur hyperbolischen Scheibe und mit [9.21](#) und [9.22](#) auch die Pseudosphäre lokal isometrisch mit einer Fläche von Kehltyp.



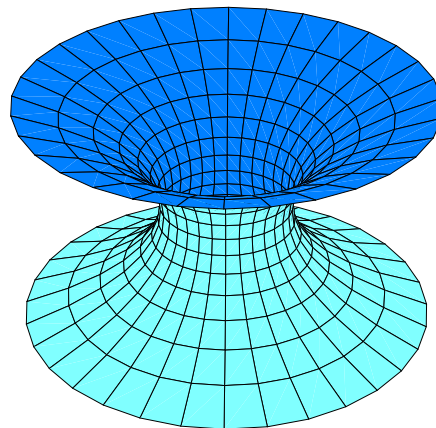
**9.25 Minimale Drehflächen.**

Wir wollen jene Drehflächen bestimmen, die  $H = 0$  erfüllen, also lokal minimale Oberfläche haben (siehe dazu [9.27](#)). Da die beiden Hauptkrümmungen  $-\frac{r''}{z'}$  und  $\frac{z'}{r}$  sind, müssen wir das Differentialgleichungssystem  $r''r = (z')^2 = 1 - (r')^2$  lösen. Dies ist äquivalent zu

$$\left(\frac{r^2}{2}\right)'' = rr'' + (r')^2 = 1 \text{ mit der allgemeinen Lösung } r(t)^2 = (t + a)^2 \pm b^2.$$

Nach Zeitverschiebung erhalten wir  $a = 0$  und somit  $2r(t)r'(t) = 2t$ . Im Fall  $b = 0$  erhalten wir (nach einer Spiegelung) die Lösung  $r(t) = t$  und  $z(t) = 0$ , eine Ebene. Der Fall  $-b^2 < 0$  kann nicht eintreten, denn dann ist  $r'(t) = \frac{t}{r(t)} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - b^2}} > 1$  ein Widerspruch.

Für  $r(t)^2 = t^2 + b^2$  mit  $b > 0$  erhalten wir  $z(t) = \int_0^t \sqrt{1 - r'(\sigma)^2} d\sigma = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + b^2}} d\sigma = \int_0^t \frac{b}{\sqrt{\sigma^2 + b^2}} d\sigma = b \operatorname{Arsinh}(t/b)$ , d.h.  $t = b \sinh(z/b)$  und  $r = b\sqrt{1 + \sinh^2(z/b)} = b \cosh(z/b)$ . Dies ist also gerade die Bogenlängen-Parametrisierung der Kettenlinie  $r/b = \cosh(z/b)$ .



**9.26 Definition (Minimalfläche).**

Eine Fläche heißt MINIMALFLÄCHE, falls sie (lokal) ein kritischer Punkt für die Oberfläche ist, d.h. wenn wir sie nur lokal (bzw. auf einem kompakten Teil) variieren. Wir brauchen also nicht die gesamte Oberfläche (die unendlich sein kann), sondern nur jenen Teil, der sich ändert, betrachten.

Nach [26, 8.1.5] ist die Oberfläche einer durch Parametrisierung  $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq K \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$  mit kompakten  $J$ -meßbaren  $K$  durch

$$\text{vol}(M) := \int_K \|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|$$

gegeben, also

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &:= \int_K \sqrt{\|\partial_1 \varphi\|^2 \|\partial_2 \varphi\|^2 - \langle \partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi \rangle^2} = \int_K \sqrt{EG - F^2} \\ &= \int_K \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}})}, \end{aligned}$$

wobei  $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$  die Koeffizienten der ersten Fundamentalform mit  $g_i := \partial_i \varphi$  sind. Allgemeiner gilt für parametrisierte Hyperflächen  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , daß ihr  $n - 1$ -dimensionales Volumen durch

$$\text{vol}(M) = \int_K \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j})}$$

gegeben ist.

**9.27 Satz, [35].**

*Eine Fläche ist genau dann eine Minimalfläche, wenn  $H = 0$ .*

**Beweis.** Das vorliegende Variationsproblem besteht also darin, die lokalen Minima der Funktion  $M \mapsto \text{vol}(M) := \int_M \text{vol}_M \in \mathbb{R}$  zu bestimmen. Sei die Fläche  $M$  ein kritischer Punkt dieses Funktionals. Jede in der Nähe von  $M$  liegende Fläche läßt sich per Definition als  $\{x + f(x)\nu(x) : x \in M\}$  mit einer reellwertigen glatten Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompakten Träger darstellen. Somit muß  $\frac{d}{dt}\big|_0 \text{vol}(M^t) = 0$  sein, wobei  $M^t$  die Fläche  $\{x + t f(x)\nu(x)\}$  ist. Dazu müssen wir  $\frac{d}{dt}\big|_0 \text{vol}_{M^t}$  bestimmen. Wir wählen eine lokale Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow M$  von  $M$  mit zugehörigen lokalen Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$ . Eine lokale Parametrisierung von  $M^t$  ist dann  $\varphi^t(u) = \varphi(u) + t f(\varphi(u))\nu(\varphi(u))$ . Lokal ist

$$\text{vol}_{M^t} = \sqrt{\det(g_{i,j}^t)} du^1 \wedge \dots \wedge du^m,$$

wobei

$$g_{i,j}^t := \langle g_i^t, g_j^t \rangle \text{ mit } g_i^t := \partial_i \varphi^t = \partial_i \varphi + t \left( \partial_i (f \circ \varphi) \cdot (\nu \circ \varphi) + (f \circ \varphi) \cdot \partial_i (\nu \circ \varphi) \right).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big|_0 g_i^t &= \left( \partial_i (f \circ \varphi) \cdot (\nu \circ \varphi) + (f \circ \varphi) \cdot L(\partial_i \varphi) \right) = \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot \nu + f \cdot L(g_i) \\ \frac{d}{dt}\big|_0 g_{i,j}^t &= \left\langle g_i, \frac{d}{dt}\big|_0 g_j^t \right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}\big|_0 g_i^t, g_j \right\rangle \\ &= f \cdot \left( \langle L(\partial_i \varphi), \partial_j \varphi \rangle + \langle \partial_i \varphi, L(\partial_j \varphi) \rangle \right) =: 2f h_{i,j}, \end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big|_0 \sqrt{\det(g_{i,j}^t)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{i,j})}} \det(g_{i,j}) \text{spur} \left( (g_{i,j})^{-1} \left( \frac{d}{dt}\big|_0 g_{i,j}^t \right) \right) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})} \cdot (f \circ \varphi) \cdot \text{spur} \left( (g_{i,j})^{-1} (h_{i,j}) \right) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})} \cdot (f \circ \varphi) \cdot \text{spur} L \\ &= m \sqrt{\det(g_{i,j})} \cdot (f \circ \varphi) \cdot H. \end{aligned}$$



Dabei haben wir verwendet, daß  $\det'(A)(B) = \det A \cdot \text{spur}(A^{-1}B)$ . Also:

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \text{vol}_{M^t} = m f H \text{vol}_M$$

Schlußendlich gilt:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{vol}(M^t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_M \text{vol}_{M^t} = \int_M \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{vol}_{M^t} = m \int_M f H \text{vol}_M.$$

Soll das für alle in der Nähe von  $M$  liegenden Flächen gelten, d.h. für alle  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , so muß  $H = 0$  sein (wähle  $f = H$ ) und umgekehrt.  $\square$

## 10. Geodäten

Wir wollen nun auf allgemeinen Hyperflächen das Problem der kürzesten Verbindungswege lösen.

### 10.1 Definition (Geodäte).

Unter einer GEODÄTE versteht man eine Kurve in  $M$ , welche ein kritischer Punkt für die Bogenlänge ist.

### 10.2 Satz (Charakterisierung der Geodäten).

Eine Kurve  $c$  in einer Hyperfläche  $M$  ist genau dann eine Geodäte, wenn für eine Parametrisierung von  $c$  gilt:  $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$  für alle  $t$ , d.h. die Beschleunigung nur dazu dient, daß die Kurve auf der Mannigfaltigkeit bleibt. Diese Parametrisierung ist dann automatisch proportional zur Bogenlänge.

**Beweis.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Kurve, o.B.d.A. nach der Bogenlänge parametrisiert. Diese ist ein kritischer Punkt der Bogenlänge, wenn für alle 1-PARAMETER-FAMILIEN von Kurven ( $c^s$ ) mit  $s \in \mathbb{R}$ , die Ableitung  $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c^s)$  gleich 0 ist. Unter 1-Parameter-Familien von Kurven versteht man Abbildungen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow M$ ,  $(t, s) \mapsto c^s(t)$ , welche  $c^s(a) = c(a)$ ,  $c^s(b) = c(b) \forall s$  und  $c^0 = c$  erfüllen. Berechnen wir also diese Ableitung, wobei wir  $c(t, s) := c^s(t)$  setzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c^s) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial t} c(t, s) \right| dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \left| \frac{\partial}{\partial t} c(t, s) \right| dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} c(t, s), \frac{\partial}{\partial t} c(t, s) \right\rangle}{\underbrace{\left| \frac{\partial}{\partial t} c(t, 0) \right|}_{=1}} dt \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} c(t, s), \frac{\partial}{\partial t} c(t, 0) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c(t, s), \frac{\partial}{\partial t} c(t, 0) \right\rangle dt \quad (\text{part.Integr.}) \\ &= \left[ \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c(t, s), \frac{\partial}{\partial t} c(t, 0) \right\rangle \right]_{t=a}^b \\ &\quad - \int_a^b \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} c(t, s), \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 c(t, 0) \right\rangle dt \\ &= 0 - \int_a^b \langle \eta(t), c''(t) \rangle dt = \int_a^b h \cdot \underbrace{(\langle c'', \nu \circ c \rangle^2 - \langle c'', c'' \rangle)}_{\leq 0 \text{ (Cauchy-Schwarz)}} dt \end{aligned}$$

Wobei wir  $\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c(t, s) =: \eta(t)$  für das letzte Gleichheitszeichen speziell so gewählt haben, daß

$$\eta(t) = h(t) \left( c''(t) - \langle c''(t), \nu(c(t)) \rangle \nu(c(t)) \right) \in T_{c(t)}M$$

für eine glatte Funktion  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $h(a) = 0 = h(b)$  gilt. Dies ist möglich, da  $\eta$  ein Vektorfeld auf  $M$  längs  $c$  ist, welches nur  $\eta(a) = 0 = \eta(b)$  erfüllen muß.

Die Ableitung verschwindet also für alle solche  $\eta$  genau dann, wenn in der Cauchy-Schwarz Ungleichung Gleichheit gilt:  $\langle c'', c'' \rangle = \langle c'', \nu \circ c \rangle^2$ , i.e.  $c''(t) \parallel \nu(c(t))$ . Mit anderen Worten, falls  $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$  für alle  $t$ .

Umgekehrt sei  $c$  eine Parametrisierung, welche  $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$  erfüllt. Dann ist insbesondere  $c''(t) \perp c'(t)$  und somit  $\langle c'(t), c'(t) \rangle$  konstant, also  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert. D.h. obige Rechnung für  $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(c^s)$  ist (mit Ausnahme des letzten Gleichheitszeichens) für  $c$  durchführbar und liefert 0.  $\square$

Obige Fragestellung ist natürlich ein Variationsproblem und die Methode ist jene von Euler-Lagrange, siehe [26, 9.4.16]–[26, 9.4.18].

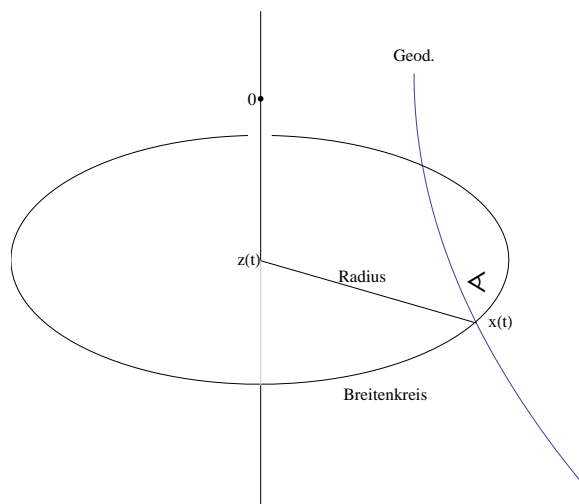
### 10.3 Beispiele.

1. In einer Hyperebene sind offensichtlich die Geraden die Geodäten.
2. Jeder Großkreis auf der Sphäre  $S^m$ , d.h. Schnitt einer Ebene durch 0 mit  $S^m$ , ist eine Geodäte, denn die 2. Ableitung eines Kreises zeigt zum Mittelpunkt, also genau in Richtung des Normalvektors an die Sphäre.
3. Allgemeiner sind auf Drehflächen die Meridiane Geodäten und auch jene Breitenkreise, welche kritische Punkte für den Radius sind (sogenannte ÄQUATOREN).
4. Auf einem Zylinder können wir auch leicht Geodäten in andere Richtungen angeben, nämlich:  $t \mapsto (c(t \cos(\varphi)), t \sin(\varphi))$ , wobei  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte der Äquatorialsphäre und  $\varphi \in \mathbb{R}$  ist.

### 10.4 Satz von Clairaut.

Auf jeder Drehfläche ist das Produkt aus dem Abstand von der Drehachse mit dem Cosinus des Winkels zwischen einer Geodäte und dem Breitenkreis konstant längs der Geodäte:

$$\text{Radius} \cdot \cos \angle(\text{Geodäte}, \text{Breitenkreis}) = \text{konst.}$$



**Beweis.** Sei  $c : t \mapsto (x(t); z(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte auf  $M$ , d.h.  $c''(t) \perp T_{c(t)}M$ . Es ist  $(x(t)^\perp, 0)$  tangential an den Breitenkreis durch  $c(t)$  und  $|c'(t)| = 1$ , folglich gilt

$$\begin{aligned} & \left( \text{Radius} \cdot \cos \angle(\text{Geodäte}, \text{Breitenkreis}) \right)'(t) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( |x(t)| \cdot \cos \angle \left( c'(t), \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( |x(t)| \cdot \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{|c'(t)| |x(t)^\perp|} \right) = \frac{d}{dt} \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle c''(t), \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \langle x'(t), x'(t)^\perp \rangle = 0 + 0, \end{aligned}$$

da  $c''(t) \in (T_{c(t)}M)^\perp$  und somit  $c''(t) \perp (x(t)^\perp, 0)$  gilt. Folglich ist der behauptete Ausdruck konstant.  $\square$

Wir haben gezeigt:  $c$  ist Geodäte  $\Leftrightarrow \forall t : c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ , also genau dann, wenn folgende Differentialgleichung erfüllt ist:

$$c''(t) = \langle c''(t), \nu_{c(t)} \rangle \nu_{c(t)} = -\langle c'(t), L c'(t) \rangle \nu_{c(t)}.$$

Diese wollen wir nun in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu entwickeln wir die zweiten partiellen Ableitungen  $\varphi_{i,j}$  der Parametrisierung  $\varphi$  in der von den partiellen Ableitungen  $\varphi_i := \frac{\partial}{\partial u^i} \varphi(u)$  und Einheitsnormalvektor  $\nu$  gebildeten Basis  $(\varphi_1, \dots, \varphi_m; \nu)$  des  $\mathbb{R}^n$ :

### 10.5 Ableitungsgleichungen für Flächen.

Die zweiten partiellen Ableitungen  $\varphi_{i,j} : u \mapsto \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \varphi(u)$  einer lokalen Parametrisierung  $\varphi$  besitzen folgende Entwicklung in der Basis  $(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \nu)$ :

$$\varphi_{i,j}(u) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u) \varphi_k(u) - h_{i,j}(u) \nu_{\varphi(u)},$$

wobei  $h_{i,j} := -\langle \varphi_{i,j}, \nu \rangle = \langle \varphi_i, L \varphi_j \rangle$  und  $\Gamma_{i,j}^k$  die entsprechend gewählten Koeffizienten sind, diese heißen auch CHRISTOFFELSYMBOLE DER 2.TEN ART.

Die Christoffelsymbole  $\Gamma_{i,j}^k$  der 2.ten Art können aus den CHRISTOFFELSYMBOLEN DER 1.TEN ART

$$\Gamma_{i,j,k} := \langle \varphi_{i,j}, \varphi_k \rangle = \frac{1}{2} (\partial_j g_{i,k} + \partial_i g_{k,j} - \partial_k g_{i,j})$$

wie folgt berechnet werden:

$$\Gamma_{i,j}^k = \sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l} g^{l,k} \quad \text{mit } (g^{l,k}) := (g_{l,k})^{-1} \text{ und } g_{l,k} := \langle \varphi_l, \varphi_k \rangle.$$

**Beweis.** Um die Koeffizienten der Entwicklung von  $\varphi_{i,j}$  zu berechnen, bilden wir zuerst das innere Produkt mit  $\nu$  und erhalten  $\langle \varphi_{i,j}, \nu \rangle = 0 - h_{i,j} \cdot 1$  für den Koeffizienten von  $\nu$ . Indem wir das innere Produkt mit  $\varphi_l$  berechnen erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,l} := \langle \varphi_{i,j}, \varphi_l \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u) \varphi_k(u), \varphi_l(u) \right\rangle + 0 = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_{k,l}.$$

Durch Multiplikation mit der inversen Matrix  $(g^{l,p})$  ergibt sich:

$$\sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l} g^{l,p} = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_{k,l} g^{l,p} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k \sum_{l=1}^m g_{k,l} g^{l,p} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k \delta_k^p = \Gamma_{i,j}^p.$$

Es gilt:

$$\partial_k g_{i,j} = \partial_k \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_{i,k}, \varphi_j \rangle + \langle \varphi_i, \varphi_{j,k} \rangle.$$

Durch zyklisches Vertauschen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_i g_{j,k} &= \langle \varphi_{j,i}, \varphi_k \rangle + \langle \varphi_j, \varphi_{k,i} \rangle \\ \partial_j g_{k,i} &= \langle \varphi_{k,j}, \varphi_i \rangle + \langle \varphi_k, \varphi_{i,j} \rangle. \end{aligned}$$

Die alternierende Summe dieser 3 Gleichungen ist

$$2\Gamma_{k,j,i} = 2\langle \varphi_{k,j}, \varphi_i \rangle = \partial_j g_{k,i} - \partial_i g_{j,k} + \partial_k g_{i,j}. \quad \square$$

### 10.6 Bemerkung.

Es sei  $M$  ein Fläche im  $\mathbb{R}^3$  (oder sogar eine abstrakte Riemann-Fläche) und  $E, F, G$  die Koeffizienten der 1.ten Fundamentalfom, d.h.

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} \\ g^{2,1} & g^{2,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{D^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

wobei  $D := \sqrt{EG - F^2}$ . Die Christoffelsymbole 1.ter Ordnung haben dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j,k} &:= \frac{1}{2} \left( \partial_i(g_{j,k}) + \partial_j(g_{i,k}) - \partial_k(g_{i,j}) \right) \Rightarrow \\ \Gamma_{1,1,1} &:= \frac{1}{2} E_1 \\ \Gamma_{1,2,1} &:= \frac{1}{2} E_2 \\ \Gamma_{2,2,1} &:= \frac{1}{2} (2F_2 - G_1) \\ \Gamma_{1,1,2} &:= \frac{1}{2} (2F_1 - E_2) \\ \Gamma_{1,2,2} &:= \frac{1}{2} G_1 \\ \Gamma_{2,2,2} &:= \frac{1}{2} G_2 \end{aligned}$$

Und für jene zweiter Ordnung gilt:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j}^k &:= \Gamma_{i,j,1} g^{1,k} + \Gamma_{i,j,2} g^{2,k} \quad \Rightarrow \\
\Gamma_{1,1}^1 &:= \Gamma_{1,1,1} g^{1,1} + \Gamma_{1,1,2} g^{2,1} \\
&= \frac{E_1}{2} \frac{G}{D^2} + (F_1 - \frac{E_2}{2}) \frac{-F}{D^2} = \frac{G E_1 - 2 F F_1 + F E_2}{2 D^2} \\
\Gamma_{1,2}^1 &:= \Gamma_{1,2,1} g^{1,1} + \Gamma_{1,2,2} g^{2,1} \\
&= \frac{E_2}{2} \frac{G}{D^2} + \frac{G_1}{2} \frac{-F}{D^2} = \frac{G E_2 - F G_1}{2 D^2} \\
\Gamma_{2,2}^1 &:= \Gamma_{2,2,1} g^{1,1} + \Gamma_{2,2,2} g^{2,1} \\
&= (F_2 - \frac{G_1}{2}) \frac{G}{D^2} + \frac{G_2}{2} \frac{-F}{D^2} = \frac{2 G F_2 - G G_1 - F G_2}{2 D^2} \\
\Gamma_{1,1}^2 &:= \Gamma_{1,1,1} g^{1,2} + \Gamma_{1,1,2} g^{2,2} \\
&= \frac{E_1}{2} \frac{-F}{D^2} + (F_1 - \frac{E_2}{2}) \frac{E}{D^2} = \frac{-F E_1 + 2 E F_1 - E E_2}{2 D^2} \\
\Gamma_{1,2}^2 &:= \Gamma_{1,2,1} g^{1,2} + \Gamma_{1,2,2} g^{2,2} \\
&= \frac{E_2}{2} \frac{-F}{D^2} + \frac{G_1}{2} \frac{E}{D^2} = \frac{-F E_2 + E G_1}{2 D^2} \\
\Gamma_{2,2}^2 &:= \Gamma_{2,2,1} g^{1,2} + \Gamma_{2,2,2} g^{2,2} \\
&= (F_2 - \frac{G_1}{2}) \frac{-F}{D^2} + \frac{G_2}{2} \frac{E}{D^2} = \frac{-2 F F_2 + F G_1 + E G_2}{2 D^2}
\end{aligned}$$

**10.7 Lokale Geodätengleichung** Die Differentialgleichung für Geodäten  $c := \varphi \circ u$  mit lokaler Darstellung  $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))$  sieht in lokalen Koordinaten nun so aus:

$$\begin{aligned}
c(t) &= (\varphi \circ u)(t) \quad \Rightarrow \quad c'(t) = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{du^i}{dt} \\
\Rightarrow \quad c''(t) &= \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{d^2 u^i}{dt^2} \right) \in \\
&\in \sum_k \left( \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} + \frac{d^2 u^k}{dt^2} \right) \varphi_k + \mathbb{R} \cdot \nu, \quad \text{nach } \boxed{10.5}.
\end{aligned}$$

Also ist  $c$  genau dann eine Geodäte, d.h.  $c''(t) \in T_{c(t)} M^\perp$ , wenn

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2}(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u(t)) \cdot \frac{du^i}{dt}(t) \cdot \frac{du^j}{dt}(t) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, m.$$

oder kurz:

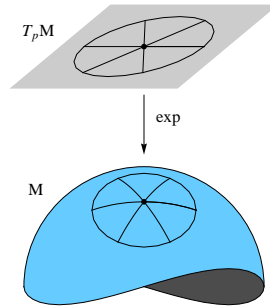
$$\ddot{u}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0,$$

wobei  $\dot{u}^k$  die Ableitung  $t \mapsto \frac{du^k}{dt}(t)$  nach der Zeit  $t$  bezeichnet. Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2.ter Ordnung hat bei vorgegebenen Anfangsdaten  $u^k(0)$  und  $\frac{du^k}{dt}(0)$  lokal eine eindeutig bestimmte Lösung.

### 10.8 Lemma. Die Exponentialabbildung.

Zu jedem  $x \in M$  und  $\xi \in T_x M$  existiert eine eindeutige Geodäte  $c_\xi : I \rightarrow M$  mit maximalen Definitionsintervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , mit konstanter skalarer Geschwindigkeit und Anfangsbedingung  $c_\xi(0) = x$ ,  $c'_\xi(0) = \xi$ .

Ordnet man nun  $\xi \in TM$  den Wert  $c_\xi(1)$  der Geodäte  $c_\xi$  mit Anfangsbedingung  $\xi$  zu, so nennt man das Ergebnis  $\exp(\xi)$ . Die Exponentialfunktion  $\exp$  ist auf einer offenen Umgebung des Nullschnitts  $M$  in  $TM$  definiert. Sie ist dort glatt, hat Werte in  $M$  und  $\exp_x := \exp|_{T_x M} : T_x M \rightarrow M$  erfüllt:  $\exp_x(0_x) = x$  und  $T_{0_x}(\exp_x) = \text{id}_{T_x M}$ . Die Geodäte  $c_\xi$  mit Anfangswert  $\xi$  ist dann durch  $c_\xi(t) = \exp(t\xi)$  gegeben.



Der Grund für die Bezeichnungswise  $\exp$  liegt darin, daß für  $M := S^1 \subset \mathbb{C}$  mit  $TM = \{(x, tx^\perp) : |x| = 1, t \in \mathbb{R}\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$  die Exponentialabbildung gegeben ist durch  $\exp(x, tx^\perp) = x e^{it}$ .

**Beweis.** Die lokale Formel aus [10.7](#) für die Geodätengleichung zeigt die Existenz und Eindeutigkeit maximal definierter Geodäten  $c_\xi$ , sowie deren glatte Abhängigkeit auch vom Anfangswert  $\xi$ , d.h. es gibt eine offene Umgebung  $V$  von 0 in  $T_x M$  und ein  $\delta > 0$ , s.d.  $c_\xi(t)$  für  $\xi \in V$  und  $|t| \leq \delta$  existiert und  $(t, \xi) \mapsto c_\xi(t)$  glatt ist.

Eine andere Möglichkeit dies für Hyperflächen zu sehen ohne dabei lokale Koordinaten zu verwenden, geht wie folgt:

Falls  $c$  eine Geodäte ist, so gilt  $c''(t) = \lambda(t) \cdot \nu_{c(t)}$ , wobei

$$\lambda(t) = \langle c''(t), \nu_{c(t)} \rangle = \langle c'(t), (\nu \circ c)'(t) \rangle = -\langle c', L \circ c' \rangle(t) = -K(c'(t)),$$

$$\text{d.h.: } c \text{ ist Geodäte} \Leftrightarrow c'' = -\langle c', (\nu \circ c)' \rangle (\nu \circ c).$$

Wählen wir eine lokale Gleichung  $f$  für  $M$ , dann ist  $\nu = \frac{1}{|\text{grad } f|} \text{grad } f$  und macht nicht nur auf  $M$  sondern auch lokal im umgebenden  $\mathbb{R}^n$  Sinn. Somit ist die obige Geodätengleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung 2.ter Ordnung am  $\mathbb{R}^n$ , besitzt also bei vorgegebener Anfangsbedingung für  $c(0)$  und  $c'(0)$  eine eindeutige Lösung  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , welche glatt von den Anfangsdaten abhängt. Insbesondere existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $0_x$  in  $TM$  und ein  $\delta > 0$ , s.d.  $c_\xi(t)$  für  $\xi \in V$  und  $|t| \leq \delta$  existiert und glatt in  $(\xi, t)$  ist.

Es ist noch zu zeigen, daß die Kurve  $c$  in  $M$  bleibt. Da für eine Lösung  $\langle c', \nu \circ c \rangle' = \langle c'', \nu \circ c \rangle + \langle c', (\nu \circ c)' \rangle = 0$  gilt, ist  $\langle c', \nu \circ c \rangle$  konstant und zwar gleich  $\langle c'(0), \nu_{c(0)} \rangle = \langle \xi, \nu_x \rangle = 0$ . Somit gilt:

$$(f \circ c)'(t) = \langle \text{grad}_{c(t)} f, c'(t) \rangle = |\text{grad}_{c(t)} f| \cdot \langle \nu_{c(t)}, c'(t) \rangle = 0,$$

Es ist also  $f \circ c$  konstant gleich  $f(c(0)) = f(x) = 0$ , d.h.  $c(t) \in f^{-1}(0) = M$ .

Falls  $c_\xi$  die Geodäte mit Anfangswert  $c'(0) = \xi$  bezeichnet, so ist für  $t \in \mathbb{R}$  die Kurve  $s \mapsto c_\xi(ts)$  die Geodäte mit Anfangswert  $\frac{d}{ds}|_{s=0} c_\xi(ts) = t c'_\xi(0) = t\xi$  also gilt folgende Homogenitätsrelation

$$c_\xi(ts) = c_t \xi(s).$$

Sei nun  $\xi = \delta\eta \in U := \delta V$ , dann existiert  $c_\eta(\delta) = c_{\delta\eta}(1) = c_\xi(1) =: \exp(\xi)$  und ist glatt bzgl.  $\xi$ . Es ist somit  $t \mapsto \exp(t\xi) = c_t\xi(1) = c_\xi(t)$  die Geodäte mit Anfangswert  $\xi$ , weiters  $\exp(0_x) = c_{0_x}(1) = x$  und  $T_{0_x} \exp_x \cdot \xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_x(t\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 c_\xi(t) = \xi$ .  $\square$

**10.9 Geodätische Polarkoordinaten.**

Wir können nun die Existenz lokaler Koordinaten  $\varphi$  mit  $E = 1$  und  $F = 0$  auf jeder Riemann-Fläche zeigen.

Wegen  $T_{0_x} \exp_x = \text{id}_{T_x M}$ , ist  $\exp_x$  ein lokaler Diffeomorphismus von  $T_x M$  nach  $M$  und somit haben wir eine ausgezeichnete bei  $x$  zentrierte Karte  $\exp_x$ . Um diese in Koordinaten zu beschreiben wählen wir einen Einheitsvektor  $v \in T_x M$  und einen (der beiden) Normalvektor(en)  $v^\perp \in T_x M$  und betrachten Polarkoordinaten

$$(r, \vartheta) \mapsto r \cdot \underbrace{(\cos(\vartheta) \cdot v + \sin(\vartheta) \cdot v^\perp)}_{=: v(\vartheta)}$$

und erhalten eine Parametrisierung (für  $r \neq 0$ )

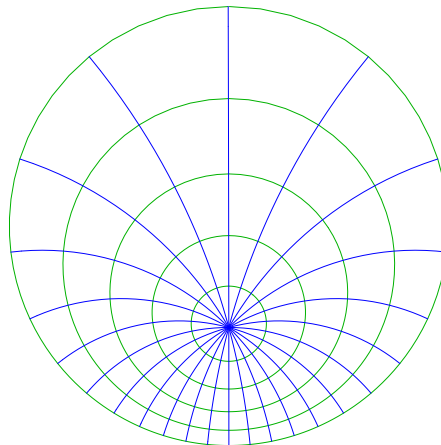
$$\varphi : (r, \vartheta) \mapsto \exp_x(r v(\vartheta)) \quad \text{mit } \varphi(0, \vartheta) = x.$$

Somit ist  $t \mapsto \varphi(t, \vartheta) = \exp_x(t v(\vartheta))$  die (wegen  $|v(\vartheta)| = 1$ ) nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit Anfangswert  $v(\vartheta) \in T_x M$ , eine sogenannte RADIALE GEODÄTE und es gilt:

$$\left. \begin{aligned} E = |\varphi_r|^2 = |v_\vartheta|^2 = 1 &\Rightarrow \langle \varphi_r, \varphi_{r,\vartheta} \rangle = 0 \\ \varphi_{r,r} \perp TM &\Rightarrow \langle \varphi_{r,r}, \varphi_\vartheta \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_r = \frac{\partial}{\partial r} \langle \varphi_r, \varphi_\vartheta \rangle = \langle \varphi_{r,r}, \varphi_\vartheta \rangle + \langle \varphi_r, \varphi_{\vartheta,r} \rangle = 0.$$

Außerdem ist  $\varphi(0, \vartheta) = x$  und somit  $\varphi_\vartheta(0, \vartheta) = 0$ , also  $F = \langle \varphi_r(r, \vartheta), \varphi_\vartheta(r, \vartheta) \rangle = \langle \varphi_r(0, \vartheta), \varphi_\vartheta(0, \vartheta) \rangle = 0$ . Schließlich ist  $G = \langle \varphi_\vartheta, \varphi_\vartheta \rangle \geq 0$ .

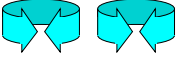













Geodätische Polarkoordinaten der Poincaré'schen Halbebene

Die geschlossenen Kurven  $\vartheta \mapsto \varphi(r, \vartheta)$  nennt man GEODÄTISCHE KREISE mit Radius  $r$ . Diese sind natürlich im allgemeinen keine Geodäten!

**Beispiele von geodätischen Polarkoordinaten.**

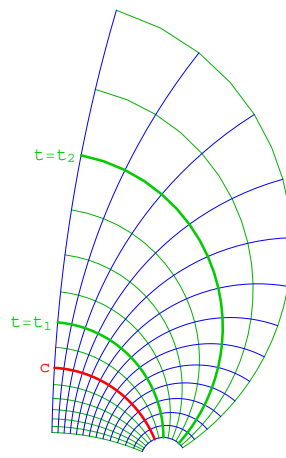
-  Sphäre

-  Torus
-  Paraboloid
-  Hyperbolisches Paraboloid
-  Einschaliges Hyperboloid
-  Zweischaliges Hyperboloid
-  Wendel-Fläche
-  Katenoid
-  Enneper
-  Pseudosphäre
-  Möbius-Band
-  Plücker-Kegel
-  Sherk-Fläche

### 10.10 Satz. Geodätische Parallelkoordinaten.

Die Koeffizienten einer Riemann-Metrik haben genau dann lokal die Gestalt  $E = 1$ ,  $F = 0$  und  $G > 0$ , wenn  $t \mapsto \varphi(t, s)$  nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäten sind, welche die Kurven  $s \mapsto \varphi(t, s)$  orthogonal schneiden. Insbesondere ist also die Länge der Segmente dieser Geodäten von  $t = t_1$  bis  $t = t_2$  gerade  $t_2 - t_1$ , und somit unabhängig von  $s$ .

Zu jeder regulären Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  existieren längs  $c$  eindeutig bestimmte lokale Koordinaten  $\varphi$  mit obigen Eigenschaften und  $\varphi(0, s) = c(s)$ .



