Höhere Funktionalanalysis
Lokalkonvexe Vektorräume und Spektraltheorie

Andreas Kriegl

Inhalt dieser LVA sind laut Curriculum des Master-Studiums: lokalkonvexe Vektorräume sowie beschränkte und unbeschränkte Operatoren auf Hilberträumen. Diese beiden Themen stehen nur in loser Beziehung zueinander und diese Zweiteilung spiegelt sich auch in diesem Skriptum wieder.

Der erste Teil behandelt eine Einführung in die lokalkonvexe Theorie. Neben den grundlegenden Konzepten und Konstruktionen werden wir Verallgemeinerungen der zentralen Sätze der Banach-Raum Theorie behandeln und auf die Dualitätstheorie eingehen.

Der zweite Teil dreht sich um die Spektraltheorie beschränkter und unbeschränkter Operatoren. Ich habe mich dabei eng an die Kapitel VII–X in [**5**] gehalten.

Diese Skriptum ist aus einer Kombination von Skripten entstanden die ich zu entsprechenden Vorlesungen in den Jahren ab 1991 gehalten habe.

Korrekturen zu den Vorgänger-Versionen verdanke ich (in chronologischer Reihenfolge) Andreas Cap, Wilhelm Temsch, Bernhard Reisecker, Gerhard Totschnig, Leonhard Summerer, Michaela Mattes, Muriel Niederle, Martin Anderle, Bernhard Lamel, Konni Rietsch, Oliver Fasching, Simon Hochgerner, Robert Wechsberg, Harald Grobner, Johanna Michor, Katharina Neusser und David Wozabal. Ich möchte mich dafür an dieser Stelle nochmals aufs herzlichste Bedanken.

Wien, im Februar 2012, Andreas Kriegl

Franz Berger verdanke ich eine umfassende Korrekturliste im September 2012.

Sarah Koppensteiner verdanke ich eine umfassende Korrekturliste im November 2015.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Lokalkonvexe Vektorräume

1. Seminormen

In diesem Kapitel soll der adäquate Begriff von Distanz auf Vektorräumen eingeführt werden, und seine elementaren Eigenschaften diskutiert werden.

1.1 Grundlegendes

1.1.1 Motivation und Definitionen.

Alle Vektorräume, die wir betrachten werden, werden als GRUNDKÖRPER $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ haben.

Distanzfunktionen d auf Vektorräumen E sollten zusätzlich TRANSLATIONS-INVARIANT sein, d.h. $d(x,y) = d(a+x, a+y)$ erfüllen für alle $x, y, a \in E$. Dann ist $d(x,y) = d(0, y-x) =: p(y-x)$, wenn wir $a := -x$ wählen, also $d : E \times E \to \mathbb{R}$ bereits durch die Abbildung $p : E \to \mathbb{R}$ festgelegt.

Die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für d übersetzt sich in die

$$\text{SUBADDITIVITÄT:} \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Bezüglich der Skalarmultiplikation sollten wir wohl $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x,y)$ für $\lambda > 0$ also die

$$\mathbb{R}^+\text{-HOMOGENITÄT:} \quad p(\lambda x) = \lambda\, p(x) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$$

und $x \in E$ fordern. *Beachte, daß dies $p(0) = p(2 \cdot 0) = 2\,p(0)$ also $p(0) = 0$ zur Folge hat*, und damit auch die Homogenität $p(0\,x) = p(0) = 0 = 0\,p(x)$ mit $\lambda := 0$ gilt.

Wir dürfen allerdings nicht die Homogenität für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ erwarten, denn dann wäre p linear, denn

$$\begin{aligned} p(x) + p(y) \geq p(x+y) = p(-((-x)+(-y))) &\overset{?}{=} -p((-x)+(-y)) \\ &\geq -(p(-x)+p(-y)) = p(x) + p(y). \end{aligned}$$

Eine Funktion $p : E \to \mathbb{R}$ heißt SUBLINEAR falls sie subadditiv und $\mathbb{R}^+$-homogen ist. Beachte, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

$$p(0) = 0 \text{ und } p(x + \lambda \cdot y) \leq p(x) + \lambda\, p(y)\ \forall x, y \in E\ \forall \lambda > 0$$

gilt.

Verwandt mit der Subadditivität ist die Konvexität: Eine Funktion $p : E \to \mathbb{R}$ heißt KONVEX (siehe [**20**, 4.1.16]) falls

$$p(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda\, p(x) + (1-\lambda)\, p(y) \text{ für alle } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ und alle } x, y \in E,$$

also die Funktion unterhalb jeder Sehne liegt. Mittels Induktion ist dies äquivalent zu $p\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i\, x_i\big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i\, p(x_i)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$ und $\lambda_i > 0$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Für zweimal differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zeigt man in der Analysis (siehe [20, 4.1.17]), daß diese genau dann konvex sind, wenn $f'' \geq 0$ ist:

($\Leftarrow$) Aus $f'' \geq 0$ folgt mittels Mittelwertsatz, daß f' monoton wachsend ist, denn $\frac{f'(x_1)-f'(x_0)}{x_1-x_0} = f''(\xi) \geq 0$ für ein ξ zwischen x_0 und x_1. Sei also $x_0 < x_1$, $0 < \lambda < 1$ und $x = x_0+\lambda(x_1-x_0)$. Erneut nach dem Mittelwertsatz existieren $\xi_0 \in [x_0, x]$ und $\xi_1 \in [x, x_1]$ mit $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_0)\,(x - x_0)$ und $f(x_1) - f(x) = f'(\xi_1)\,(x_1 - x)$, also ist

$$\begin{aligned}
&\lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_0) - f(x) = \\
&\qquad = (1-\lambda)\,(f(x_0) - f(x)) + \lambda\,(f(x_1) - f(x)) \\
&\qquad = (1-\lambda)\, f'(\xi_0)\,(x_0 - x) + \lambda\, f'(\xi_1)(x_1 - x) \\
&\qquad = (1-\lambda)\, f'(\xi_0)\,(-\lambda(x_1 - x_0)) + \lambda\, f'(\xi_1)\,((1-\lambda)\,(x_1 - x_0)) \\
&\qquad = \lambda\,(1-\lambda)\,\Big(f'(\xi_1) - f'(\xi_0)\Big)\,(x_1 - x_0) \geq 0,
\end{aligned}$$

d.h. f ist konvex.

($\Rightarrow$) Es sei f konvex. Dann ist für $x_0 < x < x_1$ mit $\lambda := \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ bzw. $\lambda := \frac{x_1-x}{x_1-x_0}$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Also ist $f'(x_0) \leq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_1)$, d.h. f' ist monoton wachsend. Somit ist $f''(x_0) = \lim_{x_1 \searrow x_0} \frac{f'(x_1)-f'(x_0)}{x_1-x_0} \geq 0$.

In der Definition von "sublinear" können wir "subadditiv" äquivalent durch "konvex" ersetzen:

($\Leftarrow$) Wir setzen $\lambda := \frac{1}{2}$ und erhalten

$$p(x+y) = 2\,p\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\,\left(\frac{1}{2}\,p(x) + \frac{1}{2}\,p(y)\right) = p(x) + p(y).$$

($\Rightarrow$) Es ist

$$p\Big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\Big) \leq p(\lambda\, x) + p((1-\lambda)\, y) = \lambda\, p(x) + (1-\lambda)\, p(y).$$

Die Symmetrie $d(x, y) = d(y, x)$ von d übersetzt sich in die Symmetrie: $p(x) = p(-x)$ für alle $x \in E$. Zusammen mit der $\mathbb{R}^+$-Homogenität ist sie somit zu folgender Homogenität äquivalent: $p(\lambda\, x) = |\lambda|\, p(x)$ für $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Eine Funktion $p : E \to \mathbb{R}$ heißt Seminorm (kurz SN), falls sie subadditiv und positiv homogen ist, d.h. $p(\lambda\, x) = |\lambda|\, p(x)$ für $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Eine Seminorm ist also eine sublineare Abbildung die zusätzlich $p(\lambda x) = p(x)$ für alle $x \in E$ und $|\lambda| = 1$ erfüllt. Beachte, daß die Multiplikation mit einer komplexen Zahl von Betrag 1 üblicherweise als Drehung interpretiert wird.

Jede Seminorm p erfüllt $p \geq 0$, denn $0 = p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2\,p(x)$.

Eine Seminorm p heißt Norm falls zusätzlich $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ gilt. Ein normierter Raum ist ein Vektorraum zusammen mit einer Norm, vgl. [22, 5.4.2].

1.2 Wichtige Normen

1.2.1 Definition. ∞-Norm.

Die Supremums- oder ∞-Norm ist definiert durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

wobei $f : X \to \mathbb{K}$ eine beschränkte Funktion auf einer Menge X ist, vgl. [**20**, 2.2.5].

Die Distanz d, die wir in der Anwendung [**18**, 1.3] auf dem Vektorraum $C(I, \mathbb{R})$ betrachtet haben, war gerade durch $d(u_1, u_2) := \|u_1 - u_2\|_\infty$ gegeben, siehe auch [**20**, 4.2.8]

1.2.2 Beispiele.

Folgende Vektorräume sind normierte Räume bezüglich der ∞-Norm:

1. Für jede Menge X der Raum $B(X)$ der beschränkten Funktionen $X \to \mathbb{K}$;
2. Für jeden kompakten Raum X der Raum $C(X)$ der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{K}$;
3. Für jeden topologischen Raum X den Raum $C_b(X)$ der beschränkten stetigen Funktionen $X \to \mathbb{K}$;
4. Für jeden lokalkompakten Raum X der Raum $C_0(X)$ der bei ∞ verschwindenden stetigen Funktionen $X \to \mathbb{K}$, d.h. jener Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, für welche für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ existiert, s.d.$|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \notin K$;
5. Verwendet man grob gesprochen das Maximum der ∞-Normen der Ableitungen, so wird für jede kompakte Mannigfaltigkeit M auch der Raum $C^n(M)$ der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $M \to \mathbb{K}$ zu einem normierten Raum;

Hingegen kann man (diese) Normen nicht verwenden um einen der folgenden Räume vernünftig zu normieren:

6. $C(X)$ für allgemeines X,
7. Den Raum $C^\infty(M)$ der glatten Funktionen für Mannigfaltigkeiten M,
8. $C^n(M)$ für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten M,
9. Den Raum $H(G)$ der holomorphen (i.e. komplex differenzierbaren) Funktionen für Gebiete $G \subseteq \mathbb{C}$.

1.2.3 Die Variationsnorm.

Es sei $f : I \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $\mathcal{Z} = \{0 = x_0 < \dots < x_n = 1\}$ eine Partition von $I = [0, 1]$. Dann bezeichnet man die Variation von f auf $\mathcal{Z}$ mit

$$V(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

vgl. [**22**, 6.5.11]. Unter der (totalen) Variation einer Funktion versteht man

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} V(f, \mathcal{Z}).$$

Mit $BV(I)$ bezeichnen wir den Raum der Funktionen mit beschränkter Variation, d.h. jener Funktionen f für welche $V(f) < \infty$ gilt. Es ist leicht nachzurechnen, daß $BV(I)$ ein Vektorraum ist, und V eine Seminorm auf $BV(I)$ ist, welche genau auf den konstanten Funktionen verschwindet.

1.2.4 Definition. p-Norm.

Für $1 \leq p < \infty$ ist die p-Norm definiert durch

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $|f|^p : X \to \mathbb{K}$ eine "integrierbare" Funktion sei. Dies ist für $p = 2$ ein kontinuierliches Analogon der Euklidischen Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ oder $x \in \mathbb{C}^n$ (hier ist der Betrag bei $|x_i|^2$ notwendig).

Die Formel $\langle f|g\rangle := \int_X f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ verallgemeinert das innere Produkt $\langle .|.\rangle$ am $\mathbb{K}^n$.

Klarerweise gilt $\|fg\|_1 \le \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$. Um das innere Produkt zu verwenden um Winkel zu messen, ist die Ungleichung von Cauchy-Schwarz $\|fg\|_1 \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ notwendig, siehe [**18**, 6.2.1]. Eine gemeinsame Verallgemeinerung ist die

1.2.5 Hölder-Ungleichung.

$$|\langle f|g\rangle| \le \|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q \textit{ für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \textit{ mit } 1 \le p, q \le \infty$$

Vgl. [**23**, 5.36].

$$\textit{bzw.} \int |fg| \le \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Beweis. Sei vorerst $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$. Dann ist $|f(x)\,g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$, denn log ist konkav (d.h. $-\log$ ist konvex, denn $\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) und somit ist $\log(a^{1/p} \cdot b^{1/q}) = \frac{1}{p}\log a + \frac{1}{q}\log b \le \log(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b)$ für $a := |f(x)|^p$ und $b := |g(x)|^q$, d.h. $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b$.
Durch Integration erhalten wir

$$\|f\,g\|_1 = \int |f\,g| \le \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sei nun $\alpha := \|f\|_p$ und $\beta := \|g\|_q$ beliebig (ungleich 0). Dann können wir auf $f_0 := \frac{1}{\alpha}f$ und $g_0 := \frac{1}{\beta}g$ den ersten Teil anwenden und erhalten

$$\frac{1}{\alpha\,\beta}\|f\,g\|_1 = \|f_0\,g_0\|_1 \le 1 \Rightarrow \|f\,g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Die fehlende Ungleichung $|\langle f|g\rangle| = |\int f\,\bar{g}| \le \int |f|\,|\bar{g}| = \|f\,g\|_1$ ist offensichtlich. □

1.2.6 Minkowski-Ungleichung.

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \textit{ d.h. } \|\_\|_p \textit{ ist eine Seminorm}$$

Vgl. [**20**, 2.2.4], [**21**, 2.72], [**23**, 5.37].

Beweis. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p \le \int |f|\,|f+g|^{p-1} + \int |g|\,|f+g|^{p-1} \\
&\le \|f\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \underbrace{\|(f+g)^{p-1}\|_q}_{(\int |f+g|^{(p-1)q})^{1/q}} \qquad \text{(Hölderunglg.)} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p/q} \quad \text{da } q = \frac{p}{p-1} \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\|f+g\|_p = \|f+g\|_p^{p(1-\frac{1}{q})} \le \|f\|_p + \|g\|_p. \quad \square$$

1.2.7 Beispiele.

1. Es ist der Raum $C(I)$ der stetigen Funktionen ein normierter Raum bezüglich der p-Norm.
2. Am Raum $R(I)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen ist hingegen die p-Norm keine Norm sondern nur ein Seminorm, da eine Funktion f, die nur an endlich vielen Punkten nicht verschwindet, trotzdem $\|f\|_p = 0$ erfüllt.
3. Es ist auch ℓ^p ein normierter Raum, wobei ℓ^p den Raum der Folgen $n \mapsto x_n \in \mathbb{K}$ bezeichnet, die p-summierbar sind, d.h. für welche $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$ gilt. Dieser Raum kann mit den linksstetigen Treppenfunktionen $f : \{t : t \ge 0\} \to \mathbb{K}$ identifiziert werden, die höchstens in den Punkten aus $\mathbb{N}$ Sprungstellen haben ($f(t) := x_n$ für $n \le t < n+1$).

1.3 Elementare Eigenschaften

1.3.1 Lemma. Umgekehrte Dreiecksungleichung.

Jede Seminorm $p : E \to \mathbb{R}$ erfüllt die umgekehrte Dreiecksungleichung*:*

$$|p(x_1) - p(x_2)| \le p(x_1 - x_2).$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
p(x_1) \le p(x_1 - x_2) + p(x_2) &\Rightarrow p(x_1) - p(x_2) \le p(x_1 - x_2) \\
\text{und } p(-x) = p(x) &\Rightarrow p(x_2) - p(x_1) \le p(x_2 - x_1) = p(x_1 - x_2) \\
&\Rightarrow |p(x_1) - p(x_2)| \le p(x_1 - x_2) \quad \square
\end{aligned}$$

Wir wollen nun eine geometrischere Beschreibung von Seminormen p geben. Idee dabei ist es die Niveauflächen $p^{-1}(c)$ zu untersuchen.

1.3.2 Definition. Bälle.

Es sei $p : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $c \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir

$$p_{<c} := \{x : p(x) < c\} \quad \text{und} \quad p_{\le c} := \{x : p(x) \le c\},$$

und nennen dies (falls p sublinear ist) den offenen und den abgeschlossenen p-Ball um 0 mit Radius c.

1.3.3 Lemma. Bälle sublinearer Abbildungen.

Für jede sublineare Abbildung $0 \le p : E \to \mathbb{R}$ und $c > 0$ sind $p_{\le c}$ und $p_{<c}$ konvexe absorbierende Teilmengen von E. Es ist $p_{\le c} = c \cdot p_{\le 1}$ sowie $p_{<c} = c \cdot p_{<1}$, und weiters $p(x) = c \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot p_{\le c}\}$.

Man kann also die Abbildung p aus dem Einheitsball $p_{\le 1}$ zurückgewinnen.

Dabei heißt eine Menge $A \subseteq E$ KONVEX (vgl. [22, 5.5.17]), falls aus $\lambda_i \ge 0$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und $x_i \in A$ folgt, daß $\sum_{i=1}^n \lambda_i\, x_i \in A$. Es genügt dies für $n = 2$ zu fordern, denn für $n < 2$ ist es offensichtlich und aus $n = 2$ folgt es für alle $n > 2$ mittels Induktion ($\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\, x_i = \lambda_{n+1}\, x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}\, x_i$).

Eine Menge A heißt ABSORBIEREND, falls $\forall x \in E\; \exists \lambda > 0 : x \in \lambda \cdot A$.

Beweis. Wegen $c > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} p_{\le c} &= \{x : p(x) \le c\} = \Big\{x : p\Big(\frac{x}{c}\Big) = \frac{1}{c}\, p(x) \le 1\Big\} \\ &= \{c\, y : p(y) \le 1\} = c \cdot \{y : p(y) \le 1\} = c \cdot p_{\le 1} \end{aligned}$$

und analog für $p_{<c}$.

Die Konvexität von $p_{\le c} = p^{-1}\{\lambda : \lambda \le c\}$ und $p_{<c} = p^{-1}\{\lambda : \lambda < c\}$ folgt sofort aus der leicht einzusehenden Eigenschaft, daß Urbilder von nach unten unbeschränkten Intervallen unter konvexen Funktionen konvex sind.

Um einzusehen, daß $p_{\le c} = c \cdot p_{\le 1}$ absorbierend ist für $c > 0$, genügt es $c = 1$ zu setzen. Sei $x \in E$ beliebig. Falls $p(x) = 0$, so ist $x \in p_{\le 1}$. Andernfalls ist $x \in p(x) \cdot p_{\le 1}$, denn $x = p(x) \cdot y$, wobei $y := \frac{1}{p(x)} x$ ist und $p(y) = p(\frac{1}{p(x)} x) = \frac{1}{p(x)} p(x) = 1$.

Damit ist aber auch die Obermenge $p_{<c} \supseteq p_{\le c/2}$ absorbierend.

Wegen folgender Äquivalenzen für $\lambda > 0$ ist $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot p_{\le 1}\}$:

$$x \in \lambda \cdot p_{\le 1} = p_{\le \lambda} \Leftrightarrow p(x) \le \lambda,$$

also

$$\inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda\, p_{\le 1}\} = \inf\{\lambda > 0 : \lambda \ge p(x)\} = p(x). \quad \square$$

1.3.4 Lemma. Bälle von Seminormen.

Für jede Seminorm $p : E \to \mathbb{R}$ und $c > 0$ sind $p_{<c}$ und $p_{\le c}$ absorbierend und absolut-konvex und

$$p(x) = \inf\Big\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot p_{\le 1} = p_{\le \lambda}\Big\}.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq E$ heißt BALANZIERT, falls für alle $x \in A$ und $|\lambda| = 1$ auch $\lambda \cdot x \in A$.

Allgemeiner heißt eine Teilmenge $A \subseteq E$ ABSOLUT-KONVEX, falls aus $x_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1$ folgt, daß $\sum_{i=1}^n \lambda_i\, x_i \in A$.

Sublemma.

Eine Menge A ist genau dann absolut-konvex, wenn sie konvex und balanziert ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) ist klar, da jede konvex-Kombination auch eine absolut-konvex-Kombination ist und für $|\lambda| = 1$ auch $\lambda\, x$ eine absolut-konvex-Kombination ist. Beachte dabei, daß es genügt den Fall $n = 2$ zu betrachten, denn jener für $n = 1$ folgt aus $\lambda_1\, x_1 = \lambda_1\, x_1 + 0\, x_1$.

($\Leftarrow$) Es sei $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1$ dann ist

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\, x_i = \sum_{\lambda_i \ne 0} \lambda_i\, x_i = \sum_{\lambda_i \ne 0} |\lambda_i|\, \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} x_i \in A,$$

denn $\left|\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\right| = 1$ und somit ist wegen der Balanziertheit $\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} x_i \in A$, und folglich wegen der Konvexität auch $\sum_{\lambda_i \ne 0} |\lambda_i|\, \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} x_i \in A$. $\square$

Dieser Beweis zeigt weiters, daß es auch bei “absolut-konvex” genügt den Fall $n = 2$ zu verlangen.

Beweis des Lemmas 1.3.4. Wegen des vorigen Lemmas und des Sublemmas ist nur die Balanziertheit zu zeigen, und diese ist wegen der positiven Homogenität von p offensichtlich. □

1.3.5 Definition. Minkowski-Funktional.

Wir wollen nun aus Mengen A zugehörige Seminormen p konstruieren. Dazu definieren wir das MINKOWSKI-FUNKTIONAL p_A durch

$$x \mapsto p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot A\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ für jedes } x \in E.$$

Es ist $p_A(x) < \infty$ genau dann, wenn x im von A erzeugten Kegel $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\} \cdot A$ liegt.

1.3.6 Lemma. Von Bällen zu Seminormen.

Es sei A konvex und absorbierend. Dann ist das Minkowski-Funktional von A eine wohldefinierte sublineare Abbildung $p := p_A \geq 0$ auf E, und es gilt für $\lambda > 0$:

$$p_{<\lambda} \subseteq \lambda \cdot A \subseteq p_{\leq\lambda}.$$

Falls A zusätzlich absolut-konvex ist, so ist p eine Seminorm.

Wir können also die Menge A “fast” aus der Funktion p zurückgewinnen.

Beweis. Da A absorbierend ist, ist der Kegel $\{\lambda : \lambda > 0\} \cdot A = E$. Also ist p auf ganz E endlich.

Weiters ist $0 \in A$, denn $\exists \lambda > 0 : 0 \in \lambda\, A$ und somit ist $0 = \frac{0}{\lambda} \in A$.

p ist $\mathbb{R}^+$-homogen, denn für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf\{\mu > 0 : \lambda\, x \in \mu\, A\} \\ &= \inf\Big\{\mu > 0 : x \in \frac{\mu}{\lambda}\, A\Big\} = \inf\{\lambda\, \nu > 0 : x \in \nu\, A\} = \lambda\, \inf\{\nu > 0 : x \in \nu A\} \\ &= \lambda\, p(x). \end{aligned}$$

($p_{<\lambda} \subseteq \lambda \cdot A$) Es sei $p(x) = \inf\{\mu > 0 : x \in \mu\, A\} < \lambda$. Dann existiert ein $0 < \mu \leq \lambda$ mit $x \in \mu\, A = \lambda\, \frac{\mu}{\lambda} A \subseteq \lambda\, A$, da $0 \in A$ und somit $\frac{\mu}{\lambda} a = (1 - \frac{\mu}{\lambda})\, 0 + \frac{\mu}{\lambda} a \in A$ für alle $a \in A$.

($\lambda \cdot A \subseteq p_{\leq\lambda}$) Falls $x \in \lambda\, A$ so gilt nach Definition von p klarerweise, daß $p(x) \leq \lambda$, i.e. $x \in p_{\leq\lambda}$.

p ist subadditiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} p(x) < \lambda,\ p(y) < \mu &\Rightarrow x \in \lambda\, A, y \in \mu\, A \\ &\Rightarrow x + y \in \lambda\, A + \mu\, A \stackrel{!}{=} (\lambda + \mu)\, A \Rightarrow p(x + y) \leq \lambda + \mu \\ &\Rightarrow p(x + y) \leq \inf\{\lambda + \mu : p(x) < \lambda,\, p(y) < \mu\} = p(x) + p(y), \end{aligned}$$

denn für konvexe Mengen A und $\lambda_i > 0$ gilt $\sum_{i=1}^n \lambda_i\, A = (\sum_{i=1}^n \lambda_i)\, A$: Sei nämlich $x_i \in A$ so ist $\sum_i \lambda_i\, x_i = \sum_i \lambda \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda}\, x_i = \lambda \cdot \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda}\, x_i \in (\sum_i \lambda_i) \cdot A$, wobei $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i$ und somit $\sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda}\, x_i$ eine konvex-Kombination ist. Umgekehrt sei $x \in A$ so ist $(\sum_{i=1}^n \lambda_i)\, x = \sum_i \lambda_i\, x \in \sum_i \lambda_i\, A$.

Ist A absolut-konvex so ist p ist eine Seminorm, denn für $|\lambda| = 1$ gilt $p(\lambda\, x) = p(x)$, da A balanziert ist, also $\lambda\, A = A$ erfüllt. □

1.3.7 Lemma. Vergleich von Seminormen.

Für je zwei sublineare Abbildungen p und $q \geq 0$ gilt:

$$p \leq q \Leftrightarrow p_{\leq 1} \supseteq q_{\leq 1} \Leftrightarrow p_{<1} \supseteq q_{<1}.$$

Beweis. ($1 \Rightarrow 3$) Es gilt:

$$x \in q_{<1} \Rightarrow p(x) \leq q(x) < 1 \Rightarrow x \in p_{<1}.$$

($3 \Rightarrow 2$) Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in q_{\leq 1} &\Rightarrow q(x) \leq 1 \\ &\Rightarrow \forall \lambda > 1 : q\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} q(x) \leq \frac{1}{\lambda} 1 < 1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in q_{<1} \subseteq p_{<1} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} p(x) = p\left(\frac{x}{\lambda}\right) < 1 \Rightarrow p(x) < \lambda \\ &\Rightarrow p(x) \leq \inf\{\lambda : \lambda > 1\} = 1 \\ &\Rightarrow x \in p_{\leq 1} \end{aligned}$$

($2 \Rightarrow 1$) Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq q(x) < \lambda \Rightarrow q\left(\frac{x}{\lambda}\right) &= \frac{1}{\lambda} q(x) \leq \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in q_{\leq 1} \subseteq p_{\leq 1} \\ &\Rightarrow p\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1, \text{ i.e. } p(x) \leq \lambda \\ &\Rightarrow p(x) \leq \inf\{\lambda : \lambda > q(x)\} = q(x) \quad \square \end{aligned}$$

1.4 Seminormen versus Topologie

1.4.1 Von Seminormen erzeugte Topologie.

Motivation: Die Seminormen liefern uns wie in der Analysis Bälle, welche wir für Fragen der Konvergenz und Stetigkeit verwenden wollen, dazu ist der Begriff einer Topologie entwickelt worden:

In der Analysis nennt man $O \subseteq \mathbb{R}$ offen, falls zu jedem $a \in O$ eine δ-Umgebung $U \subseteq O$ existiert (d.h. eine Menge $U := \{x : |x - a| < \delta\}$ mit $\delta > 0$).