Für einen geodätischen Kreis  $c$  sind das gerade die geodätischen Polarkoordinaten aus [10.9](#).

**Beweis.** Zuerst die Existenz: Dafür wählen wir ein Einheitsvektorfeld  $\xi$  längs  $c$ , welches normal steht auf  $c'$  und definieren eine Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch  $\varphi(t, s) := \exp_{c(s)}(t\xi(s))$ . Dann ist  $\varphi(0, s) = c(s)$  und  $t \mapsto \varphi(t, s)$  ist die bogenlängenparametrisierte Geodäte mit Anfangsvektor  $\xi(s)$ . Also gilt:  $\varphi_s(0, s) = c'(s) \neq 0$  sowie  $\varphi_t(0, s) = \xi(s)$  und somit ist  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus.

Da  $t \mapsto \varphi(t, s)$  Geodäten sind, ist wie im Beweis von [10.9](#)  $E = g_{1,1} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 1$  und  $F_1 = 0$ . Wegen  $F(0, s) = g_{1,2}(0, s) = \langle \xi(s), c'(s) \rangle = 0$  ist  $F = 0$ .

Ist umgekehrt  $E = 1$  und  $F = 0$ , so ist nach [10.6](#) (siehe auch [11.2](#))

$$\Gamma_{1,1}^1 = \frac{G E_1 - 2 F F_1 + F E_2}{2 D^2} = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_{1,1}^2 = \frac{-F E_1 + 2 E F_1 - E E_2}{2 D^2} = 0.$$



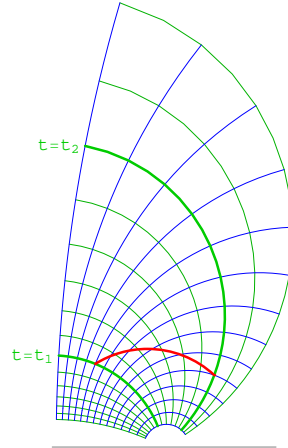
Damit erfüllen die Kurven  $u^1(t) := t$  und  $u^2 = \text{konst}$  die Geodätengleichung 10.7 (siehe auch 11.2), sind wegen  $E = 1$  nach Bogenlänge parametrisiert und schneiden wegen  $F = 0$  die Kurven mit konstantem  $u^1$  orthogonal. □

**10.11 Lemma.**

Sei  $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow M$  eine Parametrisierung nach geodätischen Koordinaten, dann ist jede Kurve der Form  $\varphi \circ u$  mit einer Kurve  $u$  in  $U$  welche  $(t_1, s_1)$  mit  $(t_2, s_2)$  verbindet mindestens so lang wie jede Geodäte  $t \mapsto \varphi(t, s)$  für  $t \in [t_1, t_2]$  und fixem  $s$ .

Siehe 13.11 für die Verallgemeinerung auf Riemann-Mannigfaltigkeiten.

Dieses Resultat liefert also, daß gewisse Geodäten unter allen hinreichend nahen Kurven minimal sind. Global muß das nicht stimmen, wie ein Bogen eines Großkreises auf der Sphäre von Länge größer als  $\pi$  zeigt.



**Beweis.** Sei  $s$  fix gewählt,  $c_0(t) := \varphi(t, s)$  und  $c_1(\tau) := \varphi(u(\tau))$  mit  $u^1(\tau_i) = t_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} L(c_1) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\left(\frac{du^1}{d\tau}\right)^2 + G\left(\frac{du^2}{d\tau}\right)^2} d\tau \geq \\ &\geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \frac{du^1}{d\tau} \right| d\tau \geq \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{du^1}{d\tau} d\tau \right| = |u^1(\tau_2) - u^1(\tau_1)| = |t_2 - t_1| = L(c_0) \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $u^1$  monoton und  $\frac{du^2}{d\tau} = 0$  also  $u^2$  konstant ist. □

## 11. Integralsatz von Gauß-Bonnet

Es gelten folgende geometrische Formeln für die Gauß-Krümmung:

**11.1 Satz (Gauß-Krümmung als Störung der Maße von Kreisen).**

Seien geodätische Polarkoordinaten  $\varphi$  um  $x \in M$  gewählt. Mit  $L(r)$  bezeichnen wir die Länge bzw. mit  $A(r)$  die Fläche des Inneren der geodätischen Kreise  $\vartheta \mapsto \varphi(r, \vartheta)$  so gilt:

1.  $K_x = \frac{3}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{2r\pi - L(r)}{r^3}$  *Bertrand & Puisseaux 1848*
2.  $K_x = \frac{12}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{r^2\pi - A(r)}{r^4}$  *Diquet 1848*

Die Gauß-Krümmung mißt also infinitesimal um wieviel der Umfang, beziehungsweise die Fläche eines geodätischen Kreises im Vergleich zu einem Euklidischen Kreis zu klein ist.

**Beweis.** Geodätische Polarkoordinaten  $\varphi$  sind nach 10.9 gegeben durch  $\varphi(r, \vartheta) = \exp_x(r v(\vartheta))$  mit  $v(\vartheta) = \cos(\vartheta) v + \sin(\vartheta) v^\perp$ . Wir wissen bereits folgendes über die Funktion  $\sqrt{G} := |\varphi_\vartheta|$ : Die Funktion  $G = |\varphi_\vartheta|^2$  ist glatt und verschwindet nur für  $r = 0$ . Also ist auch  $\sqrt{G}$  glatt für  $r \neq 0$  aber nicht notwendigerweise für  $r = 0$ .

Wir müssen jedoch das Verhalten bei 0 studieren. Dazu verwenden wir die Jacobi-Gleichung  $K\sqrt{G} + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = 0$  aus [9.17]. Die Taylorformel der Ordnung 1 mit Integralrestglied (siehe [25, 6.3.11])

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \int_0^1 (1-t)f''(tx)(x, x)dt$$

liefert

$$\begin{aligned} \varphi(r, \vartheta) &= \exp_x(r v(\vartheta)) \\ &= \underbrace{\exp_x(0)}_{=x} + \underbrace{\exp'_x(0)}_{=\text{id}}(r v(\vartheta)) + \int_0^1 (1-t) \exp''_x(tr v(\vartheta))(r v(\vartheta), r v(\vartheta)) dt \\ &= x + r v(\vartheta) + r^2 \underbrace{\int_0^1 (1-t) \exp''_x(tr v(\vartheta))(v(\vartheta), v(\vartheta)) dt}_{=:g(r, \vartheta)}, \end{aligned}$$

wobei  $g$  eine glatte  $\mathbb{R}^n$ -wertige Funktion ist. Durch partielles Differenzieren nach  $\vartheta$  ergibt sich:

$$\varphi_\vartheta(r, \vartheta) = r \left( v'(\vartheta) + r \frac{\partial}{\partial \vartheta} g(r, \vartheta) \right)$$

und somit ist für  $r \geq 0$

$$\sqrt{G(r, \vartheta)} = |\varphi_\vartheta(r, \vartheta)| = r \sqrt{|v'(\vartheta)|^2 + 2r \langle v'(\vartheta) | \frac{\partial}{\partial \vartheta} g(r, \vartheta) \rangle + r^2 \langle \frac{\partial}{\partial \vartheta} g(r, \vartheta) | \frac{\partial}{\partial \vartheta} g(r, \vartheta) \rangle}$$

glatt (wegen  $|v'(\vartheta)| = 1$ ) und insbesondere gilt für die rechtsseitige Ableitung bei 0:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \sqrt{G(r, \vartheta)} = 0 + 1.$$

Aus der Jacobi-Gleichung [9.17] folgt nach Grenzübergang für  $r \searrow 0$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \Big|_{r=0} \sqrt{G(r, \vartheta)} &= -K(x) \sqrt{G(0, \vartheta)} = 0 \quad \text{und durch Differenzieren} \\ \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(r, \vartheta) &= -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} K - \sqrt{G} \frac{\partial K}{\partial r}, \quad \text{also} \\ \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(0, \vartheta) &= -1 K(x) + 0 \end{aligned}$$

Die Taylorformel der Ordnung 2 mit Integralrestglied (siehe [25, 6.3.11]) liefert

$$\sqrt{G}(r, \vartheta) = 0 + r + 0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(tr, \vartheta) r^3 dt$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{G}(r, \vartheta) - r}{r^3} &= \lim_{r \rightarrow 0+} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(tr, \vartheta) dt \\ &= \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(0, \vartheta) \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} dt = -K(x) \frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

Somit ist wegen  $L(r) = \int_0^{2\pi} |\varphi_\vartheta(r, \vartheta)| d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \vartheta)} d\vartheta$

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(x)}{6} d\vartheta = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r - \sqrt{G(r, \vartheta)}}{r^3} d\vartheta \\ &= \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{2r\pi - L(r)}{r^3} \end{aligned}$$

Für die Fläche erhalten wir nach der Regel von De L'Hospital (siehe [24, 4.1.18])

$$\begin{aligned} A(r) &\stackrel{\text{9.26}}{=} \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G(\rho, \vartheta)} \, d\vartheta \, d\rho \\ \Rightarrow A'(r) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \vartheta)} \, d\vartheta = L(r) \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2 \pi - A(r)}{r^4} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r\pi - L(r)}{4r^3} = \frac{1}{4} \frac{K(x)\pi}{3} = K(x) \frac{\pi}{12}. \quad \square \end{aligned}$$

### 11.2 Christoffel-Symbole in geodätischen Koordinaten.

Wir wählen eine geodätische Parametrisierung  $\varphi$  auf  $M$ , d.h.  $E = 1$  und  $F = 0$ , mit zugehörigen lokalen Koordinaten  $(r, \vartheta) = (u^1, u^2)$ . Dann gilt für die Koeffizienten der Riemann-Metrik (siehe auch [10.6]):

$$\begin{aligned} g_{1,1} &= E = 1 & g^{1,1} &= 1 \\ g_{1,2} = g_{2,1} &= F = 0 & g^{1,2} = g^{2,1} &= 0 \\ g_{2,2} &= G > 0 & g^{2,2} &= \frac{1}{G}. \end{aligned}$$

Für die Christoffelsymbole erster Art [10.5] ergibt sich (siehe [10.6]) somit:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \\ \Gamma_{1,2,2} = \Gamma_{2,1,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{2,2,1} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{i,j,k} &= 0 \quad \text{für alle anderen } i, j, k. \end{aligned}$$

Für jene zweiter Art:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{1,2}^2 = \Gamma_{2,1}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{2,2}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \\ \Gamma_{i,j}^k &= 0 \quad \text{für alle anderen } i, j, k. \end{aligned}$$

Eine Geodäte muß also folgende Gleichungen (siehe [10.7]) erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{2,2}^1 \frac{du^2}{dt} \frac{du^2}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 u^2}{dt^2} + 2\Gamma_{1,2}^2 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \Gamma_{2,2}^2 \frac{du^2}{dt} \frac{du^2}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^1}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \left( \frac{du^2}{dt} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \left( \frac{du^2}{dt} \right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

### 11.3 Geodätische Krümmung, ein Spezialfall.

Seien  $(u^1, u^2) = (r, \vartheta)$  lokale geodätische Koordinaten wie in [11.2]. Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte  $t \mapsto u(t) = (u^1(t), u^2(t)) = (r(t), \vartheta(t))$  sei der Winkel zwischen ihr und den radialen Geodäten  $u^2 = \text{konstant}$  mit  $\Theta(t)$  bezeichnet, i.e.

$$\cos \Theta(t) = \langle u'(t) | \frac{\partial}{\partial r} \rangle = \left\langle \frac{dr(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \middle| \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{d}{dt} u^1.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \left( \frac{du^2}{dt} \right)^2 \stackrel{\boxed{11.2}}{=} \frac{d^2 u^1}{dt^2} = \frac{d}{dt} \cos \Theta(t) = -\sin \Theta(t) \frac{d\Theta(t)}{dt}.$$

Andererseits gilt wegen  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \perp \frac{\partial}{\partial r}$  und  $|\frac{\partial}{\partial \vartheta}| = \sqrt{G}$

$$\begin{aligned} \sin \Theta(t) &= \text{vol} \left( \frac{\partial}{\partial r}, u'(t) \right) = \text{vol} \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{dr(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\vartheta(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\ &= \sqrt{G} \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{G} \frac{du^2}{dt}. \end{aligned}$$

Schlußendlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 &= -\sin \Theta(t) \frac{d\Theta}{dt} = -\sqrt{G} \frac{d\vartheta}{dt} \frac{d\Theta}{dt}, \\ \text{d.h. } \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \frac{d\vartheta}{dt}. \end{aligned}$$

### 11.4 Theorema elegantissimum von Gauß.

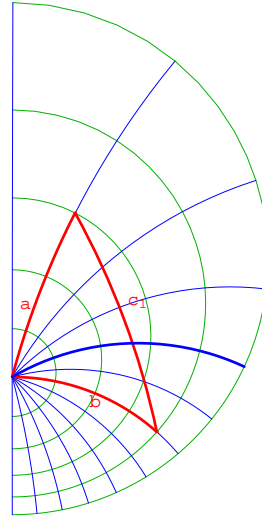
Sei  $\Delta$  ein geodätisches Dreieck – d.h. dessen Seiten sind Geodäten – in  $M$  mit Innenwinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , dann gilt:

$$\int_{\Delta} K \text{vol}_M = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Insbesondere liefert das für die Ebene den Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck 180 Grad (d.h.  $\pi$ ) ist.

#### Beweis.

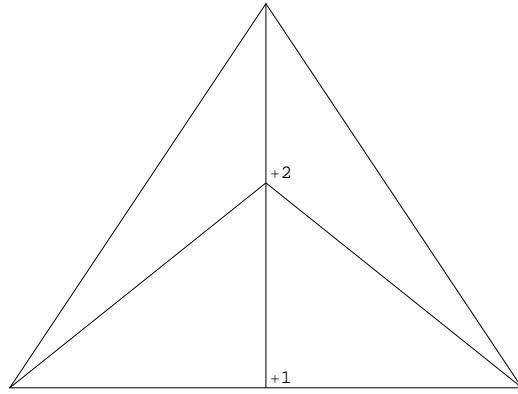
Wir setzen vorerst voraus, daß das geodätische Dreieck ganz im Kartenbereich für geodätische Polarkoordinaten  $\varphi$  um die Ecke  $C$  enthalten ist. Die beiden Seiten  $a$  und  $b$  entsprechen in Polarkoordinaten zwei Geraden durch 0. Und wir können die 0-Richtung so wählen, daß sie die Tangente an die Seite  $b$  ist. Die Seite  $c$  läßt sich in Polarkoordinaten dann durch eine Gleichung der Form  $r = r(\vartheta)$  mit  $\vartheta \in [0, \gamma]$  beschreiben. Sei  $\Theta(\vartheta)$  der Winkel zwischen  $\frac{\partial}{\partial r}$  und der Seite  $c$ . Klarerweise ist  $\Theta(0) = \pi - \alpha$  und  $\Theta(\gamma) = \beta$ . Also gilt:



$$\begin{aligned} \int_{\Delta} K \text{vol}_M &= \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} \varphi^*(K \text{vol}_M) = && \text{wegen } \boxed{9.17} \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} \sqrt{G} dr \wedge d\vartheta = \\ &= \int_0^\gamma \int_0^{r(\vartheta)} -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}(r, \vartheta) dr d\vartheta = && \text{wegen Bew. v. } \boxed{11.1}, \text{ cf. } \boxed{11.11} \\ &= \int_0^\gamma 1 - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(r(\vartheta), \vartheta) d\vartheta = && \text{wegen } \boxed{11.3} \\ &= \int_0^\gamma 1 + \frac{d\Theta}{d\vartheta}(\vartheta) d\vartheta = \gamma + \Theta(\gamma) - \Theta(0) = \gamma + \beta - (\pi - \alpha). \end{aligned}$$

Für ein allgemeines geodätisches Dreieck folgt das Resultat, durch Unterteilen in kleinere geodätische Dreiecke: Denn addiert man die Resultate für die Teildreiecke,

so erhält man auf der linken Seite  $\int_{\Delta} K \operatorname{vol}_M$  und auf der rechten die Summe aller Innenwinkel – also die Summe der Winkel an den ursprünglichen Ecken plus  $\pi$  mal die Anzahl der übrigen Randecken plus  $2\pi$  mal die Anzahl der inneren Ecken – vermindert um  $\pi$  mal der Anzahl der Teilungs-Dreiecke.



Da bei jeder Teilung einer inneren Seite die beiden begrenzenden Dreiecke in 4 Dreiecke zerlegt werden und jede Teilung einer Randseite das begrenzende Dreieck in zwei zerlegt, gilt:

Die Summe der Ecken am Rand (ohne die ursprünglichen 3 Ecken) plus 2 mal Summe der Ecken im Inneren ist die Anzahl der Dreiecke minus 1. Somit ergibt diese Kombination von  $\pi$ 's gerade  $-\pi$  und die Formel gilt auch im allgemeinen Fall.  $\square$

Seien  $a, b$  und  $c$  die Längen der Seiten eines geodätischen Dreiecks  $\Delta$  und seien  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  und  $\bar{\gamma}$  die Winkel des Euklidischen Dreiecks mit diesen Seitenlängen, so gilt:

$$\alpha - \bar{\alpha} = \frac{\operatorname{vol}(\Delta)}{3} K + o(a^2 + b^2 + c^2)$$

und analog für die anderen Winkel, siehe [4, 10.5.5.6 S.387].

### 11.5 Folgerung. Globale Version von Gauß-Bonnet.

Sei  $M$  eine kompakte orientierte Riemann-Fläche so gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K \operatorname{vol}_M = \chi(M) = 2 - 2g.$$

**Beweis.** Wir zerlegen die Fläche in lauter kleine geodätische Dreiecke. Dann gilt für die Euler-Charakteristik nach [31, 26.5.10]:

$$\chi(M) = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen}.$$

Da jede Fläche durch genau 3 Kanten berandet ist und jede Kante aber zu genau zwei Flächen gehört, gilt

$$3 \cdot \#\text{Flächen} = 2 \cdot \#\text{Kanten}$$

und somit ist

$$\chi(M) = \#\text{Ecken} - \frac{1}{2} \cdot \#\text{Flächen}.$$

Auf der anderen Seite gilt:

$$\begin{aligned} \int_M K \operatorname{vol}_M &= \sum_{\Delta} \int_{\Delta} K \operatorname{vol}_M \\ &= \text{Summe aller Innen-Winkel} - \pi \cdot \#\text{Dreiecke} \\ &= 2\pi \cdot \#\text{Ecken} - \pi \cdot \#\text{Flächen} \\ &= 2\pi \chi(M). \quad \square \end{aligned}$$

Falls  $K$  konstant ist, so folgt  $\operatorname{vol}(M) = 4\pi \frac{1}{K} (1 - g)$ , da  $\chi(M) = 2(1 - g)$  für das Geschlecht  $g$  nach [31, 26.5.9] gilt.

### 11.6 Folgerung.

Sei  $M$  eine kompakte zusammenhängende Riemann-Fläche, dann gilt:

1. Ist  $K \geq 0$  aber nicht konstant 0, so ist  $\chi(M) = 2$ , d.h.  $M$  ist diffeomorph zur Sphäre  $S^2$ , oder  $\chi(M) = 1$ , d.h. diffeomorph zur projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2$ .
2. Ist  $K = 0$ , so ist  $\chi(M) = 0$ , d.h.  $M$  ist diffeomorph zum Torus oder zur Kleinschen Flasche.
3. Ist  $K \leq 0$  aber nicht konstant 0, so ist  $\chi(M) < 0$ , d.h.  $M$  ist diffeomorph zu einer Sphäre mit mindestens 2 Henkeln oder mindestens 3 Möbiusbändern.

**Beweis.** Ist  $M$  nicht orientiert, so geht man zur Orientierungsüberlagerung  $M^{\text{or}}$  mit  $\chi(M^{\text{or}}) = 2\chi(M)$  über (siehe [31, 29.5]). Die Euler-Charakteristik können wir dann aus [11.5] ablesen und insbesondere gibt es Punkte  $p \in M$  mit  $\text{sgn}(K(p)) = \text{sgn}(\chi(M))$ . Die Aussagen folgen dann aus dem Klassifizierungssatz [31, 1.2] für kompakte orientierbare Flächen, als Sphären mit  $g \geq 0$  Henkeln (wobei  $\chi(M) = 2(1 - g)$  für das Geschlecht  $g$  nach [31, 26.5.9] gilt), und aus jenem für nicht-orientierbare Flächen [31, 1.4], als Sphären an denen  $g > 0$  Möbiusbänder geklebt sind (wobei  $\chi(M) = 2 - g$  nach [31, 26.5.9]).  $\square$

Wir wollen die Integral-Formel von Gauß-Bonnet nun auf Flächen mit nicht geodätischem Rand verallgemeinern.

### 11.7 Bemerkung.

Wir wählen geodätische Koordinaten  $\varphi$  auf  $M$ , d.h.  $E = 1$  und  $F = 0$ . Somit ist  $e_1 := \varphi_1$ ,  $e_2 := \frac{1}{\sqrt{G}}\varphi_2$  eine Orthonormalbasis. Sei  $t \mapsto u(t)$  die lokale Darstellung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve  $c$ . Sei  $\tau$  der Einheits-Tangententialvektor und  $\xi$  ein Tangentialvektor von  $M$ , welcher normal auf  $\tau$  steht. Sei schließlich  $K_g(t) := \langle c''(t), \xi(t) \rangle$  die geodätische Krümmung, vgl. [28, 55.3]. Beachte, daß  $K_g = 0$  genau dann gilt, wenn  $c''(t) \perp T_{c(t)}M$  ist, d.h.  $c$  eine Geodäte ist.

#### Lemma.

Es existiert eine bis auf  $2\pi\mathbb{Z}$  eindeutige Funktion  $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\tau(t) = \cos \Theta(t) e_1(u(t)) + \sin \Theta(t) e_2(u(t))$$

und es gilt:

$$K_g(t) = \Theta'(t) + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^1} \frac{du^2}{dt}.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Formel  $K(s) = \Theta'(s)$  aus [7.7] für Kurven in der Ebene und auch von [11.3] für Geodäten  $c$ .

**Beweis.** Wie in [28, 3.9] ergibt sich die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion  $\Theta$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \xi(t) &= -\sin(\Theta(t)) e_1(u(t)) + \cos(\Theta(t)) e_2(u(t)) \quad \text{und} \\ \tau'(t) &= \Theta'(t) \xi(t) + \cos \Theta(t) \frac{d}{dt} e_1(u(t)) + \sin \Theta(t) \frac{d}{dt} e_2(u(t)) \end{aligned}$$

Aus  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$  folgt  $\langle \frac{d}{dt} e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \frac{d}{dt} e_j \rangle = 0$ . Setzen wir nun die Darstellungen für  $\tau' = c''$  und für  $\xi$  in der Formel für die geodätische Krümmung ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} K_g &:= \langle \tau', \xi \rangle \\ &= \Theta' \langle \xi, \xi \rangle + \cos^2 \Theta \langle \frac{d}{dt} e_1, e_2 \rangle - \sin^2 \Theta \langle \frac{d}{dt} e_2, e_1 \rangle + \\ &\quad + \sin \Theta \cos \Theta \left( \langle \frac{d}{dt} e_2, e_2 \rangle - \langle \frac{d}{dt} e_1, e_1 \rangle \right) \\ &= \Theta' + \left\langle \frac{d}{dt} e_1, e_2 \right\rangle \end{aligned}$$

und weiters:

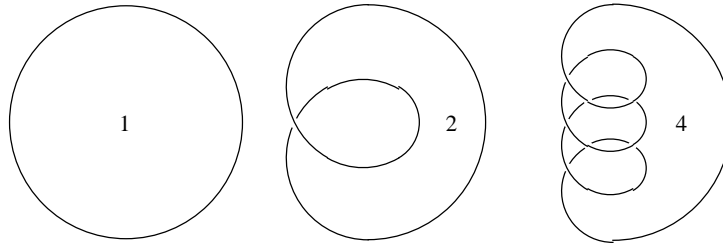
$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} e_1, e_2 \right\rangle &= \left\langle \varphi_{1,1} \frac{du^1}{dt} + \varphi_{1,2} \frac{du^2}{dt}, \frac{1}{\sqrt{G}} \varphi_2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \Gamma_{1,1,2} \frac{du^1}{dt} + \Gamma_{1,2,2} \frac{du^2}{dt} \right) \stackrel{11.2}{=} \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{du^2}{dt} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \frac{du^2}{dt} \end{aligned}$$

und damit

$$K_g(t) = \Theta'(t) + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^1} \frac{du^2}{dt}. \quad \square$$

**11.8 Definition (Umlaufszahl)**

Sei  $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine geschlossene reguläre Kurve. Dann nennen wir  $U(c) := W_0(c') = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z}$  (siehe [28, 4.2]) die UMLAUFZAHL der Kurve.



**11.9 Umlaufsatz von Hopf, 1939.**

Ist  $c$  eine einfach geschlossene Kurve, so gilt:  $U(c) = \pm 1$ .

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  nach Bogenlänge parametrisiert.

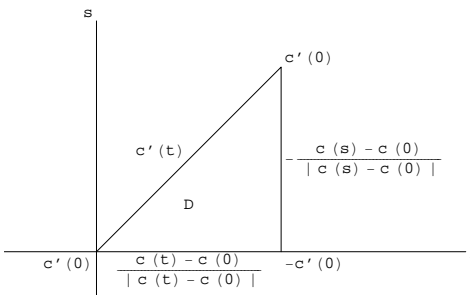
Wir betrachten

$$\Gamma(t, s) := \frac{c(t) - c(s)}{|c(t) - c(s)|}$$

mit Definitionsbereich

$$D := \{(t, s) : 0 < s < t < L\}.$$

Dieses  $\Gamma$  läßt sich auf dem Abschluß  $\overline{D}$  stetig fortsetzen: Auf den Katheten  $\{(t, 0) : t \in ]0, L[ \}$  und  $\{(L, s) : s \in ]0, L[ \}$  ist das klar.



Auf der Hypothenuse  $\{(t, t) : t \in [0, L]\}$  geht das durch folgende Formel:

$$\Gamma(r, r) := \lim_{s, t \rightarrow r} \Gamma(t, s) = c'(r),$$

denn  $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\gamma(t, s) := \int_0^1 c'(s + (t - s)\rho) d\rho = \frac{c(t) - c(s)}{t - s}$$

ist stetig und  $\lim_{s, t \rightarrow r} \gamma(t, s) = \int_0^1 c'(r + \rho(r - r)) d\rho = c'(r)$ . Weiters ist

$$\begin{aligned} \Gamma(t, s) &= \frac{\gamma(t, s) \cdot (t - s)}{|\gamma(t, s) \cdot (t - s)|} = \frac{\gamma(t, s)}{|\gamma(t, s)|} \operatorname{sgn}(t - s) \\ \lim_{\substack{t, s \rightarrow r \\ t > s}} \Gamma(t, s) &= \lim_{\substack{t, s \rightarrow r \\ t > s}} \frac{\gamma(t, s)}{|\gamma(t, s)|} = \frac{c'(r)}{|c'(r)|} = c'(r). \end{aligned}$$

Für die Ecke  $(L, 0)$  gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \nearrow L \\ s \searrow 0}} \Gamma(t, s) &\stackrel{L-t'=t}{=} \lim_{\substack{t' \searrow 0 \\ s \searrow 0}} \Gamma(L-t', s) \stackrel{c \text{ ist } L\text{-periodisch}}{=} \\ &= \lim_{t', s \searrow 0} \Gamma(-t', s) = \lim_{t', s \searrow 0} \frac{\gamma(-t', s)}{|\gamma(-t', s)|} \operatorname{sgn}(-t' - s) = -c'(0) \end{aligned}$$

Also setzen wir  $\Gamma(L, 0) := -c'(0)$  und haben eine stetige Fortsetzung von  $\Gamma$  auf  $\overline{D}$  erhalten.

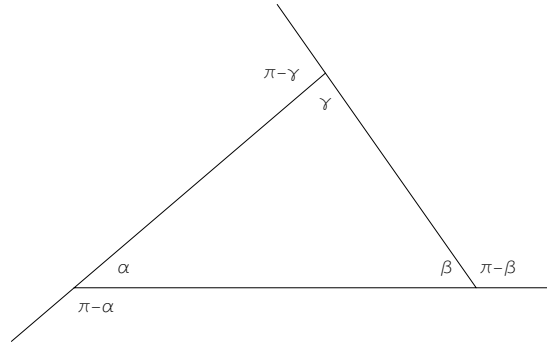
Wir suchen eine Gerade parallel zur x-Achse, welche  $c$  berührt, sodaß  $c$  in der oberen Halbebene liegt. Sei  $0$  ein Parameter, für welchen  $c$  diese Gerade berührt. O.B.d.A. sei  $c'(0) = \binom{1}{0}$ . Da  $\Gamma$  eingeschränkt auf die Hypothenuse die Kurve  $c'$  ist, welche vermöge  $\Gamma$  homotop zu  $\Gamma$  eingeschränkt auf die Katheten ist, folgt

$$\begin{aligned} U(c) &= W_0(c') = W_0(\Gamma|_{\text{Hypothenuse}}) \stackrel{[28, 4.6]}{=} W_0(\Gamma|_{\text{Katheten}}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( (\pi - 0) + ((\pi + \pi) - (0 + \pi)) \right) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Der Umlaufsatz von Hopf läßt sich auch auf Kurven mit Ecken, das sind stückweise  $C^\infty$ -Kurven, welche in den Eckpunkten keine Spitzen haben, d.h. daß der linksseitige Tangentialvektor und der rechtsseitige nicht entgegengesetzt orientiert sind, erweitern. Sei  $c$  auf den Teilintervallen  $[t_i, t_{i+1}]$  glatt, wobei die  $t_i$  die Ecken von  $c$  sind, dann definieren wir die Umlaufzahl von  $c$  als:

$$U(c) = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_i (\gamma_i(t_{i+1}) - \gamma_i(t_i)) + \sum_i \varphi_i \right)$$

wobei  $\gamma_i$  ein Lift von  $\frac{c'}{|c'|}|_{[t_i, t_{i+1}]}$  ist und  $\varphi_i \in ]-\pi, +\pi[$  der Winkel zwischen linksseitiger und rechtsseitiger Tangente bei  $c(t_i)$  ist.



Betrachten wir als Beispiel die Umlaufzahl eines Dreiecks  $\Delta$ :

$$U(\Delta) = \frac{1}{2\pi} \left( (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) \right) = \frac{1}{2\pi} \left( 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) \right) = 1.$$

### 11.10 Satz. Gauß-Bonnet für Polygone.

Sei  $\varphi : U \rightarrow M$  eine Karte von  $M$  und sei  $P$  ein Polygon in  $U$  und  $\alpha_i$  die Außenwinkel (d.h.  $\pi$  minus Innenwinkel) von  $\varphi(P)$ . Dann gilt:

$$\int_{\varphi(P)} K \operatorname{vol}_M + \int_{\varphi(\partial P)} K_g + \sum_i \alpha_i = 2\pi.$$



**Beweis.** Wir nehmen zuerst an, daß sich ganz  $\varphi(P)$  durch geodätische Polarkoordinaten parametrisieren läßt. Es gilt dann

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{G} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} 0 \right) \stackrel{4.5}{=} \operatorname{div} \xi,$$

wobei  $\xi := \xi^r \frac{\partial}{\partial r} + \xi^\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} := \left( -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + 0 \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ . Also gilt nach dem Greenschen Satz:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(P)} K \operatorname{vol}_M &= \int_{\varphi(P)} \operatorname{div} \xi \operatorname{vol}_M \stackrel{4.7}{=} \int_{\varphi(\partial P)} \langle \xi, \nu_{\varphi(\partial P)} \rangle \operatorname{vol}_{\varphi(\partial P)} \\ &\stackrel{4.6}{=} \int_{\varphi(\partial P)} \operatorname{incl}^*(\iota_\xi \operatorname{vol}_M) \\ &\stackrel{4.2}{=} \int_{\varphi(\partial P)} \operatorname{incl}^* \left( \iota_{\xi^r \frac{\partial}{\partial r} + \xi^\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}} \sqrt{G} dr \wedge d\vartheta \right) \\ &= \int_{\varphi(\partial P)} \sqrt{G} \xi^r d\vartheta - \sqrt{G} \xi^\vartheta dr = - \int_{\varphi(\partial P)} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} d\vartheta. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Formel aus dem Lemma in [11.7](#) für die geodätische Krümmung der Randkurve, so erhalten wir für jede Seite  $I$  des Polygons:

$$- \int_{\varphi(I)} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} d\vartheta = \int_I \Theta'(t) dt - \int_I K_g(t) dt.$$

Wegen des Umlaufsatzes [11.9](#) in der Ebene gilt im Falle der Euklidischen Metrik:

$$\sum_i \left( \int_{I_i} \Theta'(t) dt + \alpha_i \right) = 2\pi.$$

Eine allgemeine Riemann-Metrik können wir durch  $s \mapsto G^s := s + (1-s)G$  affin mit der Euklidischen Metrik (d.h.  $G = 1$ ) verbinden, und erhalten analog die Funktion  $\Theta^s$  und die Winkel  $\alpha_i^s$ , und diese hängen stetig von  $s$  ab. Da aber

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \int_{I_i} (\Theta^s)' + \alpha_i^s \right) &\equiv \sum_i \left( (\Theta^s(\max I_i) - \Theta^s(\min I_i)) + (\Theta^s(\min I_i) - \Theta^s(\max I_{i-1})) \right) \\ &= 0 \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

gilt, muß dieser Ausdruck konstant in  $s$  sein, und stimmt somit überall mit seinem Wert  $2\pi$  für  $s = 1$  überein.

Liegt das Polygon nicht gänzlich in einer Karte, so unterteilt man es fein genug und wendet das Resultat für die einzelnen Teile an. Die Summe der Integrale über innere Kanten fällt weg, da diese genau zweimal und zwar mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden. Wir bezeichnen mit  $E^o$ ,  $E^\partial$  und  $E = E^o \cup E^\partial$  die Menge der Ecken im Inneren, am Rand und insgesamt, mit  $K^o$ ,  $K^\partial$  und  $K = K^o \cup K^\partial$  die Menge der entsprechenden Kanten und mit  $F$  die Menge der Flächen. Für jedes Polygon  $\Delta \in F$  sei  $E_\Delta$  und  $K_\Delta$  die Menge der Ecken und Kanten von  $\Delta$ . Mit  $\beta_j^\Delta$  bezeichnen wir den Innenwinkel von  $\Delta$  in der Ecke  $j \in E_\Delta$ . Damit erhalten wir auf der anderen Seite:

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta \in F} \left( 2\pi - \sum_{j \in E_\Delta} (\pi - \beta_j^\Delta) \right) &= 2\pi |F| - \pi \sum_{\Delta \in F} |E_\Delta| + \sum_{\Delta \in F} \sum_{j \in E_\Delta} \beta_j^\Delta \\ &= 2\pi |F| - \pi (|K| + |K^o|) + \pi (|E| + |E^o|) - \sum_i \alpha_i \\ &= 2\pi (|E| - |K| + |F|) - \sum_i \alpha_i \stackrel{31, 29.24}{=} 2\pi - \sum_i \alpha_i \end{aligned}$$

und somit die allgemeine Formel, denn

$$\sum_{\Delta \in F} |E_\Delta| = \sum_{\Delta \in F} |K_\Delta| = 2|K^\circ| + |K^\partial| = 2|K^\circ| + (|K| - |K^\circ|) = |K| + |K^\circ|$$

und

$$\sum_{\Delta \in F} \sum_{j \in E_\Delta} \beta_j^\Delta = \pi (2|E^\circ| + |E^\partial|) - \sum_i \alpha_i = \pi (|E| + |E^\circ|) - \sum_i \alpha_i$$

sowie

$$|K| - |K^\circ| = |K^\partial| = |E^\partial| = |E| - |E^\circ|. \quad \square$$

**11.11 Satz von Minding.**

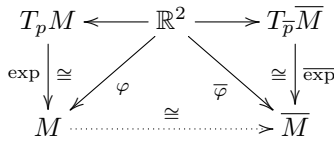
*Riemann-Flächen gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind lokal isometrisch.*

**Beweis.** Wir wählen mittels [10.9](#) geodätische Polarkoordinaten in Punkten  $p \in M$  und  $\bar{p} \in \bar{M}$ . Dann gilt (siehe im Beweis von [11.1](#)):

$$\begin{aligned} G &= \langle \varphi_\vartheta, \varphi_\vartheta \rangle, & \bar{G} &= \langle \bar{\varphi}_\vartheta, \bar{\varphi}_\vartheta \rangle, \\ G(0, \vartheta) &= 0, & \bar{G}(0, \vartheta) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \sqrt{G}(r, \vartheta) &= 1, & \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \sqrt{\bar{G}}(r, \vartheta) &= 1. \end{aligned}$$

Sowohl  $\sqrt{G}(\cdot, \vartheta)$  als auch  $\sqrt{\bar{G}}(\cdot, \vartheta)$  sind Lösungen  $\gamma$  der Jacobi-Gleichung [9.17](#)

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \gamma(r) = -K \cdot \gamma(r).$$



Eine solche ist durch Vorgabe von  $\gamma(0) = 0$  und  $\gamma'(0) = 1$  eindeutig bestimmt. Also haben die Riemann-Metriken in geodätischen Polarkoordinaten die gleichen Koeffizienten, und somit sind die Flächen lokal isometrisch.  $\square$

Wir versuchen nun eine globale Version obigen Satzes zu geben. Ganz allgemein kann das aber nicht gelten. Z.B. ist die Ebene und der Zylinder lokal aber nicht global isometrisch.

**11.12 Definition (geodätisch vollständig).**

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit  $M$  heißt GEODÄTISCH VOLLSTÄNDIG, falls alle Geodäten unendlich lang sind. Da für die Länge einer nach der Bogenlänge parametrisierten Geodäte  $c : [a, b] \rightarrow M$  folgendes gilt:  $L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b 1 dt = b - a$ , ist die Geodäte genau dann unendlich lang, wenn ihr Parameterintervall ganz  $\mathbb{R}$  ist.

**11.13 Satz.**

*Je zwei abstrakte, einfachzusammenhängende, geodätisch vollständige Riemann-Flächen mit gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind isometrisch isomorph.*

**Beweis.** Wegen der Einfachzusammenhängendheit folgt dies aus dem lokalen Resultat [11.11](#) zusammen mit [13.12.4](#).  $\square$

**11.14 Folgerung.**

*Jede einfachzusammenhängende geodätisch vollständige abstrakte Riemann-Fläche mit  $K = 1$  ist also nach [11.13](#) bis auf Isometrien die Sphäre; Jede solche mit  $K = -1$  ist bis auf Isometrien die Poincarésche Halbebene (bzw. hyperbolische Scheibe)*

und jede derartige mit  $K = 0$  ist die Ebene. Vergleiche das mit dem Riemannschen Abbildungssatz [3.1] sowie dem Uniformisierungssatz [3.4].

Durch Übergang zur universellen Überlagerung folgt, daß jede Riemann-Fläche der Orbitraum einer auf einer einfach zusammenhängenden Riemann-Fläche diskret wirkenden Gruppe von konformen Abbildungen ist.

Die einzige nicht triviale, auf der Sphäre diskret wirkende Gruppe, ist die von der Antipodalabbildung erzeugte. Es gibt also nur zwei Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung  $K > 0$ , nämlich die Sphäre und die projektive Ebene. Die Geometrie der projektiven Ebene wird auch elliptisch genannt, in ihr sind alle Geodäten geschlossen.

Es gibt auf der Ebene nur folgende diskret wirkende Gruppen:

1. die von einer Translation erzeugten,
2. die von einer Translation zusammengesetzt mit einer Spiegelung erzeugten,
3. die von zwei Translationen erzeugten,
4. die von einer Translation und einer Translation zusammengesetzt mit einer Spiegelung erzeugten.

Im Falle  $K = 0$  gibt es also nur auf dem Zylinder, dem Möbiusband, dem Torus und der Kleinschen Flasche eine Metrik mit verschwindender Gauß-Krümmung.

Hingegen besitzt jede kompakte Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  eine Metrik mit konstant negativer Krümmung, siehe [4, 11.2.5 S.408].

Nach [10] und [17] (siehe [20, 6.2.8 S.105]) können zwei isometrische Flächen im  $\mathbb{R}^3$  von strikt positiver Gauß-Krümmung durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden.

Kann man jede Fläche deformieren ohne ihre Metrik zu ändern? Ein Gegenbeispiel dazu wurde von Efimov gegeben:  $\varphi(t, s) := t^9 + \lambda t^7 s^2 + s^9$  kann nicht einmal lokal deformiert werden falls  $\lambda$  transzendent ist, siehe [4, 11.14.2 S.428].

### 11.15 Theorem (Flächen konstanter Krümmung).

Sei  $M$  eine abgeschlossene, zusammenhängende Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit konstanter Gauß-Krümmung  $K$ , dann gilt:

1. Ist  $K > 0$ , so ist  $M$  eine Sphäre [33].
2. Ist  $K = 0$ , so ist  $M$  ein verallgemeinerter Zylinder [34], [16].
3. Ist  $K < 0$ , so existiert  $M$  nicht [18]. Dies wurde durch [11] verallgemeinert zu: Es gibt keine abgeschlossene Fläche mit einer, nach oben durch ein Konstante  $k < 0$  beschränkten Gauß-Krümmung.

Ohne Beweis.

### 11.16 Lemma.

Ist  $M$  eine kompakte (randlose!) Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , so existiert ein Punkt wo die Gauß-Krümmung positiv ist.

**Beweis.** Das ist offensichtlich, da die Fläche in jedem Berührungspunkt mit der "Um-sphäre" positive Krümmung hat.  $\square$

### 11.17 Folgerung.

Es gibt keine kompakte Minimalfläche.  $\square$

## 12. Paralleltransport

Als nächstes versuchen wir irgendeine Kurve  $c$  auf der Fläche entlangzugehen und dabei einen Tangentialvektor möglichst parallel zu bewegen, d.h. seine Richtung so wenig wie möglich zu verändern.

### 12.1 Definition (Paralleles Vektorfeld).

Ein Vektorfeld längs einer Kurve  $c$  heißt PARALLEL, falls seine skalare Geschwindigkeit punktweise minimal ist.

### 12.2 Lemma (Charakterisierung von parallelen Vektorfeldern).

Ein Vektorfeld  $w$  längs einer Kurve  $c$  auf  $M$  ist genau dann parallel, wenn  $w'(t) \in T_{c(t)}M^\perp$  für alle  $t$ .

**Beweis.** Aus  $w(t) \in T_{c(t)}M$  folgt  $\langle w(t), v(t) \rangle = 0$ , mit  $v(t) := \nu(c(t))$ . Differenzieren wir diese Gleichung nach  $t$ , so erhalten wir

$$\langle w'(t), v(t) \rangle + \langle w(t), v'(t) \rangle = 0.$$

Damit  $|w'(t)|$  minimal wird muß wegen

$$|w'(t)|^2 = |w'(t) - \langle w'(t), v(t) \rangle v(t)|^2 + |\langle w'(t), v(t) \rangle|^2$$

bei vorgegebenen Normalanteil  $\langle w'(t), v(t) \rangle = -\langle w(t), v'(t) \rangle$  der tangentiale Anteil  $w'(t) - \langle w'(t), v(t) \rangle v(t)$  möglichst klein, am besten 0 werden, d.h. es ist  $w'(t) = \langle w'(t), v(t) \rangle v(t)$ , oder mit anderen Worten  $w'(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ .  $\square$

Insbesondere gilt:

### 12.3 Folgerung.

Eine proportionale zur Bogenlänge parametrisierte Kurve  $c$  ist genau dann eine Geodäte, wenn das Vektorfeld  $c'$  parallel längs  $c$  ist.

### 12.4 Parallele Vektorfelder in lokalen Koordinaten.

Sei  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  und  $t \mapsto u(t)$  die lokale Darstellung einer Kurve  $c = \varphi \circ u$ . Die Differentialgleichung für ein längs  $c$  paralleles Vektorfeld  $t \mapsto w(t)$  bestimmen wir wie folgt (vgl. mit [10.7](#)):

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{i=1}^m w^i(t) \cdot (\partial_i \varphi)(u(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow w' &= \sum_i \frac{dw^i}{dt} \cdot \varphi_i + \sum_{i,j} w^i \cdot \varphi_{i,j} \frac{du^j}{dt} \\ &\stackrel{10.5}{=} \sum_i \frac{dw^i}{dt} \cdot \varphi_i + \sum_{i,j,k} \frac{du^j}{dt} w^i \cdot \left( \Gamma_{i,j}^k \cdot \varphi_k + \langle \varphi_{i,j} | \nu \rangle \nu \right) \in \\ &\in \sum_k \left( \frac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j} w^i \frac{du^j}{dt} \Gamma_{i,j}^k \right) \varphi_k + \mathbb{R} \cdot \nu. \end{aligned}$$

Also ist  $w$  parallel längs  $c$  genau dann, wenn

$$\frac{dw^k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u(t)) \cdot w^i(t) \cdot \frac{du^j}{dt}(t) = 0 \text{ für } k = 1, \dots, m.$$

oder kurz:

$$\dot{w}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k w^i \dot{u}^j = 0 \text{ für } k = 1, \dots, m.$$

Dieses System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen hat bei vorgegebenen Anfangsdaten  $w^k(0)$  eine eindeutige globale Lösung.

### 12.5 Lemma (Existenz paralleler Vektorfelder).

Zu jeder glatten Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  und Anfangsvektor  $w_0 \in T_{c(0)}M$  existiert eine eindeutig bestimmte parallele Kurve  $w : \mathbb{R} \rightarrow TM$  mit  $w(t) \in T_{c(t)}M$  für alle  $t$  und  $w(0) = w_0$ .

Wir bezeichnen mit  $\text{ptp}(c, t)(v_0)$  die parallele Kurve  $v$  über  $c$  mit Anfangswert  $v_0$  zum Zeitpunkt  $t$ . Man nennt das auch den PARALLELTRANSPORT längs  $c$ . Für diesen gilt:

1.  $\text{ptp}(c, t) : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$  ist eine lineare Isometrie
2.  $\text{ptp}(c, t)^{-1} = \text{ptp}(c(\cdot + t), -t)$
3.  $\text{ptp}(c, g(t)) = \text{ptp}(c \circ g, t) \circ \text{ptp}(c, g(0))$  für  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Beweis.


**1** Klarerweise ist die Lösung  $\text{ptp}(c, \cdot)(v_0)$  einer linearen Differentialgleichung vom Anfangswert  $v_0$  linear abhängig. Es gilt

$$\langle \xi, \eta \rangle' = \langle \xi', \eta \rangle + \langle \xi, \eta' \rangle = 0 + 0,$$

falls  $\xi$  und  $\eta$  parallele Vektorfelder längs  $c$  sind, d.h.  $\xi', \eta' \in TM^\perp$ . Also ist  $\langle \xi, \eta \rangle$  konstant und  $\text{ptp}(c, t)$  eine Isometrie.

**2** und **3** folgen leicht aus der Eindeutigkeit der Lösungen von linearen Differentialgleichungen.  $\square$

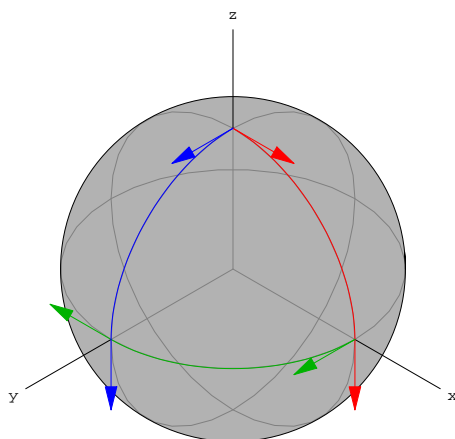
### 12.6 Beispiel.

1. In jeder Hyperebene sind genau die konstanten Vektorfelder die parallelen, da die Ableitung eines Vektorfelds wieder in der Ebene liegt.
2. Da wir in **13.7** zeigen werden, daß paralleles Vektorfeld zu sein eine intrinsische Eigenschaft ist, sind folglich auf Torsen die parallelen Vektorfelder, gerade die konstanten Vektorfelder in einer Abwicklung der Torse in die Ebene. 

Unter einer REGELFLÄCHE versteht man eine 2-Fläche, die sich lokal durch  $\varphi : (s, \vartheta) \mapsto c(\vartheta) + s w(\vartheta)$  parametrisieren läßt, d.h. durch Transport der Gerade mit (sich ändernden) Richtungsvektor  $w$  längs der Kurve  $c$ . Damit  $\varphi$  regulär ist muß man offensichtlich voraussetzen, daß  $\varphi_s(s, \vartheta) = w(\vartheta)$  und  $\varphi_\vartheta(s, \vartheta) = c'(\vartheta) + s w'(\vartheta)$  linear unabhängig sind. Durch jeden Punkt einer Regelfläche geht also ein Geradenstück  $s \mapsto c(\vartheta) + s w(\vartheta)$ . Diese Gerade heißt ERZEUGENDE. Ist der Normalvektor längs jeder Erzeugenden konstant, so spricht man von einer TORSE.

Nach **[28, 55.4]** sind die Torsen genau jene Regelflächen, für welche  $K = 0$  ist, die also nach **[11.11]** lokal isometrisch zur Ebene sind.

3. Parallele Vektorfelder längs geschlossener Kurven können sehr wohl verschiedene Anfangs- und Endwerte besitzen: Man starte auf dem Nordpol der Sphäre und transportiere einen Vektor in Richtung eines Meridians bis zum Äquator. Dann transportiere man diesen auf den Äquator normal stehenden Vektor entlang des Äquators bis zu einem anderen Meridian, und transportiere ihn schließlich längs dieses anderen Meridians wieder zum Nordpol. Dort schließt der transportierte Vektor mit seiner Ausgangslage genau den Winkel der beiden Meridiane ein.



Eine allgemeine Konstruktionsmöglichkeit für parallele Vektorfelder ist die folgende:

### 12.7 Satz (Parallelität via Schmiegtorse).

Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Kurve auf  $M$  die eine Schmiegtorse besitzt, dann gilt: Ein Vektorfeld ist parallel längs  $c$  in  $M$  genau dann, wenn es parallel längs  $c$  in der Schmiegtorse ist.



**Beweis.** Die Schmiegtorse ist nach [28, 55.6] lokal durch  $\varphi(t, s) = c(s) + t\xi(s)$  gegeben, wobei  $\xi$  ein Vektorfeld längs  $c$  ist, welches punktweise linear unabhängig von  $c'$  ist. Klarerweise ist der Tangentialraum in  $c(t)$  von  $M$  identisch mit jenem der Schmiegtorse und somit ein Vektorfeld  $\eta$  längs  $c$  tangential an  $M$  genau dann, wenn es tangential an die Schmiegtorse ist. Also sieht die Bedingung “parallel zu sein” für beide Flächen gleich aus.  $\square$

### 12.8 Definition (Holonomie).

Die Untergruppe

$$\left\{ \text{ptp}(c, 2\pi) : c \text{ ist geschlossene Kurve durch } x \right\}$$

der Gruppe  $O(T_x M)$  heißt HOLONOMIE-GRUPPE von  $M$  (bei  $x$ ). Sie ist eine Lie-Gruppe und für verschiedene  $x$  in einem zusammenhängenden  $M$  sind diese Untergruppen konjugiert. Z.B. ist die Holonomiegruppe der  $S^2$  nach [12.6.3] und [12.5.1] gerade die  $SO(2) \cong S^1$ .

Wir werden in [14.12] charakterisieren, wann diese Gruppe trivial ist.

## 13. Kovariante Ableitung

Leider steckt in den obigen Beschreibungen für Geodäten und für parallele Vektorfelder noch die Flächennormale und damit der umgebende Vektorraum. Diese Begriffe sollten aber auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten Sinn machen.

Anstatt zu sagen, daß ein Vektor wie  $w'$  normal auf die Fläche steht, können wir auch sagen, daß seine tangentielle Komponente, d.h. seine Projektion auf den Tangentialraum verschwindet. Wir versuchen diese nun intrinsisch zu beschreiben.

### 13.1 Definition (Kovariante Ableitung).

Sei  $w$  ein Vektorfeld längs einer Kurve  $c$  in  $M$ . Dann wollen wir die Normalprojektion auf den Tangentialraum der Ableitung des Vektorfelds die KOVARIANTE ABLEITUNG  $\nabla$  (sprich "Nabla" oder "Del") nennen und mit

$$\nabla w : t \mapsto w'(t) - \langle w'(t), \nu_{c(t)} \rangle \nu_{c(t)} \in T_{c(t)}M$$

bezeichnen. Diese mißt also die infinitesimale Änderung von  $w$ , wie sie in  $M$  gesehen wird, und ignoriert jene Komponente, die auf  $M$  normal steht.

Die Formel für die kovariante Ableitung  $\nabla$  eines Vektorfelds  $w$  längs einer Kurve  $c = \varphi \circ u$  sieht nach [12.4](#) in lokalen Koordinaten wie folgt aus:

$$\nabla w = \sum_{k=1}^m \left( \frac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k w^i \frac{du^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k}, \text{ wobei } w = \sum_k w^k \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Man beachte, daß die Geodäten genau die Lösungen der Gleichung  $\nabla c' = 0$  sind (wobei  $c'$  als Vektorfeld längs  $c$  aufzufassen ist), und die Vektorfelder  $w$ , welche parallel längs einer Kurve  $c$  sind, genau die Lösungen der Gleichung  $\nabla w = 0$  sind. Es gelten folgende Formeln für  $\nabla$ :

$$\begin{aligned} \nabla(\xi + \eta) &= \nabla\xi + \nabla\eta \\ \nabla(f \cdot \xi) &= f \cdot \nabla\xi + f' \cdot \xi \\ \langle \xi, \eta \rangle' &= \langle \nabla\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla\eta \rangle, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \nabla(f \cdot \xi) &= (f' \cdot \xi + f \cdot \xi') - \langle f' \cdot \xi + f \cdot \xi', \nu \rangle \nu = f' \cdot \xi + f \cdot \nabla\xi - 0, \\ \langle \xi, \eta \rangle' &= \langle \xi', \eta \rangle + \langle \xi, \eta' \rangle = \langle \nabla\xi + \langle \xi', \nu \rangle \nu, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla\eta + \langle \eta', \nu \rangle \nu \rangle \\ &= \langle \nabla\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla\eta \rangle, \quad \text{da } \langle \nu, \eta \rangle = 0 = \langle \xi, \nu \rangle. \end{aligned}$$

### 13.2 Gauß-Gleichung.

Für die kovariante Ableitung gilt:

$$\nabla w = w' + \langle w, Lc' \rangle \nu \circ c.$$

**Beweis.** Die Behauptung folgt sofort aus  $\langle w, \nu \circ c \rangle = 0$  durch Differenzieren.  $\square$

### 13.3 Definition.

Seien nun zwei Vektorfelder  $\xi$  und  $\eta$  auf  $M$  gegeben, dann können wir  $\nabla_\eta \xi \in \mathfrak{X}(M)$  als  $(\nabla_\eta \xi)(x) = \nabla(\xi \circ c)(0)$  definieren, wobei  $c$  eine Integralkurve des Vektorfelds  $\eta$  mit der Anfangsbedingung  $c(0) = x$  ist.

Das läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$(\nabla_\eta \xi)_x = \xi'(x) \cdot \eta_x - \langle \xi'(x) \cdot \eta_x, \nu_x \rangle \nu_x = \xi'(x) \cdot \eta_x + \langle \xi(x), L_x \cdot \eta_x \rangle \nu_x.$$

### 13.4 Lemma (Eigenschaften der kovarianten Ableitung).

Der Operator  $\nabla$  geht von  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$  nach  $\mathfrak{X}(M)$  und hat folgende Eigenschaften.

1.  $\nabla$  ist bilinear.
2.  $\nabla_\eta \xi$  ist  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear in  $\eta$ .
3.  $\nabla_\eta(f\xi) = f \nabla_\eta \xi + \eta(f) \xi$  für  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .
4.  $\nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta = [\eta, \xi]$ .
5.  $\eta \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \nabla_\eta \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \nabla_\eta \xi_2 \rangle$ .

**Beweis.** [1](#) und [2](#) sind klar.

Zu [3](#):

$$\begin{aligned}
 (\nabla_\eta(f\xi))(x) &= (f\xi)'(x) \cdot \eta_x - \langle (f\xi)'(x) \cdot \eta_x | \nu_x \rangle \nu_x \\
 &= f'(x)(\eta_x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x \\
 &\quad - \left\langle f'(x)(\eta_x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x \mid \nu_x \right\rangle \nu_x \\
 &= \eta(f)(x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x - 0 - f(x) \cdot \langle \xi'(x) \cdot \eta_x | \nu_x \rangle \nu_x \\
 &= (\eta(f) \cdot \xi)(x) + f(x) \cdot (\nabla_\eta \xi)(x) \\
 &= \left( \eta(f) \cdot \xi + f \cdot \nabla_\eta \xi \right)(x)
 \end{aligned}$$

Zu [4](#): Wegen der Gaußgleichung und der Symmetrie von  $L$  gilt:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta)(x) &\stackrel{\text{13.2}}{=} (\xi'(x) \cdot \eta_x + \langle \xi_x, L_x \eta_x \rangle \nu_x) - (\eta'(x) \cdot \xi_x + \langle \eta_x, L_x \xi_x \rangle \nu_x) \\
 &\stackrel{\text{31, 17.2}}{=} [\eta, \xi](x) + 0.
 \end{aligned}$$

Zu [5](#):

$$\begin{aligned}
 \left( \langle \nabla_\eta \xi_1 | \xi_2 \rangle + \langle \nabla_\eta \xi_2 | \xi_1 \rangle \right)(x) &= \left\langle \xi_1'(x)(\eta_x) - \langle \xi_1'(x)(\eta_x) | \nu_x \rangle \nu_x \mid \xi_2(x) \right\rangle \\
 &\quad + \left\langle \xi_2'(x)(\eta_x) - \langle \xi_2'(x)(\eta_x) | \nu_x \rangle \nu_x \mid \xi_1(x) \right\rangle \\
 &= \langle \xi_1'(x)(\eta_x) | \xi_2(x) \rangle + \langle \xi_2'(x)(\eta_x) | \xi_1(x) \rangle \\
 &= \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle'(x) \cdot \eta_x = \eta(\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle)(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß es so einen Differentialoperator auch auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, und er durch die obigen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

### 13.5 Satz (Levi-Civita Ableitung).

Sei  $M$  eine (abstrakte) Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau eine Abbildung  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , welche die Eigenschaften (1)-(5) aus [13.4](#) erfüllt, wobei das innere Produkt in (5) durch die Riemann-Metrik zu ersetzen ist. Diese Abbildung heißt KOVARIANTE ABLEITUNG, oder auch LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG, siehe [31, 27.19](#).

**(Koordinatenfreie) Beweis.** Existenz: Wegen (5) gilt:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) &= g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) + g(\xi_2, \nabla_{\xi_1} \xi_3) & (+) \\
 \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) &= g(\nabla_{\xi_2} \xi_3, \xi_1) + g(\xi_3, \nabla_{\xi_2} \xi_1) & (+) \\
 \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) &= g(\nabla_{\xi_3} \xi_1, \xi_2) + g(\xi_1, \nabla_{\xi_3} \xi_2) & (-).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addieren der ersten beiden und Subtrahieren der 3.ten Gleichung unter Verwendung von (4):

$$\begin{aligned}
 \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) &= \\
 &= g(\nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_3) + g(\nabla_{\xi_1} \xi_3 - \nabla_{\xi_3} \xi_1, \xi_2) + g(\nabla_{\xi_2} \xi_3 - \nabla_{\xi_3} \xi_2, \xi_1) \\
 &\stackrel{(4)}{=} g\left(2\nabla_{\xi_1} \xi_2 - [\xi_1, \xi_2], \xi_3\right) - g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) + g([\xi_2, \xi_3], \xi_1).
 \end{aligned}$$



Und somit

$$2g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3) = \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2).$$

Da die rechte Seite linear in  $\xi_3$  ist, ist  $\nabla_{\xi_1}\xi_2$  durch diese implizite Gleichung wohldefiniert, und da sie auch bilinear in  $(\xi_1, \xi_2)$  ist, gilt (1).

Nun zur Eigenschaft (2):

$$2g(\nabla_{f\xi_1}\xi_2, \xi_3) = f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, f\xi_1) - \xi_3 g(f\xi_1, \xi_2) \\ + g([f\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], f\xi_1) + g([\xi_3, f\xi_1], \xi_2) \\ \stackrel{\text{[31, 17.2.3]}}{=} f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + f\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) + \xi_2(f)g(\xi_3, \xi_1) \\ - f\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) - \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) + g(f[\xi_1, \xi_2] - \xi_2(f)\xi_1, \xi_3) \\ - f g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g(f[\xi_3, \xi_1] + \xi_3(f)\xi_1, \xi_2) \\ = f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + f\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) + \xi_2(f)g(\xi_3, \xi_1) \\ - f\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) - \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) \\ + f g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - \xi_2(f)g(\xi_1, \xi_3) - f g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) \\ + f g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) + \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) \\ = f \left( \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \right. \\ \left. + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \right) \\ = 2f g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3).$$

Eine sehr ähnliche Rechnung zeigt die Eigenschaft (3).

Weiter zu Eigenschaft (4):

$$2g(\nabla_{\xi_1}\xi_2 - \nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_3) = \\ = \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \\ - \xi_2 g(\xi_1, \xi_3) - \xi_1 g(\xi_3, \xi_2) + \xi_3 g(\xi_2, \xi_1) \\ - g([\xi_2, \xi_1], \xi_3) + g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) - g([\xi_3, \xi_2], \xi_1) \\ = 2g([\xi_1, \xi_2], \xi_3).$$

Schlußendlich Eigenschaft (5):

$$2g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3) + 2g(\xi_2, \nabla_{\xi_1}\xi_3) = \\ = \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \\ + \xi_1 g(\xi_3, \xi_2) + \xi_3 g(\xi_2, \xi_1) - \xi_2 g(\xi_1, \xi_3) \\ + g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) - g([\xi_3, \xi_2], \xi_1) + g([\xi_2, \xi_1], \xi_3) \\ = 2\xi_1 g(\xi_2, \xi_3). \quad \square$$

**Koordinatenbeweis.** Es ist vor allem zu zeigen, daß der lokale Ausdruck für  $\nabla$  aus [13.1](#) unabhängig von den gewählten Koordinaten ist und dafür bestimmen

wir zuerst das Transformationsverhalten der Christoffel-Symbole:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^i} &:= \varphi_i \\
\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} &= \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
g_{i,j} &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
\bar{g}_{\bar{i},\bar{j}} &= \left\langle \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} g_{i,j} \\
\Gamma_{i,j,k} &:= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} (g_{j,k}) + \frac{\partial}{\partial u^j} (g_{i,k}) - \frac{\partial}{\partial u^k} (g_{i,j}) \right) \\
\frac{\partial \bar{g}_{\bar{j},\bar{k}}}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left( \sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} \right) \\
&= \sum_{j,k} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left( \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \right) \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left( \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \right) g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} (g_{j,k}) \right) \\
&= \sum_{j,k} \left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} \right) \\
\bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} (g_{\bar{j},\bar{k}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} (g_{\bar{i},\bar{k}}) - \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} (g_{\bar{i},\bar{j}}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{j,k} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left( \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} \right)}_{(2)} + \underbrace{\left( \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} \right)}_{(3)} \right) \\
&\quad + \sum_{i,k} \left( \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{j}} \partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{i,k} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left( \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{j}} \partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{i,k} \right)}_{(4)} + \underbrace{\left( \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j} \right)}_{(3)} \right) \\
&\quad - \sum_{j,i} \left( \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{k}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} g_{j,i} \right)}_{(4)} + \underbrace{\left( \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{k}} \partial \bar{u}^{\bar{i}}} g_{j,i} \right)}_{(2)} + \underbrace{\left( \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \sum_k \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k} \right)}_{(3)} \right) \\
&= \sum_{j,k} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} \right)}_{(1)} + \sum_{i,j,k} \underbrace{\left( \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k} \right) \right)}_{(3)} \\
&= \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \Gamma_{i,j,k} \\
\delta_i^j &= \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \\
\delta_k^i &=: \sum_j g^{i,j} g_{j,k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{i,\bar{j}} &= \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} g^{i,j}, \text{ denn} \\
\sum_{\bar{j}} \bar{g}^{i,\bar{j}} \bar{g}_{\bar{j},\bar{k}} &= \sum_{\bar{j}} \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} g^{i,j} \sum_{l,k} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{l,k} \\
&= \underbrace{\sum_{i,k} \sum_{j,l} \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}}_{\delta_j^l} g^{i,j} g_{l,k} \underbrace{\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}}_{\delta_k^i}}_{\delta_k^i} \\
\Gamma_{i,j}^k &:= \sum_l \Gamma_{i,j,l} g^{l,k} \\
\bar{\Gamma}_{i,\bar{j}}^{\bar{l}} &= \sum_{\bar{k}} \bar{\Gamma}_{i,\bar{j},\bar{k}} \bar{g}^{\bar{k},\bar{l}} \\
&= \sum_{\bar{k}} \left( \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \Gamma_{i,j,k} \right) \sum_{p,q} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} g^{p,q} \\
&= \sum_{j,q} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} \underbrace{\sum_{k,p} \sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} g_{j,k} g^{p,q}}_{\substack{=\delta_p^k \\ =\delta_j^q}} \\
&\quad + \sum_{i,j,q} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} \underbrace{\sum_{p,k} \sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} \Gamma_{i,j,k} g^{p,q}}_{\substack{=\delta_p^k \\ =\Gamma_{i,j}^q}} \\
&= \sum_{i,j,l} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \Gamma_{i,j}^l + \sum_l \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \\
\delta_i^{\bar{l}} &= \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial \bar{u}^i} = \sum_l \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^i} \Rightarrow \\
0 &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \delta_i^{\bar{l}} \\
&= \sum_l \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \left( \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \right) \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^i} + \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \right) \\
&= \sum_{l,j} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \left( \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \right) \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^i} + \sum_l \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} + \sum_l \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j}}^{\bar{l}} &= \sum_{i,j,l} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \Gamma_{i,j}^l + \sum_l \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \\ &= \sum_{i,j,l} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \Gamma_{i,j}^l - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}\end{aligned}$$

Nun können wir eine Koordinatendefinition von  $\nabla w$  für Vektorfelder  $w : \mathbb{R} \rightarrow TM$  längs Kurven  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  geben: In lokalen Koordinaten sei

$$\begin{aligned}c(t) &= \varphi(u^1(t), \dots, u^m(t)) = \bar{\varphi}(\bar{u}^1(t), \dots, \bar{u}^m(t)) \\ w(t) &= \sum_i w^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{\bar{i}} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} = \sum_{\bar{i},i} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial u^i}\end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$w^i(t) = \sum_{\bar{i}} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}.$$

Für Hyperflächen  $M$  ist die Normalprojektion der Ableitung von  $w$  auf den Tangentialraum in den lokalen Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$  nach [13.1](#) durch

$$\sum_i \left( \frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

gegeben bzw. in den Koordinaten  $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^m)$  durch

$$\begin{aligned}& \sum_{\bar{i}} \left( \frac{d\bar{w}^{\bar{i}}(t)}{dt} + \sum_{\bar{j},\bar{k}} \Gamma_{\bar{j},\bar{k}}^{\bar{i}}(u(t)) \bar{w}^{\bar{j}}(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} = \\ &= \sum_{\bar{i}} \left( \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) w^i(t) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\bar{j},\bar{k}} \left( \sum_{j,k,i} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \sum_l \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l} w^l(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \\ &= \sum_{\bar{i}} \left( \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i \partial u^j}(u(t)) \frac{du^j(t)}{dt} w^i(t) + \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) \frac{dw^i(t)}{dt} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\bar{j},\bar{k}} \left( \sum_{j,k,i} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \sum_l \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l} w^l(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\bar{i}} \left( \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{dw^j}{dt} w^i + \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) \frac{dw^i(t)}{dt} \right. \\
&\quad + \sum_{k,i} \sum_{l,j} \Gamma_{j,k}^i \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l}}_{\delta_i^j} w^l \underbrace{\sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}}{dt}}_{\frac{du^k}{dt}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \\
&\quad \left. - \sum_k \sum_{\bar{k}} \underbrace{\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}}{dt}}_{\frac{du^k}{dt}} \sum_{j,l} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l}}_{\delta_i^j} w^l \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \\
&= \sum_i \left( \frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

also ist dieser Ausdruck auch für eine abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeit wohldefiniert. Wir nennen diesen Ausdruck die kovariante Ableitung  $\nabla w$  eines Vektorfelds  $w$  längs einer Kurve  $c$ , d.h.

$$\nabla w(t) := \sum_i \left( \frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{u(t)}.$$

Für Vektorfelder  $X$  und  $Y$  auf Riemann-Mannigfaltigkeiten  $M$  können wir nun ein Vektorfeld  $\nabla_X Y$  durch

$$(\nabla_X Y)_x := \nabla(Y \circ c)$$

wie in [13.3](#) definieren, wobei  $c$  die Integralkurve von  $X$  durch  $x$  ist. Es ist somit  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  eine wohldefinierte bilineare Abbildung die in Koordinaten gegeben ist durch

$$\nabla_X Y = \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Y^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i}. \quad \square$$

### 13.6 Lokale Formeln für $\nabla$ .

Wählen wir für  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  und  $\xi_3$  Basisvektorfelder  $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ ,  $g_j := \frac{\partial}{\partial u^j}$  und  $g_k := \frac{\partial}{\partial u^k}$ , so erhalten wir eine lokale Formel für die kovariante Ableitung  $\nabla$ :

$$2g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) \stackrel{\text{13.5}}{=} \frac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{k,i} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j} + 0 =: 2\Gamma_{i,j,k}$$

Für Hyperflächen ist dies die Formel in [10.5](#) für die CHRISTOFFEL-SYMBOLS DER 1.TEN ART.