Diese Definition können wir fast wörtlich auf normierte Räume (E, p) übertragen: $O \subseteq E$ heißt OFFEN $:\Leftrightarrow \forall a \in O\ \exists \delta > 0$: $\{x : p(x - a) < \delta\} \subseteq O$. Beachte, daß

$$\{x : p(x - a) < \delta\} = a + p_{<\delta} = a + \delta \cdot p_{<1},$$

denn $p(x - a) < \delta \Leftrightarrow x = a + y$ mit $y := x - a \in p_{<\delta}$.

Wichtige Funktionenräume besitzen aber keine vernünftige Norm. Z.B. können wir auf $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nicht mehr die Supremumsnorm betrachten, wohl aber für jedes kompakte Intervall $K \subseteq \mathbb{R}$ das Supremum p_K auf K, d.h. $p_K(f) := \sup\{|f(x)| : x \in K\}$.

Es sei also $\mathcal{P}_0$ eine Familie von Seminormen auf einem Vektorraum E. Dann nennen wir $O \subseteq E$ OFFEN, falls

$\forall a \in O\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0,\ \exists \varepsilon > 0 : a \in \{x : p_i(x-a) < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n\} \subseteq O.$

Die Familie $\mathcal{O} := \{O : O \subseteq E \text{ ist offen}\}$ ist dann eine Topologie auf E, die sogenannte von $\mathcal{P}_0$ ERZEUGTE TOPOLOGIE (Vereinigungen der so definierten offenen Mengen sind offensichtlich wieder offen und Gleiches gilt auch für Durchschnitte endlich vieler offener Mengen, denn die Vereinigung der endlich vielen Mengen bestehend aus jeweils endlich vielen Seminormen ist endlich und das Minimum der endlich vielen ε's ist positiv). Allgemein versteht man unter einer TOPOLOGIE (vgl. [**26**, 1.1.1]) $\mathcal{O}$ auf einer Menge X eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, die folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1. Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$, so gehört auch die Vereinigung $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{O \in \mathcal{F}} O$ zu $\mathcal{O}$;
2. Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ endlich, so gehört auch der Durchschnitt $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{O \in \mathcal{F}} O$ zu $\mathcal{O}$.

Man beachte, daß $\bigcup \emptyset = \emptyset$ und $\bigcap \emptyset := X$. Die Teilmengen O von X, welche zu $\mathcal{O}$ gehören, heißen auch im allgemeinen Fall OFFENEN MENGEN der Topologie. Ein TOPOLOGISCHER RAUM ist eine Menge zusammen mit einer Topologie.

Obige Konstruktion ist ein allgemeines Prinzip. Man nennt eine Teilmenge $\mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{O}$ SUBBASIS EINER TOPOLOGIE $\mathcal{O}$, falls $\forall a \in O \in \mathcal{O}\ \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_0$, endlich: $a \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq O$, vgl. [**26**, 1.1.6]. Um eine Topologie $\mathcal{O}$ zu erhalten genügt es eine Menge $\mathcal{O}_0$ von Teilmengen von X anzugeben, und dann $\mathcal{O}$ als die Menge aller $O \subseteq X$ zu definieren, die für jeden ihrer Punkte $x \in O$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_0$ besitzen mit $x \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq O$. Man sagt dann auch die Topologie $\mathcal{O}$ wird von der Subbasis $\mathcal{O}_0$ erzeugt.

Die von $\mathcal{P}_0$ erzeugte Topologie ist gerade die von der Subbasis $\mathcal{O}_0 := \{a + p_{<\varepsilon} : a \in E,\ p \in \mathcal{P}_0,\ \varepsilon > 0\}$ erzeugte Topologie.
($\subseteq$) Die von $\mathcal{P}_0$ erzeugte Topologie ist offensichtlich gröber oder gleich der von der Subbasis $\mathcal{O}_0$ erzeugten, denn dazu müssen wir nur alle $a_i = a$ und $\varepsilon_i = \varepsilon$ setzen.
($\supseteq$) In der Tat sei $O \subseteq E$ offen in der letzteren Topologie, d.h. $\forall a \in O\ \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_0$, endlich: $a \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq O$. Also $\exists a_1, \dots, a_n \in E$, $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ mit

$$a \in \{x \in E : p_i(x - a_i) < \varepsilon_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \subseteq O.$$

Wenn wir nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i - p_i(a - a_i) : i = 1, \dots, n\}$ setzen, so ist

$$\begin{aligned} a &\in \{x \in E : p_i(x - a) < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n\} \\ &\subseteq \{x \in E : p_i(x - a_i) < p_i(x - a) + p_i(a - a_i) \leq \varepsilon_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \subseteq O. \end{aligned}$$

Unter einer UMGEBUNG U eines Punktes a in einem topologischen Raum X, versteht man eine Teilmenge $U \subseteq X$, für welche eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ existiert mit $a \in O \subseteq U$.
Unter einer UMGEBUNGS(SUB)BASIS $\mathcal{U}$ eines Punktes a in einem topologischen Raum X versteht man eine Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen U von a so, daß für jede Umgebung O, eine (endlich viele) Menge(n) $U_i \in \mathcal{U}$ existiert(existieren), so daß $\bigcap_i U_i \subset O$, vgl. [**26**, 1.1.7].

Wie in der Analysis nennt man eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen STETIG bei $a \in X$, wenn das Urbild jeder Umgebung (in einer Umgebungsbasis) von $f(a)$ eine Umgebung von a ist, vgl. [**26**, 1.2.4]. Sie heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist, daß ist genau dann der Fall, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Es ist leicht zu sehen, daß es genügt diese Bedingung für die Elemente einer Subbasis zu überprüfen.

Jede Seminorm $p \in \mathcal{P}_0$ ist stetig, denn sei $a \in E$ und $\varepsilon > 0$, dann ist $p(a + p_{<\varepsilon}) \subseteq \{t : |t - p(a)| < \varepsilon\}$, denn $x \in p_{<\varepsilon} \Rightarrow |p(a + x) - p(a)| \leq p(x) < \varepsilon$. *Es ist aber auch die Addition $+ : E \times E \to E$ stetig*, denn $(a_1 + p_{<\varepsilon}) + (a_2 + p_{<\varepsilon}) \subseteq (a_1 + a_2) + p_{<2\varepsilon}$. Insbesonders sind also die Translationen $x \mapsto a + x$ Homöomorphismen.

Die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ ist stetig. Denn für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $a \in E$ gilt: $\{\mu \in \mathbb{K} : |\mu - \lambda| < \delta_1\} \cdot \{x : p(x - a) < \delta_2\} \subseteq \{z : p(z - \lambda \cdot a) < \varepsilon\}$ falls $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2p(a)}$

und $\delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}(|\lambda| + \frac{\varepsilon}{2p(a)})^{-1}$ ist, da

$$\begin{aligned} p(\mu \cdot x - \lambda \cdot a) &= p((\mu-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot (x-a)) \\ &\le |\mu-\lambda| \cdot p(x) + |\lambda| \cdot p(x-a) \\ &\le \delta_1 \cdot (p(a) + p(x-a)) + |\lambda| \cdot \delta_2 \\ &\le \delta_1 \cdot (p(a) + \delta_2) + |\lambda| \cdot \delta_2 = \delta_1 \cdot p(a) + \delta_2 \cdot (\delta_1 + |\lambda|) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(|\lambda| + \frac{\varepsilon}{2p(a)}\right)^{-1} \cdot \left(|\lambda| + \frac{\varepsilon}{2p(a)}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Insbesonders sind die Homothetien $x \mapsto \lambda \cdot x$ Homöomorphismen für $\lambda \neq 0$.

Die durch $\mathcal{P}_0$ erzeugte Topologie macht also E zu einem TOPOLOGISCHEN VEKTORRAUM, d.h. einen Vektorraum zusammen mit einer Topologie bezüglich welcher die Addition und die Skalarmultiplikation stetig ist. Mehr noch, zu einem LOKALKONVEXEN VEKTORRAUM, d.h. es existiert eine 0-Umgebungsbasis konvexer Mengen (nämlich $\bigcap_{i=1}^n (p_i)_{<\varepsilon}$), bzw. Subbasis konvexer Mengen (nämlich $p_{<\varepsilon}$).

1.4.2 Lemma. Stetigkeit von Seminormen.

1. *Eine Seminorm $p : E \to \mathbb{R}$ auf einem topologischen Vektorraum E ist genau dann stetig, wenn $p_{<1}$ (oder äquivalent, wenn $p_{\le 1}$) eine 0-Umgebung ist.*
2. *Eine Seminorm $p : E \to \mathbb{R}$ ist in der von $\mathcal{P}_0$ erzeugten Topologie genau dann stetig, wenn $\exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0,\ \lambda > 0$: $p \le \lambda \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$.*

Beweis.
$\boxed{1}$ ($\Rightarrow$) Da p stetig ist, ist $0 \in p^{-1}\{t : t < 1\} = p_{<1}$ offen.
($\Leftarrow$)

$$a \in a + \varepsilon \cdot p_{<1} = \{x : p(x-a) < \varepsilon\} \subseteq p^{-1}\{t : |t - p(a)| < \varepsilon\}.$$

$\boxed{2}$ ($\Rightarrow$) Falls p stetig ist, so ist $p_{<1}$ eine 0-Umgebung, also existieren $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\begin{aligned} p_{<1} &\supseteq \bigcap_{i=1}^n (p_i)_{<\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^n \varepsilon\,(p_i)_{<1} = \varepsilon \bigcap_{i=1}^n (p_i)_{<1} = \varepsilon\,(\max\{p_1, \dots, p_n\})_{<1} \\ &= (\max\{p_1, \dots, p_n\})_{<\varepsilon} = q_{<1}, \end{aligned}$$

wobei $q := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$. Also ist $p \le q := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$ nach $\boxed{1.3.7}$.
($\Leftarrow$) Mit p_i ist auch $q := \lambda \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$ stetig, und somit $p_{<1} \supseteq q_{<1}$ eine 0-Umgebung, d.h. p stetig nach $\boxed{1}$. □

1.4.3 Zusammenfassung.

Es sei $\mathcal{P}_0$ eine Familie von Seminormen auf einem Vektorraum E. Dann bilden die Bälle $a + p_{<\varepsilon} := \{x \in E : p(x-a) < \varepsilon\}$ mit $p \in \mathcal{P}_0$, $\varepsilon > 0$ und $a \in E$ eine Subbasis einer lokalkonvexen Topologie. Diese sogenannte von $\mathcal{P}_0$ erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie (d.h. mit den wenigsten offenen Mengen) auf E, für welche alle Seminormen $p \in \mathcal{P}_0$ sowie alle Translationen $x \mapsto a + x$ mit $a \in E$ stetig sind. Bezüglich ihr ist eine Seminorm p auf E genau dann stetig, wenn es endlich viele Seminormen $p_i \in \mathcal{P}_0$ und ein $K > 0$ gibt, s.d.

$$p \le K \max\{p_1, \dots, p_n\}.$$

1.4.4 Definition. Seminormierter Raum.

Unter einem SEMINORMIERTEN RAUM verstehen wir folglich einen Vektorraum E zusammen mit einer **Menge** $\mathcal{P}$ von Seminormen, die gerade die stetigen Seminormen der von ihr erzeugten Topologie sind, d.h. mit $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ ist auch jede Seminorm $p \leq p_1 + p_2$ in $\mathcal{P}$.

Eine Menge $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ heißt SUBBASIS DES SEMINORMIERTEN RAUMES $(E, \mathcal{P})$, falls sie die gleiche Topologie wie $\mathcal{P}$ erzeugt, d.h. für jede Seminorm p in $\mathcal{P}$ endlich viele $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}_0$ existieren sowie ein $\lambda > 0$ mit $p \leq \lambda \cdot \max\{p_1, \ldots, p_n\}$.

Zu jeder beliebigen Familie $\mathcal{P}_0$ von Seminormen auf E erhalten wir einen eindeutig bestimmten seminormierten Raum, welcher $\mathcal{P}_0$ als Subbasis seiner Seminormen besitzt, indem wir die Familie $\mathcal{P}$ der, bezüglich der durch $\mathcal{P}_0$ erzeugten Topologie, stetigen Seminormen verwenden:

$$\mathcal{P} := \Big\{p \text{ ist Seminorm auf } E : \exists \lambda > 0\ \exists p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}_0 \text{ mit } p \leq \lambda \cdot \max\{p_1, \ldots, p_n\}\Big\}.$$

Unter den SEMINORMEN DES SO ERHALTENEN SEMINORMIERTEN RAUMES verstehen wir dann alle Seminormen die zur erzeugenden Familie $\mathcal{P}_0$ gehören. Wir müßten dafür eigentlich "Seminormen der vorgegebenen Subbasis des seminormierten Raumes" sagen, aber das ist uns zu lang.

Unter einem ABZÄHLBAR SEMINORMIERTEN RAUM verstehen wir einen seminormierten Raum, welcher eine abzählbare Subbasis $\mathcal{P}_0$ von Seminormen besitzt. Wir dürfen dann annehmen, daß $\mathcal{P}_0 = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist und die Folge $(p_n)_n$ monoton wachsend ist und jede stetige Seminorm p schließlich dominieren, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p \leq p_n$. Dazu ersetze man die p_n durch $n \cdot \max\{p_1, \ldots, p_n\}$.

1.4.5 Definition. Konvexe Hülle.

Die KONVEXE HÜLLE $\langle A \rangle_{\mathrm{kv}}$ einer Teilmenge $A \subseteq E$ ist die kleinste konvexe Teilmenge von E die A umfaßt.

1.4.6 Lemma. Konvexe Hülle.

Sei $A \subseteq E$. Dann existiert die konvexe Hülle von A und ist

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_{kv} &= \bigcap \{K : A \subseteq K \subseteq E,\ K \text{ ist konvex}\} \\ &= \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\Big\}.\end{aligned}$$

Beweise. Die Menge $\mathcal{A} := \{K : A \subseteq K \subseteq E,\ K \text{ ist konvex}\}$ ist nicht leer, denn $E \in \mathcal{A}$. Folglich existiert $\bigcap \mathcal{A}$ und ist offensichtlich selbst konvex und somit das minimale Element in $\mathcal{A}$, d.h. $\langle A \rangle_{\mathrm{kv}} = \bigcap \mathcal{A}$.

Für die zweite Beschreibung der konvexen Hülle beachte, daß die Menge $A_0 := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ offensichtlich A umfaßt. Sie ist konvex, denn seien $x_j \in A_0$, also $x_j = \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{i,j}\, a_{i,j}$ für $n_j \in \mathbb{N}$, $a_{i,j} \in A$, $\lambda_{i,j} \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{i,j} = 1$, und $\mu_j \geq 0$ mit $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^m \mu_j\, x_j = \sum_{j=1}^m \mu_j \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{i,j}\, a_{i,j} = \sum_{\substack{i,j \\ i \leq n_j}} \mu_j\, \lambda_{i,j}\, a_{i,j}$$

$$\text{mit} \quad \sum_{i \leq n_j} \mu_j\, \lambda_{i,j} = \sum_{j=1}^m \mu_j \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{i,j} = \sum_{j=1}^m \mu_j\, 1 = 1.$$

Da sie klarerweise in jeder Menge $K \in \mathcal{A}$ enthalten ist, ist $\langle A \rangle_{\mathrm{kv}} = A_0$. □

1.4.7 Definition. Absolut-konvexe Hülle.

Die ABSOLUT-KONVEXE HÜLLE $\langle A\rangle_{\text{akv}}$ einer Teilmenge $A \subseteq E$ ist die kleinste absolut konvexe Teilmenge von E die A umfaßt, also der Durchschnitt aller dieser Mengen.

1.4.8 Lemma. Absolut-konvexe Hülle.

Es sei $A \subseteq E$. Dann ist die absolut-konvexe Hülle

$$\langle A\rangle_{akv} = \langle\{\lambda : |\lambda| = 1\} \cdot A\rangle_{kv},$$

also die konvexe Hülle der balanzierten Hülle $\{\lambda : |\lambda| = 1\} \cdot A$.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß die konvexe Hülle einer balanzierten Menge A selbst balanziert ist. Sei also $|\mu| = 1$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i\, a_i \in \langle A\rangle_{\text{kv}}$, dann ist

$$\mu \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i\, a_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, \mu\, a_i \in \langle A\rangle_{\text{kv}}, \text{ da } \mu \cdot a_i \in A. \quad \square$$

1.4.9 Lemma.

Jeder lokalkonvexe Vektorraum E besitzt eine 0-Umgebungsbasis von absolut-konvexen Mengen.

Beweis. Sei nämlich U eine konvexe 0-Umgebung. Diese ist o.B.d.A. offen, denn ihr Inneres ist ebenfalls konvex(!). Da die Skalarmultiplikation $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\} \times E \to E$ stetig ist und $0 \cdot \lambda = 0$ ist, existieren für jedes $|\lambda| = 1$ eine Umgebung $V_\lambda \subseteq \mathbb{K}$ von λ und eine konvexe 0-Umgebung $U_\lambda \subseteq E$ mit $V_\lambda \cdot U_\lambda \subseteq U$. Da $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$ kompakt ist, existieren endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i}$. Es sei $U_0 := \bigcap_{i=1}^n U_{\lambda_i}$. Dann ist U_0 eine konvexe 0-Umgebung und $U_0 \subseteq U_1 := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\} \cdot U_0 \subseteq U$. Die konvexe Hülle der balanzierten Menge U_1 ist also eine absolut-konvexe 0-Umgebung in U nach 1.4.8. $\square$

1.4.10 Bemerkung.

Die Topologie jedes lokalkonvexen Vektorraums wird durch die Menge $\mathcal{P}$ aller stetigen Seminormen erzeugt:

($\supseteq$) Falls O in der von $\mathcal{P}$ erzeugten Topologie offen ist, so existieren zu jedem $a \in O$ endlich viele $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ und $\varepsilon > 0$ mit $\bigcap_{i=1}^n \Big(a + \varepsilon \cdot (p_i)_{<1}\Big) = \{x : p_i(x - a) < \varepsilon\ \forall i = 1, \dots, n\} \subseteq O$, also ist O auch in der ursprünglichen Topologie offen, da die $(p_i)_{<1}$ 0-Umgebungen sind.

($\subseteq$) Umgekehrt sei nun letzteres erfüllt, d.h. zu $a \in O$ existiert nach 1.4.9 eine absolut konvexe 0-Umgebung U mit $U \subseteq O - a$. Dann ist $p := p_U$ eine stetige Seminorm, denn $p_{\leq 1} \supseteq U$ ist dann auch eine 0-Umgebung. Folglich ist $a + p_{<1} \subseteq a + U \subseteq O$, also O auch offen in der von den stetigen Seminormen erzeugten Topologie.

Da wir in dieser Argumentation nur die Minkowski-Funkionale einer 0-Umgebungsbasis verwenden müssen, gilt:

Die Topologie jedes lokalkonvexen Vektorraums wird sogar bereits durch die Minkowski-Funktionale einer 0-Umgebungsbasis bestehend aus absolut konvexen Mengen erzeugt.

1.4.11 Folgerung. Besondere 0-Umgebungsbasis.

Jeder lokalkonvexe Vektorraum E besitzt eine 0-Umgebungsbasis von abgeschlossenen absolut-konvexen Mengen.

Beweis. Das ist offensichtlich, da $(p_U)_{\leq 1/2} \subseteq U$ abgeschlossen ist. $\square$

1.4.12 Zusammenfassung.

Sei E ein lokalkonvexer Vektorraum und $\mathcal{U}$ eine 0-Umgebungssubbasis von absolutkonvexen Mengen. Dann ist die Familie $\{p_U : U \in \mathcal{U}\}$ eine Subbasis jenes seminormierten Raumes, dessen Seminormen genau die bezüglich der gegebenen Topologie stetigen sind, das sind genau jene Seminormen q, für welche $q_{\leq 1}$ eine 0-Umgebung ist.

Wir haben also eine Bijektion zwischen seminormierten Räumen und lokalkonvexen Vektorräumen, und können je nach Bedarf mit der Topologie oder den Seminormen auf einem fixen Vektorraum arbeiten.

1.5 Konvergenz und Stetigkeit

1.5.1 Definition. Konvergente Folge.

Eine Folge $(x_i)_i$ KONVERGIERT genau dann gegen a in einem topologischen Raum X, wenn für jede Umgebung U (einer Subbasis) von a, ein Index i_U existiert, so daß $x_i \in U$ für alle $i \geq i_U$, vgl. [**26**, 1.1.11].

1.5.2 Lemma. Konvergente Folgen.

Eine Folge (x_i) konvergiert in der zugrundeliegenden Topologie eines lokalkonvexen Raumes mit Subbasis $\mathcal{P}_0$ genau dann gegen a, wenn $p(x_i - a) \to 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_0$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Da für $a \in E$ die Translation $y \mapsto y - a$ stetig ist, konvergiert $x_i - a \to a - a = 0$, und somit auch $p(x_i - a) \to p(0) = 0$ für jede stetig Seminorm p .

($\Leftarrow$) Es sei U eine Umgebung von a. Dann existieren endlich viele Seminormen $p_j \in \mathcal{P}_0$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $a + \bigcap_{j=1}^n (p_j)_{<\varepsilon} \subseteq U$. Da $p_j(x_i - a) \to 0$ existiert für jedes j ein i_j mit $p_j(x_i - a) < \varepsilon$ für $i \geq i_j$. Sei I größer als all die endlich vielen i_j, dann ist $x_i \in a + \bigcap_{j=1}^n (p_j)_{<\varepsilon}$ für $i \geq I$ und somit auch in U, d.h. $x_i \to a$. $\square$

1.5.3 Lemma. Folgenstetige Abbildungen.

Eine Abbildung $f : E \to X$ von einem abzählbar seminormierten Raum E in einen topologischen Raum X ist genau dann stetig, wenn sie Folgen-stetig ist, d.h. für jede konvergente Folge $x_i \to a$ konvergiert auch die Bildfolge $f(x_i) \to f(a)$.

Vgl. [**20**, 3.1.3].

Beweis. ($\Rightarrow$) ist wegen obiger Beschreibung 1.5.2 der konvergenten Folgen klar.

($\Leftarrow$) Indirekt: Angenommen es ist $f^{-1}(U)$ keine Umgebung von a für eine Umgebung U von $f(a)$. Es sei $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Subbasis der Seminormen von E. Dann existieren für jedes n ein $x_n \in E$ mit $p_k(x_n - a) < \frac{1}{n}$ für alle $k \leq n$ und $f(x_n) \notin U$. Also konvergiert $p_k(x_n - a) \to 0$ für $n \to \infty$, und somit $x_n \to a$ nach obigen Lemma 1.5.2. Da aber $f(x_n) \notin U$, ist das ein Widerspruch zur Folgenstetigkeit von f. $\square$

1.5.4 Definition. Netz.

Da obiges Lemma für nicht-abzählbar seminormierte Räume falsch ist, erweitern wir den Begriff einer Folge zu:
Ein NETZ (VERALLGEMEINERTE FOLGE oder MOORE-SMITH-FOLGE, siehe [**26**,

3.4.1]) ist eine Abbildung $x : I \to X$, wobei I eine GERICHTETE Indexmenge ist, d.h. eine Menge zusammen mit einer Relation $\prec$, welche transitiv ist und zu je zwei Elementen i_1 und i_2 in I auch ein $i \in I$ mit $i_1 \prec i$ und $i_2 \prec i$ existiert, siehe auch [**26**, 3.4.1]. Wortwörtlich genauso wie für Folgen definiert man die Konvergenz von Netzen und zeigt damit auch das erste der obigen Lemmas. Bezüglich des zweiten gilt nun:

1.5.5 Lemma. Stetigkeit via Netze.

Eine Abbildung $f : E \to X$ von einem lokalkonvexen Raum in einen topologischen Raum ist genau dann stetig, wenn für alle konvergenten Netze $x_i \to a$ auch das Bildnetz $f(x_i) \to f(a)$ konvergiert. Vgl. [**26**, 3.4.3].

Beweis. ($\Rightarrow$) Ist offensichtlich, denn falls U eine $f(a)$-Umgebung ist und $x_i \to a$, so $\exists i_0\ \forall i \ge i_0 : x_i \in f^{-1}(U)$, i.e. $f(x_i) \in U$, d.h. $f(x_i) \to f(a)$.

($\Leftarrow$) Es sei $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von a. Dann verwenden wir als Indexmenge $I := \{(U,u) : U \in \mathcal{U}, u \in U\}$ mit der Ordnung $(U,u) \prec (U',u') \Leftrightarrow U \supseteq U'$ und als Netz darauf die Abbildung $x : (U,u) \mapsto u$. Dann konvergiert klarerweise das Netz x gegen a, also nach Voraussetzung auch $f \circ x$ gegen $f(a)$, d.h. für jede $f(a)$-Umgebung V existiert ein Index (U_0, u_0), s.d. $f(u) \in V$ für alle $U \subseteq U_0$ und $u \in U$. Also ist $f(U_0) \subseteq V$, d.h. f ist stetig. $\square$

1.5.6 Definition. Separiertheit.

Ein lokalkonvexer Raum heißt SEPARIERT (oder auch Hausdorff, vgl. [**26**, 3.4.4]), wenn die Grenzwerte konvergenter Folgen (oder Netze) eindeutig sind, das ist genau dann der Fall, wenn $p(x) = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_0$ nur für $x = 0$ gilt:

($\Leftarrow$) Es sei x_i ein Netz, welches gegen x' und x'' konvergiert. Dann konvergiert $x_i - x'$ gegen 0 und gegen $x'' - x'$. Wegen der Stetigkeit von p konvergiert also $p(x_i - x')$ gegen $p(0) = 0$ und auch gegen $p(x'' - x')$. Wegen Eindeutigkeit der Grenzwerte in $\mathbb{K}$ ist $p(x'' - x') = 0$ für alle p, und damit nach Voraussetzung $x'' - x' = 0$.
($\Rightarrow$) Es sei $p(x) = 0$ für alle p. Dann ist die konstante Folge (Netz) mit Wert x sowohl gegen 0 als auch gegen x konvergent, also nach Voraussetzung $x = 0$.