Bezeichnen wir die Koeffizienten von  $\nabla_{g_i} g_j$  bezüglich der Basis  $(g_l)$  mit  $\Gamma_{i,j}^l$ , also

$$\nabla_{g_i} g_j =: \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k,$$

so erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,k} := g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = g \left( \sum_l \Gamma_{i,j}^l g_l, g_k \right) = \sum_l \Gamma_{i,j}^l g_{l,k},$$

d.h. die  $\Gamma_{i,j}^l$  sind (für Hyperflächen) die CHRISTOFFEL-SYMBOLS DER 2.TEN ART. Man beachte noch, daß aus der Symmetrie von  $g_{i,j}$  folgende Umkehrformel für die partiellen Ableitungen der Koeffizienten der Riemann-Metrik folgt:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} = \Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i,k,j}.$$

Wegen Eigenschaft [13.4.2](#) ist  $\nabla_X Y$  tensoriell in  $X$ , d.h.  $(\nabla_X Y)(p)$  hängt nur von  $X_p$  und  $Y$  ab: Sei nämlich vorerst  $X = 0$  lokal um  $p$  und  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f(p) = 1$  und  $f \cdot X = 0$ , dann ist  $0 = (\nabla_{fX} Y)(p) \stackrel{(2)}{=} f(p) \cdot (\nabla_X Y)(p) = (\nabla_X Y)(p)$  und ist nur  $X_p = 0$  vorausgesetzt so ist somit ebenfalls

$$(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{\sum_i X(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i}} Y)(p) \stackrel{(2)}{=} \sum_i X_p(u^i) \cdot (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y)(p) = 0.$$

Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Kurve mit  $c'(0) = X_p$ . Dann ist also  $(\nabla_{c'(0)} Y)(p)$  wohldefiniert und in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned} (\nabla_{c'(0)} Y)(p) &= \nabla_{\sum_j \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \left( \sum_i Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \right) (p) \\ &\stackrel{(2),(3)}{=} \sum_{j,i} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p + Y^i(p) \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \frac{\partial}{\partial u^i}(p) \right) \\ &= \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) Y^i(p) \Gamma_{j,i}^k \Big|_p \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p \end{aligned}$$

Die rechte Seite macht aber sogar Sinn, wenn  $Y$  nur ein Vektorfeld längs  $c$  ist, d.h.  $Y(t) \in T_{c(t)}M$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und  $p = c(t)$  ist, denn auf Grund der Kettenregel ist dann

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{c(t)} Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) = \frac{d(Y^i \circ c)}{dt}(t)$$

und somit existiert auch die kovariante Ableitung eines Vektorfelds  $Y$  längs einer Kurve  $c$ :

$$(\nabla_{c'(t)} Y)(t) = \sum_i \left( \frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) Y^k(t) \Gamma_{j,k}^i(c(t)) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{c(t)}.$$

### 13.7 Bemerkung.

Wenn wir die entsprechenden Differentialgleichungen (siehe [13.1](#))

- $0 = \nabla_{c'} Y$  für parallele Vektorfelder  $Y$  längs Kurven  $c$  und
- $0 = \nabla_{c'} c'$  für Geodäten  $c$

in lokalen Koordinaten mittels [13.6](#) aufschreiben, so lauten diese (vgl. mit [12.4](#) und [10.7](#))

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) Y^k(t) \Gamma_{j,k}^i(c(t)) \quad \forall i \\ 0 &= \frac{d^2(u^i \circ c)}{dt^2}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) \frac{d(u^k \circ c)}{dt}(t) \Gamma_{j,k}^i(c(t)) \quad \forall i. \end{aligned}$$

Deren Lösungen – der Paralleltransport  $\text{ptp} : C^\infty(\mathbb{R}, M) \times_M TM \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, TM)$  und die Exponentialabbildung  $\text{exp} : TM \rightarrow M$  – existieren somit auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten und besitzen die entsprechenden Eigenschaften (siehe [12.5](#) und [10.8](#)). Daß Geodäten auch auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten genau die Lösungen der entsprechenden Variationsprobleme sind, werden wir in [15.15.1](#) und [15.16](#) zeigen.

**13.8 Lemma.**

Die Abbildung  $(\pi, \exp) : TM \rightarrow M \times M$  ist ein Diffeomorphismus einer Umgebung  $U$  des Nullschnitts  $M \subseteq TM$  auf eine Umgebung der Diagonale  $\{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times M$ .

**Beweis.** Man beachte zuerst, daß der Tangentialraum von  $TM$  in einem Punkt  $0_x$  des Nullschnitts gerade  $T_x M \oplus T_x M$  ist (siehe [31, 27.18]): Dabei ist der erste Faktor durch die Tangentialvektoren an Kurven in  $M \subseteq TM$  gegeben und der zweite durch Geschwindigkeitsvektoren von Kurven im Vektorraum  $T_x M \subseteq TM$ . Diese beiden Teilräume haben trivialen Durchschnitt (denn für die letztgenannten Kurven  $c$  ist  $\pi \circ c$  konstant), und ergeben zusammen die richtige Dimension  $\dim(TM) = 2 \dim(M)$ .

Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen von  $(\pi, \exp)$ . Auf dem Nullschnitt ist  $(\pi, \exp) : TM \supseteq M \rightarrow M \times M$  gerade die Diagonal-Abbildung  $x \mapsto (x, x)$  und auf der Faser  $T_x M$  von  $\pi$  ist  $(\pi, \exp) : TM \supseteq T_x M \rightarrow M \times M$  die Abbildung  $(\text{konst}_x, \exp_x)$ . Also sieht die Tangentialabbildung von  $(\pi, \exp)$  in  $0_x$  wie folgt aus:

$$T_{0_x}(\pi, \exp) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \text{id} & T_0 \exp_x \end{pmatrix} : T_x M \oplus T_x M \rightarrow T_x M \oplus T_x M.$$

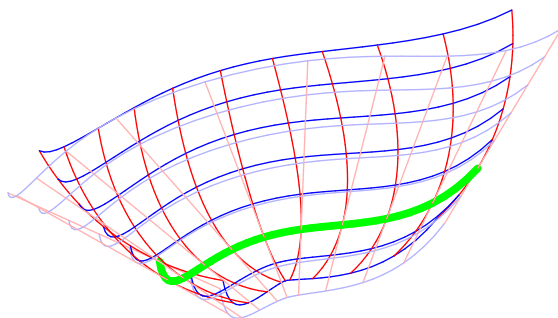
Wegen  $T_0 \exp_x = \text{id}_{T_x M}$  ist also  $(\pi, \exp)$  ein lokaler Diffeomorphismus für Punkte nahe dem Nullschnitt.

Wir wählen für jedes  $x \in M$  eine offene Umgebung  $U_x$  von  $0_x$  in  $TM$  so, daß  $(\pi, \exp) : U_x \rightarrow (\pi, \exp)(U_x)$  ein Diffeomorphismus ist, und die Fasern  $U_x \cap T_y M$  Kugeln um  $0_y$  sind. Die Vereinigung  $U := \bigcup_{x \in M} U_x$  ist dann eine offene Umgebung des Nullschnitts in  $TM$ . Und  $(\pi, \exp) : U \rightarrow V := (\pi, \exp)(U)$  ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Bleibt nur noch die Injektivität zu zeigen: Falls zwei Tangentialvektoren verschiedene Fußpunkte besitzen, so können wir sie mittels der ersten Komponente  $\pi : TM \rightarrow M$  trennen, und falls sie den gleichen Fußpunkt  $x \in M$  haben, so trennt sie die zweite Komponente  $\exp_x$ , da jene in Kugeln  $U_y \cap T_x M \subseteq T_x M$  (auf denen  $\exp_y$  injektiv ist) enthalten sind, also auch in der größeren der beiden.  $\square$

**13.9 Tubuläre Umgebung.**

Sei  $M \subseteq N$  eine Teilmannigfaltigkeit der Riemann-Mannigfaltigkeit  $N$ . Mit  $TM^\perp$  bezeichnen wir das Normalbündel von  $M$  in  $N$ , d.h. jenes Vektorbündel über  $M$ , welches als Faser über  $x \in M$  das orthogonale Komplement  $(T_x M)^\perp$  von  $T_x M$  in  $T_x N$  bezüglich der Riemann-Metrik von  $N$  hat. Dann ist  $\exp_N$  ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung des Nullschnitts  $M \subseteq TM^\perp$  auf eine offene Umgebung von  $M$  in  $N$ . Die Bilder von Schnitten konstanter Länge schneiden die radialen Geodäten orthogonal.



**Beweis.** Analog zum Beweis von Satz [13.8](#) können wir den Tangentialraum von  $TM^\perp \subseteq TN|_M$  in einem Punkt  $0_x$  des Nullschnitts als  $T_x M \oplus T_x M^\perp = T_x N$  schreiben (siehe [\[31, 27.18\]](#)). Und die Tangential-Abbildung von  $\exp_N : TN \supseteq TN|_M \supseteq TM^\perp \rightarrow N$  bei  $0_x$  hat die Gestalt

$$T_{0_x}(\exp_N|_{TM^\perp}) = \text{id}_{T_x M} \oplus T_{0_x} \exp_x|_{(T_x M)^\perp} = \text{id}_{T_x N} : T_x M \oplus T_x M^\perp \rightarrow T_x N$$

Also ist  $\exp_N|_{TM^\perp} : TM^\perp \rightarrow N$  nahe dem Nullschnitt  $M \subseteq TM^\perp$  ein lokaler Diffeomorphismus, und die globale Injektivität kann auch wie im Beweis von Satz [13.8](#) gezeigt werden.

Die Aussage über Orthogonalität der Schnitte konstanter Länge folgt aus dem nachfolgenden Gauß-Lemma [13.10](#) und verallgemeinert [10.10](#).  $\square$

Wählt man  $M := \{x\} \subseteq N$  und in  $T_x N$  eine Orthonormalbasis, dann sind das gerade die sogenannten Riemannschen-Normalkoordinaten, siehe [14.9](#). Ein anderer bisweilen betrachteter Spezialfall ist der einer – nach der Bogenlänge parametrisierten – doppeltpunktfreien Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ , vgl. mit [10.10](#).

In [11.12](#) haben wir eine Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  als geodätisch vollständig bezeichnet, wenn jede Geodäte unendliche Länge hat, oder äquivalent, auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist. Der Satz [13.12](#) wird nun den Zusammenhang mit der Vollständigkeit im Sinne der Metrik liefern, wie wir sie im Satz [1.6](#) verwendet haben. Wir benötigen dafür einige Vorbereitungen.

### 13.10 Gauß-Lemma der Riemann'schen Geometrie.

Es sei  $M$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Sei  $v \in T_p M$  und  $q := \exp_p(v)$ . Dann ist

$$g_q(T_v \exp_p \cdot v, T_v \exp_p \cdot w) = g_p(v, w) \quad \forall w \in T_p M.$$



Dies ist eine Verallgemeinerung von [10.9](#) (wo  $v = w$  ist). Man sagt dafür auch: Die Exponential-Abbildung ist eine radiale Isometrie.

**Beweis.** Wir zerlegen  $w$  in den Anteil  $w^\perp$  der normal auf  $v$  steht und den Anteil  $w^\top$  der parallel zu  $v$  ist.

Für letzteren ist  $w^\top = r v$  für ein  $r \in \mathbb{R}$  und somit

$$\begin{aligned} T_v \exp_p \cdot w^\top &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(v + t w^\top) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p((1 + tr)v) \\ &= r \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=1} \exp_p(sv) = r T_v \exp_p \cdot v \end{aligned}$$

also gilt:

$$\begin{aligned} g_q(T_v \exp_p \cdot v, T_v \exp_p \cdot w^\top) &= g_q(T_v \exp_p \cdot v, r T_v \exp_p \cdot v) \\ &= r g_q(T_v \exp_p \cdot v, T_v \exp_p \cdot v) \\ &= r g_p(v, v) = g_p(v, r v) = g_p(v, w^\top). \end{aligned}$$

Für  $w^\perp$  betrachten wir folgende Variation:  $f(t, s) := t v + t s w^\perp$ . Es ist  $f(1, 0) = v$ ,  $f(0, s) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} f(t, s) = v + s w^\perp$  und  $\frac{\partial}{\partial s} f(t, s) = t w^\perp$ . Somit ist

$$T_v \exp_p \cdot v = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=1} (\exp_p \circ f)(t, 0) \quad \text{und} \quad T_v \exp_p \cdot w^\perp = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} (\exp_p \circ f)(1, s)$$

Mit  $\varphi := \exp_p \circ f$ , ist

$$g_q(T_v \exp_p \cdot v, T_v \exp_p \cdot w^\perp) = g_p\left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, s), \left. \frac{\partial}{\partial s} \varphi(t, s) \right|_{t=1, s=0}\right)\right)$$

und für  $t = 0$  ist  $\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \varphi(0, s) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_p(0) = 0$ .

Da  $t \mapsto \exp_p(tv)$  eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Geodäte ist, gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) \right|_{s=0} &\stackrel{\text{13.4.5}}{=} g\left(\underbrace{\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{=0} \Big|_{s=0}, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{s=0}\right) + g\left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{s=0}, \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{s=0}\right) \\ &\stackrel{\text{s.u.}}{=} g\left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{s=0}, \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{s=0}\right) \stackrel{\text{13.4.5}}{=} \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|_{s=0} g\left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{s=0}, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{s=0}\right) = 0, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= \sum_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial s} \frac{\partial}{\partial u^j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u^k} \\ \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \left( \sum_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial s} \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \\ &\stackrel{\text{13.4.3}}{=} \sum_j \left( \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial u^j} + \frac{\partial \varphi^j}{\partial s} \underbrace{\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial u^j}}_{\sum_k \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial u^k}} \frac{\partial}{\partial u^j}} \right) \\ \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial s}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \sum_{j,k} \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} \frac{\partial \varphi^j}{\partial s} \underbrace{\left( \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial u^k}} \frac{\partial}{\partial u^j} - \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k} \right)}_{\stackrel{\text{13.4.4}}{=} \left[ \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right] = 0} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma.**

Jede Kurve in einer Riemann-Mannigfaltigkeit, die das Exponentialbild eines abgeschlossenen Balls verläßt, trifft das Bild des Randes.

**Beweis.** Es sei  $M$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $\exp_p$  wohldefiniert und stetig auf  $\{v \in T_p M : \|v\| \leq r\}$ . Sei  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine stetige Kurve in  $M$  mit  $c(0) \in \exp_p(\{v : \|v\| < r\})$  und  $c(1) \notin \exp_p(\{v : \|v\| \leq r\})$ . Sei  $t_0 := \inf\{t : c(t) \notin \exp_p(\{v : \|v\| < r\})\}$ , d.h.  $c(t) = \exp_p(v(t))$  mit  $\|v(t)\| < r$  für alle  $t < t_0$ . Sei  $v_0$  ein Häufungswert von  $v(t)$  für  $t \nearrow t_0$  und somit  $\exp_p(v_0)$  ein Häufungswert von  $c(t)$  also gleich  $c(t_0)$ . Nach Konstruktion von  $t_0$  ist somit  $\|v_0\| \geq r$  aber andererseits  $\|v_0\| \leq r$  als Häufungswert von  $v(t)$ , d.h.  $\|c(t_0)\| = \|v_0\| = r$ .  $\square$

### 13.11 Folgerung.

Es sei  $M$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $\varepsilon > 0$  so klein, daß  $\exp_p : V := \{v \in T_p M : \|v\| < \varepsilon\} \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Dann ist  $d(p, \exp_p(v)) = \|v\|$  und für jede Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  mit  $c(a) = \exp_p(v_1)$  und  $c(b) = \exp_p(v_2)$  für  $v_1, v_2 \in V$  gilt  $L(c) \geq \left| \|v_2\| - \|v_1\| \right|$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $\forall t : c(t) = \exp_t(r(t)v)$  mit monotonen  $r$  und  $\|v\| = 1$ , also  $c$  Parametrisierung einer radialen Geodäte ist. Weiters ist  $\exp_p(V) = \{q \in M : d(p, q) < \varepsilon\}$ .

Dies verallgemeinert [10.11](#).

**Beweis.** Nach Konstruktion ist  $t \mapsto \exp_p(tv)$  eine Geodäte mit skalarer Geschwindigkeit  $\|v\|$ . Sei vorerst  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Kurve in  $\exp_p(V) \setminus \{p\}$ , also  $\exp_p^{-1}(c(t)) =: r(t)v(t)$  mit  $0 < r(t) < \varepsilon$  und  $\|v(t)\| = 1$  ist. Mit  $\gamma(r, t) := \exp_x(rv(t))$  ist dann

$$\begin{aligned} c(t) = \gamma(r(t), t) &\Rightarrow c'(t) = \partial_1 \gamma(r(t), t) \cdot r'(t) + \partial_2 \gamma(r(t), t) \Rightarrow \\ \|c'\|^2 = g(\partial_1 \gamma \cdot r' + \partial_2 \gamma, \partial_1 \gamma \cdot r' + \partial_2 \gamma) &\stackrel{13.10}{=} |r'|^2 \|\partial_1 \gamma\|^2 + \|\partial_2 \gamma\|^2 \\ &= |r'|^2 + \|\partial_2 \gamma\|^2 \geq |r'|^2 \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\partial_2 \gamma = 0$ , also  $v$  konstant ist. Somit ist

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}\| \geq \int_a^b |r'| \geq \left| \int_a^b r' \right| = |r(b) - r(a)| = \left| \|v_2\| - \|v_1\| \right|,$$

wobei Gleichheit nur dann gilt, wenn  $r$  monoton und  $v$  konstant ist, also  $c$  eine radiale Geodäte ist.

Falls andererseits  $c$  die Menge  $\exp(V) \setminus \{p\}$  verläßt, so verläßt ihr Urbild unter  $\exp_p$  die Menge  $V \setminus \{0\}$  und hat somit größere Länge als der Teil des Urbilds der im Kreisring  $\{v : \min\{\|v_1\|, \|v_2\|\} \leq \|v\| \leq \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}\}$  liegt, also Länge  $\geq \left| \|v_2\| - \|v_1\| \right|$  hat. (O.B.d.A. sei  $\|v_1\| < \|v_2\|$ . Sei  $t_2 := \inf\{t : c(t) \in \exp_p(\{v : \|v\| = \|v_2\|\})\}$ , d.h.  $c(t) = \exp_p(v(t))$  mit  $\|v(t)\| < \|v_2\|$  für alle  $t < t_2$ . und sei weiters  $t_1 := \max\{t \leq t_2 : c(t) \in \exp_p(\{v : \|v\| = \|v_1\|\})\}$ . Betrachte nun  $c|_{[t_1, t_2]}$ .)

Angenommen es existiert ein  $q \in M \setminus \exp_p(V)$  mit  $d(p, q) < \varepsilon$ . Sei  $c$  eine Kurve in  $M$  mit  $c(0) = p$ ,  $c(1) = q$  und  $L(c) < \varepsilon$ . Sei  $t_0$  das minimale  $t > 0$  mit  $c(t) \in \exp_p(\{v : \|v\| = L(c)\})$  also  $c(t_0) = \exp_p(v_0)$  für ein  $v_0$  mit  $\|v_0\| = L(c)$ . Wegen  $t_0 < 1$  ist  $L(c) > L(c|_{[0, t_0]}) \geq \|v_0\| = L(c)$ , ein Widerspruch.  $\square$

### 13.12 Satz von Hopf-Rinow.

Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind folgende drei Aussagen äquivalent:

1.  $M$  ist geodätisch vollständig.
2.  $M$  ist als metrischer Raum vollständig, d.h. Cauchy-Folgen konvergieren.
3. Jede in der Metrik beschränkte und abgeschlossene Menge ist kompakt.

Weiters folgt aus diesen äquivalenten Aussagen:

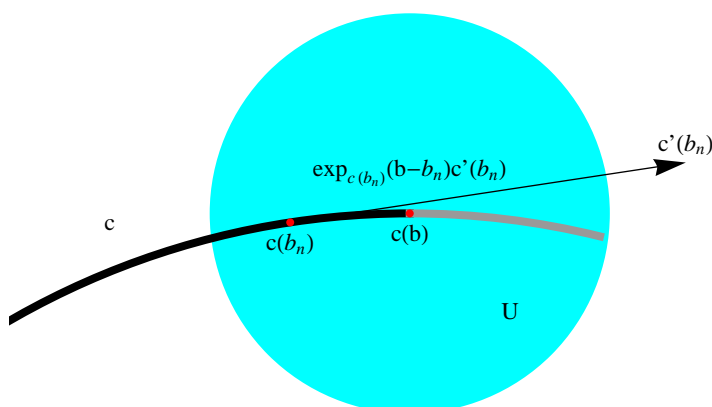
4. Je zwei Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente lassen sich durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden.

**Beweis.** ( $\boxed{3} \Rightarrow \boxed{2}$ ) Dies ist ein allgemeiner Satz aus der Topologie, denn nach dem Satz von Cantor (siehe [\[23, 3.1.4\]](#)) genügt es das Prinzip der Intervallschachtelung zu beweisen: Seien also  $A_n \neq \emptyset$  abgeschlossen und monoton fallend (d.h.  $A_n \supseteq A_{n+1}$ ) mit  $d(A_n) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A_n\} \rightarrow 0$ . Nach Voraussetzung  $\boxed{3}$  ist somit  $A_n$  kompakt (falls  $d(A_n) < \infty$ ) und somit  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ .

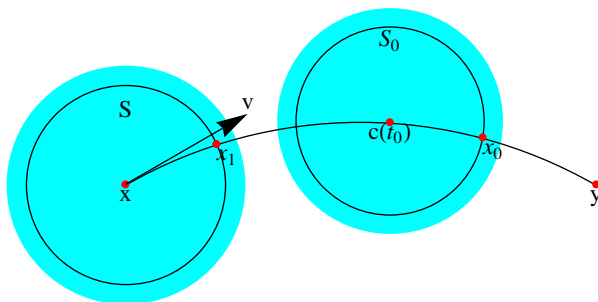
( $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ ) Sei  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte und  $]a, b[$  ihr maximaler Definitionsbereich. Sei z.B.  $b < +\infty$  und betrachten wir eine Folge  $b_n \nearrow b$ , dann ist  $c(b_n)$  eine Cauchy-Folge, denn

$$d(c(t_1), c(t_2)) \leq L(c|_{[t_1, t_2]}) = |t_2 - t_1|.$$

Nach  $\boxed{2}$  existiert also  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(b_n) =: c(b)$ . Aus [\[13.8\]](#) wissen wir, daß eine Umgebung  $U$  von  $c(b)$  existiert und ein  $\rho > 0$ , sodaß  $\exp_x$  für alle  $x \in U$  und alle Vektoren der Länge kleiner als  $\rho$  definiert ist. Wählen wir nun  $n$  so groß, daß  $b - b_n < \rho$  und  $c(b_n) \in U$ . Dann ist die Geodäte mit Anfangsrichtung  $c'(b_n)$  für  $|t| < \rho$  definiert, also  $c$  über  $b$  hinaus, ein Widerspruch.



( $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{4}$ ) Es sei  $r := d(x, y) > 0$ . Wir wählen ein  $0 < \rho < r$ , so daß  $\exp_x : B_\rho(0) := \{v : g_x(v, v) < \rho^2\} \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei  $0 < \rho_1 < \rho$  und  $S := \exp_x(\partial B_{\rho_1}(0))$ . Da  $S$  kompakt ist, existiert ein  $x_1 \in S$  mit  $d(x_1, y)$  minimal. Sei  $v \in T_x M$  mit  $|v| = 1$  und  $x_1 := \exp_x(\rho_1 v)$ . Wir behaupten, daß  $\exp_x(rv) = y$ , also  $c(t) := \exp_x(tv)$  eine Geodäte von  $x$  nach  $y$  mit minimaler Länge  $r$  ist.



Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann ist

$$t_0 := \inf\{t \in [\rho_1, r] : d(c(t), y) \neq r - t\} < r.$$

Da die Menge der  $t$  mit  $d(c(t), y) \neq r - t$  offen ist, gilt Gleichheit für  $t := t_0$ . Offensichtlich ist  $t_0 > \rho_1$ , denn da jede Kurve von  $x$  nach  $y$  die Menge  $S$  trifft, gilt:

$$r = d(x, y) = \min_{s \in S} (d(x, s) + d(s, y)) \stackrel{\boxed{13.11}}{=} \rho_1 + d(x_1, y) = \rho_1 + d(c(\rho_1), y).$$

Sei  $S_0$  eine geodätische Sphäre um  $c(t_0)$  mit Radius  $\rho_0 < r - t_0$ , sei weiters  $x_0$  ein Punkt auf  $S_0$  mit minimalem Abstand von  $y$ , und sei  $c_0$  die radiale Geodäte der Länge  $\rho_0$  von  $c(t_0)$  nach  $x_0$ . Dabei sei  $\rho_0$  so klein gewählt, daß  $d(c(t_0 + \rho_0), y) \neq r - (t_0 + \rho_0)$  und  $\exp_z$  auf  $\{v \in T_z M : \|v\| < 2\rho_0\}$  ein Diffeomorphismus für alle  $z$  mit  $d(z, c(t_0)) < \rho_0$  ist. Wie zuvor gilt:

$$d(c(t_0), y) = d(c_0(0), y) = \min_{s \in S_0} (d(c_0(0), s) + d(s, y)) = \rho_0 + d(x_0, y)$$

und somit  $d(x_0, y) = d(c(t_0), y) - \rho_0 = (r - t_0) - \rho_0$ . Weiters ist

$$d(x, x_0) \geq d(x, y) - d(x_0, y) = r - (r - t_0 - \rho_0) = t_0 + \rho_0,$$

und die Kurve  $\tilde{c}$  bestehend aus  $c|_{[0, t_0]}$  gefolgt von  $c_0|_{[0, \rho_0]}$  hat die Länge  $t_0 + \rho_0$  somit gilt  $d(x, x_0) = t_0 + \rho_0$ . Für  $t_0 - \rho_0 < t_1 < t_0 < t_2 := t_0 + \rho_0$  ist

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= L(\tilde{c}|_{[t_1, t_2]}) \geq d(\tilde{c}(t_1), \tilde{c}(t_2)) \geq d(x, x_0) - d(x, \tilde{c}(t_1)) - d(\tilde{c}(t_2), x_0) \\ &\geq (t_0 + \rho_0) - t_1 - (\rho_0 - (t_2 - t_0)) = t_2 - t_1, \end{aligned}$$

also ist  $\tilde{c}|_{[t_1, t_2]}$  eine Kurve minimaler Länge und damit nach [13.11](#) eine Geodäte und somit  $\tilde{c}|_{[0, t_2]}$  eine Verlängerung von  $c|_{[0, t_0]}$  also ident mit  $c|_{[0, t_2]}$ , ein Widerspruch, denn  $c(t_0 + \rho_0) = c_0(\rho_0) = x_0$ .

([1](#))  $\Rightarrow$  ([3](#)) Sei  $A \subseteq M$  abgeschlossen und beschränkt, i.e.

$$\sup\{d(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in A\} =: r < \infty.$$

Nach [4](#) ist  $A \subseteq \exp_{x_0}\{B_r(0)\} =: B$  für  $x_0 \in A$ , und  $B$  ist als stetiges Bild der kompakten Menge  $B_r(0)$  kompakt, also auch  $A$ .  $\square$

### 13.13 Folgerung.

Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit, und sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  ein bezüglich  $g$  beschränktes Vektorfeld. Dann ist  $\xi$  vollständig, d.h. hat einen globalen Fluß.

**Beweis.** Sei  $\|\xi(x)\|_g \leq R$  für alle  $x \in M$  und sei  $c$  eine Lösungskurve von  $\xi$ , dann gilt:

$$L(c|_{[a, b]}) = \int_a^b \|c'(t)\|_g dt = \int_a^b \|\xi(c(t))\|_g dt \leq |b - a| R$$

Also bleibt  $c$  auf endlichen Intervallen innerhalb einer beschränkten, und wegen der Vollständigkeit innerhalb einer kompakten Menge. Dies ist ein Widerspruch zu [31](#), [16.3](#).  $\square$

### 13.14 Satz von Nomitzu-Ozeki.

Zu jeder Riemann-Metrik gibt es immer eine konform äquivalente, die geodätisch vollständig ist.

**Beweis.** Sei  $(M, g)$  eine (O.B.d.A. zusammenhängende) Riemann-Mannigfaltigkeit und  $d$  die assoziierte Metrik zu  $g$ . Sei wieder  $B_r(x) := \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$ . Dann setzen wir

$$r(x) := \sup\{\rho > 0 : B_\rho(x) \text{ ist kompakt}\} \in (0, +\infty].$$

Aus der Dreiecksungleichung für  $d$  folgt  $B_\rho(x_2) \subseteq B_{\rho+d(x_1,x_2)}(x_1)$  und somit  $|r(x_1) - r(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$ , also ist  $r$  stetig. Falls  $r(x) = +\infty$  für ein  $x$ , so auch für alle anderen  $x \in M$ , und damit ist jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt, also  $M$  nach [13.12] vollständig. Wir dürfen folglich  $r(M) \subseteq \mathbb{R}$  annehmen. Nun wählen wir mittels Partition der 1 eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) \geq \frac{1}{r(x)}$  für alle  $x \in M$  und betrachten die konform äquivalente Metrik  $\tilde{g} := f^2 g$ .

Bleibt zu zeigen, daß  $\tilde{g}$  vollständig ist. Dafür genügt es die Inklusion  $B_{1/3}^{\tilde{g}}(x) \subseteq B_{r(x)/2}^g(x)$  für alle  $x$  zu beweisen, denn dann hat auf Grund des Beweises von (3  $\Rightarrow$  2  $\Rightarrow$  1) in [13.12] und der Kompaktheit von  $B_{1/3}^{\tilde{g}}(x)$  jede (bei  $x$  startende) Geodäte bzgl.  $\tilde{g}$  mindestens Länge  $\frac{1}{3}$ , und somit durch Aneinanderstückeln unendliche Länge. D.h.  $\tilde{g}$  ist vollständig.