Wir wollen für separierte lokalkonvexe Räume die Bezeichnung LKV verwenden.

1.6 Normierbare Räume

1.6.1 Definition. Normierbarer Raum und beschränkte Mengen.

Einen LKV, der eine Subbasis bestehend aus einer einzelnen (Semi-)Norm besitzt, nennen wir NORMIERBAR.

Eine Menge $B \subseteq E$ heißt BESCHRÄNKT genau dann, wenn $p(B)$ beschränkt ist für alle $p \in \mathcal{P}_0$, vgl. [**20**, 2.2.9]. Das ist genau dann der Fall, wenn sie von allen 0-Umgebungen absorbiert wird, d.h. $\forall$ 0-Umgebung $U\ \exists K > 0 : B \subseteq K \cdot U$:
($\Leftarrow$) Es sei p eine stetige Seminorm, dann ist $p_{\le 1}$ eine Nullumgebung, also existiert nach Voraussetzung ein $K > 0$ mit $B \subseteq K \cdot p_{\le 1} = p_{\le K}$, d.h. p ist auf B durch K beschränkt.

($\Rightarrow$) Es sei U eine 0-Umgebung. Dann existieren endlich viele Seminormen $p_i \in \mathcal{P}_0$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\bigcap_{i=1}^n (p_i)_{\le\varepsilon} \subseteq U$. Für jedes p_i existiert ein $K_i > 0$ mit $|p_i(B)| \le K_i$, also ist $B \subseteq \bigcap_{i=1}^n (p_i)_{\le K_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n (p_i)_{\le K\,\varepsilon} = K \cdot U$, wobei $K := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max\{K_1, \dots, K_n\}$.

1.6.2 Satz von Kolmogoroff.

Ein separierter LKV ist genau dann normierbar, wenn er eine beschränkte Nullumgebung besitzt.

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei p eine die Struktur erzeugende Norm. Dann ist $U := p_{\leq 1}$ eine 0-Umgebung. Für jede beliebige stetige Seminorm q existiert ein $K > 0$ mit $q \leq K \cdot p$, und somit ist q auf U durch K beschränkt. Also ist U beschränkt.

($\Leftarrow$) Es sei U eine beschränkte Nullumgebung. Dann existiert eine stetige Seminorm mit $p_{\leq 1} \subseteq U$. Sei nun q eine beliebige Seminorm. Da U beschränkt ist, existiert ein $K > 0$ mit $|q(U)| \leq K$. Also ist $p_{\leq 1} \subseteq U \subseteq q_{\leq K} = (\frac{1}{K}q)_{\leq 1}$ und damit $p \geq \frac{1}{K}q$, d.h. $q \leq K \cdot p$. Somit ist $\{p\}$ eine Subbasis der Seminormen von E und p sogar eine Norm. □

1.6.3 Beispiel. Punktweise Konvergenz stetiger Funktionen.

Die punktweise Konvergenz auf $C(I, \mathbb{R})$ ist nicht normierbar.

Beweis. Eine Subbasis von Seminormen für die punktweise Konvergenz ist durch $f \mapsto |f(x)|$ für $x \in I$ gegeben. Angenommen es gäbe eine beschränkte Nullumgebung U. Dann müßten endlich viele Punkte $x_1, \dots x_n \in I$ und ein $\varepsilon > 0$ existieren, s.d. $B := \{f : |f(x_i)| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ beschränkt ist. Sei aber $x_0 \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann ist die Seminorm $q : f \mapsto |f(x_0)|$ nicht beschränkt auf B, denn es existiert sicherlich ein (Polynom) f welches auf $\{x_1, \dots, x_n\}$ verschwindet, nicht aber auf x_0, und somit wäre $K \cdot f \in B$ aber $q(K \cdot f) = K \cdot f(x_0) \to \infty$ für $K \to \infty$. □

Analog zeigt man, daß die glm. Konvergenz auf Kompakta im Raum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nicht normierbar aber ein abzählbar seminormierter Raum ist. Und ebenso für die glm. Konvergenz in jeder Ableitung auf $C^\infty(I, \mathbb{R})$.

2. Lineare Abbildungen und Vollständigkeit

In diesem Kapitel untersuchen wir die grundlegenden Eigenschaften linearer Abbildungen sowie den Begriff der Vollständigkeit, und seine Bedeutung für Potenzreihen. Insbesonders wenden wir das an, um den Inversen Funktionensatz und den Weierstraß'schen Approximationssatz zu beweisen, sowie die Lösung linearer Differentialgleichungen zu finden.

2.1 Stetige und beschränkte Abbildungen

2.1.1 Lemma. Stetigkeit linearer Abbildungen.

Für eine lineare Abbildung $f : E \to F$ zwischen LKV'en sind äquivalent:

1. *f ist stetig;*

$\Leftrightarrow$ 2. *f ist stetig bei 0;*

$\Leftrightarrow$ 3. *Für jede (stetige) SN q von F ist $q \circ f$ eine stetige SN von E.*

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{3}$) q stetige SN, f stetig linear $\Rightarrow q \circ f$ stetige SN.

($\boxed{3} \Rightarrow \boxed{2}$) Sei U eine 0-Umgebung von $0 = f(0)$ in F, o.B.d.A. $U = \bigcap_i \{y : q_i(y) < \varepsilon\}$ für SN'en $q_1, \dots, q_n$ von F. Dann ist $f^{-1}(U) = \bigcap_i \{x : q_i(f(x)) < \varepsilon\} = \bigcap_i (q_i \circ f)_{<\varepsilon}$ offen in E.

($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$) Es ist $f(x) = f(x-a) + f(a)$, d.h. $f = T_{f(a)} \circ f \circ T_{-a}$, wobei die Translationen T_{-a} und $T_{f(a)}$ stetig sind und das mittlere f bei 0 stetig ist, also auch die Zusammensetzung f bei $(T_{-a})^{-1}(0) = a$. □

2.1.2 Lemma. Stetigkeit multi-linearer Abbildungen.

Eine n-lineare Abbildung $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ zwischen LKV'en ist genau dann stetig, wenn sie stetig bei 0 ist.

Beweis. Sei zuerst $n = 2$. Für $a_i \in E_i$ und jede Umgebung $f(a_1, a_2) + W$ von $f(a_1, a_2)$ mit absolut konvexen W existieren 0-Umgebungen U_i in E_i mit $f(U_1 \times U_2) \subseteq \frac{1}{3} W$, wegen der Stetigkeit von f bei 0. Nun wähle ein $0 < \rho < 1$ mit $\rho\, a_i \in U_i$ für $i = 1, 2$. Dann ist $f((a_1 + \rho\, U_1) \times (a_2 + \rho\, U_2)) \subseteq f(a_1, a_2) + W$, denn für $u_i \in U_i$ gilt

$$\begin{aligned} f\big(a_1 + \rho\, u_1, a_2 + \rho\, u_2\big) - f\big(a_1, a_2\big) &= \underbrace{f(a_1, \rho\, u_2)}_{=f(\rho\, a_1, u_2)} + \underbrace{f(\rho\, u_1, a_2)}_{=f(u_1, \rho\, a_2)} + \underbrace{f(\rho\, u_1, \rho\, u_2)}_{=\rho^2 f(u_1, u_2)} \\ &\subseteq \frac{1}{3} W + \frac{1}{3} W + \frac{1}{3} W \subseteq W. \end{aligned}$$

Für $n > 2$, wählt man analog $U_1, \dots, U_n$ mit $(2^n - 1)\, f(U_1 \times \ldots \times U_n) \subseteq W$. □

2.1.3 Definition. Beschränkte lineare Abbildungen.

Eine lineare Abbildung heißt BESCHRÄNKT, falls das Bild jeder beschränkten Menge beschränkt ist.
Achtung, in der Literatur wird diese Bezeichnung auch für die nicht äquivalente Eigenschaft auf einer 0-Umgebungen beschränkt zu sein verwendet!
Beachte weiters, daß eine beschränkte lineare Abbildung $f : E \to F$ nur dann beschränkt als Abbildung von der Menge E nach F ist (also $f(E) \subseteq F$ beschränkt ist), wenn sie die 0-Abbildung ist, denn ein linearer Teilraum (wie $f(E)$) der beschränkt ist, würde von jeder 0-Umgebung U absorbiert werden (d.h. $f(E) \subseteq K \cdot U$ für ein $K > 0$, also $f(E) = \frac{1}{K} \cdot f(E) \subseteq U$) und wäre somit in jeder 0-Umgebung U enthalten also auch in $\{0\} = \overline{\{0\}} = \bigcap_U U$.

2.1.4 Lemma. Beschränkte lineare Abbildungen.

Für lineare Abbildungen $f : E \to F$ zwischen LKV'en gelten folgende Implikationen:

1. *f ist stetig;*

$\Rightarrow$ 2. *f ist Folgen-stetig;*

$\Rightarrow$ 3. *f ist beschränkt.*

Beweis. (1 $\Rightarrow$ 2) gilt auch für nicht-lineare f nach 1.5.5.

(2 $\Rightarrow$ 3) Angenommen $f(B)$ ist nicht beschränkt für eine beschränkte Menge $B \subseteq E$. Dann existiert eine Seminorm q von F und eine Folge $b_n \in B$, s.d. $0 < \lambda_n := q(f(b_n)) \to \infty$. Die Folge $\frac{1}{\lambda_n} b_n$ konvergiert dann gegen 0 (siehe nachfolgendes Lemma), also wegen der Folgen-Stetigkeit auch $f(\frac{1}{\lambda_n} b_n) = \frac{1}{\lambda_n} f(b_n)$ und damit auch $q(\frac{1}{\lambda_n} f(b_n)) = \frac{1}{\lambda_n} q(f(b_n)) = 1$, ein Widerspruch. □

2.1.5 Lemma. Mackey-Konvergenz.

Es sei $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ beschränkt in einem LKV und $\rho_n \to 0$ in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert $\rho_n y_n \to 0$.

Beweis. Durch Anwendung von Seminormen führt man dies auf das entsprechende Resultat von $\mathbb{R}$ zurück. Oder direkt: Sei U eine absolut-konvexe 0-Umgebung. Dann ist $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K \cdot U$ für ein $K > 0$ und somit $\rho_n\, y_n \in U$ für alle $|\rho_n| \le \frac{1}{K}$, also für fast alle n. □

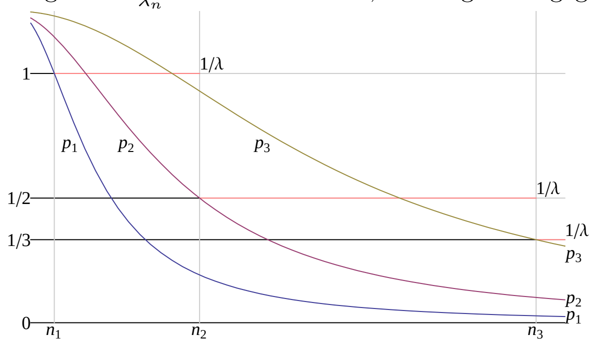
Es stellt sich nun die Frage nach der Umkehrung in 2.1.4. Für ($1 \Leftarrow 2$) haben wir diese in 1.5.3 für abzählbar seminormierte Räume schon positiv beantwortet. Um aus der Beschränkheit zumindest auf Folgen-Stetigkeit schließen zu können, sollten wir jede gegen 0 konvergenten Folge $(x_n)_n$ in E als Produkt einer beschänkten Folge $(y_n)_n$ in E und einer 0-Folge ρ_n in $\mathbb{R}$ schreiben können. Eine Folge (x_n) für die das geht heißt MACKEY 0-FOLGE oder auch MACKEY-KONVERGENT gegen 0, also falls $\exists 0 \le \lambda_n \to \infty$, s.d. $\{\lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Jede Mackey 0-Folge konvergiert gegen 0, denn für jede absolut konvexe 0-Umgebung U existiert ein $K > 0$ mit $\{\lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K\, U$ und somit ist $x_n \in U$ für alle n mit $\lambda_n \ge K$. Für normierbare Räume gilt auch die Umkehrung, denn aus $x_n \to 0$ folgt $0 \le \lambda_n \to \infty$ wobei $\lambda_n := \frac{1}{\|x_n\|}$ für $x_n \ne 0$ und $\lambda_n := n$ sonst, und offensichtlich ist $\{\lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in der Norm beschränkt durch 1. Allgemeiner gilt dies aber auch für abzählbar seminormierte Räume:

2.1.6 Lemma.

In abzählbar seminormierten Räumen E sind gegen 0 konvergente Folgen sogar Mackey-konvergent gegen 0.

Beweis. Es sei $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine monoton wachsende Subbasis von E und $x_n \to 0$ eine 0-Folge. Die Idee ist zu den abzählbar vielen Nullfolgen $(p_k(x_n))_n$ für $k \in \mathbb{N}$ eine weitere Nullfolge $n \mapsto \frac{1}{\lambda_n} > 0$ zu definieren, die langsamer gegen 0 konvergiert.



Aus $p_k(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$ folgt die Existenz von $n_k \in \mathbb{N}$ mit $p_i(x_n) \le \frac{1}{k}$ für alle $n \ge n_k$ und alle $i \le k$. O.B.d.A. sei $k \mapsto n_k$ strikt monoton wachsend. Wir definieren $\lambda_n := k$ für $n_{k+1} > n \ge n_k$. Dann ist $n \mapsto \lambda_n$ monoton wachsend, $\lambda_n \to \infty$ und für $n \ge n_k$ gilt $p_k(\lambda_n x_n) = \lambda_n p_k(x_n) = j\, p_k(x_n) \le j\, p_j(x_n) \le j \frac{1}{j} = 1$, wobei $j \ge k$ so gewählt ist, daß $n_{j+1} > n \ge n_j$. $\square$

2.1.7 Folgerung. Bornologizität metrisierbarer LKV.

Jeder abzählbar seminormierte Raum ist bornologisch. Mehr noch: multilineare beschränkte Abbildungen auf abzählbar seminormierten Räumen sind stetig.

Dabei heißt ein LKV BORNOLOGISCH falls jede beschränkte lineare Abbildung auf ihm stetig ist.
Wir werden in 4.2.5 Beispiele von LKV'en angeben, die nicht bornologisch sind.

Beweis. Wegen 1.5.3 brauchen wir nur die Folgen-Stetigkeit (bei 0) jeder beschränkten m-linearen Abbildung f zeigen. Es sei $x_n \to 0$. Nach Lemma 2.1.6 existiert eine Folge $\lambda_n \to \infty$, sodaß $\lambda_n x_n$ beschränkt ist. Dann ist aber nach Voraussetzung $f(\lambda_n x_n) = \lambda_n^m f(x_n)$ ebenfalls beschränkt, und somit existiert für jede SN q auf F eine Konstante K_q mit $\lambda_n^m q(f(x_n)) = q(\lambda_n^m f(x_n)) \le K_q$, d.h. $q(f(x_n)) \le \frac{K_q}{\lambda_n^m} \to 0$ für $n \to \infty$, i.e. $f(x_n) \to 0$. $\square$

2.1.8 Lemma. Stetigkeit in normierten Räumen.

Für lineare Abbildungen $f : E \to F$ zwischen normierten Räumen sind äquivalent:

1. *f ist stetig;*

$\Leftrightarrow$ 2. *f ist* LIPSCHITZ, *d.h.* $\exists K > 0 : \|f(x) - f(y)\| \le K \cdot \|x - y\|$;

$\Leftrightarrow$ 3. $\|f\| < \infty$.

Wobei die OPERATORNORM $||f||$ *von f folgendes ist (vgl.*[22, 5.4.10]*)*

$$\|f\| := \sup\Big\{\|f(x)\| : \|x\| \le 1\Big\} = \sup\Big\{\|f(x)\| : \|x\| = 1\Big\} = \sup\left\{\tfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} : x \ne 0\right\}$$
$$= \inf\Big\{K : \|f(x)\| \le K\|x\| \text{ für alle } x\Big\}$$

Ist f multi-linear, so ist f genau dann stetig, wenn

$$\|f\| := \sup\left\{\frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \dots \|x_n\|} : x_i \ne 0\right\} < \infty.$$

Beweis. ($\boxed{1} \Leftrightarrow \boxed{3}$) f ist stetig $\overset{\boxed{2.1.7}}{\Leftrightarrow}$ f ist beschränkt auf beschränkten Mengen (o.B.d.A. auf $\{x : \|x\| \le 1\}$, da $f(B) \subseteq c \cdot f(\{x : \|x\| \le 1\})$ für $B \subseteq c \cdot \{x : \|x\| \le 1\}$) $\Leftrightarrow \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \le 1\} =: \|f\| < \infty$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sup\{\|fx\| : \|x\| = 1\} &\le \sup\{\|fx\| : \|x\| \le 1\} \quad \text{(da mehr Elemente)}\\ &\le \sup\left\{\frac{\|fx\|}{\|x\|} : x \ne 0\right\} \quad \left(\text{da } \|fx\| \le \frac{\|fx\|}{\|x\|} \text{ für } \|x\| \le 1\right)\\ &\le \sup\{\|fx\| : \|x\| = 1\} \quad \left(\text{da } \quad \frac{\|fx\|}{\|x\|} = \|f(\frac{1}{\|x\|}x)\|\right),\end{aligned}$$

also stimmt Gleichheit überall. Weiters ist:

$$\begin{aligned}\inf\Big\{K : \|fx\| \le K \cdot \|x\| \text{ für alle } x\Big\} &= \inf\left\{K : \frac{\|fx\|}{\|x\|} \le K \text{ für alle } x \ne 0\right\}\\ &= \inf\left\{K : \sup\left\{\frac{\|fx\|}{\|x\|} : x \ne 0\right\} \le K\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|fx\|}{\|x\|} : x \ne 0\right\}.\end{aligned}$$

Die Abbildung f ist Lipschitz $\Leftrightarrow \left\{\frac{\|fz\|}{\|z\|} : z \ne 0\right\} = \left\{\frac{\|fx - fy\|}{\|x-y\|} : x \ne y\right\}$ ist beschränkt.

Die Aussage für multilineare Abbildungen f zeigt man analog. □

2.1.9 Folgerung. Operatornorm.

Seien E und F normierte Räume, dann ist die Menge

$$L(E, F) := \{f : E \to F \mid f \text{ ist linear und beschränkt}\}$$

ein normierter Raum bezüglich der punktweisen Vektoroperationen und der Operatornorm, wie sie in $\boxed{2.1.8}$ *definiert wurde. Weiters gilt: $\|id_E\| = 1$ und $\|f \circ g\| \le \|f\| \cdot \|g\|$.*

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}\forall x : \|(f+g)x\| \le \|fx\| + \|gx\| \le (\|f\| + \|g\|)\,\|x\| &\Rightarrow \|f+g\| \le \|f\| + \|g\|\\ \forall x : \|(\lambda f)x\| = |\lambda|\,\|fx\| &\Rightarrow \|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|\\ \forall x : \|(f \circ g)x\| \le \|f\|\,\|g\|\,\|x\| &\Rightarrow \|f \circ g\| \le \|f\|\,\|g\|.\end{aligned}$$ □

Achtung $\|f \circ g\| \ne \|f\| \cdot \|g\|$, z.B. $f(x, y) := (x, 0)$ und $g(x, y) := (0, y)$.

2.1.10 Definition. Normierte Algebra.

Eine Normierte Algebra ist ein normierter Raum A zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\bullet : A \times A \to A$, welche assoziativ ist, eine 1 besitzt und $\|1\| = 1$ sowie $\|a \bullet b\| \le \|a\| \cdot \|b\|$ erfüllt. Eines der wichtigsten Beispiele ist $L(E, E) =: L(E)$ für jeden normierten Raum E.

2.2 Vollständigkeit

2.2.1 Definition. Vollständigkeit.

Ein LKV E heißt FOLGEN-VOLLSTÄNDIG, falls jede Cauchy-Folge konvergiert. Er heißt VOLLSTÄNDIG, wenn jedes Cauchy-Netz konvergiert. Ein Netz (bzw. eine Folge) x_i heißt CAUCHY falls $x_i - x_j \to 0$ für $i, j \to \infty$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall p\ \exists i_0\ \forall i, j \succ i_0 : p(x_i - x_j) < \varepsilon.$$

Ein BANACH-RAUM ist ein normierter Raum der (Folgen-)vollständig ist. Ein (Folgen-)vollständiger abzählbar seminormierter Raum heißt FRÉCHET-RAUM.

2.2.2 Lemma. Fréchet-Räume.

Für jeden abzählbar seminormierten Raum und jedes überall positive $\lambda \in \ell^1$ sind äquivalent

1. *Er ist vollständig;*

$\Leftrightarrow$ 2. *Er ist Folgen-vollständig;*

$\Leftrightarrow$ 3. *Jede absolut-konvergente Reihe konvergiert;*

$\Leftrightarrow$ 4. *Für jede beschränkte Folge (b_n) konvergiert die Reihe $\sum_n \lambda_n b_n$;*

$\Leftrightarrow$ 5. *Jede Cauchy-Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Eine Reihe $\sum_n x_n$ heißt ABSOLUT-KONVERGENT falls für jede stetige Seminorm p die Reihe $\sum_n p(x_n)$ in $\mathbb{R}$ (absolut) konvergiert.

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$) ist trivial.

($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$) Es sei $\sum_n x_n$ absolut-konvergent, dann bilden die Partialsummen von $\sum_n x_n$ eine Cauchy-Folge, denn $p(\sum x_n) \leq \sum p(x_n)$, also konvergiert $\sum_n x_n$ nach $\boxed{2}$.

($\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$) Es sei die Folge (b_n) beschränkt und (λ_n) absolut-summierbar. Dann ist $\sum_n \lambda_n b_n$ absolut-summierbar, denn $\sum_n p(\lambda_n b_n) \leq \|\lambda\|_1 \cdot \|p \circ b\|_\infty$. Also konvergiert diese Reihe nach $\boxed{3}$.

($\boxed{4} \Rightarrow \boxed{5}$) Sei $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine monoton wachsende Subbasis der Seminormen. Es sei (x_i) eine Cauchy-Folge. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\forall k\ \exists i_k\ \forall i, j \geq i_k : p_k(x_i - x_j) \leq \lambda_k \quad \text{(o.B.d.A. } i_k \leq i_{k+1})\\
\Rightarrow\quad & p_n\left(\frac{1}{\lambda_k}(x_{i_{k+1}} - x_{i_k})\right) \leq p_k\left(\frac{1}{\lambda_k}(x_{i_{k+1}} - x_{i_k})\right) \leq 1 \text{ für } n \leq k\\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{\lambda_k} y_k \text{ ist beschränkt, wobei } y_k := x_{i_{k+1}} - x_{i_k}\\
\overset{\boxed{4}}{\Rightarrow}\quad & x_{i_j} = x_{i_0} + \sum_{k<j} \lambda_k \frac{1}{\lambda_k} y_k \text{ konvergiert.}
\end{aligned}$$

($\boxed{5} \Rightarrow \boxed{1}$) Es sei (x_i) ein Cauchy-Netz und (p_n) eine Subbasis von Seminormen die wachsend ist. Dann gilt:

$$\forall k\ \exists i_k\ \forall i,j \succ i_k : p_k(x_i - x_j) \le \frac{1}{k} \quad (\text{o.B.d.A. } i_{k+1} \succ i_k)$$

$$\Rightarrow \quad x_{i_k} \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

$$\overset{\boxed{5}}{\Rightarrow} \quad \text{eine konvergente Teilfolge } (x_{i_{k_l}})_l \text{ existiert, sei } x_\infty := \lim_l x_{i_{k_l}}$$

$$\Rightarrow \quad p_n(x_i - x_\infty) \overset{n\le k}{\le} p_k(x_i - x_\infty) \le \underbrace{p_k(x_i - x_{i_k})}_{\le \frac{1}{k} \text{ für } i \succ i_k} + \underbrace{p_k(x_{i_k} - x_\infty)}_{=\lim_l p_k(x_{i_k} - x_{i_{k_l}}) \le \frac{1}{k}} \le \frac{2}{k}. \qquad \square$$

2.2.3 Lemma. Vollständigkeit des Raums der beschränkten Abbildungen.

Sei X eine Menge und E ein (Folgen-)vollständiger LKV. Dann ist der Raum $B(X,E) := \{f : X \to E \,|\, f(X) \text{ ist beschränkt in } E\}$ ebenfalls (Folgen-)vollständig, wobei er durch die Familie $f \mapsto \|q \circ f\|_\infty = \sup\{q(f(x)) : x \in X\}$ seminormiert ist, wo q die Seminormen von E durchläuft. Seine lokalkonvexe Topologie ist also jene der gleichmäßigen Konvergenz. Teilmengen $\mathcal{B} \subseteq B(X,E)$ sind genau dann beschränkt, wenn sie gleichmäßig beschränkt sind, d.h. $\mathcal{B}(X) = \{f(x) : f \in \mathcal{B}, x \in X\} \subseteq E$ beschränkt ist.

Siehe auch [**20**, 4.2.9].

Beweis. Es sei f_i ein Cauchy-Netz in $B(X,E)$. Da die Punktevaluationen $\mathrm{ev}_x : B(X,E) \to E$, $f \mapsto f(x)$ stetig (wegen $q(\mathrm{ev}_x(f)) = q(f(x)) \le \|q \circ f\|_\infty$ folgt dies aus $\boxed{2.1.1}$ und $\boxed{1.4.3}$) und linear sind, ist $f_i(x)$ ein Cauchy-Netz in E für jedes $x \in X$, und konvergiert somit. Es sei $f(x) := \lim_i f_i(x)$, dann gilt für jede stetige Seminorm p auf E:

$$\begin{aligned} p(f_i(x) - f(x)) &\le p(f_i(x) - f_j(x)) + p(f_j(x) - f(x)) \\ &\le \underbrace{\|p \circ (f_i - f_j)\|_\infty}_{<\varepsilon \text{ für } i,j \succ i_0(\varepsilon)} + \underbrace{p(f_j(x) - f(x))}_{<\varepsilon \text{ für } j \succ i_0(\varepsilon,x)} \le 2\varepsilon \end{aligned}$$

für $i \succ i_0(\varepsilon)$ (und geeignet in Abhängigkeit von x gewählten j). Also konvergiert $f_i \to f$ in der durch p definierten Supremums-Norm.

Wem das zu kurz war, nochmals im Detail: Sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} (f_i) \text{ ist Cauchy } &\Rightarrow \exists i_0\, \forall i,j \succ i_0 : \|p \circ (f_i - f_j)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \\ f_j \to f \text{ punktweise } &\Rightarrow \forall x\, \exists j_0\, \forall j \succ j_0 : p(f_j(x) - f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \exists i_0\, \forall x\, \exists j_0 \succ i_0\, \forall i \succ i_0\, \forall j \succ j_0 : \\ &\qquad p(f_i(x) - f(x)) \le \|p \circ (f_i - f_j)\|_\infty + p(f_j(x) - f(x)) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \exists i_0\, \forall i \succ i_0\, \forall x : p(f_i(x) - f(x)) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \exists i_0\, \forall i \succ i_0 : \|p \circ (f_i - f)\|_\infty \le \varepsilon \end{aligned}$$

Weiters ist

$$p(f(x)) \le p(f(x) - f_i(x)) + p(f_i(x)) \le \|p \circ (f - f_i)\|_\infty + \|p \circ f_i\|_\infty < \infty$$

also gehört f zu $B(X,E)$.

Die Aussage über die beschränkten Teilmengen $\mathcal{B} \subseteq B(X,E)$ folgt nun wie folgt: $\mathcal{B} \subseteq B(X,E)$ ist genau dann beschränkt, wenn $\{\|q \circ f\|_\infty : f \in \mathcal{B}\}$ für jede Seminorm q von E beschränkt ist, also $\{q(f(x)) : x \in X,\ f \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, d.h. $\mathcal{B}(X) := \{f(x) : f \in \mathcal{B}, x \in X\}$ beschränkt ist in E. $\square$

2.2.4 Lemma. Teilräume vollständiger Räume.

Es sei E ein (Folgen-)vollständiger LKV, F ein Teilvektorraum mit den Einschränkungen $p|_F$ der Seminormen p von E als Subbasis. Falls F (Folgen-)abgeschlossen ist, so ist F ebenfalls (Folgen-)vollständig

Wir werden in 3.1.4 zeigen, daß in dieser Situation der Teilraum F die Spurtopologie von E trägt. Eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X heißt ABGESCHLOSSEN bzw. FOLGEN-ABGESCHLOSSEN, wenn mit jedem Netz bzw. jeder Folge $(y_i)_i$ in Y, welches in X konvergiert auch der Grenzwert zu Y gehört. Es ist einfach zu zeigen, daß eine Teilmenge genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement offen ist.

Beweis. Wenn (y_i) Cauchy ist, dann konvergiert es in E wegen der Vollständigkeit von E und somit auch in F wegen der Abgeschlossenheit von F. □

2.2.5 Folgerung. Teilräume beschränkter Abbildungen.

Die Räume $C(X)$ für X kompakt sowie $C_b(X) := C(X) \cap B(X)$ und $C_0(X) := \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0\ \exists K \subseteq X$ kompakt $\forall x \notin K : |f(x)| \leq \varepsilon\}$ für allgemeine topologische Räume X sind alle bzgl. der Supremumsnorm vollständig.

Beweis. Wir müssen nur die Folgen-Abgeschlossenheit obiger Teilräume von $B(X)$ zeigen. Benutze dazu, daß Grenzwerte einer gleichmäßig konvergenten Folge stetige Funktionen stetig ist, vgl. [**20**, 4.2.8]: Sei $f_n \to f_\infty$ gleichmäßig konvergent und f_n stetig für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$ wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_\infty\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ sowie wegen der Stetigkeit von f_n eine Umgebung U von x_0 mit $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in U$. Dann ist für alle $x \in U$:

$$|f_\infty(x) - f_\infty(x_0)| \leq |f_\infty(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x) - f_\infty(x_0)| < 3\frac{\varepsilon}{3}.$$

Sind die $f_n \in C_0(X)$, dann gilt gleiches auch für f_∞, denn zu $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit $\|f_n - f_\infty\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und wegen $f_{n_0} \in C_0$ ein kompaktes $K \subseteq X$ mit $|f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon$ für $x \notin K$. Also ist

$$|f_\infty(x)| \leq \|f_\infty - f_{n_0}\| + |f_{n_0}(x)| < 2\varepsilon \text{ für alle } x \notin K.$$

Üblicherweise betrachtet man $C_0(X)$ nur für lokal-kompaktes X, denn in Punkten $x_0 \in X$ ohne kompakte Umgebung muß jede Funktion $f \in C_0(X)$ verschwinden: Falls $f(x_0) \neq 0$ ist, so wählen wir eine kompakte Menge K mit $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)|$ für alle $x \notin K$ und somit wäre $K \supseteq \{x : |f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)|\}$ eine Umgebung von x_0.

Jeder lokal-kompakte Raum X besitzt eine Einpunktkompaktifizierung $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ (siehe [**26**, 2.2.5]) und $C_0(X)$ läßt sich dann auch als $C_0(X) = \{f \in C(X) : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\} \cong \{f \in C(X_\infty) : f(\infty) = 0\}$ beschreiben. □

2.2.6 Beispiel. Vollständigkeit des Raums der Funktionen beschränkter Variation.

$BV(I, \mathbb{R})$ ist ein Banach-Raum.

Die Variations-Seminorm V hat als Kern

$$\operatorname{Ker} V := \{f : V(f) = 0\} = \{f : f \text{ ist konstant}\}.$$

Um einen separierten Raum zu erhalten haben wir folgende Möglichkeiten:

- Wir fügen zu V noch eine weitere Seminorm hinzu, z.B. die Supremumsnorm oder auch nur $f \mapsto |f(0)|$, welche konstante nicht-verschwindende Abbildungen erkennt. Äquivalent können wir auch die Summe oder das Maximum von V mit der zusätzlichen Seminorm betrachten und erhalten einen normierten Raum.
- Wir verkleinern den Raum der Funktionen beschränkter Variation zu $BV(I,\mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} : V(f) < \infty \text{ und } f(0) = 0\}$ um die Konstanten ungleich 0 loszuwerden.
- Wir faktorisieren den Kern der Seminorm V heraus und erhalten einen Vektorraum von Äquivalenzklassen von Funktionen mit der von V induzierten Seminorm als Norm.

Da $\operatorname{Ker}(V)$ 1-dimensional ist, ist es im wesentlich egal, welchen der 3 Wege wir einschlagen, für andere Seminormen (siehe [**18**, 4.11.7]) ist das nicht mehr so.

Beweis. Es sei $BV(I,\mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} : f(0) = 0 \text{ und } V(f) < \infty\}$ und $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $BV(I,\mathbb{R})$. Wegen $|f(x)| \le V(f,Z) \le V(f)$ mit $Z = \{0,x,1\}$ und somit $\|f\|_\infty \le V(f)$ ist die Inklusion $BV(I,\mathbb{R}) \hookrightarrow B(I,\mathbb{R})$ stetig und somit konvergiert $f_n \to f_\infty$ gleichmäßig. Weiters ist die Konvergenz auch bezüglich V, denn

$$\begin{aligned} V(f_n - f_\infty, Z) &\le V(f_n - f_m, Z) + V(f_m - f_\infty, Z) \\ &\le V(f_n - f_m) + \sum_k |(f_m - f_\infty)(x_k)| + \sum_k |(f_m - f_\infty)(x_{k-1})| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

für alle $n > n(\varepsilon)$ falls $m > n(\varepsilon)$ in Abhängigkeit von Z so gewählt wurde, daß $|f_m(x_k) - f_\infty(x_k)| \le \frac{\varepsilon}{2|Z|}$ für alle Teilungspunkte x_k von Z.

Wegen $V(f_\infty) \le V(f_\infty - f_n) + V(f_n)$ ist $f_\infty \in BV(I,\mathbb{R})$. □

2.2.7 Folgerung. Vollständigkeit des Raums beschränkter linearer Abbildungen.

Seien E und F lokalkonvexe Räume, so ist die Menge $L(E,F) := \{f : E \to F \,|\, f \text{ ist linear und beschränkt}\}$ ein lokalkonvexer Raum bezüglich der punktweisen Vektoroperationen und den Seminormen der Form $f \mapsto \|q \circ f|_B\|_\infty$ mit allen beschränkten $B \subseteq E$ und allen SN'en q von F, siehe auch 3.1.1 und 3.1.3. Seine lokalkonvexe Topologie ist also jene der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen in E. Ist F (Folgen-)vollständig, so auch $L(E,F)$.

Beachte, daß $L(E,F)$ ein abzählbar seminormierter Raum ist, falls F ein solcher ist und zusätzlich eine abzählbare Subbasis der beschränkten Mengen in E existiert, d.h. eine Menge $\mathcal{B}$ beschränkter Mengen, s.d. jede beschränkte Menge B in einer Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathcal{B}$ enthalten ist.

Beweis. Vollständigkeit: Es sei $(f_i) \in L(E,F)$ ein Cauchy-Netz. Für jedes $x \in E$ konvergiert somit $f_i(x)$ gegen ein $f(x) \in F$. Weiters ist für jede beschränkte Menge $A \subseteq E$ das Netz $f_i|_A$ ein Cauchy-Netz in $B(A,F)$, und konvergiert somit nach 2.2.3 gegen ein $f_A \in B(A,F)$. Da das auch punktweise für $x \in A$ gelten muß, ist $f_A(x) = f(x)$. Die Abbildung f ist beschränkt, da $f(A) = f_A(A)$ beschränkt ist. Sie ist linear, da f_i punktweise gegen f konvergiert. Schließlich konvergiert $f_i \to f$ in $L(E,F)$, da für jedes A die Einschränkungen auf A es in $B(A,F)$ tun. □

Falls $F = \mathbb{K}$ ist, so bezeichnen wir mit $E' := L(E,\mathbb{K})$ den Raum aller beschränkten linearen Funktionale auf E und mit E^* den Teilraum aller stetigen linearen Funktionale auf E.

Falls $f : E \to F$ ein beschränkter (bzw. stetiger) linearer Operator ist, so bezeichnen wir mit $f^* : F' \to E'$ (bzw. $f^* : F^* \to E^*$) den ADJUNGIERTEN OPERATOR, der durch $f^*(\ell)(x) := \ell(f(x))$ gegeben ist.

2.2.8 Bemerkung. Vollständigkeit des Raums der stetigen Funktionen.

Ganz analog zeigt man, daß $C(X, F)$ versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen, also den Seminormen $f \mapsto \|p \circ f|_K\|_\infty$ für $K \subseteq X$ kompakt und stetige Seminormen p von F (Folgen-)vollständig ist, falls F (Folgen-)vollständig und X ein Kelley-Raum ist, d.h. ein Hausdorff-Raum für den jede Menge $A \subseteq X$, für welche $A \cap K \subseteq K$ abgeschlossen ist für alle kompakte $K \subseteq X$, selbst abgeschlossen ist, denn damit ist eine Abbildung $f : X \to F$ genau dann stetig, wenn es die Einschränkungen $f|_K : K \to F$ für alle kompakten $K \subseteq X$ sind.

Offensichtlich ist der Limes eines Netzes stetiger Funktionen auf allen kompakten Mengen stetig, und weil X Kelley ist, ist er damit auf ganz X stetig.

3. Konstruktionen

3.1 Allgemeine initiale Strukturen

3.1.1 Motivierende Beispiele.

Für kompakte Räume X haben wir in 1.2.2 und 2.2.5 den Raum der stetigen Funktionen $C(X,\mathbb{R})$ mittels der Supremumsnorm zu einem Banach-Raum gemacht. Für nicht kompaktes X geht das nicht mehr, da stetige Funktionen auf X nicht beschränkt sein müssen. Aber für jede kompakte Menge $K \subseteq X$ können wir eine SN $\|\_\|_K$ durch $\|f\|_K := \|f|_K\|_\infty$ definieren. Mittels der Familie dieser Seminormen für alle kompakten $K \subseteq X$, haben wir in 2.2.5 $C(X,\mathbb{R})$ zu einem LKV gemacht.

Ganz ähnlich sind wir in 2.2.7 bei $L(E,F)$ vorgegangen, indem wir für jede beschränkte Menge $A \subseteq E$ die Einschränkungsabbildung $\mathrm{ins}^* : f \mapsto f|_A$, $L(E,F) \to B(A,F)$ betrachtet haben und als Seminormen auf $L(E,F)$ die Zusammensetzungen $f \mapsto \|q \circ f|_A\|_\infty$ für die Seminormen q von F betrachtet haben.

Wir wollen nun das wesentliche aus diesen Konstruktionen herauskitzeln. Ausgangspunkt ist also ein Vektorraum $E := C(X,\mathbb{R})$ (bzw. $L(E,F)$) sowie eine Familie von linearen Abbildungen $f_K : E \to E_K$ mit Werten in LKV'en $E_K := C(K,\mathbb{R})$ (bzw. $B(A,F)$). Die f_K sind in unserem Fall gegeben durch $f_K : g \mapsto g|_K$. Ziel ist es nun mittels dieser Daten den Raum E möglichst kanonisch zu einem lokalkonvexen Raum zu machen.

3.1.2 Satz über initiale Strukturen.

Es sei eine Punkte-trennende Familie von linearen Abbildungen $f_k : E \to E_k$ eines Vektorraums E in LKV'e E_k gegeben.
Die Menge

$$\mathcal{P}_0 := \bigcup_k \{p \circ f_k : p \text{ Seminorm von } E_k\}$$

ist eine Subbasis der gröbsten Struktur (d.h. mit den wenigsten stetigen Seminormen) eines LKV'es E, so daß jedes f_k stetig ist. Wir nennen diese Struktur, die INITIALE STRUKTUR *bezüglich der Abbildungen f_k.*
Mit dieser Struktur hat E folgende universelle Eigenschaft:
Eine lineare Abbildung $f : F \to E$ von einem LKV F nach E ist genau dann stetig, wenn alle Zusammensetzungen $f_k \circ f$ es sind.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f_k"] & E_k \\ F \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\text{stetig, linear}"'] & \end{tikzcd}$$

Weiters gilt:
Die Topologie von E ist die initiale bezüglich der Familie der Abbildungen f_k, d.h. sie ist die gröbste, so daß alle f_k stetig sind.

Für Netze (x_i) in E und $x \in E$ gilt: $x_i \to x$ in $E \Leftrightarrow \forall k$: $f_k(x_i) \to f_k(x)$ in E_k.
Teilmengen $B \subseteq E$ sind beschränkt in $E \Leftrightarrow \forall k$: $f_k(B)$ ist beschränkt in E_k.
Ist die Familie der Abbildungen f_k endlich und sind die E_k normierbar so auch E.
Ist die Familie abzählbar und sind die E_k abzählbar seminormierte LKV'e so auch E.

Beweis.

Subbasis der gröbsten Struktur. Die f_k sind genau dann stetig, wenn $p \circ f_k$ eine stetige SN auf E ist für alle (stetige) SN'en von E_k; folglich hat der durch $\mathcal{P}_0$ erzeugte lokalkonvexe Raum E die kleinste Familie von SN'en, so daß alle f_k stetig sind.

Initiale Topologie. Da alle f_k bezüglich der von den SN'en erzeugten Topologie stetig sind, ist die initiale Topologie gröber oder gleich. Sei umgekehrt $U = a + q_{<\varepsilon}$ ein Element der Subbasis der durch die SN'en $q \in \mathcal{P}_0$ erzeugten Topologie. Dann ist $q = p \circ f_k$ für ein k und eine (stetige) SN p von E_k. Somit ist $U = a + q_{<\varepsilon} = \{x : p(f_k(x-a)) < \varepsilon\} = \{x : f_k(x) - f_k(a) \in p_{<\varepsilon}\} = (f_k)^{-1}(f_k(a) + p_{<\varepsilon})$ als Urbild offen in der initialen Topologie bezüglich der f_k.

Universelle Eigenschaft. Für lineare Abbildungen $f : F \to E$ gilt:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist } \textit{stetig} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall q \in \mathcal{P}_0 : q \circ f \text{ ist stetig} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall k\, \forall p \text{ SN von } E_k : p \circ f_k \circ f \text{ ist stetig} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall k : f_k \circ f \text{ ist stetig.} \end{aligned}$$

Konvergente Netze. Für Netze (x_i) in E und $x \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} & x_i \to x \text{ in } E \\ \Leftrightarrow\quad & \forall q \in \mathcal{P}_0 : q(x_i - x) \to 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall k\, \forall p \text{ SN von } E_k : p(f_k(x_i) - f_k(x)) = (p \circ f_k)(x_i - x) \to 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall k : f_k(x_i) \to f_k(x) \text{ in } E_k. \end{aligned}$$

Beschränkte Mengen. Für Teilmengen $B \subseteq E$ gilt:

$$\begin{aligned} & B \text{ ist beschränkt in } E \\ \Leftrightarrow\quad & \forall q \in \mathcal{P}_0 : q(B) \text{ ist beschränkt in } \mathbb{K} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall k\, \forall p \text{ SN von } E_k : p(f_k(B)) = (p \circ f_k)(B) \text{ ist beschränkt in } \mathbb{K} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall k : f_k(B) \text{ ist beschränkt in } E_k. \end{aligned}$$

Separiertheit. Es sei $q(x) = 0$ für alle $q \in \mathcal{P}_0$, d.h. $p(f_k(x)) = 0$ für alle k und alle (stetigen) SN'en p von E_k. Da E_k separiert ist, ist $f_k(x) = 0$ für alle k. Da die f_k Punkte trennen, ist $x = 0$.

Kardinalität einer Subbasis. Nach Konstruktion ist die Subbasis der SN'en von E abzählbar, falls es die der E_k sind und die Indexmenge der k abzählbar ist. Ist die Indexmenge endlich und alle E_k normierbar, so ist die Subbasis von E endlich. Wenn aber $\mathcal{P}_0 := \{p_1, \dots, p_N\}$ eine endliche Subbasis der SN'en von E ist, so ist auch $\{\max\{p_1, \dots, p_N\}\}$ eine Subbasis, und somit E normierbar. □

3.1.3 Beispiele initialer Strukturen.

Wir haben auf mehreren Räumen E von Funktionen $f : X \to F$ die Struktur der gleichmäßigen Konvergenz auf gewissen Teilmengen $K \subseteq X$ betrachtet. Insbesonders waren dies $C(X, F)$ und $L(X, F)$. Diese ist also genau die von den Einschränkungsabbildungen $\mathrm{inkl}_K^* : E \to B(K, F)$ induzierte initiale Topologie. Eine Teilmenge $A \subseteq E$ von Funktionen ist somit genau dann beschränkt, wenn $\mathrm{inkl}_K^*(A) \subseteq B(K, F)$ beschränkt ist, also $\{f(x) : f \in A, x \in K\}$ in F beschränkt ist nach 2.2.3, d.h. A auf den Mengen K gleichmäßig beschränkt ist.

Etwas allgemeiner ist auch die Struktur von $C^p(U, \mathbb{R}^m)$ von dieser Form, wobei man nun Ableitungen gefolgt von Einschränkungsabbildungen

$$C^p(U, \mathbb{R}^m) \to C^{p-j}(U, L(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)) \to B(K, \mathbb{R}^{n^j \cdot m})$$

betrachten muß. Also ist eine Teilmenge $A \subseteq C^p(U, \mathbb{R}^m)$ genau dann beschränkt, wenn jede Ableitung auf kompakten Mengen gleichmäßig beschränkt ist.

3.1.4 Folgerung. Struktur von Teilräumen.

Sei F ein linearer Teilraum eines LKV'es E. Wir versehen F mit der initialen Struktur bezüglich der Inklusion $\iota : F \to E$.

- *Die stetigen SN'en auf F sind genau die Einschränkungen von jenen auf E.*
- *Dann ist die Topologie von F die Spurtopologie von E.*
- *Eine Teilmenge von F ist genau dann beschränkt, wenn sie es in E ist.*
- *Ein Teilraum eines (Folgen-) vollständigen Raumes ist genau dann (Folgen-) vollständig wenn er (Folgen-) abgeschlossen ist.*

Beweis.

Fortsetzen stetiger Seminormen. Sei q eine stetige Seminorm von F und $U_0 := q_{<1}$ ihr offener Einheitsball. Nach 1.4.2.2 gibt es endlich viele $q_i \in \mathcal{P}_0 := \{p|_F : p \text{ ist SN von} E\}$ und ein $K > 0$ mit $q \le K \cdot \max\{q_1, \dots, q_N\}$. Seien p_i stetige SN'en von E mit $(p_i)|_F = q_i$ und sei $p := K \cdot \max\{p_1, \dots, p_N\}$. Dann ist p eine stetige SN auf E und es gilt $q \le p|_F$. Für die offene Einheitskugel $U_1 := p_{<1}$ gilt somit nach 1.3.7: $U_1 \cap F \subseteq U_0$. Es sei nun U die absolut-konvexe Hülle von $U_0 \cup U_1$. Da U_0 und U_1 selbst absolut-konvex sind, ist

$$U = \Big\{(1-t)u_0 + tu_1 : u_0 \in U_0, u_1 \in U_1, 0 \le t \le 1\Big\} = \bigcup_{0 \le t \le 1} U_t,$$

wobei $U_t := \{(1-t)u_0 + tu_1 : u_0 \in U_0, u_1 \in U_1\}$. Da $U_t = \bigcup_{u_0 \in U_0} (1-t)u_0 + t\,U_1$ ist, und U_1 offen ist, ist auch U_t offen in E für $t \ne 0$.

Wir wollen nun zeigen, daß $U_0 \subseteq \bigcup_{0<t\le 1} U_t$ ist, und somit $U = \bigcup_{0<t\le 1} U_t$ ist. Als Nebenresultat erhalten wir damit, daß U offen ist. Sei dazu $u_0 \in U_0 \subseteq F$. Da U_0 in F offen ist und $U_1 \cap F$ eine 0-Umgebung in F ist, existiert ein $0 < t \le 1$, s.d. $t\,u_0 \in U_1 \cap F$ und $(1+t)\,u_0 \in U_0$. Damit ist aber $u_0 = (1-t)\,(1+t)\,u_0 + t\,t\,u_0 \in U_t$ für dieses $t > 0$.

Weiters gilt $U_0 = U \cap F$: Einerseits ist $U_0 \subseteq U$ und $U_0 \subseteq F$. Andererseits sei $u \in U \cap F$, dann ist $u \in U_t$ für ein $0 < t \le 1$, d.h. $u = (1-t)u_0 + tu_1$ mit $u_0 \in U_0$ und $u_1 \in U_1$. Also ist $u_1 = \frac{1}{t}(u - (1-t)u_0) \in U_1 \cap F \subseteq U_0$ und da U_0 konvex ist, gilt $u = (1-t)u_0 + tu_1 \in U_0$.

Nun sei $\tilde{q}$ das Minkowski-Funktional p_U von U (siehe 1.3.5). Dann ist $\tilde{q}|_F$ das Minkowski-Funktional von $U \cap F = U_0 = q_{<1}$ und dieses stimmt nach 1.3.3 mit q überein.

Die Aussage über die **Spurtopologie** und **beschränkte Teilmengen** folgt direkt aus dem Satz 3.1.2.

Vollständigkeit abgeschlossener Teilräume. Dies haben wir bereits in 2.2.4 gezeigt.

Abgeschlossenheit vollständiger Teilräume. Es sei x_i ein(e) gegen x in E konvergentes Netz (Folge) in F, dann ist x_i ein(e) Cauchy-Netz (Cauchy-Folge) in E, und somit konvergiert das Netz $x_{i,j} := x_i - x_j$ gegen 0 in E. Nach 3.1.2 konvergiert es also auch in F, d.h. x_i ist ein(e) Cauchy-Netz (Cauchy-Folge) in F. Da F als (Folgen-) vollständig vorausgesetzt ist, konvergiert x_i gegen ein y in F, und weil die Inklusion stetig ist, also auch in E. Da E separiert ist müssen die beiden Grenzwerte x und y übereinstimmen, also ist $x = y \in F$. □

3.1.5 Teilräume des Banach-Raums $B(X)$, siehe Lemma 2.2.3.

Sei X ein topologischer Raum. So ist $C_b(X) := C(X) \cap B(X)$ ein abgeschlossener Teilraum von $B(X)$ und somit selbst ein Banach-Raum.

Weiters ist $C_0(X)$ seinerseits ein abgeschlossener Teilraum von $C_b(X)$, und somit selbst ein Banach-Raum.

3.2 Produkte

3.2.1 Folgerung. Struktur von Produkten.

Seien E_k LKV'e und $E = \prod_k E_k$ ihr kartesisches Produkt*, versehen mit der initialen Struktur bezüglich der Projektionen $\mathrm{pr}_k : E \to E_k$ auf die einzelnen Faktoren.*

- *Dann ist die Topologie von E die Produkttopologie.*
- *Die Konvergenz ist die Koordinaten- (oder Komponenten-)weise Konvergenz.*
- *Eine Menge B ist in E beschränkt genau dann, wenn sie in einem Produkt $\prod_k B_k$ beschränkter Mengen $B_k \subseteq E_k$ enthalten ist.*
- *Das Produkt (Folgen-) vollständiger Räume ist (Folgen-) vollständig.*
- *Ein Produkt bornologischer Räume ist wieder bornologisch falls es nicht aus zuvielen Faktoren besteht; Genauer falls die Indexmenge kleiner als die erste meßbare Kardinalzahl ist. Ob eine solche existiert hängt von der verwendeten Mengenlehre ab.*

Beweis.

Produkttopologie und Konvergenz. Die Produkttopologie ist per Definition die gröbste Topologie, s.d. die Projektionen $\mathrm{pr}_k : E \to E_k$ stetig sind, also ist dies die Topologie des LKV'es E nach dem Satz 3.1.2. Ebenso folgt die Aussage über Konvergenz aus dem Satz. Eine Basis ist gegeben durch die Produkte $\prod_k U_k$ mit $U_k \subseteq E_k$ offen und $U_k = E_k$ bis auf endlich viele Indizes k.

Beschränkte Mengen. Eine Menge $B \subseteq E$ ist nach dem Satz genau dann beschränkt, wenn $B_k := \mathrm{pr}_k(B) \subseteq E_k$ beschränkt ist für alle k. Da immer $B \subseteq \prod_j B_j$ folgt das gewünschte, denn wegen $\mathrm{pr}_k(\prod_j B_j) = B_k$ ist $\prod_j B_j$ beschränkt.