Sei also  $y \notin B_{r(x)/2}^g(x)$  und  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve von  $x$  nach  $y$ , dann ist  $L^g(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_g dt \geq d(x, y) > \frac{r(x)}{2}$  und

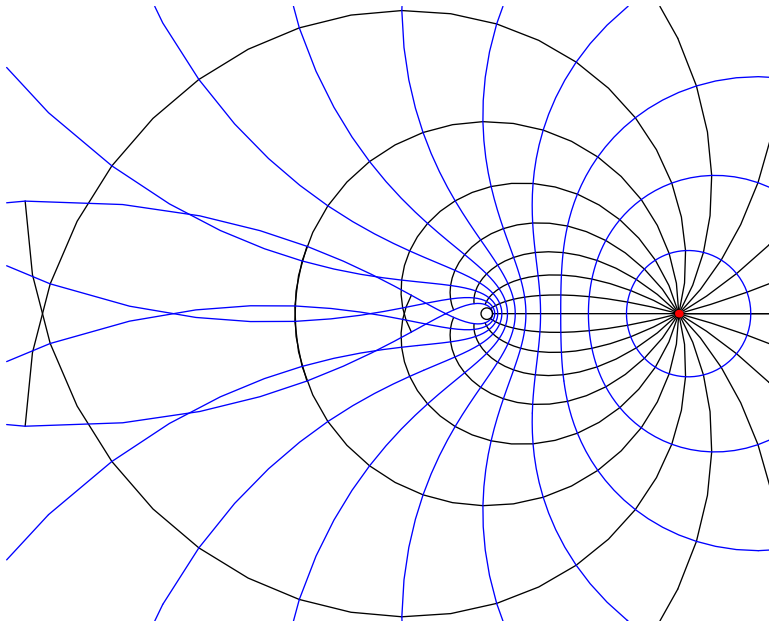
$$\begin{aligned} L^{\tilde{g}}(c) &= \int_a^b \|c'(t)\|_{\tilde{g}} dt = \int_a^b f(c(t)) \|c'(t)\|_g dt = \quad (\text{nach dem Zwischenwertsatz}) \\ &= f(c(\tau)) \int_a^b \|c'(t)\|_g dt = f(c(\tau)) L^g(c) \geq \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))}. \end{aligned}$$

Wegen  $|r(x) - r(c(\tau))| \leq d(x, c(\tau)) \leq L^g(c)$  gilt  $r(c(\tau)) \leq r(x) + L^g(c)$  und somit

$$L^{\tilde{g}}(c) \geq \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))} \geq \frac{L^g(c)}{r(x) + L^g(c)} > \frac{L^g(c)}{2L^g(c) + L^g(c)} = \frac{1}{3} \quad \square$$

### 13.15 Beispiel.

Es sei  $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Dann ist  $M$  mit der euklidischen Metrik  $g$  nicht vollständig (betrachte antipodale Punkte) und  $r$  aus dem Beweis von [13.13] ist gegeben durch  $z \mapsto |z|$ . Die Exponentialabbildung in einem Punkt (z.B.  $(1, 0)$ ) in der konform äquivalenten vollständigen Metrik  $\tilde{g} := f^2 g$  mit  $f(z) := 1/|z|$  sieht wie folgt aus:



Beachte, daß  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $(t, s) \mapsto e^t(\cos(s), \sin(s))$  eine lokale Isometrie von der standard Metrik in die Metrik  $\tilde{g}$  ist, und somit eine Isometrie zwischen dem

Zylinder und  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \tilde{g})$  induziert. In der Tat ist

$$\begin{aligned} h^* \tilde{g}_{(t,s)}(v, w) &= \tilde{g}_{h(t,s)}(h'(t, s) \cdot v, h'(t, s)w) = \frac{1}{e^{2t}} \langle h'(t, s) \cdot v, h'(t, s)w \rangle \\ &= \frac{1}{e^{2t}} \left\langle e^t \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} v^1 + e^t \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s) \end{pmatrix} v^2, \right. \\ &\quad \left. e^t \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} w^1 + e^t \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s) \end{pmatrix} w^2 \right\rangle \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

### 13.16 Lemma (Divergenz via kovarianter Ableitung).

Sei  $\xi$  ein Vektorfeld auf der orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  so gilt:

$$\operatorname{div} \xi = \operatorname{spur}(\eta \mapsto \nabla_\eta \xi).$$

**Beweis.** Für die Divergenz aus [4.5](#), die wir aus der äußeren Ableitung durch Anwendung des Hodge-Stern-Operators gewonnen haben, und die wir auch mittels Lie-Ableitung der Volumensform beschrieben haben, gilt nach [4.5](#) folgende lokale Formel:

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sqrt{G} \xi^i \right) = \sum_{i=1}^m \left( \xi^i \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial u^i} G + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right).$$

Für  $\nabla \xi$  haben wir die lokale Formel:

$$\begin{aligned} \nabla_{g_i} \xi &\stackrel{\text{13.4.3}}{=} \sum_{j=1}^m \left( \xi^j \nabla_{g_i} g_j + \frac{\partial}{\partial u^i} (\xi^j) g_j \right) \stackrel{\text{13.6}}{=} \sum_{j=1}^m \left( \xi^j \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k + \frac{\partial}{\partial u^i} (\xi^j) g_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^j + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^j \right) g_j. \end{aligned}$$

Für die Spur von  $\eta \mapsto \nabla_\eta \xi$  erhalten wir also

$$\operatorname{spur}(\eta \mapsto \nabla_\eta \xi) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^i + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \xi^i \Gamma_{k,i}^k + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right).$$

Wegen  $G := \det((g_{j,k})_{j,k})$  und  $\det'(A)(B) = \det(A) \cdot \operatorname{spur}(A^{-1}B)$  gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial u^i} G &= \frac{1}{2G} G \operatorname{spur} \left( (g^{j,k})_{j,k} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} \right)_{j,k} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{spur} \left( \left( \sum_l g^{j,l} \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} (g_{l,k}) \right)_{j,k} \right) \\ &\stackrel{\text{13.6}}{=} \frac{1}{2} \sum_{k,l} g^{k,l} (\Gamma_{i,l,k} + \Gamma_{i,k,l}) \stackrel{\text{13.6}}{=} \sum_k \Gamma_{i,k}^k = \sum_k \Gamma_{k,i}^k. \quad \square \end{aligned}$$

### 13.17 Bemerkung.

Die in diesem Abschnitt behandelte Levi-Civita Ableitung ist der wichtigste Spezialfall allgemeiner kovarianter Ableitungen, wie wir sie in [\[31, 27.19\]](#) beschrieben haben.

## 14. Krümmungen Riemann'scher Mannigfaltigkeiten

Seien 2 Vektorfelder  $\xi$  und  $\eta$  am  $\mathbb{R}^n$  gegeben. Dann gilt für die übliche Ableitung des Vektorfelds  $\xi$  in Richtung  $\eta$ , die wir hier auch mit  $D_\eta \xi : x \mapsto \xi'(x)(\eta(x))$  bezeichnen wollen:

$$[D_\xi, D_\eta] := D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi = D_{[\xi, \eta]},$$

denn

$$\begin{aligned} (D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi) \left( (\zeta^i)_{i=1}^n \right) &= (\xi(\eta(\zeta^i)) - \eta(\xi(\zeta^i)))_{i=1}^n = ([\xi, \eta] \zeta^i)_{i=1}^n \\ &= D_{[\xi, \eta]} \left( (\zeta^i)_{i=1}^n \right) \end{aligned}$$

### 14.1 Satz (Godazzi-Mainardi-Gleichung).

Sei  $M$  eine Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\xi, \eta, \zeta$  Vektorfelder am  $\mathbb{R}^n$ , welche längs  $M$  tangential an  $M$  sind. Dann gilt auf  $M$ :

1. GAUSS-GLEICHUNG:  $([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]})\zeta = \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi - \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta$ ,
2. GODAZZI-MAINARDI-GLEICHUNG:  $\nabla_\xi L\eta - \nabla_\eta L\xi = L[\xi, \eta]$ .

**Beweis.** Wegen  $\langle \zeta, \nu \rangle = 0$  ist

$$\nabla_\eta \zeta = D_\eta \zeta - \langle D_\eta \zeta, \nu \rangle \nu = D_\eta \zeta + \langle \zeta, D_\eta \nu \rangle \nu = D_\eta \zeta + \langle \zeta, L\eta \rangle \nu$$

(vgl. mit [13.2](#)) und somit wegen der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} 0 &= [D_\xi, D_\eta]\zeta - D_{[\xi, \eta]}\zeta \\ &= D_\xi \left( \nabla_\eta \zeta - \langle L\eta, \zeta \rangle \nu \right) - D_\eta \left( \nabla_\xi \zeta - \langle L\xi, \zeta \rangle \nu \right) - D_{[\xi, \eta]}\zeta \\ &= D_\xi \nabla_\eta \zeta - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L\eta, \zeta \rangle D_\xi \nu \\ &\quad - D_\eta \nabla_\xi \zeta + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L\xi, \zeta \rangle D_\eta \nu \\ &\quad - D_{[\xi, \eta]}\zeta \\ &= \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \langle L\xi, \nabla_\eta \zeta \rangle \nu - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi \\ &\quad - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta + \langle L\eta, \nabla_\xi \zeta \rangle \nu + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta \\ &\quad - \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \nu. \end{aligned}$$

Der Tangentialanteil hiervon ist die Gauß-Gleichung:

$$0 = [\nabla_\xi, \nabla_\eta]\zeta - \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi + \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta$$

Und der Normalanteil ist die Godazzi-Mainardi-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= -\langle \nabla_\eta \zeta, L\xi \rangle - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) + \langle \nabla_\xi \zeta, L\eta \rangle + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \\ &= \langle -\nabla_\xi(L\eta) + \nabla_\eta(L\xi) + L[\xi, \eta], \zeta \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

### 14.2 Definition (Riemann-Krümmung).

Die RIEMANN-KRÜMMUNG  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$  einer Riemann-Mannigfaltigkeit ist definiert durch die linke Seite der Gauß-Gleichung [14.1.1](#):

$$R(\xi, \eta) := [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}.$$

Die Motivation hierfür ist, daß für Riemann-Flächen die rechte Seite der Gauß-Gleichung [14.1.1](#) auf  $\zeta := \eta$  angewandt und ins innere Produkt mit  $\xi$  genommen für orthonormale Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  gerade die Gaußkrümmung liefert:

$$\langle \langle L\eta, \eta \rangle L\xi - \langle L\xi, \eta \rangle L\eta, \xi \rangle = \langle L\eta, \eta \rangle \langle L\xi, \xi \rangle - \langle L\xi, \eta \rangle \langle L\eta, \xi \rangle = \det(L) = K.$$

**14.3 Lemma (Die Riemann-Krümmung ist ein Tensorfeld).**

Die Riemann-Krümmung ist ein 3-fach ko- und 1-fach kontravariantes Tensorfeld auf  $M$ , d.h.  $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ .

**(Koordinatenfreier) Beweis.** Dazu muß man nur zeigen, daß die Abbildung  $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto R(\xi, \eta)(\zeta)$  in allen Variablen  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen ist, vgl. mit dem Beweis von [31, 19.10].

$$\begin{aligned}
R(f\xi, \eta) &= [\nabla_{f\xi}, \nabla_\eta] - \nabla_{[f\xi, \eta]} \stackrel{[31, 17.2.3]}{=} [f\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{f[\xi, \eta] - \eta(f)\xi} \\
&\stackrel{[13.4.3]}{=} (f\nabla_\xi)\nabla_\eta - \nabla_\eta(f\nabla_\xi) - f\nabla_{[\xi, \eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\
&\stackrel{[13.4.3]}{=} f\nabla_\xi\nabla_\eta - f\nabla_\eta\nabla_\xi - \eta(f)\nabla_\xi - f\nabla_{[\xi, \eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\
&= f([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}) + 0 = fR(\xi, \eta). \\
R(\xi, \eta)(f\zeta) &= ([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]})(f\zeta) \\
&\stackrel{[13.4.3]}{=} \nabla_\xi(f\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\zeta) - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta) - f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - [\xi, \eta](f)\zeta \\
&\stackrel{[13.4.3]}{=} f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \xi(f)\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta + \xi(\eta(f))\zeta \\
&\quad - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - \xi(f)\nabla_\eta\zeta - \eta(\xi(f))\zeta \\
&\quad - f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - \xi(\eta(f))\zeta + \eta(\xi(f))\zeta \\
&= f(\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi, \eta]})\zeta = fR(\xi, \eta)(\zeta). \quad \square
\end{aligned}$$

**Koordinatenbeweis.**

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \\
&\stackrel{[13.5]}{=} \nabla_X \left( \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&\quad - \nabla_Y \left( \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&\quad - \nabla_{\sum_{i, j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}} Z \\
&\stackrel{[13.4.3]}{=} \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j Y^k \right) \nabla_X \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + X \left( \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j Y^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j X^k \right) \nabla_Y \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - Y \left( \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j X^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i, j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} Z
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{13.4.2}} \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_i \left( \sum_k X \left( \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X(Y^k) \right. \\
& + \sum_{j,k} X(\Gamma_{j,k}^i) Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i X(Z^j) Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X(Y^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left( \sum_k Y \left( \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y(X^k) \right. \\
& + \sum_{j,k} Y(\Gamma_{j,k}^i) Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Y(Z^j) X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y(X^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left( Z^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
& \underline{\underline{13.6}} \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_i \left( \sum_k \sum_p X^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \right. \\
& + \sum_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p X^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} Y^k \\
& + \left. \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& - \sum_i \left( \sum_k \sum_p Y^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \right. \\
& + \sum_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} X^k \\
& + \left. \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left( Z^l \sum_p \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&- \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k \underbrace{\left( \frac{\partial \Gamma_{k,j}^p}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{k,i}^p}{\partial u^j} + \sum_l \left( \Gamma_{k,j}^l \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{l,j}^p \right) \right)}_{=: R_{i,j,k}^p} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \quad \square
\end{aligned}$$

**14.4 Bemerkung.**

In lokalen Koordinaten haben wir

$$\begin{aligned}
(1) \quad R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k}^l du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^l} \\
\text{mit } R_{i,j,k}^l &:= du^l \left( R \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l + \sum_{p=1}^m \left( \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l \right)
\end{aligned}$$

Beziehungsweise für  $R(\xi, \eta, \zeta, \chi) := \langle R(\xi, \eta) \zeta, \chi \rangle$

$$\begin{aligned}
(2) \quad R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k,l} du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes du^l \\
\text{mit } R_{i,j,k,l} &:= \langle R \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \mid \frac{\partial}{\partial u^l} \rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) + \\
&\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} \left( \Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p} \right).
\end{aligned}$$

**Beweis.** Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^m R_{i,j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} &:= R \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} := \left( \left[ \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \right] - \nabla_{\left[ \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right]} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&\stackrel{13.6}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left( \sum_{l=1}^m \Gamma_{j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \left( \sum_{l=1}^m \Gamma_{i,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) + 0 \\
&\stackrel{13.4.3}{=} \sum_{l=1}^m \left( \Gamma_{j,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^m \left( \Gamma_{i,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\stackrel{13.6}{=} \sum_{l=1}^m \left( \Gamma_{j,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^m \left( \Gamma_{i,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&= \sum_{l=1}^m \left( \sum_{p=1}^m \left( \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l \right) + \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l \right) \frac{\partial}{\partial u^l}.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert also:

$$R_{i,j,k}^l = \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l + \sum_{p=1}^m \left( \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l \right).$$

Nun berechnen wir

$$R_{i,j,k,l} := \left\langle R \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \middle| \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \left\langle \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \middle| \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^p) g_{p,l} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p g_{p,l} \right) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^i} (g_{p,l}) \\ &\stackrel{\boxed{13.6}}{=} \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p (\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p}). \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} R_{i,j,k,l} &= \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\ &= \sum_{p=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^p) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^p) + \sum_{q=1}^m (\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q}^p - \Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q}^p) \right) g_{p,l} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \underbrace{(\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p})}_{\substack{(1) \\ (2)}} - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k,l}) + \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,k}^p \underbrace{(\Gamma_{j,p,l} + \Gamma_{j,l,p})}_{\substack{(3) \\ (4)}} \\ &\quad + \sum_{q=1}^m \underbrace{(\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q,l} - \Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q,l})}_{\substack{(1) \\ (3)}} \\ &\stackrel{\boxed{13.6}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{\partial}{\partial u^j} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{j,k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,i} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{i,k} \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^m \left( \underbrace{\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p}}_{(4)} - \underbrace{\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p}}_{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) + \\ &\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} \left( \Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p} \right). \quad \square \end{aligned}$$

### 14.5 Lemma (Symmetrie der Riemann-Krümmung).

Die Riemann-Krümmung erfüllt folgende Identitäten:

1.  $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$
2.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$
3.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$
4.  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
5.  $(\nabla_Z R)(X, Y, W) + (\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) = 0.$

Die Gleichungen  $\boxed{4}$  und  $\boxed{5}$  heißen 1.te und 2.te BIANCHI IDENTITÄT.

**Beweis.**

**1** ist klar wegen der Definition  $R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ .

**2** ist äquivalent zu  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$  für alle  $X, Y, Z$ . Es ist:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= \underbrace{\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle} - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, Z \rangle \\ &\stackrel{13.4.5}{=} X \left( \frac{1}{2} Y \langle Z, Z \rangle \right) - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle - Y \left( \frac{1}{2} X \langle Z, Z \rangle \right) + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle - 0 - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \stackrel{13.4.5}{=} 0 \end{aligned}$$

**4** Nach **13.4.4** gilt  $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$  und durch Anwenden von  $\nabla_X$  erhalten wir:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y, Z]} X = \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X \stackrel{13.4.4}{=} [X, [Y, Z]]$$

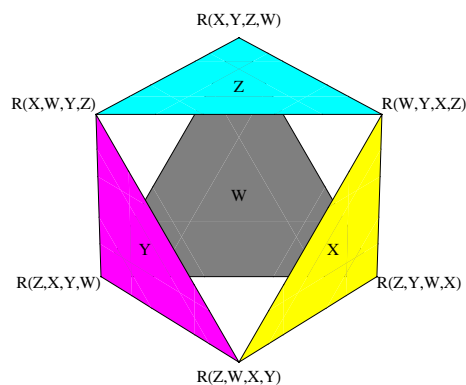
Der zyklische Ausdruck läßt sich nun wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \underbrace{\nabla_X \nabla_Y Z}_{(1)} - \underbrace{\nabla_Y \nabla_X Z}_{(2)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]} Z}_{(3)} \\ &\quad + \underbrace{\nabla_Y \nabla_Z X}_{(2)} - \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y X}_{(3)} - \underbrace{\nabla_{[Y, Z]} X}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\nabla_Z \nabla_X Y}_{(3)} - \underbrace{\nabla_X \nabla_Z Y}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[Z, X]} Y}_{(2)} \\ &= \underbrace{[X, [Y, Z]]}_{(1)} + \underbrace{[Y, [Z, X]]}_{(2)} + \underbrace{[Z, [X, Y]]}_{(3)} \\ &= 0 \quad (\text{wegen der Jacobi-Identität}). \end{aligned}$$

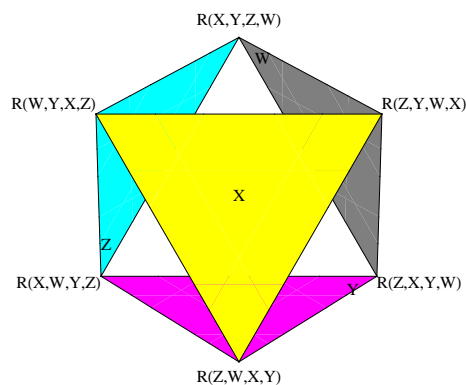
**3** folgt rein algebraisch aus **1**, **2** und **4**:

Dazu betrachtet man einen Oktaeder und bezeichnet 4 der Seitenflächen (die sich nur in Ecken schneiden) mit  $X, Y, Z, W$ .

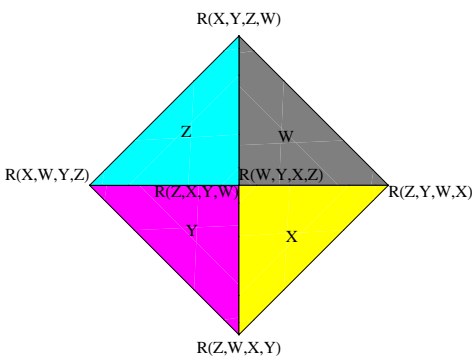
Die Ecken des Oktaeders, welche z.B. der Schnitt der Flächen  $X$  und  $Y$  ist, wird mit  $R(Z, W, X, Y) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle$  bezeichnet, falls von dieser Ecke aus betrachtet die Flächen  $X, Z, Y, W$  aufeinander folgen. Wegen [1](#) und [2](#) ist es egal, von welcher der beiden angrenzenden Flächen  $X$  oder  $Y$  aus man zu zählen beginnt.



Nun beachte man, daß für jedes der Dreiecke  $X, Y, Z, W$  die Eckensumme wegen [4](#) Null ist, denn bei der Drehung um eine Achse durch den Mittelpunkt eines Dreiecks werden sowohl dessen Ecken als auch die übrigen 3 Dreiecke zyklisch permutiert.



Zählt man diese Summen für die Dreiecke  $Z$  und  $W$  zusammen und zieht jene für  $X$  und  $Y$  ab, so erhält man, daß das Doppelte von der Differenz aus der Ecke  $W \cap Z$  und der Ecke  $X \cap Y$  Null ist, d.h. [3](#) gilt.



In Detail bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
 (+) \quad & \underbrace{R(X, Y, Z, W)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, Z, X, W)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, X, Y, W)}_{(3)} = 0 \\
 (-) \quad & \underbrace{R(W, X, Y, Z)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Y, W, Z)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, W, X, Z)}_{(5)} = 0 \\
 (-) \quad & \underbrace{R(Z, W, X, Y)}_{(6)} + \underbrace{R(W, X, Z, Y)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Z, W, Y)}_{(3)} = 0 \\
 (+) \quad & \underbrace{R(Y, Z, W, X)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, W, Y, X)}_{(6)} + \underbrace{R(W, Y, Z, X)}_{(5)} = 0 \\
 & \Rightarrow \underbrace{2R(X, Y, Z, W)}_{(1)} - \underbrace{2R(Z, W, X, Y)}_{(6)} = 0
 \end{aligned}$$

5 Um diesem Punkt überhaupt Sinn zu geben, muß man  $\nabla_Z$  auf Tensorfelder ausdehnen. Das geht mittels Produkt-Regel, i.e.

$$\begin{aligned} (\nabla_Z R)(X, Y, W) &:= \\ &= \nabla_Z (R(X, Y)W) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X, Y)\nabla_Z W \\ &= \nabla_Z (R(X, Y)W) + R(Y, \nabla_Z X)W - R(X, \nabla_Y Z - [Y, Z])W - R(X, Y)\nabla_Z W. \end{aligned}$$

Mit  $\sum_{\text{zykl.}}$  bezeichnen wir die zyklische Summe bezüglich der Variablen  $X, Y$  und  $Z$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\text{zykl.}} (\nabla_Z R)(X, Y, W) &= \\ &= - \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z (R(X, Y)W) + 0 + \sum_{\text{zykl.}} R(X, [Y, Z])W - \sum_{\text{zykl.}} R(X, Y)\nabla_Z W \\ &= \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z \left( \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}}_{(4)} \right) W \\ &\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left( \underbrace{[\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}]}_{(4)} - \underbrace{\nabla_{[X, [Y, Z]]}}_{(3)} \right) W - \sum_{\text{zykl.}} \left( \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z}_{(2)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}\nabla_Z}_{(4)} \right) W \\ &= - \underbrace{\nabla_{\sum_{\text{zykl.}} [X, [Y, Z]]}}_{(3)} W + \sum_{\text{zykl.}} \underbrace{\left( \underbrace{\nabla_Z [\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} - \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z}_{(2)} \right)}_{[\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]]} W + \underbrace{0}_{(4)} \\ &= 0 \quad \text{wegen der Jacobi-Identität.} \quad \square \end{aligned}$$

#### 14.6 Folgerung (Polarisierungsformel).

Für die Riemannkrümmung gilt:

$$\begin{aligned} 4! R(X, Y, Z, W) &= \\ &= -R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) + R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \\ &\quad + R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) - R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \\ &\quad + R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \\ &\quad - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \end{aligned}$$

**Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned} (1) \quad R(X, Y+Z, Y+Z, X) - R(X, Y-Z, Y-Z, X) &= \\ &= 2 \left( R(X, Y, Z, X) + R(X, Z, Y, X) \right) \\ &\stackrel{\boxed{14.5.1}, \boxed{14.5.2}}{=} 2 \left( R(X, Y, Z, X) + R(Z, X, X, Y) \right) \\ &\stackrel{\boxed{14.5.3}}{=} 4 R(X, Y, Z, X) \end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned} (2) \quad R(X+W, Y, Z, X+W) - R(X-W, Y, Z, X-W) &= \\ &= 2 \left( R(X, Y, Z, W) + R(W, Y, Z, X) \right) \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 (3) \quad R(Y, Z, X, W) &= \\
 &\stackrel{\boxed{14.5.1}, \boxed{14.5.2}}{=} R(Z, Y, W, X) \\
 &\stackrel{\boxed{2}}{=} -R(X, Y, W, Z) + \frac{1}{2} \left( R(Z+X, Y, W, Z+X) - R(Z-X, Y, W, Z-X) \right) \\
 &\stackrel{\boxed{14.5.2}, \boxed{1}}{=} R(X, Y, Z, W) \\
 &\quad + \frac{1}{8} \left( R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) - R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \right. \\
 &\quad \left. - R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) + R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad R(Z, X, Y, W) &= \\
 &\stackrel{\boxed{14.5.2}}{=} -R(Z, X, W, Y) \\
 &\stackrel{\boxed{2}}{=} R(Y, X, W, Z) - \frac{1}{2} \left( R(Z+Y, X, W, Z+Y) - R(Z-Y, X, W, Z-Y) \right) \\
 &\stackrel{\boxed{14.5.1}, \boxed{14.5.2}, \boxed{1}}{=} R(X, Y, Z, W) \\
 &\quad - \frac{1}{8} \left( R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \right. \\
 &\quad \left. - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \right)
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{\boxed{14.5.4}}{=} R(X, Y, Z, W) + \underbrace{R(Y, Z, X, W)}_{\boxed{3}} + \underbrace{R(Z, X, Y, W)}_{\boxed{4}} \\
 &= R(X, Y, Z, W) \\
 &\quad + R(X, Y, Z, W) \\
 &\quad + \frac{1}{8} \left( R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) - R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \right. \\
 &\quad \left. - R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) + R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \right) \\
 &\quad + R(X, Y, Z, W) \\
 &\quad - \frac{1}{8} \left( R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \right. \\
 &\quad \left. - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \right)
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 4! R(X, Y, Z, W) &= \\
 &= -R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) + R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \\
 &\quad + R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) - R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \\
 &\quad + R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \\
 &\quad - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \quad \square
 \end{aligned}$$

#### 14.7 Definition.



Wir wollen nun die Ausdrücke der Form  $R(X, Y, Y, X)$  in der Polarisierungsformel [14.6](#) weiter untersuchen. Sei dazu

$$\begin{aligned} X' &= aX + bY \\ Y' &= cX + dY \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wegen der Schiefsymmetrie [14.5.1](#) und [14.5.2](#) ist

$$R(X', Y', Y', X') = \det(A) R(X, Y, Y, X) = \det(A)^2 R(X, Y, Y, X).$$

Das gleiche Transformationsverhalten hat auch  $|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2$ , da dies das Quadrat der Fläche des von  $X$  und  $Y$  erzeugten Parallelogramms ist, siehe dazu [9.14](#). Folglich ist der Ausdruck

$$K(F) := \frac{R(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems des von  $X$  und  $Y$  erzeugten 2-dimensionalen Teilraums  $F := \langle X, Y \rangle$  von  $T_p M$ . Diese Zahl heißt die **SCHNITT-KRÜMMUNG** von  $F$ . Die Polarisierungsformel [14.6](#) zeigt, daß die Riemann-Krümmung sich aus der Schnittkrümmung berechnen läßt.

#### 14.8 Satz (Gauß-Krümmung versus Schnitt-Krümmung).

*Für jede Riemann-Fläche  $M$  ist die Gaußkrümmung ident mit der Schnittkrümmung (des ganzen 2-dimensionalen Tangentialraums).*

##### Beweis.

Für Hyperflächen im  $\mathbb{R}^3$  haben wir das in [14.2](#) gezeigt. Für abstrakte Riemann-Flächen  $M$  seien  $(u^1, u^2)$  lokale Koordinaten auf  $M$ . Dann ist

$$\begin{aligned} D^2 \cdot K(T_x M) &= D^2 \cdot \frac{R\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^1}\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial u^1}\right|^2 \left|\frac{\partial}{\partial u^2}\right|^2 - \left|\left\langle \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right\rangle\right|^2} = R_{1,2,2,1} \\ &\stackrel{\text{14.4}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\ &\quad + g^{1,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,1}) + g^{1,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,1}) \\ &\quad + g^{2,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,2}) + g^{2,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,2}) \\ &\stackrel{\text{10.6}}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\ &\quad + \frac{G}{D^2} (E_2 E_2 - (2F_2 - G_1) E_1) - \frac{F}{D^2} (G_1 E_2 - G_2 E_1) \\ &\quad - \frac{F}{D^2} (E_2 G_1 - (2F_2 - G_1)(2F_1 - E_2)) + \frac{E}{D^2} (G_1^2 - G_2(2F_1 - E_2)) \\ &= \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\ &\quad + \frac{F}{4D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\ &\quad + \frac{G}{4D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\ &\stackrel{\text{9.15}}{=} D^2 K \end{aligned}$$

Oder etwas anders gerechnet:

$$\begin{aligned}
R_{i,j,k,l} &\stackrel{\text{14.4}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p}) \\
R_{1,2,2,1} &\stackrel{\text{14.4}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\
&\quad + (\Gamma_{1,2}^1 \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2}^1 \Gamma_{1,1,1}) + (\Gamma_{1,2}^2 \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2}^2 \Gamma_{1,1,2}) \\
&\stackrel{\text{10.6}}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\
&\quad + \frac{E_2 G - G_1 F}{2D^2} \cdot \frac{E_2}{2} - \frac{2 F_2 G - G_1 G - G_2 F}{2D^2} \cdot \frac{E_1}{2} \\
&\quad + \frac{-E_2 F + G_1 E}{2D^2} \cdot \frac{G_1}{2} - \frac{-2 F_2 F + G_1 F + G_2 E}{2D^2} \cdot \frac{2 F_1 - E_2}{2} \\
&= \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\
&\quad + \frac{F}{D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\
&\quad + \frac{G}{D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\
&\stackrel{\text{9.15}}{=} D^2 K. \quad \square
\end{aligned}$$

#### 14.9 Definition (Normalkoordinaten).

Unter RIEMANN'SCHEN NORMALKOORDINATEN versteht man die Parametrisierung

$$\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p \left( \sum_{i=1}^m u^i X_i \right)$$

für eine Orthonormalbasis  $(X_1, \dots, X_m)$  von  $T_p M$ .

#### 14.10 Lemma (Christoffelsymbole in Normalkoordinaten).

In Riemannschen Normalkoordinaten verschwinden alle Christoffelsymbole bei  $p$ .

**Beweis.** Offensichtlich gilt

$$g_{i,j}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle(p) = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Die radialen Geodäten  $t \mapsto \exp_p(tX)$  erfüllen die Geodäten-Gleichung

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

Für  $u(t) := tX_j$  gilt wegen  $u^k(t) = \delta_j^k t$  somit  $\Gamma_{j,j}^k(u(t)) = 0$ , also insbesondere  $\Gamma_{j,j}^k(p)$ . Für  $u(t) := t(X_i + X_j)$  folgt analog  $(\Gamma_{i,i}^k + \Gamma_{i,j}^k + \Gamma_{j,i}^k + \Gamma_{j,j}^k)(p) = 0$  und da  $\Gamma_{i,j}^k$  symmetrisch in  $(i, j)$  ist, ist  $\Gamma_{i,j}^k(p) = 0$  für alle  $i, j, k$ .  $\square$

#### 14.11 Lemma.

Sei  $M$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit und  $F < T_x M$  ein 2-dimensionaler Teilraum. Dann ist die Schnittkrümmung  $K(F)$  genau die Gauß-Krümmung der lokal durch  $\exp(F)$  gegebenen Fläche.

**Beweis.** Wegen [14.8] genügt es zu zeigen, daß die Riemann-Krümmung  $R_N$  der Fläche  $N := \exp(F)$  mit der Einschränkung der Riemann-Krümmung  $R_M$  von  $M$  auf  $N$  übereinstimmt, wobei  $N$  durch  $(t, s) \mapsto \exp_p(tX_1 + sX_2)$  parametrisiert wird und die von  $M$  induzierte Metrik trägt.

Dazu wählt man Riemann-Normalkoordinaten  $\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^m u^i X_i)$  für eine Orthonormalbasis  $(X_1, \dots, X_m)$  des Tangentialraums  $T_p M$ . Bezüglich dieser verschwinden nach [14.10] alle Christoffelsymbole bei  $p$ . Da die Koeffizientenfunktionen  $g_{i,j}$  mit  $i, j \leq 2$  für  $M$  und  $N$  übereinstimmen, gilt das auch für

$$R_{i,j,k,l} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{j,l} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{i,l} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} \right) + 0. \quad \square$$

### 14.12 Satz (Ungekrümmte Räume).

Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind äquivalent:

1.  $R = 0$ .
2.  $M$  ist lokal isometrisch zum Euklidischen Raum.
3. Der Paralleltransport (siehe [12]) ist lokal wegunabhängig.

Der Punkt [3] ist global nicht allgemein gültig wie das Möbiusband mit flacher Metrik zeigt.

**Beweis.** ([1]  $\Rightarrow$  [3]) Indem wir eine Karte verwenden, können wir annehmen, daß  $M$  eine offene Umgebung von  $0$  in  $\mathbb{R}^m$  ist, allerdings mit einer allgemeinen Riemann-Metrik  $g$ . Wir müssen zu gegebenem Anfangswert  $X_0$  ein Vektorfeld  $X$  finden, welches längs jeder Kurve parallel ist. Wegen [13.4.3] genügt es, daß  $\nabla_{\partial_i} X = 0$  für alle  $i = 1, \dots, m$  ist. Zuerst finden wir ein längs der  $u^1$ -Achse paralleles Vektorfeld  $u^1 \mapsto X(u^1, 0, \dots, 0)$ . Zu jedem  $u^1$  finden wir längs der Kurve  $u^2 \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$  ein paralleles Vektorfeld  $u^2 \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$  mit Anfangswert  $X(u^1, 0, \dots, 0)$ . Und somit erhalten wir ein Vektorfeld  $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$  längs der 2-Fläche  $\psi : (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ . Dieses erfüllt:  $\nabla_{\partial_2} X = 0$  längs  $\psi$  und  $\nabla_{\partial_1} X = 0$  längs  $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$ . Wegen  $[\partial_1, \partial_2] = 0$  gilt  $\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} X - \nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = R(\partial_1, \partial_2)X = 0$ . Somit ist  $\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = 0$ , d.h.  $\nabla_{\partial_1} X$  ist parallel längs  $u^2 \mapsto \psi(u^1, u^2)$ . Aus  $\nabla_{\partial_1} X = 0$  längs  $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$  folgt  $\nabla_{\partial_1} X = 0$  längs  $\psi$ . Es ist also  $X$  parallel längs aller Kurven in der 2-Fläche  $\psi$ .

Nun kann man obigen Prozeß iterative fortsetzen, um das gewünschte parallele Vektorfeld  $X$  zu erhalten. Dies zeigt, daß der Paralleltransport wegunabhängig ist.