Vollständigkeit. Sei x_i ein Cauchy-Netz in E, dann bildet die k-te Koordinate von x_i wegen der Stetigkeit und Linearität von pr_k ein Cauchy-Netz in E_k, und konvergiert somit in E_k. Nach Beschreibung der Konvergenz, konvergiert dann aber x_i gegen den Punkt $x \in E$ dessen k-te Koordinate gerade $\lim_i \mathrm{pr}_k(x_i)$ ist.

Bornologizität. Der Beweis dieser Aussage folgt aus dem nachstehenden Theorem 2.2.3 zusammen mit Bemerkung 2.2.4. □

3.2.2 Definition. Ulam-Maße.

Ein Ulam-Mass auf einer Menge J ist ein $\{0,1\}$-wertiges Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(J)$ also eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(J) \to \{0,1\}$, welche $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ für alle paarweise disjunkten Mengen $A_n \subseteq J$ erfüllt. Es heißt nicht-trivial, falls $\mu(\{j\}) = 0$ für alle $j \in J$, aber $\mu \neq 0$.

Offensichtlich ist ein Ulam-Maß μ eindeutig durch $\mathcal{F} := \mu^{-1}(1)$ bestimmt. Für $\mu \neq 0$ ist dies ein Filter auf J, denn

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$, da $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \bigcup \emptyset) = 2 \cdot \mu(\emptyset)$, also $\mu(\emptyset) = 0$ ist.
- Seit $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B \subseteq J$. Dann ist
$$1 \geq \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A) = 1,$$
also $\mu(B) = 1$, d.h. $B \in \mathcal{F}$.
- Sei indirekt angenommen $A, B \in \mathcal{F}$ und $A \cap B \notin \mathcal{F}$, dann ist
$$1 = \mu(A) = \mu(A \setminus A \cap B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \setminus A \cap B)$$
und somit $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus A \cap B) + \mu(B) = 2 \notin \{0,1\}$.

Es ist $\mathcal{F}$ sogar ein Ultrafilter, d.h. ein bzgl. Inklusion maximaler Filter (oder äquivalent $A \subseteq J \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ oder $A^c := J \setminus A \in \mathcal{F}$), denn angenommen $A \notin \mathcal{F}$ und $A^c \notin \mathcal{F}$. Dann ist $\mu(J) = \mu(A) + \mu(A^c) = 0 + 0$ ein Widerspruch zu $\mu(J) \neq 0$.

Es ist $\mathcal{F}$ auch ein δ-Filter, d.h. mit $A_n \in \mathcal{F}$ ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$: Andernfalls ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c \in \mathcal{F}$ und $A_n^c \notin \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\mu(A_n^c) = 0$ aber $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c) \neq 0$, ein Widerspruch zur σ-(Sub)additivität, denn sei $B_n := A_n^c$ und $C_n := B_n \setminus \bigcup_{k<n} B_k$, dann ist $\bigcup_n B_n = \bigsqcup_n C_n$ und $\mu(C_n) \leq \mu(B_n) = 0$, aber $\mu(\bigcup_n C_n) \neq 0$.

Umgekehrt sei ein δ-Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf J gegeben, dann ist $0 \neq \mu := \chi_{\mathcal{F}} : \mathcal{P}(J) \to \{0,1\}$ ein Ulam-Maß: Seien nämlich die $A_n \subseteq J$ paarweise disjunkt. Wegen der offensichtlichen Monotonie von μ ist nur zu zeigen, daß aus $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ die Existenz eines (eindeutigen) $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_n) = 1$ folgt. Wäre $\mu(A_n) = 1$ für mindestens zwei n, so wären diese $A_n \in \mathcal{F}$ und damit auch ihr leerer Durchschnitt. Sei also indirekt angenommen $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $A_n \notin \mathcal{F}$ und damit $A_n^c \in \mathcal{F}$. Wegen der δ-Filter Eigenschaft wäre dann auch $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{F}$, also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{F}$, i.e. $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$, ein Widerspruch.

Beachte, daß das Ulam-Maß μ genau dann nicht-trivial ist, wenn $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, denn $j \in \bigcap \mathcal{F} \Leftrightarrow \mu(\{j\}) = 1$:
$\mu(\{j\}) = 1 \Rightarrow \{j\} \in \mathcal{F} \Rightarrow j \in A$ für alle $A \in \mathcal{F}$, andernfalls ist $\emptyset = \{j\} \cap A \in \mathcal{F}$ und umgekehrt folgt aus $\mu(\{j\}) = 0$, daß $j \notin A := \{j\}^c \in \mathcal{F}$.

Weiters gilt $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists! j \in J : \mathcal{F} = \{A \subseteq J : j \in A\}$: Sei $j \in \bigcap \mathcal{F}$. Wegen $j \notin \{j\}^c$ ist $\{j\} \in \mathcal{F}$ auf Grund der Ultrafilter-Eigenschaft, also $\mathcal{F} = \{A \subseteq J : j \in A\}$.

Eine Kardinalzahl heißt messbar, wenn ein nicht-triviales Ulam-Maß auf ihr existiert. Falls meßbare Kardinalzahlen existieren, so ist die kleinste meßbare Kardinalzahl m unerreichbar, d.h. $\aleph_0 < m$, weiters $c < m \Rightarrow 2^c < m$, sowie $k < m$ und $c_i < m$ für alle $i \in k \Rightarrow \sum_{i\in k} c_i < m$, siehe [36] bzw. [16] und [28].

3.2.3 Theorem. Beschränkte Funktionale auf Produkten.

Für Mengen J sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *Alle beschränkt linearen Funktionale auf $\mathbb{R}^J := \prod_J \mathbb{R}$ sind stetig;*
2. *Alle Algebra-Homomorphismen $\mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ sind Koordinatenprojektionen pr_j für $j \in J$;*
3. *J läßt nur triviale Ulam-Maße zu, d.h. die Kardinalität von J ist kleiner als die kleinste meßbare Kardinalzahl.*

($\boxed{1}\Leftrightarrow\boxed{3}$) stammt von [29]und ($\boxed{2}\Leftrightarrow\boxed{3}$) von [12].

Beweis. ($\boxed{1}\Leftarrow\boxed{3}$) Sei $f : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ beschränkt linear. Wir müssen zeigen, daß f stetig ist.

Es ist $A := \{j \in J : f(e^j) \neq 0\}$ endlich, wobei e^j der j-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^J$ sei, also alle Koordinaten 0 bis auf 1 an der j-ten Stelle hat: Andernfalls existieren paarweise verschiedene $j_n \in A$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $f(e^{j_n}) \neq 0$. Dann ist $\{\frac{n}{f(e^{j_n})} e^{j_n} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt in $\mathbb{R}^J$, aber $f(\frac{n}{f(e^{j_n})} e^{j_n}) = n$ unbeschränkt, ein Widerspruch zu f beschränkt. Somit ist $g : x \mapsto f(x \cdot \chi_A)$, $\mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ stetig und $h := f - g$ ist beschränkt linear und verschwindet auf $\mathbb{R}^{(J)} := \{x \in \mathbb{R}^J : \{j : x_j \neq 0\}$ ist endlich$\}$. Es genügt also $h = 0$ zu zeigen.

Sei indirekt $h \neq 0$ angenommen. Wir betrachten $\mathcal{H} := \{I \subseteq J : h_I := h|_{\mathbb{R}^I} \neq 0\}$. Der Filter $\{J\}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{H}$ und die Vereinigung einer linear geordneten Teilmenge von Filtern von J, die in $\mathcal{H}$ enthalten sind, ist so ein Filter. Nach dem Zorn'schen Lemma existiert somit ein maximaler Filter $\mathcal{F}$ der in $\mathcal{H}$ enthalten ist.

Es ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter: Sei $I \subseteq J$. Falls $I \cap A \notin \mathcal{H}$ und $I^c \cap B \notin \mathcal{H}$ für gewisse $A, B \in \mathcal{F}$, dann ist $C := A \cap B \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ aber $h_C = h_{I\cap C} + h_{I^c \cap C} = 0$, also $C \notin \mathcal{H}$, ein Widerspruch. Somit ist $I \cap A \in \mathcal{H}$ für alle $A \in \mathcal{F}$ oder $I^c \cap A \in \mathcal{H}$ für alle $A \in \mathcal{F}$. Wegen der Maximalität (der von $\{I \cap A : A \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter $\{B : \exists A \in \mathcal{F}$ mit $I \cap A \subseteq B\} \supseteq \mathcal{F}$ ist in $\mathcal{H}$ enthalten) ist dann $I \in \mathcal{F}$ bzw. $I^c \in \mathcal{F}$.

Es ist $\mathcal{F}$ ein δ-Filter (und definiert somit ein Ulam-Maß): Seien $A_n \in \mathcal{F}$ beliebig und $A_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Angenommen $A_\infty \cap A = \emptyset$ für ein $A \in \mathcal{F}$. Da $B_n := A \cap \bigcap_{k\le n} A_k \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ existiert ein $b^n \in \mathbb{R}^{B_n} \subseteq \mathbb{R}^J$ mit $h(b^n) \geq n$. Wegen $B_{n+1} \subseteq B_n$ und $\bigcap_n B_n = \emptyset$ liegt jedes $i \in J$ nur in endlich vielen B_n, also ist $b^n_i = 0$ für alle bis auf endlich viele n und damit $\{b^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^J$ beschränkt aber h darauf unbeschränkt, ein Widerspruch. Somit ist $A_\infty \cap A \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{F}$ und wegen der Maximalität ($\{A_\infty \cap A : A \in \mathcal{F}\}$ erzeugt dann wie zuvor einen in $\mathcal{H}$ enthaltenen Filter) ist $A_\infty \in \mathcal{F}$.

Da Ulam-Maße auf J nach Voraussetzung trivial sind, existiert ein i mit $\{i\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$, ein Widerspruch zu $h|_{\mathbb{R}^{(J)}} = 0$.

($\boxed{1}\Rightarrow\boxed{2}$) Sei $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ ein Algebra-Homomorphismus. Für jedes $x \in \mathbb{R}^I$ existiert ein i mit $f(x) = x_i$, andernfalls ist $x - f(x) \cdot 1$ invertierbar, also $0 \neq f(x - f(x) \cdot 1) = f(x) - f(x) \cdot f(1) = 0$ ein Widerspruch. Folglich ist f monoton, da zu $x, y \in \mathbb{R}^I$ ein $i \in I$ existiert mit $f(x) = x_i$ und $f(y) = y_i$, andernfalls betrachte $(x - f(x))^2 + (y - f(y))^2$. Schließlich ist f beschränkt, denn sei $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^I$ beschränkt und $f(\mathcal{B})$ unbeschränkt. Dann können wir $x^n \in \mathcal{B}$ mit $|f(x^n)| > 2^n$ finden und indem wir x^n durch $(x^n)^2 \in \mathcal{B}^2$ ersetzen dürfen wir $x^n \geq 0$ voraussetzen. Dann konvergiert

$x^\infty := \sum_n \frac{1}{2^n} x^n \in \mathbb{R}^I$ (vgl. mit 2.2.2) und

$$f(x^\infty) = f\Big(\sum_{n\le N} \frac{1}{2^n} x^n + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} x^n\Big) = \sum_{n\le N} \frac{1}{2^n} f(x^n) + f\Big(\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} x^n\Big)$$
$$\ge \sum_{n\le N} \frac{1}{2^n} f(x^n) + 0,$$

wegen der Monotonie von f. Damit ist $\sum_n \frac{1}{2^n} f(x^n)$ monoton, beschränkt und somit konvergent, aber ihre Summanden nach unter durch 1 beschränkt, ein Widerspruch. Nach (1) ist somit f stetig, also nur von endlich vielen Koordinaten abhängig(!) und somit eine Punktevaluation, denn für $i \neq j$ ist $0 = f(e^i \cdot e^j) = f^i \cdot f^j$ mit $f^i := f(e^i)$, also nicht $f^i \neq 0 \neq f^j$.

(2⇒3) Sei $\mu : \mathcal{P}(J) \to \{0,1\}$ ein nicht-triviales Ulam-Maß. Dann ist $\mathcal{F} := \mu^{-1}(1)$ ein δ-Ultrafilter mit $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Für $x \in \mathbb{R}^J$ betrachten wir den von den Mengen $x(I) := \{x_i : i \in I\}$ mit $I \in \mathcal{F}$ erzeugten (Bild-)Filter $\mathcal{F}_x$ in $\mathbb{R}$. Dies ist ein δ-Ultrafilter(!) auf $\mathbb{R}$ und da $\mathbb{R}$ nur triviale Ulam-Maße μ_x zuläßt ($|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ ist erreichbar!), existiert ein (eindeutiges) $f_x \in \mathbb{R}$ mit $\mu_x(\{f_x\}) = 1$, d.h. $\{f_x\} \in \mathcal{F}_x$, also $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq \mathbb{R} : f_x \in A\}$. Insbesonders existiert ein $A_x \in \mathcal{F}$ mit $\emptyset \neq x(A_x) \subseteq \{f_x\}$, also $\{f_x\} = x(A_x)$.

Da $\mathrm{pr}_i : x \mapsto x_i$ ein Algebra-Homomorphismus für jedes i ist, ist auch $f : x \mapsto f_x$ ein solcher: Für $x, y \in \mathbb{R}^I$ existieren $A_x, A_y \in \mathcal{F}$ mit $\{f_x\} = x(A_x)$ und $\{f_y\} = y(A_y)$ und somit ist $C := A_x \cap A_y \in \mathcal{F}$ und $x(C) = \{f_x\}$ und $y(C) = \{f_y\}$, also ist

$f_{x\cdot y} \in (x \cdot y)(C) \subseteq x(C) \cdot y(C) = \{f_x\} \cdot \{f_y\} = \{f_x \cdot f_y\}$, d.h. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Weiters ist $f_1 \in 1(I) = \{1_i : i \in I\} = \{1\}$ für alle $I \in \mathcal{F}$ also $f(1) = 1$.

Wegen 2 ist $f = \mathrm{pr}_j$ für ein $j \in J$, aber wegen $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ existiert für jedes $j \in J$ ein $A \in \mathcal{F}$ mit $j \notin A$, also ist $1 = \mathrm{pr}_j(e^j) = f(e^j) \in e^j(A) = \{0\}$, ein Widerspruch. □

3.2.4 Bemerkung. Bornologizität von Funktionenräumen.

Wir werden später zeigen (siehe auch [**14**, S.281]), daß $\mathbb{R}^I$ genau dann bornologisch ist, oder auch nur alle beschränkt linearen Funktionale auf $\mathbb{R}^I$ stetig sind, also die Kardinalität von I nicht meßbar ist, wenn $\prod_{i\in I} E_i$ bornologisch ist für alle bornologischen Räume E_i.

Allgemeiner heißt ein vollständig regulärer topologischer Raum (anstelle einer diskreten Menge) X reell-kompakt wenn die einzigen Algebra-Homomorphismen $C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Punktauswertungen sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn er ein abgeschlossener Teilraum einer Potenz $\mathbb{R}^J$ ist, siehe [**26**, 2.5.2]. Ein diskreter Raum ist also nach 3.2.3 genau dann reell-kompakt, wenn seine Kardinalität nicht-meßbar ist.

Nach einem Theorem von [**30**] and [**34**] ist $C(X, \mathbb{R})$ für einen vollständig regulären Raum X genau dann bornologisch, wenn X reell-kompakt ist.

Nach einem Theorem von [**32**] ist auch für abzählbar seminormierte Räume E und vollständig reguläres X der Raum $C(X, E)$ genau dann bornologisch, wenn X reell-kompakt ist.

Nach einem in [**33**] erwähnten Beispiel von Susanne Dierolf ist $C(\mathbb{N}_\infty, \mathbb{R}^{(J)})$ für überabzählbares J nicht bornologisch, obwohl die 1-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{N}_\infty$ von $\mathbb{N}$ kompakt und damit reell-kompakt und $\mathbb{R}^{(J)}$ bornologisch ist, siehe 3.3.2.

3.2.5 Beispiele.

Sei eine punktetrennende Familie von linearen Abbildungen $f_k : E \to E_k$ auf einem Vektorraum E mit Werten in LKV'en E_k gegeben. Dann ist die initiale Struktur auf E gerade durch die Einbettung von E in das Produkt $\prod_k E_k$ gegeben, welche $x \in E$ auf $(f_k(x))_k \in \prod_k E_k$ abbildet.

Für einen topologischen Hausdorffraum X läßt sich also $C(X,\mathbb{K})$ als Teilraum des Produkts $\prod_K C(K,\mathbb{K})$ auffassen, wobei K die kompakten Teilmengen von X durchläuft. Die Topologie von $C(X,\mathbb{K})$ ist dann natürlich jene der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen $K \subseteq X$. Man überlege sich, daß dieser Teilraum abgeschlossen ist, falls X ein Kelley-Raum ist, d.h. eine Menge A in X abgeschlossen ist genau dann, wenn ihr Durchschnitt $A \cap K$ in K abgeschlossen ist, für alle kompakten $K \subseteq X$. Falls eine abzählbare Basis der kompakten Mengen von X existiert, also eine abzählbare Familie kompakter Mengen K_n, sodaß jede kompakte Teilmenge von X in einem K_n enthalten ist, dann ist $C(X,\mathbb{K})$ ein abzählbar seminormierter Raum. Falls X lokalkompakt und σ-kompakt (d.h. eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen) ist, so ist $C(X,\mathbb{K})$ ein Fréchet-Raum, d.h. ein vollständiger abzählbar seinormierter LKV.

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, so ist der Raum der holomorphen Funktionen $H(G,\mathbb{C})$ ein abgeschlossener(!) Teilraum von $C(G,\mathbb{C})$ und somit selbst ein Fréchet-Raum.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, dann läßt sich der Raum $C^\infty(I,\mathbb{R})$ der glatten Funktionen durch $f \mapsto (f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ als (wegen [**20**, 4.2.11]) abgeschlossener Teilraum in $\prod_{n\in\mathbb{N}} C(I,\mathbb{R})$ einbetten. Somit ist $C^\infty(I,\mathbb{R})$ ein vollständiger abzählbar seminormierter LKV. Seine Topologie ist die der gleichmäßigen Konvergenz in jeder Ableitung getrennt. Allgemeiner läßt sich für jede offene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^m$ der Raum $C^\infty(X,\mathbb{R})$ zu einen Fréchet-Raum machen.

3.3 Allgemeine finale Strukturen

3.3.1 Motivierendes Beispiel der konvergenten Potenzreihen.

Wir wollen nun den Raum E der lokal konvergenten Potenzreihen zu einem LKV machen. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ ist natürlich durch ihre Koeffizienten a_n eindeutig bestimmt, und die Addition und Skalarmultiplikation konvergenter Potenzreihen drückt sich durch Addition und Skalarmultiplikation ihrer Koeffizienten aus. Also ist es naheliegend E mit $\{(a_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \infty\}$ zu identifizieren.

Ein erster Ansatz wäre dann E mit der initialen Struktur als Teilraum des Produkts $\mathbb{C}^\mathbb{N} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}$ aufzufassen, aber darin ist er leider nicht abgeschlossen, denn die Polynome (= endliche Folgen) liegen dicht in $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ (Beweis!). Diese Struktur ist also zu grob, andererseits ist leider $(a_n)_n \mapsto \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ keine Seminorm. Wenn wir aber für $r > 0$ den linearen Teilraum E_r der Potenzreihen mit Konvergenzradius $1/(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}) > r$ betrachten, so haben wir darauf eine passende Norm nämlich $(a_n)_n \mapsto \sup\{|a_n|\, r^n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir können also E als Vereinigung $\bigcup_{r>0} E_r$ normierter Räume E_r schreiben. Nun wollen wir mittels der Familie von Inklusionen $f_r : E_r \to E$ auf eine möglichst natürliche Weise E zu einem (vollständigen) LKV machen. Insbesondere sollen die Abbildungen $f_r : E_r \to E$ stetig sein, also für eine stetige SN q auf E die Zusammensetzung $q \circ f_r$ eine stetige SN auf E_r liefern.

3.3.2 Satz über finale Strukturen.

Sei $f_k : E_k \to E$ eine Familie von linearen Abbildungen von LKV'en in einen Vektorraum E. Der Vektorraum E versehen mit der Menge

$$\mathcal{P} := \Big\{p \text{ ist Seminorm auf } E : \forall k \text{ ist } p \circ f_k \text{ eine stetige Seminorm von } E_k\Big\}$$

ist jener **nicht notwenig separierte** *lokalkonvexe Raum, welcher die feinste Struktur trägt, s.d. jedes $f_k : E_k \to E$ stetig ist. Wir nennen diese Struktur die* FINALE STRUKTUR *bezüglich der Familie der Abbildungen f_k. Mit dieser Struktur hat E die folgende universelle Eigenschaft: Eine lineare Abbildung $f : E \to F$ in einen lokalkonvexen Raum F ist genau dann stetig, wenn alle Zusammensetzungen $f \circ f_k : E_k \to F$ es sind. Sind alle E_k bornologisch, so auch E.*

Im allgemeinen gibt es weder für die Topologie, noch die Konvergenz, noch die beschränkten Mengen, noch die Separiertheit eine direkte Beschreibung ähnlich jener bei initialen Strukturen.

Beweis.

Feinste Struktur. Die Abbildungen $f_k : E_k \to E$ sind genau dann stetig, wenn alle stetigen SN'en von E zu $\mathcal{P}$ gehören. Bleibt also zu zeigen, daß $\mathcal{P}$ einen lokalkonvexen Raum beschreibt. Sei dazu q eine Seminorm auf E, für welche endlich viele $q_i \in \mathcal{P}$ existieren und ein $R > 0$, s.d. $q \leq R \cdot \max\{q_1, \dots, q_N\}$ ist. Dann gilt die gleiche Ungleichung auch für die Zusammensetzungen von q und q_i mit f_k, also ist $q \circ f_k$ eine stetige SN auf E_k, und somit gehört q zu $\mathcal{P}$, also ist E zusammen mit $\mathcal{P}$ ein lokalkonvexer Raum nach Lemma 1.4.2, und die Struktur ist die feinste, s.d. alle f_k stetig sind. Daraus ergibt sich direkt die gewünschte universelle Eigenschaft mittels 2.1.1.

$$\begin{tikzcd} E_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[dr, "p\circ f_k"'] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & F \arrow[dl, "q"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Bornologizität. Sei $f : E \to F$ eine beschränkte lineare Abbildung, dann ist auch $f \circ f_k$ beschränkt, denn jede stetige Abbildung (wie f_k) ist auch beschränkt, nach Lemma 2.1.4. Da E_k als bornologisch vorausgesetzt wurde, ist $f \circ f_k : E_k \to F$ stetig. Wegen der universellen Eigenschaft ist folglich f stetig. □

Bezüglich der anderen Eigenschaften die nicht notwendig vererbt werden, schränken wir unsere Betrachtungen auf Spezialfälle ein.

3.3.3 Folgerung. Quotienten.

Sei E ein LKV und F ein linearer Teilraum. Wir versehen den QUOTIENTEN-RAUM *$E/F := \{x + F : x \in E\}$ der Nebenklassen $x + F$ in E bezüglich F mit der finalen Struktur bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : x \mapsto x + F$ von $E \to E/F$.*
Dann trägt E/F die Quotienten-Topologie, d.h. die feinste Topologie s.d. $\pi : E \to E/F$ stetig ist. Weiters ist π offen.
Der Quotienten-Raum E/F ist separiert genau dann, wenn F abgeschlossen ist in E.
Die stetigen SN von E/F sind genau die Abbildungen $\tilde{q}(x + F) := \inf\{q(x + y) : y \in F\}$, wobei q die stetigen Seminormen von E durchläuft. Ist E normierbar (bzw. abzählbar seminormierter LKV) und F abgeschlossen so ist auch E/F normierbar (bzw. abzählbar seminormierter LKV).

Bezüglich Vollständigkeit haben wir leider keine allgemeine Aussage, siehe aber 3.5.3.

Beweis.

Stetige SN'en von E/F. Zu jeder SN q auf E definieren wir eine neue SN q_F durch $q_F(x) := \inf\{q(x+y) : y \in F\}$. Dieses Infimum existiert, da $q(x+y) \geq 0$. Es ist q_F eine Seminorm, denn für $\lambda \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} q_F(\lambda x) = \inf\{q(\lambda x + y) : y \in F\} &= \inf\{q(\lambda(x + \tfrac{1}{\lambda} y)) : y \in F\} \\ &= \inf\{|\lambda|\, q(x+z) : z \in \frac{1}{\lambda} F = F\} = |\lambda|\, q_F(x) \end{aligned}$$

und die Subadditivität von q_F folgt aus

$$\begin{aligned} q_F(x_1 + x_2) &= \inf\Big\{ q(x_1 + x_2 + y) : y \in F = F + F \Big\} \\ &= \inf\Big\{ q(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) : y_1 \in F, y_2 \in F \Big\} \\ &\leq \inf\Big(\{q(x_1 + y_1) : y_1 \in F\} + \{q(x_2 + y_2) : y_2 \in F\} \Big) \\ &= \inf\big\{ q(x_1 + y_1) : y_1 \in F \big\} + \inf\big\{ q(x_2 + y_2) : y_2 \in F \big\} \\ &= q_F(x_1) + q_F(x_2). \end{aligned}$$

Weiters ist $(q_F)_{<1} \subseteq q_{<1} + F$ (in der Tat sogar gleich, und somit ist q_F das Minkowski-Funktional von $q_{<1} + F$), denn $1 > q_F(x) = \inf\{q(x+y) : y \in F\} \Rightarrow \exists y \in F : q(x+y) < 1$, also $x = (x+y) + (-y)$ mit $x + y \in q_{<1}$ und $-y \in -F = F$. Falls q stetig ist, so auch q_F, denn $q_F \leq q$. Da q_F nach Konstruktion konstant ist auf Nebenklassen $x + F$, faktorisiert q_F zu einer Seminorm $\tilde{q}$ auf E/F, die nach Konstruktion der finalen Struktur auch stetig ist. Umgekehrt sei $\tilde{q}$ eine stetige SN auf E/F, dann ist $q := \tilde{q} \circ \pi$ stetige SN auf E die konstant ist auf Nebenklassen $x + F$. Also ist $q_F = q$ und $\tilde{q}$ die zu q durch obige Konstruktion assoziierte SN auf E/F.

Die Aussage über die Kardinalität einer Subbasis ist nun evident.

Quotiententopologie und Offenheit von π. Eine Menge $V \subseteq E/F$ ist offen in der Quotienten-Topologie genau dann, wenn $\pi^{-1}(V)$ offen ist in E. Wir zeigen nun die Gleichheit der Topologien und die Offenheit von π.

Sei also U offen in E, dann ist $\pi^{-1}(\pi(U)) = U + F = \bigcup_{y \in F} U + y$ offen in E, und somit $V := \pi(U)$ offen in der Quotienten-Topologie.

Wenn $V \subseteq E/F$ offen ist in der Quotienten-Topologie, dann ist $U := \pi^{-1}(V)$ offen in E. Es sei $0 \in V$, dann genügt es o.B.d.A. zu zeigen, daß V eine 0-Umgebung in der von den Seminormen erzeugten Topologie ist. Es existiert eine stetige SN q auf E mit $q_{<1} \subseteq U$ und folglich gilt $(q_F)_{<1} \subseteq q_{<1} + F \subseteq U + F = U$. Damit ist aber $\tilde{q}_{<1} \subseteq V$, denn

$$1 > \tilde{q}(x + F) = q_F(x) \Rightarrow x \in U = \pi^{-1}(V) \Rightarrow x + F = \pi(x) \in \pi(\pi^{-1}(V)) \subseteq V,$$

und somit V eine 0-Umgebung in der von den SN'en erzeugten Topologie.

Ist schließlich $V \subseteq E/F$ offen in der von den SN'en erzeugten Topologie, so ist $U := \pi^{-1}(V) \subseteq E$ offen in E und damit V offen in der Quotienten-Topologie.

Separiertheit. Es sei E/F separiert. Dann ist

$$\{0\} = \bigcap \{q^{-1}(0) : q \text{ ist SN von } E/F\},$$

also $\{0\} \subseteq E/F$ abgeschlossen, und somit $F = \pi^{-1}(0) \subseteq E$ abgeschlossen.
Umgekehrt, sei $F \subseteq E$ abgeschlossen. Dann ist $E \setminus F$ offen und, da π eine offene Abbildung ist, auch $\pi(E \setminus F) = E/F \setminus \{0\}$. Also ist $\{0\}$ in E/F abgeschlossen. Folglich ist E/F separiert, denn $q(y) = 0$ für alle q, hat zur Folge, daß die konstante Folge 0 gegen y konvergiert und, da $\{0\}$ abgeschlossen ist, folgt $y = 0$. □

3.3.4 Kern einer Seminorm.

Es sei $p : E \to \mathbb{R}$ eine Seminorm des LKV'es E, dann ist der Kern $\operatorname{Ker}(p) := p^{-1}(0)$ von p ein abgeschlossener Teilraum, denn $p(x) = 0 = p(y)$ impliziert $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = |\lambda| 0 = 0$ und $0 \le p(x+y) \le p(x)+p(y) = 0+0$. Somit ist $E_p := E/\operatorname{Ker}(p)$ mit $\tilde{p}$ ein normierter Raum. Man beachte noch, daß $p_F = p$, denn $p(x) - 0 = p(x) - p(-y) \le p(x+y) \le p(x) + p(y) = p(x) + 0$ für $y \in \operatorname{Ker}(p)$.

Folglich ist jeder LKV E einbettbar als Teilraum in das Produkt $\prod_p E_p$, wobei p die Seminormen von E durchläuft. Die Einbettung ist gegeben durch $x \mapsto (x+\operatorname{Ker}(p))_p$. Sie ist injektiv, da E separiert ist. Und E trägt die initiale Struktur bezüglich dieser Einbettung, da die $\tilde{p} \circ \mathrm{pr}_p : \prod_q E_q \to E_p \to \mathbb{R}$ eine Subbasis von SN'en am Produkt bilden.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\pi_p"] & \prod_q E_q \arrow[d, "\mathrm{pr}_p"] \\
\mathbb{R} & E_p \arrow[l, "\tilde{p}"]
\end{tikzcd}$$

3.4 Endlich-dimensionale LKV

3.4.1 Lemma. 1-dimensionale LKV'e.

Sei E ein 1-dimensionaler LKV und $0 \neq a \in E$, dann ist die Abbildung $f : \mathbb{K} \to E$, $t \mapsto t\,a$ ein Isomorphismus von LKV'en (d.h. linearer Homöomorphismus). Jeder lineare Isomorphismus von E mit $\mathbb{K}$ ist also ein Homöomorphismus.

Beweis. Da $\{a\}$ eine Basis des Vektorraums E ist, ist f bijektiv, und jeder lineare Isomorphismus $f : \mathbb{K} \to E$ sieht so aus mit $a := f(1)$. Weil die skalar-Multiplikation stetig ist, ist f stetig. Da E separiert ist, gibt es eine SN q mit $q(a) \ge 1$. Dann ist $|f^{-1}(ta)| = |t| = \frac{q(ta)}{q(a)} \le q(ta)$, d.h. $|f^{-1}| \le q$, also f^{-1} auch stetig. □

3.4.2 Lemma. Stetige Funktionale.

Sei E ein LKV und $f : E \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional. Dann gilt:

1. *f ist stetig;*

$\Leftrightarrow$ 2. *$|f| : x \mapsto |f(x)|$ ist eine stetige Seminorm;*

$\Leftrightarrow$ 3. *Der Kern $\operatorname{Ker}(f)$ ist abgeschlossen.*

Falls hingegen f unstetig ist, so ist $\operatorname{Ker}(f)$ in E dicht.

Beweis. (1 $\Rightarrow$ 2) Klar, da $|\_|$ eine stetige Norm auf $\mathbb{K}$ ist.

(2 $\Rightarrow$ 3) Klar, da $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(|f|)$.

(3 $\Rightarrow$ 1) Es genügt den Fall $f \neq 0$ zu betrachten. Dann ist $f : E \to \mathbb{K}$ surjektiv. Da $F := \operatorname{Ker}(f)$ abgeschlossen ist, ist E/F ein LKV nach 3.3.3. Da $f|_F = 0$ ist, faktorisiert f über $\pi : E \to E/F$ zu einer linearen Abbildung $\tilde{f} : E/F \to \mathbb{K}$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & E/\ker(f) \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}", "\cong"'] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

Da f surjektiv ist, gilt gleiches auch für $\tilde{f}$. Außerdem ist $\tilde{f}$ injektiv, denn $0 = \tilde{f}(\pi(x)) = f(x) \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow \pi(x) = 0$. Also ist $\tilde{f}$ ein Isomorphismus von

LKV'en nach dem Lemma 3.4.1. Folglich ist $f = \tilde{f} \circ \pi$ stetig als Zusammensetzung stetiger Abbildungen.

Sei nun f unstetig, also $\operatorname{Ker}(f)$ nicht abgeschlossen. Sei $a \in \overline{\operatorname{Ker}(f)} \setminus \operatorname{Ker}(f)$. O.B.d.A. sei $f(a) = 1$. Die Abbildung $\operatorname{Ker}(f) \times \mathbb{K} \to E$, $(x, t) \mapsto x + t\,a$ ist stetig, linear und surjektiv (sogar bijektiv), denn $E \ni y \mapsto (y - f(y)\,a, f(y)) \in \operatorname{Ker}(f) \times \mathbb{K}$ ist offensichtlich rechtsinvers dazu. Ihr Bild liegt aber im linearen Teilraum $\overline{\operatorname{Ker}(f)}$, also ist dieser ganz E. □

3.4.3 Beispiele linearer unstetiger Funktionale.

Es sei $E := C([0,1], \mathbb{K})$ mit der 1-Norm. Dann ist $\operatorname{ev}_0 : E \to \mathbb{K}$ linear, aber nicht beschränkt (=stetig) und $\operatorname{Ker}(\operatorname{ev}_0) = \{f \in E : f(0) = 0\}$ somit dicht, denn wir finden leicht stückweise affine Funktionen $f_n \geq 0$ mit $\int f_n = 1$ aber $f_n(0) = n$.

Ebenso ist $\sum : E \to \mathbb{K}$ linear und nicht stetig (=beschränkt), wobei E der Raum der endlichen Folgen mit der ∞-Norm ist und $\sum : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Um auch auf Banach-Räumen E unstetige lineare Funktionale zu finden benötigt man allerdings das Auswahlaxiom. Nimmt man statt dessen das Axiom, daß jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ meßbar ist, zur Mengenlehre hinzu (siehe [35]), so ist jede lineare Abbildung zwischen Banach-Räumen stetig (siehe [8]).

3.4.4 Folgerung. Teilräume der Kodimension 1.

Es sei F ein abgeschlossener Teilraum des LKV'es E der Kodimension 1 (d.h. $\exists a \in E \setminus F$ s.d. der Vektorraum E durch $F \cup \{a\}$ erzeugt wird). Dann gilt $F \times \mathbb{K} \cong E$, wobei der Isomorphismus durch $(y, \lambda) \mapsto y + \lambda\,a$ gegeben ist.

Beweis. Die Abbildung $(y, \lambda) \mapsto y + \lambda\,a$ ist klarerweise stetig. Sie ist surjektiv, da der Vektorraum E durch $F \cup \{a\}$ erzeugt wird; und sie ist injektiv, denn $y + \lambda\,a = 0$ mit $\lambda \neq 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{\lambda} y \in F$, ein Widerspruch.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] \arrow[dr, dotted, "f"'] & E/F \arrow[d, "\cong"] \\ & & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Nun zur Umkehrabbildung. Dazu definieren wir ein lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ durch $f(y + \lambda\,a) := \lambda$. Der Kern von f ist F, also abgeschlossen. Somit ist f und damit auch die gewünschte Umkehrabbildung $E \ni x \mapsto (x - f(x)\,a, f(x)) \in F \times \mathbb{K}$ stetig. □

3.4.5 Satz von Tychonoff über endlich dimensionale LKV'e.

Für jeden LKV E gilt:

1. *E ist endlich dimensional.*

$\Leftrightarrow$ 2. *$E \cong \mathbb{K}^n := \prod_{k=1}^{n} \mathbb{K}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Genauer: Jeder lineare Isomorphismus $E \cong \mathbb{K}^n$ ist auch ein Isomorphismus LKV'e.*

$\Leftrightarrow$ 3. *E ist lokalkompakt.*

$\Leftrightarrow$ 4. *E besitzt eine präkompakte 0-Umgebung.*

Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt falls jeder Punkt eine Umgebungsbasis bestehend aus kompakten Mengen besitzt. Für einen Hausdorff-Raum genügt es dazu für jeden Punkt eine kompakte Umgebung zu finden und für einen LKV ist dies zur Existenz einer kompakten 0-Umgebung äquivalent!

Ein Teilmenge K eines LKV's heißt präkompakt, falls zu jeder 0-Umgebung U eine endliche Menge F existiert mit $K \subseteq U + F = \bigcup_{y \in F} U + y$.

Beweis. (1 $\Rightarrow$ 2) Wir zeigen mittels Induktion nach der Dimension n, daß jede lineare Bijektion $\mathbb{K}^n \to E$ schon ein Homöomorphismus ist:

(n=1) ist bereits im Lemma 3.4.1 gezeigt.
(n+1) Es sei $f : \mathbb{K}^{n+1} \to E$ eine lineare Bijektion. Klarerweise gibt es einen natürlichen topologischen Isomorphismus $k : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \cong \mathbb{K}^{n+1}$. Sei nun $a := k(0,1) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Es ist $f \circ k|_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \to f(\mathbb{K}^n) =: F$ eine lineare Bijektion, und F als Teilraum eines LKV's ein ebensolcher. Also ist nach Induktionsannahme $f \circ k|_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \to F$ ein Homöomorphismus. Da $\mathbb{K}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{K}$ vollständig ist, gilt gleiches für F, und somit ist F abgeschlossen in E, nach der Folgerung 3.1.4. Nach Folgerung 3.4.4 ist $h : (y, \lambda) \mapsto y + \lambda\, f(a)$ ein Homöomorphismus und somit auch $f = h \circ (f \circ k|_{\mathbb{K}^n} \times \mathrm{id}_{\mathbb{K}}) \circ k^{-1} : \mathbb{K}^{n+1} \cong \mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \to F \times \mathbb{K} \cong E$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Ist eine direkte Folge des Satzes von Bolzano-Weierstraß (siehe [20, 3.3.4]) denn danach ist der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$ eine kompakte 0-Umgebung.

(3 $\Rightarrow$ 4) Jede kompakte Menge K ist präkompakt, da $\{U + x : x \in K\}$ eine offene Überdeckung darstellt.

(4 $\Rightarrow$ 1) Sei U eine präkompakte (absolut-konvexe) 0-Umgebung. Zur 0-Umgebung $\frac{1}{2}U$ existiert eine endliche Menge F, s.d. $U \subseteq F + \frac{1}{2}U$. Das gilt erst recht, wenn wir F durch den erzeugten endlich-dimensionalen Teilraum, den wir wieder mit F bezeichnen, ersetzen. Wir wollen nun zeigen, daß F gleich E ist. Da F endlich-dimensional ist, ist F vollständig wegen (1 $\Rightarrow$ 2), also ist F abgeschlossen nach Folgerung 3.1.4. Nun betrachten wir die kanonische Projektion $\pi : E \twoheadrightarrow E/F$. Die präkompakte Menge U ist auch beschränkt: Für jede (absolut-konvexe) 0-Umgebung W existiert eine endliche Menge A mit $U \subseteq A + W$, und da W absorbierend und A endlich ist finden wir ein $K > 0$, s.d. $A \subseteq K \cdot W$, also ist $U \subseteq (K+1)W$. Folglich ist $V := \pi(U)$ in E/F eine beschränkte 0-Umgebung, also E/F nach Satz 1.6.2 normierbar, die Familie $\frac{1}{2^n}V$ ist eine 0-Umgebungsbasis und somit $\bigcap_n \frac{1}{2^n}V = \{0\}$. Weiters haben wir $V = \pi(U) \subseteq \pi(F + \frac{1}{2}U) = 0 + \frac{1}{2}\pi(U) = \frac{1}{2}V$. Daraus erhalten wir mittels Induktion $V \subseteq \frac{1}{2^n}V$ und somit $V \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}V = \{0\}$. Da V als 0-Umgebung absorbierend sein muß, ist $E/F = \{0\}$, d.h. $F = E$. □

3.4.6 Folgerung.

1. *Am $\mathbb{K}^m$ sind alle Normen und allgemeiner alle Punkte-trennenden Mengen $\mathcal{P}_0$ von Seminormen äquivalent (d.h. erzeugen die gleiche Topologie).*
2. *Es sei F ein endlich dimensionaler Teilraum eines LKV'es E. Dann ist F abgeschlossen und folglich E/F separiert (siehe auch 5.1.7).*
3. *Ist $f : E \to F$ eine lineare Abbildung eines endlich dimensionalen LKV'es E in einen LKV F, so ist f stetig.*
4. *Ist F ein abgeschlossener Teilraum eines LKV'es E und hat F endliche Kodimension in E, d.h. E/F ist endlich-dimensional, so ist E als LKV isomorph zu $F \times (E/F)$.*

Beweis. 1 Es sei p eine Norm auf $\mathbb{K}^m$, dann ist nach dem Satz 3.4.5 von Tychonoff $(\mathbb{K}^m, p)$ topologisch isomorph zu $(\mathbb{K}^m, \|\_\|_\infty)$, also ist die Norm p äquivalent zur unendlich-Norm. Folglich sind je zwei Normen äquivalent.

2 Da F isomorph ist zu $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^m$ vollständig ist, ist auch F vollständig, und damit abgeschlossen in E.

3 O.B.d.A. $E = \mathbb{K}^m$. Jedes lineare f läßt sich als $f(x) = \sum_{k=1}^n \mathrm{pr}_k(x)\, f(e_k)$ schreiben, wobei e_k die Standard-Einheitsvektoren des $\mathbb{K}^n$ sind. Da die Projektionen pr_k nach Konstruktion des Produkts stetig sind, ist es auch f.

4 Wir betrachten die kanonische Projektion $\pi : E \to E/F$. Da sie surjektiv ist, existiert eine lineare rechts-Inverse f (Wir wählen Urbilder in E unter π einer Basis

im endlich dimensionalen Raum E/F). Da E/F separiert ist (F ist abgeschlossen) ist f nach 3 stetig. Nun ist der gewünschte Isomorphismus $E \to F \times (E/F)$ gegeben durch $x \mapsto (x - f(\pi(x)), \pi(x))$. Sein Inverses ist $(y, z) \mapsto y + f(z)$. □

3.5 Metrisierbare LKV

3.5.1 Lemma. Produkte metrischer Räume.

Es seien E_n NR. Dann ist die Topologie von $E := \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ metrisierbar.

Beweis. Wir definieren eine Metrik d am Produkt E durch die punktweise konvergente Reihe

$$d(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|x_n - y_n\|}{1 + \|x_n - y_n\|}.$$

Dies ist wohldefiniert, da $\frac{\|x_n-y_n\|}{1+\|x_n-y_n\|} \leq 1$, und $(\frac{1}{2^n})_n$ summierbar ist, also nach der Hölder-Ungleichung auch das innere Produkt $d(x,y) = \langle (\frac{1}{2^n})_n | (\frac{\|x_n-y_n\|}{1+\|x_n-y_n\|})_n \rangle$ existiert. Es gilt die Δ-Ungleichung, denn $t \mapsto \frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+1/t}$ ist monoton wachsend und somit für $\gamma \leq \alpha + \beta$ die Abschätzung

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{\alpha+\beta+2\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta} \geq \frac{\alpha+\beta+\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} \geq \frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

gilt.

Falls $\|x_i - y_i\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ für $i \leq n$ gilt, so ist $d(x,y) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, denn

$$d(x,y) = \sum_i \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\|x_i - y_i\|}{1 + \|x_i - y_i\|} \leq \sum_{i\leq n} \frac{1}{2^i} \cdot \|x_i - y_i\| + \sum_{i>n} \frac{1}{2^i} \cdot 1 \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} \cdot 1 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Umgekehrt sei $d(x,y) \leq \frac{1}{2^n(n+1)}$ so gilt $\|x_i - y_i\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $i \leq n$, denn

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^i} \cdot \frac{\|x_i - y_i\|}{1 + \|x_i - y_i\|} \leq d(x,y) \leq \frac{1}{2^n(n+1)} \leq \frac{1}{2^i(n+1)} \\
&\Rightarrow \frac{\|x_i - y_i\|}{1 + \|x_i - y_i\|} \leq \frac{1}{n+1} \\
&\Rightarrow n \cdot \|x_i - y_i\| \leq 1.
\end{aligned}$$

Somit erzeugt d die gleiche Topologie wie die Subbasis $\{\|\operatorname{pr}_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$ der Seminormen. □

3.5.2 Folgerung. Charakterisierung metrischer LKV.

Es sei E ein LKV. Dann ist die Topologie von E genau dann metrisierbar, wenn E ein abzählbar seminormierter LKV ist. Für solche LKV'e gilt genau dann, daß jene Translations-invariante die Topologie erzeugende Metrik vollständig ist, wenn sie als lokalkonvexe Topologie vollständig ist. Ein Fréchet-Raum ist also nichts anderes als ein vollständig metrisierbarer LKV.

Beweis. Es sei E metrisierbar. Dann bilden die Mengen $U_n := \{x : d(x,0) < \frac{1}{n}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine 0-Umgebungsbasis. Folglich gibt es stetige SN p_n mit $(p_n)_{<1} \subseteq U_n$. Diese p_n bilden eine Subbasis: Sei nämlich p eine stetige SN, dann ist $p_{<1}$ eine 0-Umgebung, also existiert ein n mit $(p_n)_{<1} \subseteq U_n \subseteq p_{<1}$, also ist $p_n \geq p$, nach 1.3.7.

Umgekehrt, sei $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Subbasis der Seminormen von E, dann kann E als Teilraum des Produkts $\prod_n E_n$ wie in 3.3.4 aufgefaßt werden, wobei E_n der normierte Raum ist, der aus E durch Herausfaktorisieren des Kerns von p_n entsteht. Nach dem Lemma 3.5.1 ist dieses Produkt metrisierbar, und somit gilt gleiches auch für den Teilraum, da dieser nach 3.1.4 die Spurtopologie trägt.

Vollständigkeit. Es ist nur zu zeigen, daß eine Folge $(x_n)_n$ genau dann bezüglich der Metrik Cauchy ist, wenn sie es bezüglich der Seminormen ist. Da aber die Metrik Translations-invariant ist, bedeutet ersteres, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Differenz $x_n - x_m \in U_\varepsilon := \{y : d(y, 0) < \varepsilon\}$ für n und m hinreichend groß. Da die U_ε eine 0-Umgebungsbasis bilden, ebenso wie die Bälle $p_{<\varepsilon}$ ist dies äquivalent dazu, daß für alle p und alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $p(x_n - x_m) < \varepsilon$ für n und m hinreichend groß gilt. □

3.5.3 Lemma. Quotienten von Fréchet-Räumen.

Sei F ein abgeschlossener Teilraum eines Fréchet-Raums E, dann ist auch E/F ein Fréchet-Raum, und jede konvergente Folge in E/F besitzt einen konvergenten Lift.

Beweis.

Liften konvergenter Folgen. Sei $y_n \to y = \pi(x)$ in E/F und $p_k \le p_{k+1}$ eine abzählbare Basis der Seminormen von E. Also gilt $\tilde{p}_k(y_n - y) \to 0$, d.h. $\exists n_k \in \mathbb{N}$ $\forall n \ge n_k$: $\tilde{p}_k(y_n - y) = \inf\{p_k(x' - x) : \pi(x') = y_n\} < \frac{1}{k}$. O.B.d.A. ist $k \mapsto n_k$ streng monoton wachsend.

Für $n_k \le n < n_{k+1}$ wählen wir $x_n \in \pi^{-1}(y_n)$ mit $p_k(x_n - x) < \frac{1}{k}$. Diese geliftete Folge konvergiert gegen x, denn für $\varepsilon > 0$ und Seminorm p_j finden wir ein $k \ge j$ mit $\frac{1}{k} \le \varepsilon$ und zu jedem $n \ge n_k$ existiert ein $k' \ge k$ mit $n_{k'} \le n < n_{k'+1}$. Also ist

$$p_j(x_n - x) \le p_{k'}(x_n - x) < \frac{1}{k'} \le \frac{1}{k} \le \varepsilon.$$

Vollständigkeit. Es sei $\lambda_n := \frac{1}{4^n}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in E/F. Wegen Lemma 2.2.2 genügt es zu zeigen, daß $\sum_n \lambda_n y_n$ in E/F konvergiert. Da aber $\frac{1}{2^n} y_n \to 0$ in E/F, existiert nach dem ersten Teil eine konvergente und damit beschränkte Folge $x_n \in E$ mit $\pi(x_n) = \frac{1}{2^n} y_n$. Da E vollständig ist konvergiert die Reihe $\sum_n \frac{1}{2^n} x_n$ in E, und wegen der Stetigkeit von π ebenso die Reihe $\sum_n \pi(\frac{1}{2^n} x_n) = \sum_n \frac{1}{4^n} y_n$. □

3.6 Koprodukte

3.6.1 Lemma. Struktur von Koprodukten.

Es seien E_k LKV'e. Unter dem Koprodukt *oder* direkten Summe *der E_k verstehen wir den Vektorraum*

$$E := \coprod_k E_k := \Big\{x = (x_k)_k \in \prod_k E_k : x_k = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } k\Big\}$$

versehen mit der finalen Struktur bezüglich der Injektionen $\mathrm{inj}_k : E_k \to E$, die $x \in E_k$ auf den Punkt $\mathrm{inj}_k(x)$ abbilden, dessen k-te Komponente x ist und alle anderen 0 sind. Das Koprodukt ist ein LKV.
Eine Subbasis der Seminormen auf E wird durch die SN'en $p(x) := \sum_k p_k(x_k)$ gebildet, wobei die p_k beliebige SN'en von E_k sind. Man beachte, daß nur endlich viele Summanden in der Summe ungleich 0 sind, und diese somit Sinn macht.

Eine Menge ist beschränkt in $\coprod_i E_i$ falls sie schon in einer endlichen Teilsumme beschränkt enthalten ist.
Das Koprodukt (Folgen-)vollständiger Räume ist (Folgen-)vollständig.
Die Inklusion $\coprod_k E_k \to \prod_k E_k$ ist stetig und falls die Indexmenge endlich ist, stimmt das Koprodukt mit dem Produkt überein.
Falls die Indexmenge abzählbar ist, so bilden auch die SN'en $p(x) := \sup\{p_k(x_k) : k\}$ mit beliebigen SN'en p_k von E_k eine Subbasis.

Beweis.

Subbasis der SN'en. Für jedes k sei p_k eine stetige SN auf E_k. Dann ist $p(x) := \sum_k p_k(x_k)$ eine wohldefinierte SN auf E. Die Zusammensetzung mit inj_k ist $p \circ \mathrm{inj}_k = p_k$ und somit stetig, also auch p nach Konstruktion der finalen Struktur.

Sei umgekehrt p eine stetige SN auf E. Dann ist $p_k := p|_{E_k} = p \circ \mathrm{inj}_k$ eine solche auf E_k, und es ist $p(x) = p(\sum_k \mathrm{inj}_k(x_k)) \le \sum p_k(x_k)$. Also bilden diese Seminormen eine Subbasis für E.

Separiertheit ist nun klar.

Abzählbare Indexmenge. Da $\sup_k p_k(x_k) \le \sum_k p_k(x_k)$ ist, definiert $p(x) := \sup_k p_k(x_k)$ ebenso eine stetige SN. Umgekehrt ist wegen der Hölder-Ungleichung

$$\sum_k p_k(x_k) = \sum_k \frac{1}{2^k}(2^k p_k)(x_k) \le \sup\{2^k p_k(x_k) : k\} \cdot \sum_k \frac{1}{2^k},$$

Also erzeugen die Suprema die gleichen stetigen SN'en wie die Summen.

Endliche Indexmengen. Im Falle einer endlichen Indexmenge haben wir als Basis $\max\{p_1, \dots, p_N\}$ und das ist auch eine Basis des Produkts.

Stetige Inklusion ins Produkt. Die Projektionen $\mathrm{pr}_j : \coprod_k E_k \to E_j$ sind wegen der finalen Struktur stetig, denn die Zusammensetzungen mit inj_k sind die Identität für $j = k$ und 0 sonst. Wegen der universellen Eigenschaft ist damit auch die Inklusion $(\mathrm{pr}_k)_k : \coprod_k E_k \to \prod_k E_k$ stetig.