([3]  $\Rightarrow$  [2]) Wählt man als Anfangswert die Vektoren einer Orthonormal-Basis von  $T_0 \mathbb{R}^m$ , so erhält man parallele Vektorfelder  $X_i$ , welche nach [12.5.1] überall punktweise eine Orthonormal-Basis bilden. Nach [13.4.4] gilt  $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0$ . Nach [31, 17.12] können die  $X_i$  somit integriert werden, um eine Karte  $\varphi$  zu erhalten, welche  $\varphi_i = X_i$  erfüllt. In dieser Karte hat die Riemann-Metrik dann aber Koeffizienten  $\delta_{i,j}$ , d.h.  $\varphi$  ist eine lokale Isometrie zwischen dem flachen  $\mathbb{R}^m$  und  $M$ .

([2]  $\Rightarrow$  [1]) Da die kovariante Ableitung und somit die Riemann-Krümmung eine intrinsische Größe ist, also nur von der Riemann-Metrik abhängt, genügt es  $R$  für den Euklidischen Raum zu berechnen, dort ist aber  $R = 0$  wegen der Vorbemerkung zu [14.1].  $\square$

### 14.13 Definition (Spuren der Riemann-Krümmung).

Unter der RICCI-KRÜMMUNG einer Riemann-Mannigfaltigkeit versteht man

$$\text{Ricci}(X, Y) := \text{spur} \left( Z \mapsto R(Z, X)(Y) \right) = -\text{spur} \left( Z \mapsto R(X, Z)(Y) \right).$$

In lokalen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ricci}\left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \underbrace{du^k \left( R\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \frac{\partial}{\partial u^j} \right)}_{R_{k,i,j}^k} \\ &\stackrel{14.4.1}{=} \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k - \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{k,j}^k + \sum_p (\Gamma_{i,j}^p \Gamma_{k,p}^k - \Gamma_{k,j}^p \Gamma_{i,p}^k) \right) \end{aligned}$$

Beachte, daß Ricci :  $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrisch ist, denn

$$\begin{aligned} \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \sum_k R_{k,i,j}^k \stackrel{14.4.2}{=} \sum_{k,l} R_{k,i,j,l} g^{l,k} \stackrel{14.5.3}{=} \sum_{k,l} R_{j,l,k,i} g^{l,k} \\ &\stackrel{14.5.1, 14.5.2}{=} \sum_{l,k} R_{l,j,i,k} g^{k,l} = \sum_l R_{l,j,i}^l = \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \end{aligned}$$

Eine (Pseudo-)Riemann-Mannigfaltigkeit heißt RICCI-FLACH falls Ricci = 0.

Sie heißt EINSTEIN-MANNIGFALTIGKEIT falls Ricci proportional zur Metrik ist.

Unter der SKALARKRÜMMUNG versteht man  $S := \text{spur}_g(\xi \mapsto (\text{Ricci}(\xi, -))^b)$ , also die Spur der Abbildung

$$T_x M \xrightarrow{\text{Ricci}_x^\vee} (T_x M)^* \xrightarrow{\cong} T_x M.$$

In Koordinaten ist das somit

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j} \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) g^{i,j} \\ &= \sum_{i,j} \sum_k \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k - \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{k,j}^k + \sum_p (\Gamma_{i,j}^p \Gamma_{k,p}^k - \Gamma_{k,j}^p \Gamma_{i,p}^k) \right) g^{i,j}. \end{aligned}$$

Beachte, daß dies wegen der Symmetrieeigenschaften [14.6](#) alle nicht trivialen Spuren sind, welche man aus der Riemann-Krümmung bilden kann.

Der völlig spurfreie Teil der Riemann-Krümmung wird (für  $m \geq 3$ ) als WEYL KRÜMMUNGSTENSOR

$$\begin{aligned} W &:= R - \underbrace{\frac{1}{m-2} \left( \text{Ricci} - \frac{S}{2(m-1)} g \right)}_{\text{Schouten Tensor}} \bullet g \\ &= R - \frac{1}{m-2} \left( \text{Ricci} - \frac{S}{m} g \right) \bullet g - \frac{S}{2m(m-1)} g \bullet g \end{aligned}$$

bezeichnet. Dabei ist  $k \bullet h$  das KULKARNI-NOMIZU PRODUKT zweier symmetrischer 2-fach kovarianter Tensoren  $k$  und  $h$ , nämlich

$$\begin{aligned} (k \bullet h)(v_1, v_2, v_3, v_4) &:= k(v_1, v_3) h(v_2, v_4) + k(v_2, v_4) h(v_1, v_3) \\ &\quad - k(v_1, v_4) h(v_2, v_3) - k(v_2, v_3) h(v_1, v_4) \end{aligned}$$

#### 14.14 Proposition.

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit hat genau dann konstante Schnittkrümmung auf  $G(2, T_p M)$ , wenn für alle  $X, Y, Z \in T_p M$  gilt:

$$R(X, Y)Z = K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Sei  $R(X, Y)Z = K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$  mit einer Konstanten  $K \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} K(\langle X, Y \rangle) &:= \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \\ &= \frac{g(K \cdot (g(Y, Y)X - g(X, Y)Y), X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = K \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) Sei  $K$  die konstante Schnittkrümmung. Der Ausdruck

$$g(K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), W) = K \cdot (g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W))$$

hat die Eigenschaften [14.5.1](#)–[14.5.4](#) und stimmt für  $Z = Y$  und  $W = X$  mit  $g(R(X, Y)Y, X)$  überein. Wegen [14.6](#) (wo wir nur diese Eigenschaften) verwendet haben stimmt er überhaupt mit  $g(R(X, Y)Z, W)$  überein.  $\square$

#### 14.15 Folgerung.

Eine  $m$ -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit habe konstante Schnittkrümmung  $K$ . Dann gilt für die Ricci- und die Skalarkrümmung:

$$\begin{aligned} \text{Ricci}(X, Y) &= K \cdot (m - 1) \cdot g(X, Y) \\ S &= K \cdot (m - 1) \cdot m \end{aligned}$$

Insbesondere liegt eine Einstein-Mannigfaltigkeit vor, also  $\text{Ricci} = \frac{S}{m} g$ .

**Beweis.**

$$\begin{aligned} \text{Ricci}(X, Y) &= \text{spur}(Z \mapsto R(Z, X)Y) \\ &\stackrel{\text{14.14}}{=} \text{spur}(Z \mapsto K \cdot (g(X, Y)Z - g(Z, Y)X)) \\ &= K \cdot (m \cdot g(X, Y) - g(X, Y)) = K \cdot (m - 1) \cdot g(X, Y) \\ \text{und } S &= \text{spur}(X \mapsto (\text{Ricci}(X, -))^b) = \text{spur}(X \mapsto (K \cdot (m - 1) \cdot g(X, -))^b) \\ &= \text{spur}(X \mapsto K \cdot (m - 1) \cdot X) = K \cdot (m - 1) \cdot m. \quad \square \end{aligned}$$

#### 14.16 Zusammenfassung

Bei ebenen Kurven, haben wir die KRÜMMUNG als die Kraft interpretiert, die notwendig ist, um einen Massenpunkt mit konstanter skalarer Geschwindigkeit auf einer Kurve zu halten.

Bei Hyperflächen im  $\mathbb{R}^3$  haben wir zuerst die NORMALKRÜMMUNG einer Fläche in Richtung  $\xi$  als Krümmung der Schnittkurve mit der, von der Flächennormale und  $\xi$  aufgespannten Ebene kennengelernt. Dies ist gleichzeitig die Krümmung der Geodäte in Richtung  $\xi$ , siehe [9.10](#). Die kritische Punkte der Normalkrümmung sind die HAUPTKRÜMMUNGEN, und deren Produkt ist die GAUSS-KRÜMMUNG.

Bei einer allgemeinen Riemann-Mannigfaltigkeit kann die SCHNITTKRÜMMUNG als die Gauß-Krümmung jener 2-dimensionalen Fläche, welche durch die Exponentialabbildung parametrisiert wird, aufgefaßt werden. Die Riemann-Krümmung ist schließlich das zur Schnittkrümmung gehörige Tensorfeld (i.e. 4-lineare Abbildung).

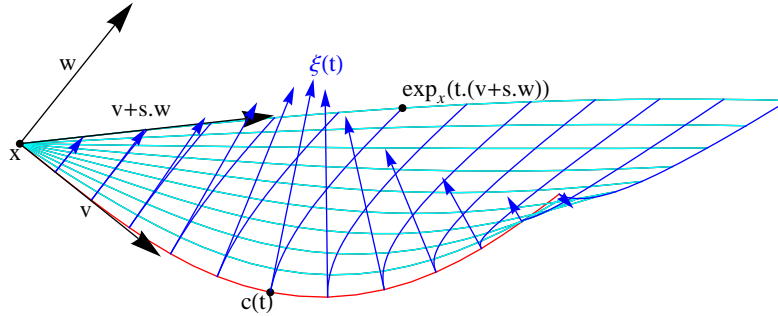
## 15. Jacobi-Felder

### 15.1 Bemerkung.

Sei  $c : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodäte in einer Riemannschen Fläche. Diese läßt sich als radiale Geodäten der Form  $c(t) = \exp_x(tv)$  schreiben, wobei  $x := c(0)$  und  $v := c'(0)$ . Wir wollen benachbarte radiale Geodäten diskutieren. Nach [13.8](#) gibt es eine Umgebung um  $[0, a] \times \{v\} \subset \mathbb{R} \times T_x M$ , auf welcher  $\exp$  wohldefiniert ist. Damit existieren auf dem Intervall  $[0, a]$  die radialen Geodäten, welche bei  $x$  in eine Richtung nahe  $v$  starten. Betrachten wir nun die Variation  $(t, w) \mapsto \exp_x(t(v+w))$  von  $c$  für  $w \perp v$ . Für fixes  $w$  definiert die Richtungsableitung

$$\xi(t) := \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_x(t(v+sw)) = (T_{tv} \exp_x)(tw)$$

an der Stelle  $(t, 0) \in [0, a] \times T_x M$  in Richtung  $(0, w)$  ein Vektorfeld  $\xi$  längs  $c$ .



Wir wollen nun zeigen, daß das Vektorfeld  $\xi$  die sogenannte Jacobi-Gleichung

$$\nabla^2 \xi(t) + K(c(t)) \xi(t) = 0$$

erfüllt.

Da

$$\varphi : (r, \vartheta) \mapsto \exp_x \left( r(\cos(\vartheta)v + \sin(\vartheta)w) \right) \text{ für } |w| = 1 = |v|$$

geodätische Parallelkoordinaten sind, also  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G > 0$  erfüllen, gilt die Jacobi-Gleichung  $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \sqrt{G}$  aus [9.17](#).

$$\begin{aligned} \text{Für } \xi(t) &:= \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_x(t(v+sw)) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} \exp_x(t \cos(\vartheta)v + t \sin(\vartheta)w) = \partial_2 \varphi(t, 0) \\ \text{ist } |\xi(t)|^2 &= |\partial_2 \varphi(t, 0)|^2 = G(t, 0). \end{aligned}$$

Das Vektorfeld  $\xi$  steht normal auf  $c'$ , da die radialen Geodäten die geodätischen Sphären (wegen  $F = 0$ ) orthogonal schneiden, also läßt sich  $\xi(t)$  als  $\lambda(t)\nu(t)$  schreiben, wobei  $\nu$  ein Einheitsnormalenfeld zu  $c'$  in  $TM$  und  $\lambda = |\xi| = \sqrt{G}$  ist. Folglich gilt  $\lambda'' + (K \circ c) \cdot \lambda = \lambda'' - \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \sqrt{G} \cdot \lambda = 0$ . Da  $c$  eine Geodäte ist, ist  $c'$  ein paralleles Vektorfeld (siehe [12.1](#)) längs  $c$  und ebenso  $\nu$ . Also gilt für die

kovariante Ableitung von  $\xi$ :

$$\begin{aligned}\nabla\xi &= \nabla(\lambda\nu) = \lambda\nabla\nu + \lambda'\nu = \lambda'\nu \\ \Rightarrow \nabla^2\xi &= \nabla(\lambda'\nu) = \lambda'\nabla\nu + \lambda''\nu = \lambda''\nu \\ \Rightarrow \nabla^2\xi + K\xi &= \lambda''\nu + K\lambda\nu = (\lambda'' + K\lambda)\nu = 0\end{aligned}$$

### 15.2 Definition (Jacobi-Felder).

Wir nennen ein Vektorfeld  $\xi$  längs einer Geodäte  $c$  in einer Riemann-Fläche ein JACOBI-FELD falls es die JACOBI-GLEICHUNG

$$\nabla^2\xi + (K \circ c) \cdot \xi = 0$$

erfüllt und orthonormal auf die Geodäte steht.

### 15.3 Lemma.

Die Jacobi-Felder  $\xi$  längs einer Geodäte  $c$  mit Anfangsbedingung  $\xi(0) = 0$  sind genau jene Vektorfelder, welche sich als  $\xi(t) := (T_{tc'(0)} \exp_{c(0)})(tw)$  mit  $w \in c'(0)^\perp \subset T_{c(0)}M$  schreiben lassen.

**Beweis.** Wir haben gerade gezeigt, daß so darstellbare Vektorfelder Jacobi-Felder sind. Berechnen wir nun noch deren Anfangswerte. Klarerweise ist

$$\xi(0) = (T_{0c'(0)} \exp_{c(0)})(0w) = 0.$$

Bezüglich der Koordinaten  $(u^1, u^2) \mapsto \exp_x(u^1 v + u^2 w)$  gilt  $u^1(t) = t$ ,  $u^2(t) = 0$ ,  $\xi^1(t) = 0$  und  $\xi^2(t) = t$ . Somit ist

$$\begin{aligned}\nabla\xi(0) &\stackrel{\text{13.1}}{=} \sum_{k=1}^m \left( \frac{d\xi^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \xi^i \frac{du^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial u^2} + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{2,1}^k \cdot t \cdot 1 \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial u^2} \Big|_{t=0} = w.\end{aligned}$$

Da die lineare Differentialgleichung  $\lambda'' + (K \circ c)\lambda = 0$  zweiter Ordnung aber zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung hat, muß diese obige Gestalt besitzen.  $\square$

Sei nun  $M$  eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit und  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte in  $M$ . Wir haben in [10.11](#) gesehen, daß Kurven die in geodätischen Parallelkoordinaten nahe an  $c$  liegen, keine kürzere Bogenlänge haben können. Wir untersuchen nun die Frage, wann wir geodätische Polarkoordinaten um  $c(0)$  finden können, welche bis zu  $c(t)$  reichen. Dazu folgende

### 15.4 Definition (Konjugierte Punkte).

Es sei  $c : t \mapsto \exp_{c(0)}(tc'(0))$  eine Geodäte in  $M$ . Ein Punkt  $c(t)$  heißt KONJUGIERT zu  $c(0)$  falls das Differential  $T_{tc'(0)}(\exp_{c(0)})$  der Exponentialabbildung bei  $tc'(0) \in T_{c(0)}M$  kein Isomorphismus von  $T_{c(0)}M = T_{tc'(0)}T_{c(0)}M$  nach  $T_{c(t)}M$  ist.

### 15.5 Satz (Konjugierte Punkte).

Für eine Geodäte  $c$  in einer vollständigen Riemannschen Fläche sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $c(t)$  ist konjugiert zu  $c(0)$ .
2. Es existiert ein Jacobi-Vektorfeld  $\xi \neq 0$  längs  $c$  mit  $\xi(t) = 0 = \xi(0)$ .

**Beweis.** Es sei  $x := c(0)$  und  $v := c'(0)$ . Nach Definition ist  $c(t)$  genau dann konjugiert zu  $c(0)$ , wenn  $T_{tv} \exp_x : T_x M \rightarrow T_{\exp_x(tv)} M$  kein Isomorphismus ist, also ein  $0 \neq w \in \text{Ker}(T_{tv} \exp_x)$  existiert. Wegen  $(T_{tv} \exp_x)(v) = c'(t) \neq 0$  und  $(T_{tv} \exp_x)(w) \perp c'(t)$  für alle  $w \perp v$  nach [13.10] ist  $w \perp v$  für jedes  $w \in \text{Ker}(T_{tv} \exp_x)$ , denn  $0 = T_{tv} \exp_x(av + w) = ac'(t) + T_{tv} \exp_x(w) \Leftrightarrow a = 0$ . Und weiters ist  $\xi(t) = 0$ , wobei  $\xi : s \mapsto s T_{sv} \exp_x(w)$  nach [15.3] das Jacobi-Feld mit Anfangsbedingung  $\xi(0) = 0$  und  $\nabla \xi(0) = w \perp v$  ist.  $\square$

### 15.6 Folgerung.

Sei  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Falls  $c$  im Inneren eines Parameterintervalls  $[t_1, t_2]$  keine konjugierte Punkte enthält, so gilt  $L(c) \leq L(c_1)$  für jede nahe  $c$  gelegene Kurve  $c_1$ .

Es gilt auch die Umkehrung, siehe [15.16].

**Beweis.** Wie in [15.1] betrachten wir eine Abbildung  $\varphi$  nach geodätischen Polarkoordinaten um  $c(0)$ . Wegen [15.5] ist diese Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus in jedem Punkt von  $]t_1, t_2[ \times \{0\}$ . Also haben wir, abgesehen von den Randpunkten, geodätische Parallelkoordinaten längs  $c$ . Nach [10.11] ist dann die Länge jeder nahe  $c$  gelegenen Kurve mindestens so groß wie jene von  $c$ .  $\square$

### 15.7 Lemma. Vergleichssatz von Sturm.

Es sei  $\mu$  (resp.  $\lambda$ ) Lösung der linearen Differentialgleichung  $\mu''(t) + a(t)\mu(t) = 0$  (resp.  $\lambda''(t) + b(t)\lambda(t) = 0$ ) mit Anfangswert  $\mu(0) = 0 = \lambda(0)$  und  $\mu'(0) = 1 = \lambda'(0)$ . Weiters sei  $a \geq b$  (bzw.  $\forall t : a(t) > b(t)$ ). Sei  $t_\mu := \min\{t > 0 : \mu(t) = 0\}$  und  $t_\lambda := \min\{t > 0 : \lambda(t) = 0\}$ . Dann ist  $t_\mu \leq t_\lambda$  und für  $0 < t_0 < t_1 < t_\mu$  ist  $\mu(t_1)\lambda(t_0) \leq \lambda(t_1)\mu(t_0)$  (bzw.  $<$ ) und  $\mu(t_1) \leq \lambda(t_1)$  (bzw.  $<$ ).

**Beweis.** Nach Voraussetzung ist  $\mu(t) > 0$  für alle  $0 < t < t_\mu$  (wegen  $\mu'(0) = 1$ ) und  $\lambda(t) > 0$  für alle  $0 < t < t_\lambda$ , also  $\lambda'(t_\lambda) \leq 0$ . Weiters ist  $\lambda'(t_\lambda) < 0$  andernfalls wäre  $\lambda = 0$  lokal um  $t_\lambda$ . Es sei  $a(t) \geq b(t)$  für alle  $t$ . Wäre  $t_\mu > t_\lambda$  so wäre

$$0 = \int_0^{t_\lambda} \mu(\lambda'' + b \cdot \lambda) - \lambda(\mu'' + a \cdot \mu) = \underbrace{(\mu \cdot \lambda' - \lambda \cdot \mu') \Big|_0^{t_\lambda}}_{=\mu(t_\lambda)\lambda'(t_\lambda) < 0} + \underbrace{\int_0^{t_\lambda} (b - a) \cdot \lambda \cdot \mu}_{\leq 0},$$

ein Widerspruch.

Sein nun  $0 < t < t_\mu (\leq t_\lambda)$ . Dann ist

$$0 = \int_0^t \mu(\lambda'' + b \cdot \lambda) - \lambda(\mu'' + a \cdot \mu) = (\mu \cdot \lambda' - \lambda \cdot \mu') \Big|_0^t + \underbrace{\int_0^t (b - a) \cdot \lambda \cdot \mu}_{\leq 0} \leq (\mu \cdot \lambda' - \lambda \cdot \mu')(t)$$

und somit  $(\log \circ \lambda)'(t) \geq (\log \circ \mu)'(t)$ , also  $\log \circ \frac{\lambda}{\mu}$  monoton wachsend und damit  $\lambda(t_1)\mu(t_0) \geq \mu(t_1)\lambda(t_0)$  für alle  $0 < t_0 \leq t_1 < t_\mu$ . Wegen  $\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\lambda(t_0)}{\mu(t_0)} = \frac{\lambda'(0)}{\mu'(0)} = 1$  folgt  $\lambda(t_1) \geq \mu(t_1)$ .

Den Fall  $a(t) > b(t)$  für alle  $t$  behandelt man ganz analog.  $\square$

### 15.8 Folgerung.

Sei  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte.

1. Falls  $K(c(t)) \leq K_1$  für alle  $t$  gilt, so liegt in keinem offenen Intervall der Länge  $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$  ein konjugierter Punkt.



2. Falls  $K(c(t)) \geq K_0 > 0$  für alle  $t$  gilt, so liegt hingegen in jedem abgeschlossenen Intervall der Länge  $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$  ein konjugierter Punkt.

Hierbei und im folgenden sei  $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}} = +\infty$  für  $K_1 \leq 0$ .

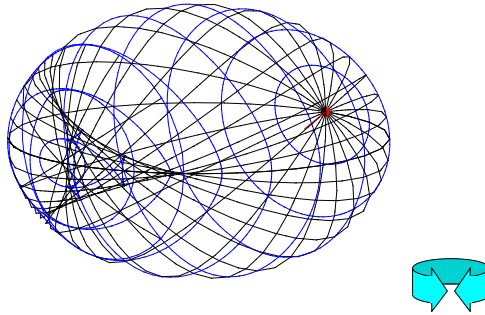
**Beweis.** [1] Für  $K_1 > 0$  und  $b(t) := K(c(t)) \leq K_1 =: a(t)$  folgt mittels [15.7] für die Lösung  $\xi(t) = \lambda(t)\nu(t)$  der Jacobi-Gleichung (siehe [15.1]) und jene von  $\mu''(t) + K_1\mu(t) = 0$  (also  $\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \sin(t\sqrt{K_1})$ ) die Beziehung  $\mu(t_1) \leq \lambda(t_1)$  und somit  $\lambda(t) = 0 \Rightarrow t\sqrt{K_1} \geq \pi$ .

Für  $K_1 \leq 0$ , also o.B.d.A.  $K_1 = 0$ , ist analog  $\lambda(t) \geq \mu(t) = t > 0$  für alle  $t > 0$ .

Die Aussage [2] zeigt man ganz analog.  $\square$

### 15.9 Theorem von Bonnet.

Ist  $M$  eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Fläche und  $K(x) \geq K_0 > 0$  für alle  $x \in M$ , so ist der geodätischen Abstand je zweier Punkte höchstens  $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ . Insbesondere ist  $M$  kompakt.



**Beweis.** Nach [13.12.4] existiert zu je zwei Punkten eine Geodäte minimaler Länge. Falls diese Länge größer als  $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$  ist, so enthält sie nach [15.8.2] konjugierte Punkte, und nach der Umkehrung von [15.6] die wir in [15.16] zeigen werden ist diese Geodäte dann nicht die kürzeste Verbindung, ein Widerspruch. Damit sind ihre Endpunkte also höchstens  $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$  entfernt. Insbesondere ist der Durchmesser

$$d(M) := \sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{K_0}},$$

und somit ist  $M$  nach [13.12] kompakt.  $\square$

### 15.10 Lemma.

Es sei  $K(x) \leq K_1$  für alle  $x \in M$  und  $\rho_1 < \rho := \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$ . Sei weiters  $c : [0, \rho_1] \rightarrow M$  eine Bogenlängen-parametrisierte Geodäte von  $x := c(0)$  nach  $y := c(\rho_1)$ . Sei  $v : [s_0, s_1] \rightarrow B_\rho(0) \subseteq T_x M$  eine Kurve mit  $\exp_x(v(s_0)) = x$  und  $\exp_x(v(s_1)) = y$ . Dann ist  $L(\exp_x \circ v) \geq L(c)$ .

**Beweis.** Wegen  $K(x) \leq K_1$  für alle  $x \in M$  ist  $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$  ein lokaler Diffeomorphismus nach [15.8.1]. Somit ist  $(\exp_x)^*(g)$  eine Riemann-Metrik auf  $B_\rho(0)$  und  $\exp_x$  bzgl. dieser eine lokale Isometrie. Die Polarkoordinaten auf  $B_\rho(0)$  induzieren somit geodätische Polarkoordinaten (siehe [10.9]) auf  $B_\rho(0)$  bzgl. der Metrik  $(\exp_x)^*(g)$  und somit folgt das Resultat aus [10.11].  $\square$

### 15.11 Proposition.

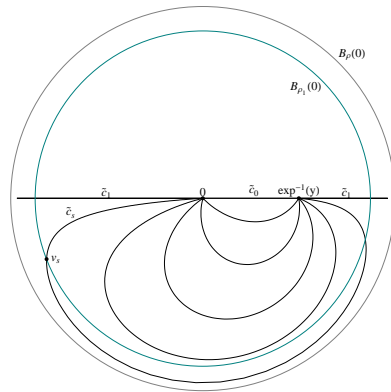
Sei  $(c_s)_s$  eine glatte Homotopie relativ  $\{0, 1\}$  zwischen zwei verschiedene Geodäten von  $x$  nach  $y$  mit  $L(c_0) \leq L(c_1)$ . Falls  $K(x) \leq K_1$  für alle  $x \in M$  so existiert ein  $0 \leq s_0 \leq 1$  mit  $L(c_{s_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0)$

Beachte, daß dies für  $K_1 \leq 0$  (und somit  $2\pi/\sqrt{K_1} := +\infty$ ) besagt, daß verschiedene Geodäten von  $x$  nach  $y$  nicht homotop sein können.

**Beweis.** Es sei  $\rho := \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$ . Wegen [15.8.1](#) ist  $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$  ein lokaler Diffeomorphismus und somit auf jedem kleineren offenen Ball eine Überlagerung (da die Fasern endlich sind). O.B.d.A. ist  $L(c_0) < \rho$  (andernfalls ist schon  $L(c_0) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0)$ ).

Wäre  $c_s(t) \in \exp_x(B_{\rho_1}(0))$  für ein  $\rho_1 < \rho$  und alle  $s$  und  $t$ , so würde ein Lift  $(t, s) \mapsto \tilde{c}_s(t)$  existieren. Da aber der Lift der Geodäte  $c_1$  eine Gerade durch 0 sein muß ist das wegen  $c_0 \neq c_1$  unmöglich. Somit kommt die Homotopie dem Rand von  $\exp_x(B_\rho(0))$  beliebig nahe, d.h. für jedes  $\rho_1 < \rho$  existiert ein  $s \in [0, 1]$  s.d. der Lift  $\tilde{c}_s : [0, 1] \rightarrow B_\rho(0)$  existiert und einen Punkt  $v_s$  im Abstand  $\rho_1$  von 0 enthält. Nach [15.10](#) hat dann das Bild der geschlossenen Kurve gebildet aus  $\tilde{c}_s$  gefolgt von der umgekehrt durchlaufenen Gerade  $\tilde{c}_0$  Länge  $\geq 2\rho_1$  (denn die beiden Teile von 0 nach  $v_s$  haben Länge  $\geq \rho_1$ ), also ist  $L(c_s) \geq 2\rho_1 - L(c_0)$ .

Da  $\rho_1$  beliebig nahe an  $\rho$  war, folgt aus der Stetigkeit von  $s \mapsto L(c_s)$ , die Existenz eines  $s_0$  mit  $L(c_{s_0}) \geq 2\rho - L(c_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0)$ .  $\square$



### 15.12 Theorem [15](#).

Die Exponential-Abbildung jeder vollständigen zusammenhängenden Riemann-Fläche mit  $K \leq 0$  ist für jedes  $x \in M$  eine Überlagerung  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ . Ist also  $M$  zusätzlich einfachzusammenhängend, so ist  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus und zu je zwei Punkten gibt es genau eine minimale verbindende Geodäte.

**Beweis.** Sei vorerst  $M$  einfach zusammenhängend. Wegen [15.8.1](#) existieren für  $K \leq 0$  keine konjugierten Punkte und somit ist  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  überall ein lokaler Diffeomorphismus. Nach dem Satz [13.12](#) von Hopf-Rinow ist  $\exp_x$  surjektiv. Nun zur Injektivität. Sei  $\exp_x(v_0) = \exp_x(v_1) =: p \in M$ . Dann sind  $c_i(t) := \exp_x(t v_i)$  Geodäten die  $x$  mit  $p$  verbinden. Da  $M$  einfach-zusammenhängend ist, sind diese homotop. Wegen [15.11](#) sind sie somit ident, also  $v_0 = v_1$ .

Nach [10.11](#) ist die radiale verbindende Geodäte von minimaler Länge.

Für allgemeines  $M$  betrachten wir die universelle Überlagerung  $p : \tilde{M} \rightarrow M$ . Nach dem eben Gesagten ist  $\exp_{\tilde{x}} : T_{\tilde{x}} \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  ein Diffeomorphismus und somit  $\exp_x \circ T_{\tilde{x}} p = p \circ \exp_{\tilde{x}} : T_{\tilde{x}} \tilde{M} \rightarrow M$  eine Überlagerung. Da  $T_{\tilde{x}} p : T_{\tilde{x}} \tilde{M} \rightarrow T_x M$  ein linearer Isomorphismus ist, ist  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  selbst eine Überlagerung.  $\square$

### 15.13 Jacobi-Felder auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Da für die Beschreibung von Jacobi-Feldern nur  $\exp_x(t(v+sw))$  für  $v, w \in T_x M$  und  $t, s \in \mathbb{R}$  benötigt wurde, läßt sich diese auf allgemeine Riemann-Mannigfaltigkeiten übertragen, wobei die Gaußkrümmung  $K(c(t))$  wegen [14.11](#) durch die Schnittkrümmung  $K(\langle \{\xi(t), c'(t)\} \rangle)$  (siehe [14.7](#)) und  $K(c(t)) \xi(t)$  durch  $R(\xi(t), c'(t)) c'(t)$

zu ersetzen ist: Denn für Riemann-Flächen und Einheitsnormalenfeld  $\nu$  ist

$$R(\nu, c')c' = \langle R(\nu, c')c', c' \rangle c' + \langle R(\nu, c')c', \nu \rangle \nu = R(\nu, c', c', c')c' + R(\nu, c', c', \nu)\nu$$

und wegen [14.5.2](#) und [14.1.1](#) somit  $R(\nu, c')c' = R(\nu, c', c', \nu)\nu = K\nu$ . Damit ist

$$K(c(t))\xi(t) = K(c(t))\lambda(t)\nu(t) = \lambda(t)R(\nu(t), c'(t))c'(t) = R(\xi(t), c'(t))c'(t).$$

Die JACOBI-GLEICHUNG sieht also dann wie folgt aus:

$$\nabla^2\xi + R(\xi, c') \cdot c' = 0,$$

Die Lösungen der Jacobi-Gleichung heißen wieder JACOBI-FELDER und diese sind genau die Richtungsableitung von 1-Parameter-Variationen der Geodäte  $c$  durch Geodäten: Sei nämlich  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  eine Variation bestehend aus Geodäten  $t \mapsto \varphi(s, t)$  (also  $0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, t)$ ). Im Beweis des Gauß-Lemmas [13.10](#) haben wir

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, t) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, t)$$

gezeigt. Damit ist

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, t) \\ &\stackrel{\text{14.2}}{=} R(T\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial s}, T\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, t) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, t) + \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}]} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, t) \\ &= R(T\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial s}, T\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varphi(s, t) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, t) + 0 \end{aligned}$$

und für  $s = 0$  erhalten wir mit  $c(t) := \varphi(0, t)$  und  $\xi(t) := \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \varphi(s, t)$  die Jacobi-Gleichung

$$0 = R(\xi, c') \cdot c' + \nabla^2\xi$$

Die Darstellung aus [15.3](#) für Jacobi-Felder  $\xi$  mit  $\xi(0) = 0$  via der Ableitung von  $\exp_{c(0)}$  gilt genau wie im 2-Dimensionalen und die Nullstellen dieser Jacobi-Felder beschreiben wie in [15.5](#) wieder KONJUGIERTE PUNKTE.

### 15.15 Proposition. Variation der Energie.

Es sei  $(c_s)_s$  eine glatte Variation mit fixen Endpunkten einer Kurve  $c_0: [a, b] \rightarrow M$ , also  $(s, t) \mapsto c_s(t)$  glatt von  $\mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow M$  mit  $s \mapsto c_s(t)$  konstant für  $t \in \{a, b\}$ . Sei  $Y_s(t) := \frac{\partial}{\partial s} c_s(t) \in T_{c_s(t)}M$  und die Energie

$$E(c_s) := \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{c}_s, \dot{c}_s) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{c_s(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} c_s(t), \frac{\partial}{\partial t} c_s(t) \right) dt.$$

Dann ist

$$(1) \quad \frac{d}{ds} E(c_s) \Big|_{s=0} = - \int_a^b g(\nabla_{\dot{c}_0} \dot{c}_0, Y_0)$$

und, falls  $c_0$  eine Geodäte ist, so ist  $\frac{d}{ds} E(c_s) \Big|_{s=0} = 0$  und

$$(2) \quad \left( \frac{d}{ds} \right)^2 E(c_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b \left( |\nabla_{\dot{c}_0} Y_0|_g^2 - \underbrace{K(\{\dot{c}_0, Y_0\}) \cdot (|Y_0|_g^2 - g(\dot{c}_0, Y_0))}_{=R(Y_0, \dot{c}_0, \dot{c}_0, Y_0)} \right)$$

**Beweis.**

1. Es sei  $X_s(t) := \frac{\partial}{\partial t} c_s(t)$ . Dann ist  $X = Tc \cdot \frac{\partial}{\partial t}$  und für  $Y := Tc \cdot \frac{\partial}{\partial s}$  somit

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y \stackrel{13.4.4}{=} [X, Y] = Tc \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = 0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(X, X) dt \stackrel{13.4.5}{=} \int_a^b g(\nabla_Y X, X) dt \\ &= \int_a^b g(\nabla_X Y, X) dt \stackrel{13.4.5}{=} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(Y, X) dt - \int_a^b g(Y, \nabla_X X) dt \\ &= g(Y, X) \Big|_a^b - \int_a^b g(Y, \nabla_X X) dt \end{aligned}$$

und wegen  $Y_s|_{\{a,b\}} = 0$  und  $X_0 = \dot{c}_0$  ist für  $s = 0$

$$\frac{d}{ds} E(c_s) \Big|_{s=0} = 0 - \int_a^b g(Y, \nabla_{\dot{c}_0} \dot{c}_0) dt.$$

2.