Beschränktheit. Eine Menge, die in einer endlichen Teilsumme beschränkt ist, ist es auch in der gesamten Summe, da die Inklusion stetig ist.
Sei umgekehrt B in E beschränkt. Beachte zuerst, daß eine endliche Teilsumme $\coprod_{k\in K} E_k$ ein lokalkonvexer Teilraum von $\prod_k E_k$ ist, denn durch $(\mathrm{pr}_k)_{k\in K} : \prod_k E_k \to \prod_{k\in K} E_k = \coprod_{k\in K} E_k$ ist ein stetiges lineares Rechtsinverses zur Inklusion $\coprod_{k\in K} E_k \to \coprod_k E_k \to \prod_k E_k$ gegeben. Es genügt somit zu zeigen, daß $K := \{k : \mathrm{pr}_k(B) \ne \{0\}\}$ endlich ist, denn $B \subseteq \prod_k \mathrm{pr}_k(B)$. Angenommen K wäre unendlich. Wir wählen eine abzählbare Teilmenge von K, die wir mit $\mathbb{N}$ identifizieren können. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir einen passenden Punkt $b^k \in B$ mit $b^k_k \ne 0$. Da E_k separiert ist, existiert eine stetige Seminorm p_k auf E_k mit $p_k(b^k_k) = k \in \mathbb{N}$. Für die $k \notin \mathbb{N}$ wählen wir $p_k = 0$. Sei $p(x) := \sum_k p_k(x_k)$. Dann ist p eine stetige Seminorm auf E, und somit $p(B)$ beschränkt, im Widerspruch zu $k = p_k(b^k_k) \le p(b^k) \in p(B)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Vollständigkeit. Wir zeigen vorerst die Folgen-Vollständigkeit. Es sei x_n eine Cauchy-Folge. Als solche ist sie beschränkt, also in einer endlichen Teilsumme enthalten. Da diese Teilsumme ein lokalkonvexer Teilraum von $\coprod_k E_k$ ist, ist x_n ein Cauchy-Folge in dieser endlichen Summe = Produkt, und somit ist sie konvergent nach 3.2.1 in dem endlichen Produkt und damit auch in E.

Nun die Vollständigkeit: Sei (x^i) Cauchy in $\coprod_k E_k$. Dann ist (x^i_j) Cauchy für jedes j, also konvergiert x^i koordinatenweise gegen $x^\infty \in \prod_k E^k$. Es ist $x^\infty \in \coprod_k E_k$, denn sei $K := \{k : x_k^\infty \neq 0\}$. Wähle für $k \in K$ eine stetige SN p_k auf E_k mit $p_k(x_k^\infty) > 1$, setze $p_k := 0$ für $k \notin K$ und $p(x) := \sum_k p_k(x_k)$. Dann existiert ein i_0 mit $p_k(x_k^i - x_k^j) \leq p(x^i - x^j) \leq 1$ für $i, j \succ i_0$ und alle k. Folglich ist auch $p_k(x_k^i - x_k^\infty) \leq 1$ für $i \succ i_0$ und alle k. Wegen $x^i \in \coprod_k E_k$ ist $x_k^i = 0$ für fast alle k, also $p_k(x_k^\infty) \leq 1$ für fast alle k, also K endlich.

Schließlich konvergiert $x^i \to x^\infty$ in $\coprod_k E_k$, denn sei p eine SN der angegebenen Subbasis und $\varepsilon > 0$, dann ist $\sum_k p_k(x_k^i - x_k^j) =: p(x^i - x^j) \leq \varepsilon$ für alle $i, j \succ i_0$ also Für fixes $i \succ i_0$ sei K die endlich Menge $\{k : x_k^i - x_k^\infty \neq 0\}$, dann ist $p(x^i - x^\infty) = \sum_{k \in K} p_k(x_k^i - x_k^\infty) = \lim_j \sum_{k \in K} p_k(x_k^i - x_k^j) \leq \varepsilon$, d.h. $x^i \to x^\infty$ in der Struktur von $\coprod_k E_k$. □

3.6.2 Bornologische Vektorräume.

Es trage E die finale Struktur bezüglich einer Familie von linearen Abbildungen $f_k : E_k \to E$, deren Bilder den Vektorraum E erzeugen. Dann läßt sich E auch als Quotient des Koprodukts $\coprod_k E_k$ darstellen:
Sei nämlich F der Kern der linearen Abbildung $\sum_k f_k : \coprod_k E_k \to E$, welche $x = (x_k)_k$ auf $\sum_k f_k(x_k)$ abbildet. Diese Abbildung ist surjektiv, da die Bilder $f_k(E_k)$ nach Voraussetzung den Vektorraum E erzeugen, und sie ist stetig wegen der finalen Struktur. Folglich erhalten wir eine bijektive (und wegen der finalen Struktur am Quotienten) stetige Abbildung $(\coprod_k E_k)/F \to E$. Diese ist sogar ein Homöomorphismus, da E die finale Struktur bezüglich der Abbildungen f_k trägt.

Sei nun E ein LKV. Für jede beschränkte absolut-konvexe Menge B können wir den linearen Teilraum E_B von E betrachten der durch B erzeugt wird. Da B nach Konstruktion absorbierend in E_B ist, ist das Minkowski-Funktional p_B eine Seminorm auf E_B. Es ist sogar eine Norm, denn $0 = p_B(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda\, B\} \Rightarrow \exists \lambda_n \to 0$ mit $\frac{1}{\lambda_n} x \in B$, also $x = \lambda_n \frac{1}{\lambda_n} x \to 0$ nach 2.1.5 und folglich $x = 0$. Weiters ist die Inklusion $E_B \to E$ beschränkt auf der offenen Einheitskugel $\subseteq B$, also ist sie sogar stetig, da E_B normiert (und somit bornologisch nach 2.1.7) ist.

Ein LKV E trägt genau dann die finale Struktur bezüglich all dieser Inklusionen, wenn E bornologisch ist:
($\Rightarrow$) Sei nämlich $f : E \to F$ eine beschränkte lineare Abbildung, dann ist $f|_{E_B} : E_B \to E \to F$ eine beschränkte lineare Abbildung auf einem normierten Raum, also stetig nach 2.1.7. Wenn E die finale Struktur bezüglich der Teilräume E_B trägt, so ist f stetig, d.h. E bornologisch.
($\Leftarrow$) Umgekehrt sei E bornologisch. Allgemein ist die finale Struktur bezüglich der Abbildungen $E_B \to E$ auf E feiner oder gleich der gegebenen auf E. Betrachten wir also die Identität f von E mit der gegebenen Struktur nach E mit der finalen. Sei $B \subseteq E$ beschränkt und o.B.d.A. absolut-konvex. Dann ist die Inklusion $E_B \to E$ stetig also beschränkt bezüglich der finalen Struktur auf E. Folglich ist $f(B)$ beschränkt, d.h. f ist eine beschränkte lineare Abbildung, und da E bornologisch vorausgesetzt ist, ist f stetig. Also stimmen die beiden Strukturen überein.

Folglich sind die bornologischen Vektorräume genau die Quotienten von Koprodukten normierter Räume. Vergleiche das mit der dualen Beschreibung LKV'e in 3.3.4.

3.6.3 Testfunktionen und Distributionen.

Wir müssen uns Rechenschaft darüber ablegen, auf welchen Funktionen die Distributionen wirken sollen, und bezüglich welcher Topologie sie stetig sein sollen. Natürlich wollen wir, daß der Begriff der Distribution eine Erweiterung jenes der Funktion ist, also sollten wir zumindest stetige Funktionen $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ durch

$f(g) := \langle f|g\rangle$ als Distributionen auffassen können. Damit aber das Integral einen Sinn hat, muß das Produkt $f\cdot g$ gegen Unendlich stark abfallen. Da aber f beliebig wachsen darf, muß g sogar kompakten Träger besitzen. Als erster Ansatz für den Raum der Testfunktionen g drängt sich also der Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger auf. Auf diesen haben wir schon zwei Strukturen kennengelernt, nämlich die als Teilraum des Fréchet-Raums $C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$, und jene als Teilraum des Banach-Raums $B(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$. Ist nun für eine stetige Funktion f das lineare Funktional $g\mapsto\langle f|g\rangle$ stetig? Wählen wir insbesonders $f=1$, dann ist $\langle f|g_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} g_n$, und für die Konvergenz von $\langle f|g_n\rangle$ genügt nicht die gleichmäßige Konvergenz (auf kompakten Mengen) der g_n. Wegen $\int_{\mathbb{R}^m}|g|\le \mathrm{Volumen}(\mathrm{Trg}(g))\cdot\|g\|_\infty$, sollte eine Folge nur dann konvergieren, wenn sie gleichmäßig konvergiert, und ihre Träger in einer festen kompakten Menge enthalten bleiben. Sei also $C_K(\mathbb{R}^m,\mathbb{K})$ der Raum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{K}$, welche Träger innerhalb der Menge $K\subseteq\mathbb{R}^m$ haben. Dann ist $C_K(\mathbb{R}^m,\mathbb{K})$ versehen mit der gleichmäßigen Konvergenz ein abgeschlossener Teilraum von $C_b(\mathbb{R}^m,\mathbb{K})$ und somit ein Banach-Raum. Der Raum $C_c(\mathbb{R}^m,\mathbb{K})$ der stetigen Funktionen mit kompakten Träger ist dann die Vereinigung der Banach-Räume $C_K(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ wobei K alle kompakten Mengen oder auch nur eine Basis der kompakten Mengen durchläuft (d.h. jede kompakte Menge ist in einer der Basis enthalten). Wir können also die finale Topologie auf ihm betrachten.

Nun müssen wir uns überlegen, ob die konvergenten Folgen wirklich die sind, die schon in einer Stufe $C_K(\mathbb{R}^m,\mathbb{K})$ konvergieren, und daß Folgenstetigkeit ausreicht.

Da wir Distributionen zum Lösen von Differentialgleichungen verwenden wollen, müssen diese differenzierbar sein. Wenn zwei Funktionen f und g differenzierbar sind, so ist $\langle\partial_i f|g\rangle = -\langle f|\partial_i g\rangle$, wie man mittels partieller Integration sieht. Wir könnten also für eine Distribution f die partielle Ableitung $\partial_i f$ durch $\partial_i f(g) := -f(\partial_i g)$ definieren. Also sollten unsere Testfunktionen sogar glatt sein, und wir müssen die gleiche Konstruktion für $C_c^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}) = \bigcup_K C_K^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ durchführen. Der so definierte LKV $C_c^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ wird auch mit $\mathcal{D}$ bezeichnet. Die entsprechende Bezeichungsweise für den Fréchet-Raum $C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ ist $\mathcal{E}$.

3.7 Strikt induktive Limiten

3.7.1 Lemma. Struktur strikt induktiver Limiten.

Es sei ein Vektorraum E gegeben, der sich als Vereinigung einer aufsteigenden Folge E_n linearer Teilräume schreiben läßt. Weiters sei vorausgesetzt, daß die E_n so mit Seminormen versehen sind, daß E_n ein abgeschlossener lokalkonvexer Teilraum des LKV'es E_{n+1} ist für alle $n\in\mathbb{N}$. Der Raum E mit der finalen lokalkonvexen Struktur bezüglich aller Inklusionen $E_k\to E$ heißt dann strikt induktiver Limes *der E_n und man schreibt $E=\varinjlim_n E_n$. Die E_n nennen wir auch die* Stufen *des induktiven Limes. Jede Seminorm eines E_n besitzt dann eine stetige Fortsetzung auf E. Jedes E_n ist ein abgeschlossener lokalkonvexer Teilraum von E. Der Raum E ist separiert. Eine Menge ist in E beschränkt genau dann, wenn sie in einer Stufe enthalten ist und dort beschränkt ist. Sind alle E_n (Folgen-) vollständig so auch E.*

Beweis.

Fortsetzbarkeit der SN'en. Sei p_n eine SN von E_n. Da E_n ein Teilraum von E_{n+1} ist, gibt es nach 3.1.4 eine stetige Fortsetzung p_{n+1} auf E_{n+1}. Mittels Induktion erhalten wir eine Folge von sukzessiven Fortsetzungen p_k auf E_k. Sei nun $p:=\bigcup_k p_k$. Dann ist p eine Seminorm auf E und die Spur auf jeder Stufe E_k ist p_k. Also ist p nach Definition der finalen Struktur stetig.

Daraus folgt sofort, daß E separiert ist.

Stufen als abgeschlossene Teilräume von E. Da nach dem vorigen Punkt die stetigen SN'en von E_n gerade die Einschränkungen der stetigen SN'en von E sind, trägt E_n die Spurtopologie von E. Es sei x_i ein Netz in E_n, welches gegen x_∞ in E konvergiert. Wegen $E = \bigcup_k E_k$, existiert ein $k \geq n$ mit $x_\infty \in E_k$. Da $E_k \supseteq E_n$ ein topologischer Teilraum von E ist, konvergiert das Netz x_i in E_k gegen x_∞. Nach Voraussetzung ist aber E_n abgeschlossen in E_k und folglich liegt $x_\infty \in E_n$, d.h. E_n ist abgeschlossen in E.

Beschränktheit. Es sei $B \subseteq E$ eine beschränkte Menge. Wegen des vorigen Punktes genügt es zu zeigen, daß B in einer Stufe enthalten ist (beschränkt ist es dort dann automatisch). Angenommen für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $B \not\subseteq E_n$. Wir wählen nun $b_1 \in B \setminus E_1$ und n_1 mit $b_1 \in E_{n_1}$. Rekursiv erhalten wir eine streng monoton wachsende Folge (n_k) und $b_k \in E_{n_k} \cap (B \setminus E_{n_{k-1}})$. Es sei p_1 eine stetige SN auf E_{n_1} mit $p_1(b_1) = 1$; das ist möglich da $b_1 \notin E_1$ also $b_1 \neq 0$. Nun suchen wir induktiv stetige SN'en p_k auf E_{n_k}, mit $p_k|_{E_{n_{k-1}}} = p_{k-1}$ und $p_k(b_k) = k$: Dazu betrachten wir den von $E_{n_{k-1}}$ und b_k erzeugten Teilraum F von E_{n_k}. Da $b_k \notin E_{n_{k-1}}$, ist $(x, \lambda) \mapsto x + \lambda\, b_k$ nach 3.4.4 ein Isomorphismus $E_{n_{k-1}} \times \mathbb{K} \cong F$. Auf F definieren wir die stetige Seminorm q durch $q(x + \lambda\, b_k) := p_{k-1}(x) + k \cdot |\lambda|$. Nach 3.1.4 existiert eine stetige SN p_k auf E_{n_k}, welche q fortsetzt. Sei schließlich $p := \bigcup_k p_k$. Dann ist p eine stetige SN auf E und $p(b_k) = k$, also ist B nicht beschränkt.

Folgen-Vollständigkeit. Es sei x_n eine Cauchy-Folge in E. Dann ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt, also nach obigem enthalten in einem E_n. Da E_n ein lokalkonvexer Teilraum von E ist, ist x_n eine Cauchy-Folge in ihm, konvergiert also gegen ein x in E_n, also auch in E.

Vollständigkeit. Da ein Cauchy-Netz $(x_i)_i$ nicht unbedingt beschränkt ist, können wir nicht wie bei Folgen schließen, daß fast das ganze Netz schon in einer Stufe enthalten ist. Wir zeigen aber nun, daß dies beinahe der Fall ist:

Behauptung: $\exists n\ \forall U$ abs.konv. 0-Umgebung $\forall i\ \exists j \succ i\ \exists u \in U : x_j + u \in E_n$.
Angenommen dies ist nicht der Fall, d.h. $\forall n\ \exists U_n\ \exists i_n\ \forall j \succ i_n : (x_j + U_n) \cap E_n = \emptyset$. O.B.d.A. sei $2U_{n+1} \subseteq U_n$. Die Menge $U := \bigcup_n \sum_{i=0}^n U_i \cap E_i$ ist eine absolut konvexe 0-Umgebung, denn $U \cap E_n \supseteq U_n \cap E_n$ und somit ist die Einschränkung des Minkowski-Funktionals von U auf E_n eine stetige SN. Also existiert ein i s.d. $x_j - x_k \in U$ für alle $j, k \succ i$. Sei n so gewählt, daß $x_i \in E_n$. Für jedes $j \succ i$ existiert somit ein m (o.B.d.A. $m \geq n$) und $u_k \in U_k \cap E_k$ für jedes $k \leq m$ mit $x_i - x_j = \sum_{k=0}^m u_k$. Damit ist aber $x_i - \sum_{k=1}^n u_k = x_j + \sum_{k=n+1}^m u_k \in E_n \cap (x_j + U_n)$, wegen $2U_{k+1} \subseteq U_k$. Dies ist ein Widerspruch zu $(x_j + U_n) \cap E_n = \emptyset$ für jedes $j \succ i, i_n$.

Wir betrachten nun das Netz $(i, U) \mapsto x_j + u \in E_n$, wobei $j \succ i$ und $u \in U$ wie in der Behauptung gewählt werden und wir als Indexmenge das Produkt von der ursprünglichen mit einer 0-Umgebungsbasis verwenden. Dieses Netz ist ein Cauchy-Netz in E_n, denn für jede 0-Umgebung V existiert eine absolut konvexe 0-Umgebung U mit $U + (U - U) = 3U \subseteq V$, und konvergiert somit gegen ein $x_\infty \in E_n$. Damit konvergiert aber auch $x_i \to x_\infty$, denn für jede 0-Umgebung W sei V so gewählt, daß $3V \subseteq W$. Dann existiert ein i und ein U (o.B.d.A. $U \subseteq V$) mit $x_j + u - x_\infty \in V$, für die entsprechenden $j \succ i$ und die gewählten $u \in U$ und $x_j - x_k \in V$ für $j, k \succ i$. Also liegt $x_k - x_\infty = x_k - x_j + x_j - x_\infty \in V + (V - u) \subseteq V + V - V \subseteq W$ für alle $k \succ i$.

Für einen Beweis mittels Filter siehe [14, S.86]. □

3.7.2 Beispiel. Raum der Testfunktionen.

Wir können nun den Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ der glatten Funktionen mit kompakten Träger als strikten induktiven Limes $\mathcal{D} := \varinjlim_K C_K^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ der Stufen $C_K^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) : \operatorname{Trg} \subseteq K\}$ auffassen, wobei K eine Basis der kompakten Mengen, z.B. $(\{x : |x| \le k\})_{k\in\mathbb{N}}$, durchläuft. Er ist nach 3.7.1 vollständig und bornologisch wegen 3.3.2, da die $C_K^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ als abgeschlossene Teilräume des Fréchet-Raums $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ selbst Fréchet sind. Die stetigen (= beschränkten = Folgen-stetigen) linearen Funktionale auf $\mathcal{D}$ heißen Distributionen.

Ein anderes Beispiel ist der Raum $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \varinjlim_n \mathbb{K}^n$ der endlichen Folgen.

3.8 Vervollständigung

Wir wollen nun das Problem anpacken, was wir machen können, wenn sich ein Raum als nicht vollständig erweist. Man denke an die Situation $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Da "vervollständigt" man $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ indem man z.B. Dedekind-Schnitte betrachtet. Wir wollen eine ähnliche Konstruktion nun für LKV'e durchführen. Insbesondere sollte sich das dann auf den Raum $C(I,\mathbb{K})$ mit der p-Norm anwenden lassen.

3.8.1 Definition. Vervollständigung.

Unter der Vervollständigung eines LKV'es E verstehen wir einen vollständigen LKV $\tilde{E}$ zusammen mit einer stetigen linearen Abbildung $\iota : E \to \tilde{E}$, welche folgende universelle Eigenschaft besitzt:
Für jede stetige lineare Abbildung $f : E \to F$ in einen vollständigen LKV F existiert eine eindeutige stetige lineare Abbildung $\tilde{f} : \tilde{E} \to F$ mit $\tilde{f} \circ \iota = f$.

3.8.2 Bemerkung. Eindeutigkeit der Vervollständigung.

Die Vervollständigung eines LKV'es E ist bis auf Isomorphie eindeutig. Seien nämlich $\iota_i : E \to E^i$ für $i = 1, 2$ zwei Vervollständigungen von E. Dann existieren eindeutige stetige lineare Abbildungen $\tilde{\iota}_1 : E^1 \to E^2$ und $\tilde{\iota}_2 : E^2 \to E^1$ mit $\tilde{\iota}_2 \circ \iota_1 = \iota_2$ und $\tilde{\iota}_1 \circ \iota_2 = \iota_1$. Also ist $\tilde{\iota}_2 \circ \tilde{\iota}_1 \circ \iota_2 = \iota_2 = \mathrm{id} \circ \iota_2$, und wegen der Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ auch $\tilde{\iota}_2 \circ \tilde{\iota}_1 = \mathrm{id}$.

3.8.3 Lemma. Umgebungsbasis der Vervollständigung.

Es sei E ein dichter Teilraum eines LKV'es $\tilde{E}$.

- *Die stetigen SN'en von $\tilde{E}$ sind dann genau die eindeutigen Fortsetzungen von solchen auf E.*
- *Ist $\mathcal{U}$ eine 0-Umgebungsbasis von E, so bilden die Abschlüsse $\{\bar{U} : U \in \mathcal{U}\}$ in $\tilde{E}$ eine 0-Umgebungsbasis von $\tilde{E}$.*
- *Jede stetige lineare Abbildung $f : E \to F$ in einen vollständigen LKV F besitzt eine eindeutige stetige lineare Erweiterung $\tilde{f} : \tilde{E} \to F$.*
- *Ist zusätzlich $\tilde{E}$ vollständig, so ist $E \hookrightarrow \tilde{E}$ eine Vervollständigung von E.*

Beweis.

Seminormen. Nach 3.1.4 besitzt jede stetige Seminorm p von E eine ebensolche Fortsetzung $\tilde{p}$ auf $\tilde{E}$. Da E in $\tilde{E}$ dicht ist, ist $\tilde{p}$ eindeutigt bestimmt.

0-Umgebungsbasis. Es genügt $\tilde{p}_{\le 1} \subseteq \overline{p_{\le 1}}$ zu zeigen (Es gilt sogar Gleichheit, denn $p_{\le 1} \subseteq \tilde{p}_{\le 1}$ und somit $\overline{p_{\le 1}} \subseteq \overline{\tilde{p}_{\le 1}} = \tilde{p}_{\le 1}$). Sei also $\tilde{p}(\tilde{x}) \le 1$. Da E dicht liegt in $\tilde{E}$ existiert ein Netz (x_i) in E, welches gegen $\tilde{x}$ konvergiert (Betrachte als Indexmenge $\{(V, x) : V$ ist Umgebung von $\tilde{x}$ und $x \in V \cap E\}$ mit der Ordnung

$(V,x) \prec (V',x') :\Leftrightarrow V \supseteq V'$ und als Netz die Abbildung $(U,x) \mapsto x$). Falls $\tilde{p}(\tilde{x}) < 1$, so ist $x_i \in \tilde{p}_{\leq 1} \cap E = p_{\leq 1}$ schließlich, d.h. $\tilde{x} \in \overline{p_{\leq 1}}$. Andernfalls ist $p(x_i) \neq 0$ für alle hinreichend großen i und somit $y_i := \frac{x_i}{p(x_i)} \in p_{\leq 1}$ und $y_i \to \frac{\tilde{x}}{\tilde{p}(\tilde{x})} = \tilde{x}$.

Stetige Erweiterungen. Es sei $f : E \to F$ linear und stetig und $\tilde{x} \in \tilde{E}$ beliebig. Da E in $\tilde{E}$ dicht ist, existiert ein Netz (x_i) in E, welches in $\tilde{E}$ gegen $\tilde{x}$ konvergiert. Da $\tilde{f}$ stetig sein soll, muß gelten $\tilde{f}(\tilde{x}) := \tilde{f}(\lim_i x_i) = \lim_i \tilde{f}(x_i) = \lim_i f(x_i)$. Es gibt also höchstens eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$, und diese muß durch $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_i f(x_i)$ gegeben sein. Da x_i ein Cauchy-Netz ist und f (da linear) gleichmäßig stetig ist, gilt gleiches auch für $f(x_i)$, und somit konvergiert $f(x_i)$, da F vollständig ist.
Wir definieren $\tilde{f}(\tilde{x})$ als diesen Grenzwert und müssen zeigen, daß er nicht von der Wahl des Netzes abhängt. Sei also x_j ein zweites Netz in E, welches gegen $\tilde{x}$ konvergiert. Wir betrachten als Indexmenge das Produkt $I \times J$ mit der Produkt-Ordnung, d.h. $(i,j) \succ (i',j') :\Leftrightarrow (i \succ i')\&(j \succ j')$ und als Netz darauf die Abbildung $(i,j) \mapsto x_{i,j} := x_i - x_j$. Dieses Netz konvergiert nun gegen $\lim_i x_i - \lim_j x_j = \tilde{x} - \tilde{x} = 0$, also konvergiert das Bildnetz $f(x_{i,j}) = f(x_i) - f(x_j)$ gegen $f(0) = 0$, andererseits ist sein Limes aber gerade $\lim_{i,j} f(x_{i,j}) = \lim_i f(x_i) - \lim_j f(x_j)$, d.h. der Grenzwert $\tilde{f}(\tilde{x})$ ist eindeutig.
Die Fortsetzung $\tilde{f}$ ist linear: Sei $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ in $\tilde{E}$, dann existieren Netze x_i und y_j in E mit $x_i \to \tilde{x}$ und $y_j \to \tilde{y}$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\tilde{x} + \lambda\tilde{y}) &= \tilde{f}\big(\lim_i x_i + \lambda \lim_j y_j\big) = \tilde{f}\big(\lim_{i,j}(x_i + \lambda y_j)\big) \\
&= \lim_{i,j} \tilde{f}(x_i + \lambda y_j) = \lim_{i,j} f(x_i + \lambda y_j) = \lim_{i,j} f(x_i) + \lambda f(y_j) \\
&= \lim_i f(x_i) + \lambda \lim_j f(y_j) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \lambda \tilde{f}(\tilde{y}).
\end{aligned}$$

Die Fortsetzung $\tilde{f}$ ist stetig:
Beweis mittels SN'en: Es sei q eine stetige SN auf F. Dann ist $q \circ f$ eine solche auf E, also existiert nach 3.1.4 eine stetige SN $\widetilde{q \circ f}$ auf $\tilde{E}$, welche $q \circ f$ fortsetzt. Es gilt $\widetilde{q \circ f} = q \circ \tilde{f}$, da

$$\begin{aligned}
(\widetilde{q \circ f})(\tilde{x}) &= (\widetilde{q \circ f})(\lim_i x_i) = \lim_i (\widetilde{q \circ f})(x_i) = \lim_i (q \circ f)(x_i) \\
&= q(\lim_i f(x_i)) = q(\tilde{f}(\lim x_i)) = (q \circ \tilde{f})(\tilde{x})
\end{aligned}$$

Beweis mittels 0-Umgebung: Sei nämlich V eine abgeschlossene 0-Umgebung von F und U eine solche von E mit $f(U) \subseteq V$. Dann ist $\bar{U}$ eine 0-Umgebung in $\tilde{E}$ mit $\tilde{f}(\bar{U}) \subseteq \overline{f(U)} \subseteq \bar{V} = V$ (Sei nämlich $\tilde{x} \in \bar{U}$, dann existiert ein Netz x_i in $U \subseteq E$, welches gegen $\tilde{x}$ konvergiert. Also ist $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_i f(x_i) \in \bar{V} = V$). □

3.8.4 Satz. Existenz der Vervollständigung.

Jeder LKV E besitzt eine bis auf Isomorphie eindeutige Vervollständigung $\iota : E \to \tilde{E}$. Ist E normierbar (bzw. metrisierbar) so auch $\tilde{E}$.