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{ds} \right)^2 E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 g(X, X) dt \stackrel{13.4.5}{=} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(\nabla_Y X, X) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(\nabla_X Y, X) dt \\ &\stackrel{13.4.5}{=} \int_a^b \left( g(\nabla_Y \nabla_X Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_Y X) \right) dt \\ &= \int_a^b \left( g(\nabla_X \nabla_Y Y, X) - g([\nabla_X, \nabla_Y]Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \right) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} g(\nabla_Y Y, X) - g(\nabla_Y Y, \nabla_X X) + \right. \\ &\quad \left. - g(R(X, Y, Y), X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \right) dt \\ &= g(\nabla_Y Y, X) \Big|_a^b + \\ &\quad + \int_a^b \left( -g(\nabla_Y Y, \nabla_X X) - R(X, Y, Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \right) dt \end{aligned}$$

und für  $s = 0$  und Geodäte  $c_0$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{ds} \right)^2 E(c_s) \Big|_{s=0} &= 0 + \int_a^b \left( -g(\nabla_{Y_0} Y_0, \underbrace{\nabla_{X_0} X_0}_{=0}) - R(X_0, Y_0, Y_0, X_0) + g(\nabla_{X_0} Y_0, \underbrace{\nabla_{X_0} Y_0}_{\nabla_{\dot{c}_0} Y_0}) \right) \\ &= \int_a^b \left( |\nabla_{\dot{c}_0} Y_0|_g^2 - R(\dot{c}_0, Y_0, Y_0, \dot{c}_0) \right). \end{aligned}$$

Schließlich ist nach [14.7](#)

$$R(\dot{c}_0, Y_0, Y_0, \dot{c}_0) = K(\langle \dot{c}_0, Y_0 \rangle) \cdot (|Y_0|_g^2 - g(\dot{c}_0, Y_0)^2)$$

□

Die Hess'sche Form von  $E$  (d.h. die symmetrische Bilinearform  $E''(c_0)$ ) ist somit wegen  $Y_0 = \frac{d}{ds}c_s|_{s=0}$  gegeben durch die sogenannte INDEXFORM

$$I(Y, Z) := \int_a^b \left( g(\nabla_{\dot{c}_0} Y, \nabla_{\dot{c}_0} Z) - R(\dot{c}_0, Y, Z, \dot{c}_0) \right)$$

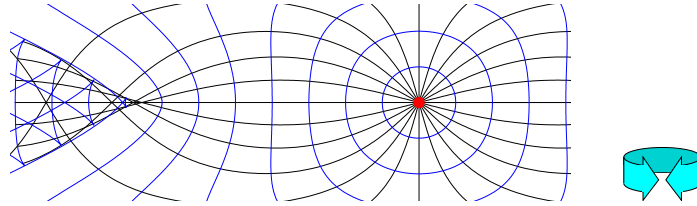
für Vektorfelder  $Y$  und  $Z$  längs  $c_0$ .

Wir verallgemeinern nun [15.6](#) und zeigen gleichzeitig die Umkehrung.

### 15.16 Theorem.

Es sei  $(M, g)$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit und  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine Geodäte. Dann sind äquivalent:

1. Es existieren keine konjugierten Punkte auf  $c$ .
2.  $c$  hat minimale Länge unter allen hinreichend nahen Kurven mit gleichen Randpunkten.
3.  $c$  hat minimale Energie unter allen hinreichend nahen Kurven mit gleichen Randpunkten.
4.  $E''(c)$  ist positiv semi-definit, d.h.  $\left(\frac{d}{ds}\right)^2|_{s=0} E(c_s) = I\left(\frac{d}{ds}|_{s=0} c_s, \frac{d}{ds}c_s|_{s=0}\right) \geq 0$  für alle Variationen  $(c_s)_s$  von  $c$  mit fixen Randwerten.



**Beweis.** ([1](#)  $\Rightarrow$  [2](#)) Dies ist analog zu [15.6](#) allerdings benötigen wir eine Verallgemeinerung der Folgerung [13.11](#) anstelle von [10.11](#): Es sei  $a = 0$ . Wir setzen  $x := c(0)$  und  $v := c'(0)$  also  $c(t) = \exp_x(t v)$  für alle  $0 \leq t \leq b$ . Nach Voraussetzung ist  $\exp_x$  ein lokaler Diffeomorphismus auf einer Umgebung von  $[0, b] \cdot v$  und somit eine Überlagerung auf einer kleineren Umgebung (vgl. mit dem Beweis von [15.11](#)). Jedes hinreichend nahe an  $c$  liegende Kurve  $\bar{c}$  mit gleichen Endpunkten ist homotop und läßt sich folglich zu einer Kurve in  $T_x M$  mit gleichen Endpunkten  $0$  und  $b v$  liften. Sei  $t \mapsto r(t) \bar{v}(t)$  die Polarzerlegung solch eines Lifts. Wir betrachten nun die Variation  $\varphi(s, t) := \exp_x(\rho \cdot t \cdot \bar{v}(s))$  durch radiale Geodäten mit  $\rho := r(b) = |b v|$ . Dann ist

$$\bar{c}(t) = \exp_x(r(t) \bar{v}(t)) = \varphi\left(t, \frac{r(t)}{\rho}\right)$$

Wie im Beweis des Gauß-Lemmas [13.10](#) ist

$$\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) = 0.$$

also ist  $g(\partial_2 \varphi, \partial_1 \varphi)(t, s) = g(\partial_2 \varphi, \partial_1 \varphi)(0, s) = g(\rho \bar{v}(s), 0) = 0$  und wie im Beweis von [13.11](#) (mit  $\gamma(r, t) := \exp_x(r \bar{v}(t))$  and hence  $\bar{c}(t) = \gamma(r(t), t)$ ) weiters

$$|\bar{c}'(t)|^2 \geq |r'(t)|^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\bar{v}$  konstant ist. Schlußendlich ist

$$L(\bar{c}) = \int_a^b |\bar{c}'(t)| dt \geq \int_a^b |r'(t)| dt \geq \int_a^b r'(t) dt = r(b) - r(a) = \rho = L(c)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\bar{v}$  konstant ( $= v$  wegen  $r(b) \bar{v} = b v$ ) und  $r'(t) \geq 0$  ist, also  $\bar{c}$  eine Reparametrisierung von  $c$  ist.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Die Cauchy-Schwartz Ungleichung liefert

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt \leq \left( \int_a^b 1^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \int_a^b |c'(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{b-a} \sqrt{2E(c)}$$

also ist  $L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c)$  und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Sei nun  $c_0$  von lokal minimaler Länge und o.B.d.A. nach Bogenlänge parametrisiert. Sei  $c_s$  eine Variation von  $c_0$  dann gilt:

$$E(c_0) = \frac{L(c_0)^2}{2(b-a)} \leq \frac{L(c_s)^2}{2(b-a)} \leq E(c_s),$$

Also ist  $c_0$  auch von lokal minimaler Energie.

(3)  $\Rightarrow$  (4) Aus  $E(c_s) \geq E(c_0)$  für alle  $s \geq 0$  und  $\frac{d}{ds}|_{s=0} E(c_s) = 0$  nach 15.15.2 folgt  $\left(\frac{d}{ds}\right)^2|_{s=0} E(c_s) \geq 0$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1) Angenommen  $c(a)$  und  $c(t_0)$  wären konjugierte Punkte auf  $c$ . Sei  $Y \neq 0$  eine Jacobi-Feld längs  $c$  mit  $Y(a) = 0 = Y(t_0)$  (und somit  $\nabla Y(t_0) \neq 0$ ), weiters  $V := \chi_{[a,t_0]} Y$  (ein stückweise glattes Vektorfeld) und  $W$  ein glattes Vektorfeld längs  $c$  mit  $W(t_0) = -\nabla Y(t_0)$  und  $W(a) = 0 = W(b)$ . Seien  $I_1$  und  $I_2$  die Indexformen von  $c|_{[a,t_0]}$  und  $c|_{[t_0,b]}$ . Dann ist für jedes Vektorfeld  $Z$  längs  $c$  mit  $Z(a) = 0 = Z(t_0)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^{t_0} g\left(\nabla^2 Y + R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z\right) = \int_a^{t_0} \left(g(\nabla^2 Y, Z) + g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z)\right) \\ &= \int_a^{t_0} \left(\frac{d}{dt}g(\nabla Y, Z) - g(\nabla Y, \nabla Z) + \underbrace{g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z)}_{R(Y, \dot{c}, \dot{c}, Z)}\right) \\ &\stackrel{14.5.1, 14.5.2}{=} g(\nabla Y, Z)\Big|_a^{t_0} - I_1(Y, Z). \end{aligned}$$

Für  $Z := W$  erhalten wir

$$I(V, W) = I_1(Y, W) + I_2(0, W) = I_1(Y, W) = -|\nabla Y(t_0)|_g^2 < 0.$$

und für  $Z := Y$  schließlich

$$\begin{aligned} I(V + \varepsilon W, V + \varepsilon W) &= I_1(Y, Y) + 2\varepsilon I(V, W) + \varepsilon^2 I(W, W) \\ &= 0 - 2\varepsilon |\nabla Y(t_0)|_g^2 + \varepsilon^2 I(W, W) < 0 \end{aligned}$$

für alle kleinen  $\varepsilon > 0$ . Wir können  $V + \varepsilon W$  durch ein glattes Vektorfeld  $X$  approximieren, welches ebenfalls an den Randpunkten verschwindet und  $I(X, X) < 0$  erfüllt, ein Widerspruch.  $\square$

### 15.17 Folgerung.

Sei  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte.

1. Falls  $K(c(t)) \leq 0$  für alle  $t$  gilt, so existieren keine konjugierte Punkte.
2. Falls  $K(c(t)) > K_0$  für eine Konstante  $K_0 > 0$  und alle  $t$  gilt, so liegen in jedem abgeschlossenen Intervall der Länge  $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$  konjugierte Punkte.

**Beweis.** (1) Sei  $\xi$  ein Jacobi-Feld längs  $c$  mit  $\xi(0) = 0 \neq \nabla \xi(0)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |\xi(t)|^2 &> 0 \text{ für alle kleinen } t > 0 \\ \text{und } \left(\frac{d}{dt}\right)^2 |\xi(t)|^2 &= 2\frac{d}{dt}g(\xi(t), \nabla \xi(t)) = 2g(\nabla \xi(t), \nabla \xi(t)) + 2g(\xi(t), \nabla^2 \xi(t)) \\ &= 2|\nabla \xi(t)|^2 - 2R(\xi(t), c'(t), c'(t), \xi(t)) \geq 0, \end{aligned}$$

also  $t \mapsto |\xi(t)|$  monoton wachsend und somit  $\xi(t) \neq 0$  für alle  $t \neq 0$ .

**2** Für  $K_0 > 0$  sei  $\nu$  ein paralleles Einheitsvektorfeld längs  $c$  mit  $\nu(t) \perp c'(t)$  für alle  $t$  und betrachte  $\xi(t) := \sin(t\sqrt{K_0})\nu(t)$ . Dann ist  $\xi(0) = 0 = \xi(\pi/\sqrt{K_0})$  und

$$\begin{aligned}\nabla^2 \xi(t) &= -K_0 \sin(t\sqrt{K_0})\nu(t) \Rightarrow \\ g(\xi(t), \nabla^2 \xi(t)) &= -K_0 \sin^2(t\sqrt{K_0}) \Rightarrow \\ R(\xi(t), c'(t), c'(t), \xi(t)) &= \sin^2(t\sqrt{K_0}) R(\nu(t), c'(t), c'(t), \nu(t)) > K_0 \sin^2(t\sqrt{K_0})\end{aligned}$$

nach Voraussetzung und somit

$$I(\xi, \xi) := \int_a^b -g(\xi(t), \nabla^2 \xi(t)) - R(\xi(t), c'(t), c'(t), \xi(t)) dt < 0,$$

also gibt es wegen ([15.16.1](#))  $\Rightarrow$  ([15.16.4](#)) konjugierte Punkte auf  $c$ . Beachte dazu, daß  $\frac{d}{dt}g(\xi, \nabla \xi) = g(\nabla \xi, \nabla \xi) + g(\xi, \nabla^2 \xi)$ .  $\square$

### 15.18 Bemerkung.

Die Krümmungsbedingung in [15.17.2](#) kann auch ersetzt werden durch:

$$\text{Ricci}(X, X) > K_0 (\dim(M) - 1) |X|^2 \text{ für eine Konstante } K_0 > 0 \text{ und alle } X.$$

**Beweis.** Es sei  $c : [0, L] \rightarrow M$  mit  $L := \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ . Weiters seien  $\nu_i$  parallele orthogonale Einheitsvektorfelder längs  $c$  mit  $\nu_i(t) \perp c'(t)$  für alle  $t$  und betrachte  $\xi_i(t) := \sin(t\sqrt{K_0})\nu_i(t)$ . Dann ist  $\xi_i(0) = 0 = \xi_i(\pi/\sqrt{K_0})$  und

$$\begin{aligned}\nabla^2 \xi_i(t) &= -K_0 \sin(t\sqrt{K_0})\nu_i(t) \Rightarrow \\ g(\xi_i(t), \nabla^2 \xi_i(t)) &= -K_0 \sin^2(t\sqrt{K_0}) \\ \text{Ricci}(c', c') &= 0 + \sum_{i=1}^{m-1} R(\nu_i, c', c', \nu_i) \\ \sum_{i=1}^{m-1} R(\xi_i(t), c'(t), c'(t), \xi_i(t)) &= \sum_{i=1}^{m-1} \sin^2(t\sqrt{K_0}) R(\nu_i(t), c'(t), c'(t), \nu_i(t)) \\ &= \sin^2(t\sqrt{K_0}) \text{Ricci}(c'(t), c'(t)) > K_0 \sin^2(t\sqrt{K_0})\end{aligned}$$

nach Voraussetzung und somit

$$\sum_{i=1}^{m-1} I(\xi_i, \xi_i) = - \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^L g(\xi_i(t), \nabla^2 \xi_i(t)) + R(\xi_i(t), c'(t), c'(t), \xi_i(t)) dt < 0,$$

also mindestens ein Summand  $I(\xi_i, \xi_i) < 0$  und damit gibt es wie zuvor wegen ([15.16.1](#))  $\Rightarrow$  ([15.16.4](#)) konjugierte Punkte auf  $c$ .  $\square$

### 15.19 Theorem. [8].

*Die Exponential-Abbildung jeder vollständigen zusammenhängenden Riemann-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$  ist für jedes  $x \in M$  eine Überlagerung  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ .*

*Ist also  $M$  zusätzlich einfachzusammenhängend, so ist  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus und zu je zwei Punkten gibt es genau eine minimale verbindende Geodäte.*

**Beweis.** Wegen [15.17.1](#) existieren für  $K \leq 0$  keine konjugierten Punkte und somit ist  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  überall ein lokaler Diffeomorphismus. Nach dem Satz [13.12](#) von Hopf-Rinow ist  $\exp_x$  surjektiv. Weiters ist  $\exp_x : (T_x M, \exp_x^* g) \rightarrow (M, g)$  eine lokale Isometrie vollständiger (denn die Geodäten durch 0 in  $T_x M$  sind  $\infty$

lang) zusammenhängender Riemann-Mannigfaltigkeiten und somit nach folgenden Lemma [15.20] eine Überlagerungsabbildung.

Ist  $M$  zusätzlich einfach zusammenhängend, so ist jede Überlagerungsabbildung ein Diffeomorphismus.  $\square$

### 15.20 Lemma.

*Es seien  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  und  $(M, g)$  zusammenhängende Riemann-Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und  $f : \tilde{M} \rightarrow M$  eine lokale Isometrie.*

*Falls  $\tilde{M}$  vollständig ist, so gilt dies auch für  $M$  und weiters ist  $f : \tilde{M} \rightarrow M$  eine Überlagerungsabbildung also insbesondere surjektiv.*

**Beweis. Beh.:** Geodäten können (eindeutig) geliftet werden.

Sei  $x \in f(\tilde{M})$  mit  $f(\tilde{x}) = x$  für ein  $\tilde{x} \in \tilde{M}$  und weiters  $c : I \rightarrow M$  eine Geodäte mit  $c(0) = x$ . Da  $\tilde{M}$  vollständig ist, existiert die Geodäte  $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  mit  $\tilde{c}'(0) = (T_x f)^{-1}(c'(0))$ . Da  $f$  eine lokale Isometrie ist, ist  $f \circ \tilde{c}$  eine Geodäte mit  $(f \circ \tilde{c})'(0) = c'(0)$ , also ist  $c = (f \circ \tilde{c})|_I$ . Im Beweis von (1  $\Rightarrow$  3) des Satzes [13.12] von Hopf-Rinow haben wir nur verwendet, daß die bei einem einzigen Punkt startenden Geodäten unendlich lange sind, somit ist  $M$  wegen (3  $\Rightarrow$  1) vollständig und  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  surjektiv nach [13.12.4], also auch  $\exp \circ T_{\tilde{x}} f = f \circ \exp_{\tilde{x}}$  und damit auch  $f$ .

Für jedes  $x \in M$  sei ein Ball  $B_r(0_x) \subseteq T_x M$  so gewählt, daß  $\exp_x : B_r(0_x) \rightarrow \exp_x(B_r(0_x)) =: U$  ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  ist.

**Beh.:**  $U$  ist trivialisierend für  $f$ .

Sei  $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$  und  $\tilde{U}$  die Menge der durch Geodäten in  $f^{-1}(U)$  mit  $\tilde{x}$  verbindbaren Punkte aus  $\tilde{M}$ . Diese Geodäten stehen vermöge  $f_*$  in bijektiver Beziehung zu den in  $U$  liegenden Geodäten die bei  $x$  starten und diese sind durch ihren Endpunkt eindeutig festgelegt, also ist  $f : \tilde{U} \rightarrow U$  bijektiv und somit ein Diffeomorphismus.

Sei  $\tilde{y} \in f^{-1}(U)$  beliebig. Dann existiert eine eindeutige Geodäte  $c$  in  $U$  welche  $x$  mit  $f(\tilde{y})$  verbindet. Also existiert eine eindeutige Geodäte  $\tilde{c}$  in  $f^{-1}(U)$  welche  $\tilde{y}$  mit einem Punkt  $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$  verbindet. Somit ist der zugehörige Punkt  $\tilde{x}$  eindeutig bestimmt und  $f^{-1}(U)$  die disjunkte Vereinigung der so konstruierten  $\tilde{U}$ , also  $f$  eine Überlagerungsabbildung.  $\square$

### 15.22 Theorem [37].

*Es sei  $M$  eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \geq K_0$  (oder auch  $\text{Ricci}(X, X) \geq K_0(m-1)|X|^2$  für alle  $X \in TM$ ) für eine Konstante  $K_0 > 0$ .*

*Dann ist der geodätischen Abstand je zweier Punkte höchstens  $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ . Insbesondere ist  $M$  kompakt und die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  endlich.*

**Beweis.** Nach [13.12.4] existiert zu je zwei Punkten eine Geodäte minimaler Länge. Falls diese Länge größer als  $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$  ist, so enthält sie nach [15.17.2] (bzw. [15.18]) konjugierte Punkte, und nach [15.16] ist diese Geodäte dann nicht die kürzeste Verbindung, ein Widerspruch. Damit sind ihre Endpunkte also höchstens  $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$  entfernt. Insbesondere ist der Durchmesser

$$d(M) := \sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{K_0}},$$

und somit ist  $M$  nach [13.12] kompakt.

Da ebenso die universelle Überlagerung kompakt ist und diese als Fasern die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  besitzt, ist diese Gruppe endlich.  $\square$



**15.23 Sphären-Satz.** [3], [21] und [5].

Sei  $M$  eine vollständige, einfach zusammenhängende  $m$ -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $1/4 < K \leq 1$ . Dann ist  $M$  diffeomorph zur Sphäre  $S^m$ .

**16. Die Begleitbeinmethode von Cartan****16.1 Definition. Zusammenhangsmatrix.**

Es sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale (PSEUDO-)RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT, d.h.  $g$  ist eine (nicht notwendig positiv) definite Metrik auf der Mannigfaltigkeit  $M$ . Ein LOKALES  $m$ -BEIN ( $m$ -FRAME) auf einer offenen Menge  $U \subseteq M$  ist ein  $m$ -Tupel von Vektorfeldern  $s_i$  auf  $U$  die punktweise (d.h. für jedes  $x \in U$ ) eine Basis von  $T_x M$  bilden. Es heißt  $s = (s_1, \dots, s_m)$  ORTHONORMAL-BEIN falls  $(s_i(x))_i$  eine orthonormal-Basis von  $T_x M$  für jedes  $x \in U$  ist, d.h.  $g(s_i, s_j) = \pm \delta_{i,j}$ .

Lokal existieren orthonormal-Beine, denn die symmetrische definite bilinear-Form  $g_x$  auf  $T_x M$  läßt sich in einer Basis  $(e_1, \dots, e_m)$  als

$$g_x \left( \sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j \right) = \sum_{i \leq p} v^i w^i - \sum_{i > p} v^i w^i$$

schreiben, siehe [31, 4.5]. Und indem wir die  $e_i$  zu lokal linear unabhängigen Vektorfeldern erweitern und auf diese Gram-Schmidt anwenden, erhalten wir einen orthonormal-Rahmen.

Falls  $s$  und  $s'$  zwei  $m$ -Beine auf  $U$  sind, so ist  $s'_i = \sum_{j=1}^m s_j \cdot h_i^j$  (kurz:  $s' = s \cdot h$ ) für ein eindeutig bestimmtes  $h = (h_i^j)_{i,j=1,\dots,m} \in C^\infty(U, GL(m))$ .

Sei  $s = (s_1, \dots, s_m)$  ein  $m$ -Bein auf  $U$  und  $\nabla$  die Levi-Civita-Ableitung. Dann existieren eindeutig bestimmte  $\omega_i^j \in \Omega^1(U)$  mit

$$\nabla_\xi s_i = \sum_j s_j \cdot \omega_i^j(\xi), \text{ kurz: } \nabla_\xi s = s \cdot \omega(\xi) \text{ bzw. } \nabla s = s \cdot \omega$$

wobei  $\omega = (\omega_i^j)_{i,j=1,\dots,m} \in \Omega^1(U, L(m, m))$  ZUSAMMENHANGSMATRIX VON  $\nabla$  bzgl.  $s$  heißt.

**16.2 Lemma. Kovariante Ableitung via Zusammenhangsmatrix.**

Es sei  $\eta = \sum_j s_j \cdot \eta^j$  ein Vektorfeld auf  $U$ . Dann ist

$$\nabla \eta = \sum_k s_k \cdot \left( \sum_j \omega_j^k \cdot \eta^j + d\eta^k \right) = s \cdot (\omega \cdot \eta + d\eta).$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &= \nabla_\xi \left( \sum_j s_j \cdot \eta^j \right) \stackrel{13.4.3}{=} \sum_j \left( \nabla_\xi s_j \cdot \eta^j + s_j \cdot \xi(\eta^j) \right) \\ &\stackrel{16.1}{=} \sum_j \left( \sum_k s_k \cdot \omega_j^k(\xi) \cdot \eta^j + s_j \cdot d\eta^j(\xi) \right) = \sum_k s_k \cdot \left( \sum_j \omega_j^k \cdot \eta^j + d\eta^k \right)(\xi) \quad \square \end{aligned}$$

**16.3 Lemma. Transformationsverhalten der Zusammenhangsform.**

Es seien  $s$  und  $s' = s \cdot h$  zwei  $m$ -Beine und  $\omega$  und  $\omega'$  die zugehörigen Zusammenhangsformen, dann gilt:

$$h \cdot \omega' = dh + \omega \cdot h.$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} s \cdot h \cdot \omega' &= s' \cdot \omega' = \nabla s' = \nabla(s \cdot h) \stackrel{13.4.3}{=} s \cdot dh + \nabla s \cdot h = s \cdot dh + s \cdot \omega \cdot h \\ &\Rightarrow h \cdot \omega' = dh + \omega \cdot h. \quad \square \end{aligned}$$

#### 16.4 Lemma. Symmetrieeigenschaft der Zusammenhangsform.

Es sei  $s$  ein orthonormal-Bein,  $\omega$  die zugehörige Zusammenhangsform und  $\varepsilon_i := g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$ , dann gilt:

$$\varepsilon_i \omega_k^i + \varepsilon_k \omega_i^k = 0.$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \delta_{i,j} = g(s_i, s_j) \Rightarrow 0 &= d(g(s_i, s_j)) \stackrel{13.4.5}{=} g(\nabla s_i, s_j) + g(s_i, \nabla s_j) \\ &= g\left(\sum_k s_k \cdot \omega_i^k, s_j\right) + g\left(s_i, \sum_k s_k \cdot \omega_j^k\right) \\ &= \sum_k \omega_i^k g(s_k, s_j) + \sum_k \omega_j^k g(s_i, s_k) = \varepsilon_j \omega_i^j + \varepsilon_i \omega_j^i. \quad \square \end{aligned}$$

#### 16.5 Lemma. Krümmung via Krümmungsmatrix.

Es sei  $s$  ein orthonormal-Bein und  $\omega$  die zugehörige Zusammenhangsform. Wir setzen  $R(\xi, \eta)s := (R(\xi, \eta)s_i)_{i=1, \dots, m}$ . Dann gilt:

$$R(\xi, \eta)s = s \cdot (d\omega + \omega \wedge \omega)(\xi, \eta),$$

wobei

$$\omega \wedge \omega := \left(\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k\right)_{i,j} \in \Omega^2(U, L(m, m)).$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta)s &= \nabla_\xi \nabla_\eta s - \nabla_\eta \nabla_\xi s - \nabla_{[\xi, \eta]} s \\ &= \nabla_\xi (s \cdot \omega(\eta)) - \nabla_\eta (s \cdot \omega(\xi)) - s \cdot \omega([\xi, \eta]) \\ &= s \cdot d(\omega(\eta))(\xi) + \nabla_\xi s \cdot \omega(\eta) - s \cdot d(\omega(\xi))(\eta) - \nabla_\eta s \cdot \omega(\xi) - s \cdot \omega([\xi, \eta]) \\ &= s \cdot \left(d(\omega(\eta))(\xi) - d(\omega(\xi))(\eta) - \omega([\xi, \eta])\right) + s \cdot \left(\omega(\xi) \cdot \omega(\eta) - \omega(\eta) \cdot \omega(\xi)\right) \\ &\stackrel{31, 25.9}{=} s \cdot (d\omega + \omega \wedge \omega)(\xi, \eta). \quad \square \end{aligned}$$

#### 16.6 Definition. Krümmungsmatrix.

Man bezeichnet mit  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(U, L(m, m))$  die KRÜMMUNGSMATRIX BZGL.  $s$ . Es gilt somit die 1. STRUKTURGLEICHUNG VON CARTAN

$$R(\xi, \eta)s_i = \sum_k s_k \cdot \Omega_i^k(\xi, \eta), \text{ kurz: } R(s) = s \cdot \Omega.$$

#### 16.7 Lemma. Transformationsverhalten der Krümmungsmatrix.

Es seien  $s$  und  $s' = s \cdot h$  zwei orthonormal-Beine und  $\Omega$  und  $\Omega'$  die zugehörigen Krümmungsmatrizen, dann gilt:

$$h \cdot \Omega' = \Omega \cdot h.$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} s \cdot h \cdot \Omega' &= s' \cdot \Omega' \stackrel{16.6}{=} R(s') = R(s \cdot h) \stackrel{14.3}{=} R(s) \cdot h \stackrel{16.6}{=} s \cdot \Omega \cdot h \\ &\Rightarrow h \cdot \Omega' = \Omega \cdot h. \quad \square \end{aligned}$$

### 16.8 Lemma. Symmetrieeigenschaft der Krümmungsmatrix.

Es sei  $s$  ein orthonormal-Bein und  $\varepsilon_i = g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$  dann gilt  $\varepsilon_i \Omega_j^i + \varepsilon_j \Omega_i^j = 0$ .

**Beweis.**

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \Omega_j^i &\stackrel{16.5}{=} \varepsilon_i d\omega_j^i + \sum_k \varepsilon_i \omega_k^i \wedge \omega_j^k \stackrel{16.4}{=} -\varepsilon_j d\omega_i^j - \sum_k \varepsilon_k \omega_i^k \wedge \omega_j^k \\ &= -\varepsilon_j d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \varepsilon_k \omega_j^k \stackrel{16.4}{=} -\varepsilon_j \left( d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_j^k \right) \\ &= -\varepsilon_j \left( d\omega_i^j + \sum_k \omega_k^j \wedge \omega_i^k \right) \stackrel{16.5}{=} -\varepsilon_j \Omega_i^j. \quad \square \end{aligned}$$

### 16.9 Definition. Ko-Bein.

Es sei  $s = (s_i)_{i=1, \dots, m}$  ein  $m$ -Bein. Das dazu duale  $m$ -KOBEGIN  $r = (r^j)_{j=1, \dots, m}$  in  $\Omega^1(U)$  ist gegeben durch  $r^j(x)(s_i(x)) := \delta_i^j$ .

### 16.10 Lemma. Ableitungsgleichung für das Ko-Bein.

Es sei  $s$  ein  $m$ -Bein,  $r$  das zugehörige  $m$ -Kobegin und  $\omega$  die Zusammenhangsmatrix. Dann gilt die 2. STRUKTURGLEICHUNG VON CARTAN:

$$dr^k + \sum_j \omega_j^k \wedge r^j = 0, \text{ kurz: } dr + w \wedge r = 0.$$

**Beweis.** Es sei  $\eta$  eine Vektorfeld auf  $U$ . Dann ist  $\eta = \sum_i s_i \cdot r^i(\eta)$ .

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &= \nabla_\xi \left( \sum_j s_j \cdot r^j(\eta) \right) \stackrel{13.4.3}{=} \sum_j \left( \nabla_\xi s_j \cdot r^j(\eta) + s_j \cdot \xi(r^j(\eta)) \right) \\ &= \sum_{j,k} s_k \cdot \omega_j^k(\xi) \cdot r^j(\eta) + \sum_k s_k \cdot \xi(r^k(\eta)). \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned}
& 0 \stackrel{\boxed{13.4.4}}{=} \nabla_{\xi} \eta - \nabla_{\eta} \xi - [\xi, \eta] \\
& \stackrel{\boxed{16.2}}{=} \sum_{j,k} s_k \cdot \underbrace{\left( \omega_j^k(\xi) \cdot r^j(\eta) - \omega_j^k(\eta) \cdot r^j(\xi) \right)}_{(\omega_j^k \wedge r^j)(\xi, \eta)} + \\
& \quad + \sum_k s_k \cdot \underbrace{\left( \xi(r^k(\eta)) - \eta(r^k(\xi)) - r^k([\xi, \eta]) \right)}_{dr^k(\xi, \eta)} \\
& = \sum_k s_k \cdot \left( \sum_j \omega_j^k \wedge r^j + dr^k \right)(\xi, \eta) \quad \square
\end{aligned}$$

### 16.11 Cartan's Lemma.

Es seien  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig in einem Vektorraum  $E$  und  $w_1, \dots, w_n \in E$ . Dann ist  $\sum_i v_i \wedge w_i = 0$  genau dann, wenn  $w_i = \sum_j a_{i,j} v_j$  mit einer symmetrischen Matrix  $(a_{i,j})_{i,j}$ .

**Beweis.** Wir ergänzen  $v_i$  zu einer Basis  $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m)$  und somit ist  $w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j + \sum_{k=n+1}^m b_{i,k} v_k$ , also

$$\sum_{i \leq n} v_i \wedge w_i = \sum_{i < j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i}) v_i \wedge v_j + \sum_{i \leq n < k} b_{i,k} v_i \wedge v_k.$$

Da  $(v_i \wedge v_j)_{i < j}$  eine Basis von  $\Lambda^2(E)$  ist, ist dies genau dann 0, wenn  $b_{i,k} = 0$  und  $a_{i,j} = a_{j,i}$ .  $\square$

### 16.12 Lemma.

Für orthonormale Rahmen ist die Zusammenhangsmatrix  $\omega$  durch die 2. Strukturgleichung  $\boxed{16.10}$  von Cartan eindeutig festgelegt.

**Beweis.** Es sei  $r$  der Korahmen eines orthonormal-Rahmens  $s$ . Aus

$$dr + \omega \wedge r = 0 = dr + \omega' \wedge r$$

folgt somit für  $\sigma := \omega' - \omega$ , daß  $\sigma \wedge r = 0$ , also  $\sigma_k^i = \sum_j a_{j,k}^i \cdot r^j$  nach  $\boxed{16.11}$  mit symmetrischen  $a^i$ . Wegen  $\varepsilon_j \omega_j^i = -\varepsilon_i \omega_j^i$  (mit  $\varepsilon_i := g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$ ) nach  $\boxed{16.4}$  und analog für  $\omega'$  gilt gleiches auch für  $\sigma$ . Wenn wir  $b_{j,k}^i := \varepsilon_i a_{j,k}^i$  setzen, so ist

$$0 = \varepsilon_j \sigma_i^j + \varepsilon_i \sigma_j^i = \sum_k (\varepsilon_j a_{k,i}^j + \varepsilon_i a_{k,j}^i) \cdot r^k = \sum_k (b_{k,i}^j + b_{k,j}^i) \cdot r^k,$$

also  $b_{k,i}^j = -b_{k,j}^i$  und  $b_{j,k}^i = \varepsilon_i a_{j,k}^i = \varepsilon_i a_{k,j}^i = b_{k,j}^i$  und somit

$$b_{j,k}^i = b_{k,j}^i = -b_{k,i}^j = -b_{i,k}^j = b_{i,j}^k = b_{j,i}^k = -b_{j,k}^i$$

also  $b_{j,k}^i = 0$ , d.h.  $\sigma = 0$ , also  $\omega' = \omega$ .  $\square$

### 16.13 Bemerkung. Krümmungen via Krümmungsmatrix.

Es sei  $(s_i)_i$  ein orthonormal-Bein und  $(r^i)_i$  das zugehörige Ko-Bein. Dann erhalten wir für die Riemann-Krümmungen  $R$ , die Ricci-Krümmung Ricci und die Skalar-Krümmung  $S$  nach Definition [14.13](#) folgende Darstellungen

$$\begin{aligned}
R_{i,j,k}^l &:= r^l \left( R(s_i, s_j) s_k \right) \stackrel{16.6}{=} r^l \left( \sum_p s_p \Omega_k^p(s_i, s_j) \right) = \Omega_k^l(s_i, s_j) \\
R_{i,j,k,l} &:= g \left( R(s_i, s_j) s_k, s_l \right) \stackrel{16.6}{=} g \left( \sum_p s_p \Omega_k^p(s_i, s_j), s_l \right) = \varepsilon_l \Omega_k^l(s_i, s_j) \\
R &= \sum_{i,j,k,l} \underbrace{r^l \left( R(s_i, s_j) s_k \right)}_{=: R_{i,j,k}^l} r^i \otimes r^j \otimes r^k \otimes s_l = \sum_{i,j,k,l} \Omega_k^l(s_i, s_j) r^i \otimes r^j \otimes r^k \otimes s_l \\
\text{Ricci} &= \sum_{i,j} \underbrace{\text{spur} \left( Z \mapsto R(Z, s_i)(s_j) \right)}_{\sum_k r^k \left( R(s_k, s_i) s_j \right) = \sum_k R_{k,i,j}^k} r^i \otimes r^j = \sum_{i,j} \underbrace{\sum_k \Omega_j^k(s_k, s_i)}_{=: \text{Ricci}_{i,j}} r^i \otimes r^j \\
S &= \sum_i \text{Ricci}_{i,i} = \sum_{i,k} \Omega_i^k(s_k, s_i)
\end{aligned}$$

### 16.14 Proposition.

Es sei  $(s_i)$  eine orthonormal-Bein. Dann ist (vgl. dies mit [14.15](#))

$$\text{Ricci}_{i,i} = \text{Ricci}(s_i, s_i) = g(s_i, s_i) \cdot \sum_{j \neq i} K(\langle \{s_i, s_j\} \rangle)$$

Für  $\dim(M) = 3$  läßt sich damit auch umgekehrt aus der Ricci-Krümmung die Schnitt-Krümmung bestimmen, denn das Gleichungssystem:

$$\sum_{j \neq i} K(\langle \{s_i, s_j\} \rangle) = \varepsilon_i \text{Ricci}_{i,i} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}$$

hat eine eindeutig bestimmte Lösung  $(K(\langle \{s_1, s_2\} \rangle), K(\langle \{s_2, s_3\} \rangle), K(\langle \{s_3, s_1\} \rangle))$ .

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
\text{Ricci}(s_i, s_i) &= \text{spur} \left( Z \mapsto R(Z, s_i) s_i \right) = \sum_j r^j \left( R(s_j, s_i) s_i \right) \\
&\stackrel{16.13}{=} \sum_j g(s_j, s_j) \cdot g \left( R(s_j, s_i) s_i, s_j \right) \\
&\stackrel{14.7}{=} 0 + \sum_{j \neq i} \underbrace{g(s_j, s_j)}_{= \varepsilon_i \in \{\pm 1\}} \cdot K(\langle \{s_j, s_i\} \rangle) \cdot \underbrace{\left( g(s_i, s_i) g(s_j, s_j) - g(s_j, s_i)^2 \right)}_{=0} \\
&= g(s_i, s_i) \cdot \sum_{j \neq i} K(\langle \{s_i, s_j\} \rangle). \quad \square
\end{aligned}$$

### 16.15 Beispiele.

#### 1. Die 2-Sphäre $S^2$ .

Sei  $f : (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow S^2$  die Parametrisierung nach Kugelkoordinaten,

d.h.  $f(\varphi, \vartheta) := (\cos(\vartheta) \cos(\varphi), \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \sin(\vartheta))$ . Es ist

$$\begin{aligned} df^1 &= -\cos(\vartheta) \sin(\varphi) d\varphi - \sin(\vartheta) \cos(\varphi) d\vartheta \\ df^2 &= \cos(\vartheta) \cos(\varphi) d\varphi - \sin(\vartheta) \sin(\varphi) d\vartheta \\ df^3 &= \cos(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

und folglich ist die Metrik in den Koordinaten  $(\varphi, \vartheta)$  gegeben durch

$$f^* \left( \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i \right) = \sum_i df^i \otimes df^i = \cos(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi + d\vartheta \otimes d\vartheta$$

Somit ist  $s_1 := \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ ,  $s_2 := \frac{1}{\cos(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$  ein orthonormal-Bein mit  $\varepsilon_1 = 1 = \varepsilon_2$  und zugehörigem orthonormalen Ko-Bein  $r^1 := d\vartheta$ ,  $r^2 := \cos(\vartheta) d\varphi$ . Für dieses ist  $dr^1 = 0$  und  $dr^2 = -\sin(\vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi = -\tan(\vartheta) r^1 \wedge r^2$ .

Die Zusammenhangsmatrix  $\omega$  erhalten wir wegen [16.12](#) aus der 2. Strukturgleichung [16.10](#) von Cartan: Wegen [16.4](#) ist  $\omega_1^1 = 0 = \omega_2^2$  und  $\omega_1^2 = -\omega_2^1$ , also

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{16.10}}{=} dr^1 + \omega_1^1 \wedge r^1 + \omega_2^1 \wedge r^2 = 0 + 0 + \omega_2^1 \wedge r^2 \\ &\Rightarrow \omega_2^1 = 0 r^1 + b(\varphi, \vartheta) r^2 \\ 0 &\stackrel{\text{16.10}}{=} dr^2 + \omega_1^2 \wedge r^1 + \omega_2^2 \wedge r^2 = -\tan(\vartheta) r^1 \wedge r^2 - b(\varphi, \vartheta) r^2 \wedge r^1 + 0 \\ &\Rightarrow b(\varphi, \vartheta) = \tan(\vartheta) \\ \Rightarrow -\omega_1^2 &= \omega_2^1 = \tan(\vartheta) r^2 = \sin(\vartheta) d\varphi \end{aligned}$$

Für die Krümmungsmatrix  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega$  erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \Omega_1^1 &= \Omega_2^2 = 0 \quad \text{wegen } \text{16.8} \\ -\Omega_1^2 &= \Omega_2^1 = d\omega_2^1 + \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 + \omega_2^1 \wedge \omega_2^2 = d(\sin(\vartheta) d\varphi) + 0 + 0 \\ &= \cos(\vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi = r^1 \wedge r^2. \end{aligned}$$

Aus der 1. Strukturgleichung [16.6](#) von Cartan ergibt sich (siehe [16.13](#)) die Schnittkrümmung (=Gaußkrümmung) als

$$K(T_p S^2) = g(R(s_1, s_2)s_2, s_1) = R_{1,2,2,1} \stackrel{\text{16.13}}{=} \varepsilon_1 \Omega_2^1(s_1, s_2) = 1.$$

## 2. Die Poincaré'sche Halbebene.

Die Metrik der Halbebene  $H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  ist gegeben durch  $g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ . Ein orthonormales Bein ist  $s_1 := y \frac{\partial}{\partial y}$  und  $s_2 := y \frac{\partial}{\partial x}$  mit Ko-Bein  $r^1 = \frac{1}{y} dy$  und  $r^2 = \frac{1}{y} dx$ . Wegen  $dr^1 = 0$ ,  $dr^2 = -\frac{1}{y^2} dy \wedge dx = -r^1 \wedge r^2$  liefert die 2. Strukturgleichung [16.10](#) von Cartan

$$\omega_1^1 = 0 = \omega_2^2, \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2 = \frac{1}{y} dx = r^2$$

und folglich

$$\Omega_1^1 = 0 = \Omega_2^2, \quad \Omega_2^1 = -\Omega_1^2 = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy = -r^1 \wedge r^2$$

Die Schnittkrümmung (=Gaußkrümmung) ist somit

$$K(T_p H_+) = \varepsilon_1 \Omega_2^1(s_1, s_2) = -1.$$

### 3. Die 3-Sphäre $S^3$ .

Verallgemeinerte Kugelkoordinaten sind

$$f(\varphi, \vartheta, \tau) := (\cos \tau \cos \vartheta \cos \varphi, \cos \tau \cos \vartheta \sin \varphi, \cos \tau \sin \vartheta, \sin \tau).$$

Die Metrik  $g := f^*(\sum_{i=1}^4 dx^i \otimes dx^i) = \sum_{i=1}^4 df^i \otimes df^i$  ist

$$g = \cos(\tau)^2 \cos(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi + \cos(\tau)^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + d\tau \otimes d\tau$$

Ein orthonormaler Korahmen ist

$$r^1 := d\tau, \quad r^2 := \cos(\tau) d\vartheta, \quad r^3 := \cos(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi$$

Für die Zusammenhangsmatrix erhalten wir (wegen  $dr + \omega \wedge r = 0$ )

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} 0 & \sin(\tau) d\vartheta & \sin(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi \\ -\sin(\tau) d\vartheta & 0 & \sin(\vartheta) d\varphi \\ -\sin(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi & -\sin(\vartheta) d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \tan(\tau) r^2 & \tan(\tau) r^3 \\ -\tan(\tau) r^2 & 0 & \frac{\tan(\vartheta)}{\cos(\tau)} r^3 \\ -\tan(\tau) r^3 & -\frac{\tan(\vartheta)}{\cos(\tau)} r^3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und für die Krümmungsmatrix  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega$

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\cos \tau d\vartheta \wedge d\tau & -\cos \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\tau \\ \cos \tau d\vartheta \wedge d\tau & 0 & -\cos^2 \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta \\ \cos \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\tau & \cos^2 \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & r^1 \wedge r^2 & r^1 \wedge r^3 \\ r^2 \wedge r^1 & 0 & r^2 \wedge r^3 \\ r^3 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} R_{i,j,k}^l &\stackrel{\text{16.14}}{=} \Omega_k^l(s_i, s_j) = (r^l \wedge r^k)(s_i, s_j) \\ &= \delta_i^l \delta_j^k - \delta_i^k \delta_j^l = g(g(s_j, s_k) s_i - g(s_i, s_k) s_j, s_l) \end{aligned}$$

und somit wegen [14.14](#) die Schnittkrümmung  $K$  konstant 1 und wegen [14.15](#) weiters  $\text{Ricci}(X, Y) = K \cdot (m-1) \cdot g(X, Y) = 2g(X, Y)$  und schließlich die Skalarkrümmung  $S = K \cdot (m-1) \cdot m = 6$ .

### 4. Der hyperbolische Raum.

Der HYPERBOLISCHE RAUM ist  $H^+ := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^1 > 0\}$  mit der Metrik

$$g = \frac{1}{(x^1)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3)$$

Ein orthonormaler Korahmen ist

$$r^1 := \frac{1}{x^1} dx^3, \quad r^2 := \frac{1}{x^1} dx^2, \quad r^3 := \frac{1}{x^1} dx^1$$

Für die Zusammenhangsmatrix erhalten wir (wegen  $dr + \omega \wedge r = 0$ )

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{x^1} dx^3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x^1} dx^2 \\ \frac{1}{x^1} dx^3 & \frac{1}{x^1} dx^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r^1 \\ 0 & 0 & -r^2 \\ r^1 & r^2 & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Krümmungsmatrix  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega$

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(x^1)^2} dx^2 \wedge dx^3 & \frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^3 \\ -\frac{1}{(x^1)^2} dx^2 \wedge dx^3 & 0 & \frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^2 \\ -\frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^3 & -\frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -r^1 \wedge r^2 & -r^1 \wedge r^3 \\ -r^2 \wedge r^1 & 0 & -r^2 \wedge r^3 \\ -r^3 \wedge r^1 & -r^3 \wedge r^2 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wie zuvor ergibt sich nun daraus, daß die Schnittkrümmung konstant  $-1$  ist, die Ricci-Krümmung  $\text{Ricci} = -2g$  und die Skalarkrümmung  $S = -6$  ist.

### 5. Raumformen.

RAUMFORMEN sind vollständige Riemann-Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung. Eine gemeinsame Form der Metrik ist

$$g = \frac{1}{1 - \kappa\rho^2} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 \cdot (d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2(\vartheta) d\varphi \otimes d\varphi)$$

wobei  $\rho > 0$ ,  $\kappa\rho^2 < 1$ ,  $|\vartheta| < \pi/2$  und  $|\varphi| < \pi$  ist. Für den Korahmen

$$r^1 := \rho d\vartheta, \quad r^2 := \sin(\vartheta)\rho d\varphi, \quad r^3 := \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho$$

ist die Zusammenhangsmatrix (wegen  $dr + \omega \wedge r = 0$ )

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\cos(\vartheta) d\varphi & \sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\vartheta \\ \cos(\vartheta) d\varphi & 0 & \sin(\vartheta)\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\varphi \\ -\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\vartheta & -\sin(\vartheta)\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\cot(\vartheta)}{\rho} r^2 & \frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^1 \\ \frac{\cot(\vartheta)}{\rho} r^2 & 0 & \frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^2 \\ -\frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^1 & -\frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Weiters ist die Krümmungsmatrix  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega$

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa \sin(\vartheta)\rho^2 d\vartheta \wedge d\varphi & -\frac{\kappa\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta \\ -\kappa \sin(\vartheta)\rho^2 d\vartheta \wedge d\varphi & 0 & -\frac{\kappa \sin(\vartheta)\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho \wedge d\varphi \\ \frac{\kappa\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta & \frac{\kappa \sin(\vartheta)\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho \wedge d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \kappa \cdot \begin{pmatrix} 0 & r^1 \wedge r^2 & r^1 \wedge r^3 \\ r^2 \wedge r^1 & 0 & r^2 \wedge r^3 \\ r^3 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wie zuvor ist somit die Schnittkrümmung (konstant)  $\kappa$ , die Ricci-Krümmung  $\text{Ricci} = 2\kappa g$  und die Skalarkrümmung  $S = 6\kappa$ .

Ähnlich zu [11.13](#) zeigt man, daß jede einfach-zusammenhängende vollständige  $m$ -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $K$  isometrisch isomorph zu  $\mathbb{R}^m$  mit der flachen Metrik im Fall  $K = 0$ , zu  $S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  im Fall  $K = 1$  und zum hyperbolischen Raum  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{m-1}$  im Fall  $K = -1$  ist.

### 6. Die Schwarzschild-Metrik.

Die allgemeine Relativitätstheorie wird durch eine LORENTZ-MANNIGFALTIGKEIT (d.h. eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit LORENTZ-METRIK,



i.e. mit Signatur  $(-, +, +, +)$  (oder äquivalent  $(+, -, -, -)$ ) beschrieben für welche die EINSTEIN'SCHE FELDGLEICHUNG

$$\text{Ricci} - \frac{1}{2} S g = T$$

gilt, wobei  $g$  eine LORENTZ-METRIK,  $S$  die Skalarkrümmung und  $T$  der ENERGIE-IMPULS-TENSOR ist, welcher durch die Masseverteilung beschrieben wird. Für eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit vorgegebenen Energie-Impuls-Tensor ist dies eine partielle Differentialgleichung für die Metrik. Im Spezialfall  $T = 0$  spricht man von der VAKUUM-GLEICHUNG. Selbst für die Vakuumgleichung sind nur wenige explizite lokale Lösungen bekannt. Eine ist die SCHWARZSCHILD-METRIK, die sich im Rotations-symmetrischen Zeit-unabhängigen Fall ergibt:

$$g = -h(\rho) dt \otimes dt + \frac{1}{h(\rho)} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + \rho^2 \sin(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

mit  $h(\rho) := 1 - \frac{2M}{\rho}$  für  $\rho > 2M$ . Dabei nennt man  $\rho := 2M$  den SCHWARZSCHILD-RADIUS. Diese Metrik kann im Äußeren von langsam rotierenden isolierten Sternen oder bei schwarzen Löchern verwendet werden. Ein orthonormalen Korahmen für diese Metrik ist somit

$$r^1 := \rho d\vartheta, \quad r^2 := \rho \sin(\vartheta) d\varphi, \quad r^3 := \frac{1}{\sqrt{h(\rho)}} d\rho, \quad r^4 := \sqrt{h(\rho)} dt$$

Für die Zusammenhangsmatrix ergibt sich (wegen  $dr + \omega \wedge r = 0$ ):

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\vartheta) d\varphi & \sqrt{h} d\vartheta & 0 \\ -\cos(\vartheta) d\varphi & 0 & -\sqrt{h} \sin(\vartheta) d\varphi & 0 \\ \sqrt{h} d\vartheta & \sqrt{h} \sin(\vartheta) d\varphi & 0 & \frac{M}{\rho^2} dt \\ 0 & 0 & -\frac{M}{\rho^2} dt & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Krümmungsmatrix  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega$

$$\begin{aligned} \Omega &= M \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2 \sin \vartheta}{\rho} d\vartheta \wedge d\varphi & -\frac{1}{\sqrt{h\rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta & -\frac{\sqrt{h}}{\rho^2} dt \wedge d\vartheta \\ \frac{2 \sin \vartheta}{\rho} d\vartheta \wedge d\varphi & 0 & -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{h\rho^2}} d\rho \wedge d\varphi & -\frac{\sqrt{h} \sin \vartheta}{\rho^2} dt \wedge d\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{h\rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{h\rho^2}} d\rho \wedge d\varphi & 0 & \frac{2}{\rho^3} dt \wedge d\rho \\ \frac{\sqrt{h}}{\rho^2} dt \wedge d\vartheta & \frac{\sqrt{h} \sin \vartheta}{\rho^2} dt \wedge d\varphi & -\frac{2}{\rho^3} dt \wedge d\rho & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{M}{\rho^3} \begin{pmatrix} 0 & -2 r^1 \wedge r^2 & r^1 \wedge r^3 & r^1 \wedge r^4 \\ -2 r^2 \wedge r^1 & 0 & r^2 \wedge r^3 & r^2 \wedge r^4 \\ r^3 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^2 & 0 & -2 r^3 \wedge r^4 \\ r^4 \wedge r^1 & r^4 \wedge r^2 & -2 r^4 \wedge r^3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Riemann-Metrik im assoziierten orthonormal-Bein  $(s_k)_k$  sind  $R_{k,l,j}^i = \Omega_j^i(s_k, s_l)$  nach [16.13](#). Aus der Gestalt von  $\Omega$  folgt  $R_{k,l,j}^k = 0$  für  $j \neq l$ , also  $\text{Ricci}_{l,j} = \sum_k R_{k,l,j}^k = 0$ . Ein Blick auf die Spalten von  $\Omega$  liefert auch  $\text{Ricci}_{j,j} = \sum_k R_{k,j,j}^k = \frac{M}{\rho^3}(-2 + 1 + 1) = 0$ , also ist die Schwarzschild-Metrik Ricci-flach nach [16.13](#), d.h.  $\text{Ricci} = 0$ .

### 7. Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik(en).

Die FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER-METRIK beschreibt ein isotropes (d.h. ohne ausgezeichneten Richtungen) homogenes Universum und ist gegeben durch

$$g = dt \otimes dt - h(t)^2 \left( \frac{1}{1 - \kappa \rho^2} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 \cdot (d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2(\vartheta) d\varphi \otimes d\varphi) \right)$$

mit orthonormalen Ko-Bein

$$r^1 := dt, \quad r^2 := h(t)\rho d\vartheta, \quad r^3 := h(t)\rho \sin(\vartheta) d\varphi, \quad r^4 := \frac{h(t)}{\sqrt{1-\kappa\rho^2}} d\rho$$

mit Zusammenhangsmatrix (wegen  $dr + \omega \wedge r = 0$ )

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} 0 & -h'\rho d\vartheta & -h'\rho \sin \vartheta d\varphi & -\frac{h'}{\sqrt{1-\kappa\rho^2}} d\rho \\ h'\rho d\vartheta & 0 & -\cos \vartheta d\varphi & \sqrt{1-\kappa\rho^2} d\vartheta \\ h'\rho \sin \vartheta d\varphi & \cos \vartheta d\varphi & 0 & \sin \vartheta \sqrt{1-\kappa\rho^2} d\varphi \\ \frac{h'}{\sqrt{1-\kappa\rho^2}} d\rho & -\sqrt{1-\kappa\rho^2} d\vartheta & -\sin \vartheta \sqrt{1-\kappa\rho^2} d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h'(t)}{h(t)} r^2 & -\frac{h'(t)}{h(t)} r^3 & -\frac{h'(t)}{h(t)} r^4 \\ \frac{h'(t)}{h(t)} r^2 & 0 & -\frac{\cot(\vartheta)}{h(t)\rho} r^3 & \frac{\sqrt{1-\kappa\rho^2}}{h(t)\rho} r^2 \\ \frac{h'(t)}{h(t)} r^3 & \frac{\cot(\vartheta)}{h(t)\rho} r^3 & 0 & \frac{\sqrt{1-\kappa\rho^2}}{h(t)\rho} r^3 \\ \frac{h'(t)}{h(t)} r^4 & -\frac{\sqrt{1-\kappa\rho^2}}{h(t)\rho} r^2 & -\frac{\sqrt{1-\kappa\rho^2}}{h(t)\rho} r^3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und Krümmungsmatrix  $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^2 & -\frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^3 & -\frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^4 \\ -\frac{h''(t)}{h(t)} r^2 \wedge r^1 & 0 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^2 \wedge r^3 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^2 \wedge r^4 \\ -\frac{h''(t)}{h(t)} r^3 \wedge r^1 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^3 \wedge r^2 & 0 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^3 \wedge r^4 \\ -\frac{h''(t)}{h(t)} r^4 \wedge r^1 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^4 \wedge r^2 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^4 \wedge r^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie zuvor ist somit  $R_{m,l,j}^m = 0$  für  $l \neq j$  und somit auch  $\text{Ricci}_{l,j} = 0$ . Die nicht-verschwindenden Koeffizienten des Riemann'schen Krümmungstensors sind (bis auf Symmetrien)

$$\begin{aligned} R_{1,2,2}^1 &= R_{1,3,3}^1 = R_{1,4,4}^1 = -\frac{h''(t)}{h(t)}, \\ R_{2,3,3}^2 &= R_{2,4,4}^2 = R_{3,4,4}^3 = \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2}, \end{aligned}$$

die Ricci-Krümmung ist

$$\text{Ricci} = \begin{pmatrix} -\frac{3h''}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} \end{pmatrix}$$

und die Skalarkrümmung

$$S = \frac{6(\kappa - h'(t)^2)}{h(t)^2} - \frac{6h''(t)}{h(t)}$$

## Literaturverzeichnis

- [1] A.F. Beardon. *A primer on Riemann Surfaces*. Cambridge Univ.Press, London, 1984.
- [2] Pierre Bérard. Transplantation et isospectralité. I. *Math. Ann.*, 292(3):547–560, 1992.
- [3] M. Berger. Les variétés Riemanniennes (1/4)-pincées. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 14:161–170, 1960.
- [4] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer, New York, 1988.
- [5] Simon Brendl and Richard Schoen. Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms. *Journal of the American Mathematical Society*, 22:287–307, 2009.
- [6] Peter Buser. Isospectral Riemann surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 36(2):167–192, 1986.
- [7] Peter Buser, John Conway, Peter Doyle, and Klaus-Dieter Semmler. Some planar isospectral domains. *Internat. Math. Res. Notices*, (9):391ff., approx. 9 pp. (electronic), 1994.
- [8] E. Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris: Gauthier-Villars (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de G. Julia, 2). VI, 273 p. , 1928.
- [9] S.S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. AMS.*, 6:771–782, 1955.
- [10] St. Cohn-Vossen. Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, 1927:125–134, 1927.
- [11] N. V. Efimov. The impossibility in Euclidean 3-space of a complete regular surface with a negative upper bound of the Gaussian curvature. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 150:1206–1209, 1963.
- [12] Gauß. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Regiae Sci. Gottingensis Rec.*, 6, 1828.
- [13] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110:1–22, 1992.
- [14] C. Gordon and E. Wilson. Isospektral deformations of compact solvmanifolds. *J. Diff. Geom.*, 19:241–256, 1984.
- [15] J. Hadamard. Les surfaces á corbures opposées. *J.Math.Pures Appl.*, 4:27–73, 1889.
- [16] Philip Hartman and Louis Nirenberg. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. *Amer. J. Math.*, 81:901–920, 1959.
- [17] G. Herglotz. Über die Starrheit der Eiflächen. *Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg*, 15:127–129, 1943.
- [18] D. Hilbert. Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung. *Trans.AMS.*, 2:87–99, 1901.
- [19] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer.Math.Monthly*, 73:1–23, 1966.
- [20] W. Klingenberg. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Springer, Heidelberg, 1973.
- [21] Wilhelm Klingenberg. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. *Comment. Math. Helv.*, 35:47–54, 1961.
- [22] S. Kobayashi. *Transformation groups in Differential Geometry*. Springer, Ergebnisse der Math. 70, Berlin, 1972.
- [23] A. Kriegl. *Topologie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 1999.
- [24] A. Kriegl. *Analysis 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004.
- [25] A. Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004.
- [26] A. Kriegl. *Analysis 3*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004/05.
- [27] A. Kriegl. *Funktional Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2006.
- [28] A. Kriegl. *Differentialgeometrie*. Univ. Wien, 2007.
- [29] A. Kriegl. *Komplexe Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2011.
- [30] A. Kriegl. *Algebraic Topology*. Lecture Notes, Univ. Vienna, 2014.
- [31] A. Kriegl. *Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. Univ. Wien, SS 2015.
- [32] A. Kriegl. *Proseminar Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. Univ. Wien, SS 2018.
- [33] H. Liebmann. Eine neue Eigenschaft der Kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys.*, 1899:44–55, 1899.

- 
- [34] William S. Massey. Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space. *Tôhoku Math. J. (2)*, 14:73–79, 1962.
- [35] Meusnier. Mémoire sur la curbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers*, 10:477–510, 1776.
- [36] J. Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain mf's. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51:542, 1964.
- [37] Sumner Byron Myers. Connections between differential geometry and topology. I. Simply connected surfaces. *Duke Math. J.*, 1(3):376–391, 1935.
- [38] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–64, 1956.
- [39] E. Peschl. *Funktionentheorie*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1967.
- [40] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry 1-4*. Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [41] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. Math. (2)*, 121:169–186, 1985.
- [42] M.F. Vignéras. Variétés Riemanniennes isospektrales et non isométriques. *Ann. Math*, 112:21–32, 1980.
- [43] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Illinois, 1971.

# Index

- $\nabla$ , 91
- $m$ -Frame, 133
- $m$ -Kobain, 135
- (Pseudo-)Riemann-Mannigfaltigkeit, 133
- te Krümmung, 45
- Äquator, 70
- äquivalente Kurven, 37
- äquivalente orientierte Kurven, 37
- äußeren Hemi-Torus, 60
- 1-Parameter-Familie, 69
- 1. Strukturgleichung von Cartan, 134
- 1.te Fundamentalform, 51
- 2. Strukturgleichung von Cartan, 135
- 2.te Fundamentalform, 51
- Pseudosphäre, 62
- Ableitungsgleichungen für Flächen, 71
- antiholomorphe Funktion, 5
- Asymptotenlinie, 52
- Asymptotenrichtung, 52
- Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche, 7
- Begleitbein einer ebenen Kurve, 38
- Begleitbein einer Kurve, 44
- Begleitbein einer Raumkurve, 44
- Bianchi Identität, 112
- Bild einer geometrischen Kurve, 37
- Binormalenvektor einer Raumkurve, 44
- Breitenkreis, 58
- Christoffel-Symbole der 1.ten Art, 97
- Christoffel-Symbole der 2.ten Art, 97
- Christoffelsymbole der 2.ten Art, 71
- Diffeomorphismus, 37
- Drehfläche, 58
- Drehflächen konstanter Gauß-Krümmung, 61
- Einheitsnormalvektor an eine Kurve, 38
- Einheitstangentenvektor an eine Kurve, 38
- Einstein'sche Feldgleichung, 141
- Einstein-Mannigfaltigkeit, 120
- Energie-Impuls-Tensor, 141
- eodätische Parallelkoordinaten, 76
- eodätische Polarkoordinaten, 75
- Erzeugende einer Regelfläche, 89
- Evolute, 39
- Exponentialabbildung, 73
- Fläche vom Kehltyp, 63
- Flachpunkt, 52
- Frenet'sche Ableitungsgleichungen, 45
- Friedmann-Robertson-Walker-Metrik, 141
- Gauß-Abbildung, 49
- Gauß-Bonnet für Polygone, 84
- Gauß-Gleichung, 91, 107
- Gauß-Krümmung einer Hyperfläche, 51
- Geodäte, 69
- geodätisch vollständig, 86
- geodätische Kreise, 75
- geometrische Kurve, 37
- geometrisches Konzept, 38
- Godazzi-Mainardi-Gleichung, 107
- Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren, 44
- Green-Operator, 18
- Greensche Satz, 13
- harmonische Form, 16
- Hauptkrümmungsrichtungen, 51
- Hauptkrümmungen, 51
- Hauptnormalenvektor einer Raumkurve, 44
- Hodge-Sternoperator, 13
- Holonomie-Gruppe, 90
- hyperbolische Raum, 139
- hyperbolische Scheibe, 8
- Hyperfläche, 49
- Indexform, 129
- inimale Drehfläche, 67
- intrinsische Größen, 55
- Isometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten, 2
- isospektrale Riemann-Mannigfaltigkeiten, 21
- isothermale Koordinaten, 6
- Jacobi-Feld, 123
- Jacobi-Felder auf Riemann-Mannigfaltigkeiten, 127
- Jacobi-Gleichung, 57, 123
- Jacobi-Gleichung für Riemann-Mannigfaltigkeiten, 127
- Kodifferentialoperator, 14
- komplexe Mannigfaltigkeit, 7
- konform, 4
- konforme Abbildung, 3
- konjugierte Punkte, 123
- konjugierte Punkte von Geodäten auf Riemann-Mannigfaltigkeiten, 127
- konjugierte Vektoren, 52
- kovariante Ableitung, 91, 92
- Krümmung einer Kurve, 39

---

Krümmung einer Raumkurve, 44, 46  
 Krümmung eines Kreises, 38  
 Krümmungskreis einer Kurve, 39  
 Krümmungslinie, 51  
 Krümmungsmatrix bzgl.  $s$ , 134  
 Kulkarni-Nomizu Produkt, 120

Länge einer glatten Kurve, 1  
 Laplace-Beltrami-Operator, 14  
 Levi-Civita-Zusammenhang, 92  
 lokale Version von Gauß-Bonnet, 81  
 lokales  $m$ -Bein, 133  
 Lorentz-Mannigfaltigkeit, 140  
 Lorentz-Metrik, 140, 141

Möbiustransformation, 7  
 Meridian, 58  
 Minimalfläche, 67  
 mittlere Krümmung einer Hyperfläche, 51

Nabelpunkt, 52  
 Normalebene an eine Raumkurve, 46  
 Normalkrümmung einer Hyperfläche, 49

orientierte geometrische Kurve, 37  
 orientierte Mannigfaltigkeit, 7  
 orthonormal-Bein, 133

paralleles Vektorfeld, 88  
 Paralleltransport, 89  
 parametrisierte Kurve, 37  
 Parametrisierung einer Kurve, 37  
 Parametrisierung nach der Bogenlänge, 1  
 Poincaré'sche Halbebene, 63  
 Poincaré-Dualität, 19  
 Pol-Kreise, 60

Queldichte eines Vektorfelds, 13

radiale Geodäte, 75  
 Raumformen, 140  
 Regelfläche, 89  
 rektifizierende Ebene an eine Raumkurve, 46  
 Ricci-flach, 120  
 Ricci-Krümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 119  
 Riemann'sche Zahlenkugel, 7  
 Riemann'sche Zahlensphäre, 7  
 Riemann'schen Normalkoordinaten, 118  
 Riemann'scher Abbildungssatz, 8  
 Riemann-Fläche, 6  
 Riemann-Krümmung, 107  
 Riemann-Mannigfaltigkeit, 1  
 Riemann-Metrik, 1

Satz von Hahn-Banach, 17  
 Satz von Hopf-Rinow, 102  
 Satz von Korn-Lichtenstein, 6  
 Satz von Nash, 2  
 Satz von Nomitsu-Ozeki, 104  
 Satz von Rodriguez, 51  
 Schmiegeebene an eine Raumkurve, 46  
 Schnittkrümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 117  
 schwache Lösung, 16

Schwarzschild-Metrik, 141  
 Schwarzschild-Radius, 141  
 Skalarkrümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 120  
 Spindelfläche, 62  
 strikt diskontinuierliche Gruppen-Wirkung, 10  
 subharmonische Funktion, 15

Tangente an eine parametrisierte Kurve, 37  
 Theorem von Bonnet, 125  
 Theorema Egregium, 57  
 Theorema elegantissimum von Gauß, 80  
 Torse, 89  
 Torsion einer Raumkurve, 46

tubuläre Umgebung, 99  
 Umlaufsatz von Hopf, 83  
 Umlaufzahl einer Kurve, 83  
 Uniformisierungssatz, 10

Vakuum-Gleichung, 141  
 Volumensform, 11

Weingarten-Abbildung, 50  
 Weyl Krümmungstensor, 120  
 winkelerhaltende Abbildung, 3  
 Wulstfläche, 62

Zusammenhangsmatrix von  $\nabla$ , 133