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall, daß E ein normierter Raum ist. Dazu suchen wir einen vollständigen Raum, in welchen E isometrisch auf einen Teilraum eingebettet werden kann. Nach 2.2.7 ist der Dualraum $E' := L(E, \mathbb{K})$ immer vollständig, also auch der Biduale $E'' := (E')'$. Nun betrachten wir die Abbildung $\iota : E \to E''$, gegeben durch $\iota(x) = \mathrm{ev}_x : x' \mapsto x'(x)$. Diese ist klarerweise wohldefiniert, linear und stetig, denn

$$\|\iota(x)\| := \sup\{\underbrace{|\iota(x)(x')|}_{|x'(x)|\leq\|x'\|\cdot\|x\|} : \|x'\| = 1\} \leq \|x\|.$$

Bleibt zu zeigen, daß ι eine Isometrie ist. Dazu genügt es ein $x' \in E'$ zu finden mit $x'(x) = \|x\|$ und $\|x'\| = 1$.

Geometrisch bedeutet dies, daß eine affine abgeschlossene Hyperebene H existiert welche x enthält und disjunkt zum offenen Ball $\{y : \|y\| < \|x\|\}$ ist, also tangential an die Einheitssphäre liegt.
($\Rightarrow$) Die affine Hyperebene $H := \{y : x'(y) = \|x\|\}$ erfüllt $x \in H$ und $\|x\| = x'(y) \leq \|x'\|\,\|y\| = \|y\|$ für jedes $y \in H$.
($\Leftarrow$) Umgekehrt, sei H solch eine abgeschlossene affine Hyperebene, d.h. nach 3.4.4 existiert $0 \neq x' \in E'$ und $c \in \mathbb{K}$ mit $H = \{y : x'(y) = c\}$. Wegen $0 \notin H$ ist $c \neq 0$ und somit o.B.d.A. $c = \|x\|$. Wegen $x \in H$ ist $\|x\| = x'(x) \leq \|x'\|\,\|x\|$, d.h. $1 \leq \|x'\|$. Angenommen $1 < \|x'\| = \sup\{|x'(z)| : \|z\| = 1\}$. Dann existiert ein z mit $\|z\| = 1$ und $x'(z) > 1$, also ist $y := \frac{\|x\|}{x'(z)} z \in H$ aber $\|y\| = \frac{\|x\|}{x'(z)} < \|x\|$, ein Widerspruch.

Die Existenz so einer Hyperebene werden wir in 5.2.2 zeigen (siehe auch 5.1.10) unter Verwendung des Satzes von Hahn-Banach.

Als $\tilde{E}$ nehmen wir nun den Abschluß des Bildes $\iota(E)$ in E''. Dann ist ι eine Einbettung von E auf den dichten Teilraum $\iota(E)$ des Banach-Raums $\tilde{E}$, und somit nach obigem Lemma 3.8.3 eine Vervollständigung.

Nun der Fall eines allgemeinen LKV'es E. Nach 3.3.4 läßt sich E auffassen als Teilraum eines Produkts normierter Räume E_p. Dieses wiederum, läßt sich auffassen als Teilraum des Produkts der Vervollständigungen $\widetilde{E_p}$. der Faktoren. Also ist E ein Teilraum eines vollständigen LKV'es. Für $\tilde{E}$ nehmen wir nun den Abschluß von E in diesem vollständigen LKV. □

3.9 Komplexifizierung

3.9.1 Bemerkung. Komplexifizierung.

Wir versuchen jetzt aus einem beliebigen reellen Vektorraum einen komplexen zu machen. Man beachte, daß die zu reellen Vektorräumen von reellwertigen Funktionen gehörenden komplexen Vektorräumen komplexwertiger Funktionen gerade aus Paaren von Funktionen des reellen Vektorraums bestehen, nämlich dem real- und dem imaginär-Teil der komplexwertigen Funktion. Wir definieren also ganz allgemein die KOMPLEXIFIZIERUNG $E_\mathbb{C}$ eines reellen Vektorraums E als $E_\mathbb{C} := \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} E = E \times E$, und schreiben die Elemente $(x, y) \in E_\mathbb{C}$ als $x + i\,y$. Die Multiplikation mit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ist dann durch $z \cdot (z' \otimes w) := (zz') \otimes w$, d.h. $(a+ib)\cdot(x+iy) := (ax-by)+i(ay+bx)$ definiert. Klarerweise wird dadurch $E_\mathbb{C}$ zu einem komplexen Vektorraum und die Abbildungen $\iota : E \to E_\mathbb{C}$, $x \mapsto x + i\,0$ sowie $\mathfrak{Re} : E_\mathbb{C} \to E$, $(x + iy) \mapsto x$ sind $\mathbb{R}$-linear.

Die üblichen Subbasen von Seminormen auf dem reellen LKV $E \times E$ wie $(x, y) \mapsto p(x) + p(y)$, wie $(x, y) \mapsto \sqrt{p(x)^2 + p(y)^2}$ oder wie $(x, y) \mapsto \max\{p(x), p(y)\}$ sind aber keine Seminormen für den komplexen Vektorraum. Um solche zu erhalten betrachten wir die stetigen Seminormen $p_z(w) := p(\mathfrak{Re}(zw))$ für $|z| = 1$ und Seminormen p von E. Damit definieren wir $p_\mathbb{C} := \sup\{p_z : |z| = 1\}$. Es ist $p_\mathbb{C}$ eine wohldefinierte reelle Seminorm auf $E_\mathbb{C}$, denn für $z = x + i\,y$ ist wegen der Hölder-Ungleichung

$$p_z(x+iy) = p\Big(\mathfrak{Re}\big((a+ib)(x+iy)\big)\Big) = \\ = p(ax-by) \le |a|p(x) + |b|p(y) \le |z|\sqrt{p(x)^2+p(y)^2}.$$

Sie ist sogar eine komplexe Seminorm, denn klarerweise gilt $p_\mathbb{C}(z\,w) = p_\mathbb{C}(w)$ für alle $|z| = 1$. Weiters ist $\max\{p(x), p(y)\} \le p_\mathbb{C}(x+iy) \le p(x) + p(y)$, also erzeugen diese Seminormen die Topologie des Produkts=Koprodukts.

Wir können als erzeugende Seminormen auf $E_\mathbb{C}$ also die Familie aller $p_\mathbb{C}$ nehmen, wobei p die stetigen Seminormen von E durchläuft.

3.9.2 Proposition. Universalität der Komplexifizierung.

Komplexifizieren $E \mapsto E_\mathbb{C} := \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} E := E \times E$ liefert folgende Isomorphismen für VR'e E und G über $\mathbb{R}$ sowie F über $\mathbb{C}$:

1. *Erste universelle Problem:*
   $L_\mathbb{C}(E_\mathbb{C}, F) \cong L_\mathbb{R}(E, F)$, $h \mapsto h \circ \iota$, $\Big(f^\mathbb{C} : x + i\,y \mapsto f(x) + i\,f(y)\Big) \leftarrow\!\shortmid f$.

   D.h. die reell-linearen Abbildungen $f : E \to F$ in jeden komplexen Vektorraum F entsprechen in bijektiver Weise den komplex-linearen Abbildungen $f^\mathbb{C} : E_\mathbb{C} \to F$ vermöge $f^\mathbb{C} \circ \iota = f$.

$$\begin{tikzcd} E_\mathbb{C} \arrow[dr, "f^\mathbb{C}"'] & & E \arrow[ll, "\iota"'] \arrow[dl, "f"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

2. *Zweite universelle Problem:*
   $L_\mathbb{C}(F, E_\mathbb{C}) \cong L_\mathbb{R}(F, E)$, $h \mapsto \mathfrak{Re} \circ h$, $\Big(f_\mathbb{C} : x \mapsto f(x) - if(ix)\Big) \leftarrow\!\shortmid f$.

   D.h. die reell-linearen Abbildungen $f : F \to E$ auf jedem komplexen Vektorraum F entsprechen in bijektiver Weise den komplex-linearen Abbildungen $f_\mathbb{C} : F \to E_\mathbb{C}$ vermöge $\mathfrak{Re} \circ f_\mathbb{C} = f$.

$$\begin{tikzcd} E_\mathbb{C} \arrow[rr, "\mathfrak{Re}"] & & E \\ & F \arrow[ul, "f_\mathbb{C}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

3. $L_\mathbb{R}(E, G)_\mathbb{C} \cong L_\mathbb{R}(E, G_\mathbb{C})$, $f + i\,g \mapsto \Big(x \mapsto f(x) + i\,g(x)\Big)$, $(\mathfrak{Re} \circ h, \mathfrak{Im} \circ h) \leftarrow\!\shortmid h$.
4. $L_\mathbb{R}(E, G)_\mathbb{C} \cong L_\mathbb{R}(E_\mathbb{C}, G)$,
   $f + i\,g \mapsto \Big(x + i\,y \mapsto f(x) - g(y)\Big)$, $(h \circ \iota, -h \circ I \circ \iota) \leftarrow\!\shortmid h$.

Alle Isomorphismen sind $\mathbb{C}$-linear, wobei die komplexe Struktur auf $L_\mathbb{R}(F, E)$ durch $i \cdot f := f \circ I$ und auf $L_\mathbb{R}(E, F)$ durch $i \cdot f := I \circ f$ gegeben sind.
Alle Isomorphismen sind auch Homöomorphismen, wenn wir $E_\mathbb{C}$ mit der Produktstruktur versehen.
Wenn alle Räume Banach-Räume sind, so sind allerdings nur die Isomorphismen in $\boxed{2}$ and $\boxed{3}$ Isometrien.

Beweis. $\boxed{1}$ Offensichtlich sind die angegebenen Abbildungen stetig linear und die Zusammensetzung auf $L_\mathbb{R}(E, F)$ die Identität. Ebenso ist es auch jene auf $L_\mathbb{C}(E_\mathbb{C}, F)$, denn $h(x + i\,y) = h(x) + i\,h(y) = (h \circ \iota)(x) + i\,(h \circ \iota)(y)$.

$\boxed{2}$ Sei $f : F \to E$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Falls eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f_\mathbb{C} : F \to E_\mathbb{C}$ existiert mit $\mathfrak{Re} \circ f_\mathbb{C} = f$, so ist $\mathfrak{Im} \circ f_\mathbb{C} = -\mathfrak{Re} \circ i \circ f_\mathbb{C} = -\mathfrak{Re} \circ f_\mathbb{C} \circ i = -f \circ i$, da $\mathfrak{Re}(i(x + iy)) = -\mathfrak{Im}(x + iy)$. Also ist $f_\mathbb{C}$ eindeutig festgelegt, und zwar gilt $f_\mathbb{C}(x) = \mathfrak{Re}\, f_\mathbb{C}(x) + i\,\mathfrak{Im}\, f_\mathbb{C}(x) = f(x) - if(ix)$. Dies definiert nun wirklich eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f_\mathbb{C}$, denn sie ist klarerweise $\mathbb{R}$-linear und $f_\mathbb{C}(ix) = f(ix) - if(iix) = f(ix) + if(x) = i(f(x) - if(ix)) = i\,f_\mathbb{C}(x)$.

Daß die universelle Eigenschaft auch für stetige und für beschränkte lineare Abbildungen richtig ist sieht man wie folgt:
Es ist $p \circ \mathfrak{Re} \le p_{\mathbb{C}}$, d.h. $\mathfrak{Re} : E_{\mathbb{C}} \to E$ ist stetig, und

$$(p_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}})(z) = p_{\mathbb{C}}(f(z) - i f(iz)) \le \sqrt{p(f(z))^2 + p(f(iz))^2},$$

also ist auch $f_{\mathbb{C}}$ stetig, falls f es ist.
Die Bijektion $\mathfrak{Re}_* : L_{\mathbb{C}}(F, E_{\mathbb{C}}) \to L_{\mathbb{R}}(F, E)$ ist ein topologischer linearer Isomorphismus, da sie stetig und reell-linear ist und ihre Umkehrabbildung durch $f \mapsto f - i \cdot f \cdot i$ gegeben ist. Sie ist auch komplex linear, wenn man $L_{\mathbb{R}}(F, E)$ durch $i \cdot f : x \mapsto f(i\,x)$ zu einem komplexen Vektorraum macht, denn $(i \cdot \mathfrak{Re}_*(f))(x) = \mathfrak{Re}_*(f)(i\,x) = \mathfrak{Re}(f(i\,x)) = \mathfrak{Re}(i\,f(x)) = \mathfrak{Re}((i\,f)(x)) = (\mathfrak{Re}_*(i\,f))(x)$.

$\boxed{3}$ Offensichtlich sind die angegebenen Abbildungen stetig linear und invers zueinander.

$\boxed{4}$ Der Isomorphismus $L_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{C}}, G) \cong L_{\mathbb{R}}(E, G)_{\mathbb{C}}$ von komplexen LKV'en ist gegeben durch: $h \mapsto \big(x \mapsto h(x), x \mapsto -h(i\,x)\big)$ mit Inverser Abbildung $(f, g) \mapsto \big((x + i\,y) \mapsto (f(x) - g(y))\big)$, denn eine Zusammensetzung ergibt $h : (x + iy) \mapsto h(x) + h(i\,y) = h(x + i\,y)$ und die andere $(f, g) = \big(x \mapsto f(x), x \mapsto -(-g(x))\big)$. Die Inverse Abbildung ist auch komplex-linear, denn $i \cdot (f, g) = (-g, f)$ wird auf $(x, y) \mapsto -g(x) - f(y) = f(-y) - g(x)$ abgebildet.

Die Aussage über Isometrien zeigen wir in $\boxed{3.9.4.2}$ und $\boxed{3.9.4.3}$. □

3.9.3 Folgerung. Komplexifizierung von Räumen linearer Abbildungen.
Für reelle VR E und G erhalten wir:

$$\begin{tikzcd}
L_{\mathbb{C}}(G_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}) \arrow[r, equal, "\boxed{1}"] \arrow[d, equal, "\boxed{2}"'] & L_{\mathbb{R}}(G, E_{\mathbb{C}}) \arrow[d, equal, "\boxed{3}"] \\
L_{\mathbb{R}}(G_{\mathbb{C}}, E) \arrow[r, equal, "\boxed{4}"] & L_{\mathbb{R}}(G, E)_{\mathbb{C}} \arrow[ul, dotted]
\end{tikzcd}$$

Der diagonale Isomorphismus ist durch

$$f + i\,g \mapsto \Big(x + i\,y \mapsto \big(f(x) - g(y)\big) + i\,\big(f(y) + g(x)\big)\Big)$$

gegeben. Für Dualräume komplexer VR F erhalten wir:

$$L_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R}) \overset{\boxed{2}}{\cong} L_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C}).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
f + i\,g &\xmapsto{\boxed{4}} \Big(x + i\,y \mapsto \big(f(x) - g(y)\big)\Big) \\
&\xmapsto{\boxed{2}} \Big(x + i\,y \mapsto \big(f(x) - g(y)\big) + i\,\big(f(y) + g(x)\big)\Big) \\
f + i\,g &\xmapsto{\boxed{3}} \Big(x \mapsto f(x) + i\,g(x)\Big) \\
&\xmapsto{\boxed{1}} \Big(x + i\,y \mapsto \big(f(x) - g(y)\big) + i\,\big(f(y) + g(x)\big)\Big) \quad \square
\end{aligned}$$

3.9.4 Bemerkungen. Isometrie natürlicher Isomorphismen.

1. *Die Komplexifierung von $\mathbb{R}$ ist isometrisch zu $\mathbb{C}$:*
Die komplexe Norm $\|x+i\,y\|_{\mathbb{C}}$ zu $\|(x,y)\|_\infty$ ist wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung [**18**, 6.2.1] *durch*

$$\begin{aligned}\|x+i\,y\|_{\mathbb{C}} &:= \sup\{\|\Re e((a+i\,b)\cdot(x+i\,y))\|_\infty : |a+i\,b|=1\} = \\ &= \sup\{|a\,x-b\,y| : |a+i\,b|=1\} = \|(x,y)\|_2\end{aligned}$$

gegeben.

2. *Der kanonische Isomorphismus $L_{\mathbb{C}}(F,E_{\mathbb{C}}) \overset{\boxed{3.9.2.2}}{\cong} L_{\mathbb{R}}(F,E)$ ist für normierte Räume eine Isometrie: Denn für absolutkonvexe beschränkte Mengen $B\subseteq F$ ist*

$$\begin{aligned}\sup\{p_{\mathbb{C}}(f_{\mathbb{C}}(x)) : x\in B\} &= \sup\{p(\Re e(\lambda\, f_{\mathbb{C}}(x))) : |\lambda|=1,\, x\in B\}\\ &= \sup\{p(\Re e(f_{\mathbb{C}}(\lambda\, x))) : |\lambda|=1,\, x\in B\}\\ &= \sup\{p(f(y)) : y=\lambda x\in B\}.\end{aligned}$$

3. *Der kanonische Isomorphismus $B(X,G)_{\mathbb{C}} \cong B(X,G_{\mathbb{C}})$ ist eine Isometrie, somit auch für C, ℓ^∞, c_0 und $L_{\mathbb{R}}(E,\_)$ (das ist $\boxed{3.9.2.3}$): Es sei p eine Seminorm auf G und $h\in B(X,G)_{\mathbb{C}}$, dann ist*

$$\begin{aligned}\sup\{p_{\mathbb{C}}(h(x)) : x\in X\} &= \sup\Big\{p(\Re e(\lambda\, h(x))) : x\in X,\ |\lambda|=1\Big\}\\ &= \sup\Big\{\sup\{p(\Re e(\lambda\, h)(x)) : x\in X\} : |\lambda|=1\Big\}.\end{aligned}$$

4. *Der kanonische Isomorphismus $\ell^p(I,G)_{\mathbb{C}} \cong \ell^p(I,G_{\mathbb{C}})$ ist für $1\le p<\infty$ keine Isometrie: Wir wählen $I:=2$ und $G:=\mathbb{R}$ und betrachten $(1,0)+i(0,1)\in\ell^p(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$. Die Norm in $\ell^p(2,\mathbb{C})$ ist dann $\|(1,i)\|_p = 2^{\frac1p}$, jene in $\ell^p(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ hingegen*

$$\begin{aligned}\|(1,0)+i(0,1)\|_{\mathbb{C}} &:= \sup\Big\{\|\Re e(a+i\,b,-b+i\,a)\|_p : |a+i\,b|=1\Big\}\\ &\le \sup\{\|(a,-b)\|_p : |a+i\,b|=1\}\\ &= \max\{1,(2\frac{1}{2^{p/2}})^{1/p}\} = \max\{1,2^{\frac1p-\frac12}\} < 2^{\frac1p}.\end{aligned}$$

5. *Die komplexifizierte Norm $\|\_\|_{\mathbb{C}}$ eines reellen Hilbert-Raums $(E,\|\_\|)$ ist keine Hilbert-Raum-Norm: In der Tat für $x=(1,0)$ und $y=(0,i)$ in $\ell^2(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ gilt die Parallelogrammgleichung nicht, denn $\|x\|_{\mathbb{C}}=1=\|y\|_{\mathbb{C}}$ aber*

$$\|x\pm y\|_{\mathbb{C}} = \sup\Big\{\|\Re e(a+i\,b,\pm(i\,a-b))\|_2 : |a+i\,b|=1\Big\} = 1.$$

6. *Für normierte Räume sind die kanonischen Isomorphismen $L_{\mathbb{C}}(G_{\mathbb{C}},E_{\mathbb{C}})\cong L_{\mathbb{R}}(G,E_{\mathbb{C}})$, $L_{\mathbb{R}}(G_{\mathbb{C}},E)\cong L_{\mathbb{R}}(G,E)_{\mathbb{C}}$ und $L_{\mathbb{R}}(G,E)_{\mathbb{C}}\cong L_{\mathbb{C}}(G_{\mathbb{C}},E_{\mathbb{C}})$ keine Isometrien: Es genügt wegen $\boxed{3.9.3}$ dies für den mitteleren zu zeigen. Sei dazu $E:=\mathbb{R}$, $G:=\ell^2(2)$, $f:=\mathrm{pr}_1$ und $g:=\mathrm{pr}_2$. Dann ist nach $\boxed{3.9.2.4}$*

$$\begin{aligned}\|f+i\,g\|_{\mathbb{C}} &:= \sup\{\|\Re e((a+i\,b)\,(f+i\,g))\| : |a+ib|=1\}\\ &= \sup\{|a\,f(x)-b\,g(x)| : \|x\|_2=1,\ |a+ib|=1\}\\ &= \sup\{|a\,x_1-b\,x_2| : \|(x_1,x_2)\|_2=1,\ \|(a,b)\|_2=1\}\le 1\\ \|x+i\,y\mapsto f(x)-g(y)\| &:= \sup\{|f(x)-g(y)| : \|x+i\,y\|_{\mathbb{C}}=1\}\\ &= \sup\{|x_1-y_2| : \|x+i\,y\|_{\mathbb{C}}=1\}\ge 2,\end{aligned}$$

nach $\boxed{4}$ wenn wir $x=(1,0)$ und $y=(0,-1)$ wählen.

7. *Nicht jeder komplexe LKV ist die Komplexifizierung eines reellen LKV: In* [1] *wurde ein komplexer Banach-Raum konstruiert, der nicht* $\mathbb{C}$*-isomorph zu seinem komplex-konjugierten* $\bar{E}$ *(d.h.* E *mit der Sklarmultiplkation* $\bullet$ *welche durch* $\lambda \bullet x := \bar{\lambda} \cdot x$ *gegeben ist) ist. Wäre* $E \cong F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ *so auch* $\bar{E} \cong \overline{F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \cong F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong E$*, wobei der Isomorphimus in der Mitte durch* $x \otimes \lambda \mapsto x \otimes \bar{\lambda}$ *gegeben ist.*

   Für VR hingegen ist das richtig, denn nach Wahl einer Basis können wir ihn als Komplexifizierung des Teilraums der reellen Linearkombinationen auffassen.

4. Baire-Eigenschaft

In diesem Kapitel verwenden wir die Baire'sche Eigenschaft und ihre Verallgemeinerungen um die Stetigkeit gewisser linearer Abbildungen zu erkennen.

4.1 Baire'sche Räume

4.1.1 Meßbare Mengen.

Eine σ-ALGEBRA $\mathcal{A}$ auf einer Menge X ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$;
3. $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, abzählbar $\Rightarrow \bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{A}$.

Das Paar $(X, \mathcal{A})$ bezeichnet man dann als MESSRAUM.

Weiters benötigt man noch ein MASS μ auf $(X, \mathcal{A})$, d.h. eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, welche σ-additiv ist, d.h. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, abzählbar und paarweise disjunkt $\Rightarrow \mu(\bigcup \mathcal{F}) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \mu(A)$.

Nun definiert man den Raum der ELEMENTAREN FUNKTIONEN als den von χ_A mit $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) < \infty$ erzeugten Raum.

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt MESSBAR, falls $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle offenen $U \subseteq \mathbb{R}$. Da jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist, jedes offene Intervall (a, b) der Durchschnitt von $(-\infty, b) \cap (a, +\infty)$ ist, und $(a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus (-\infty, a + \frac{1}{n})$ ist, genügt es, daß $f_{<c} \in \mathcal{A}$ für alle c. Andererseits ist natürlich auch $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ für jede Borel-Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ (siehe 4.1.3).

Eine Funktion ist ELEMENTAR, wenn sie meßbar ist und nur endlich viele Werte annimmt.

4.1.2 Satz. Punktweise Grenzwerte elementarer Funktionen.

Jede meßbare Funktion $f : X \to [0, +\infty]$ ist punktweiser Grenzwert einer monoton wachsenden Folge elementarer Funktionen. Ist f beschränkt, so ist die Konvergenz gleichmäßig. Die meßbaren Funktionen sind die punktweisen Grenzwerte von Folgen elementarer Funktionen. Der Raum der meßbaren Funktionen ist unter punktweisen Grenzwerten von Folgen abgeschlossen. Er ist ein Vektorraum und abgeschlossen unter sup, inf, lim inf, lim sup *und Zusammensetzung mit stetigen (oder sogar Borel-meßbaren) Funktionen.*

Beweis. Es seien f_n meßbar, und $f := \sup_n f_n$ sei überall endlich. Dann ist f meßbar, denn $f_{\leq c} = \bigcap_n (f_n)_{\leq c}$. Weiters ist $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$ und $\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$ meßbar. Also ist auch $\lim_n f_n$ meßbar.

Sei nun f meßbar. Da $f = f^+ - f^-$ mit $f^+ = \max(f, 0) \geq 0$ und $f^- = \max(-f, 0) \geq 0$ ist, dürfen wir annehmen daß $f \geq 0$. Dann ist

$$f_n := \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{falls } \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \text{ mit } k < n^2 \\ n & \text{falls } f(x) \geq n. \end{cases}$$

eine elementare Funktion (Achtung: $\mu(f^{-1}(a)) \not< \infty$). Und $(f_n)_n$ konvergiert punktweise von unten gegen f. □

4.1.3 Definition. Borel'sche und Baire'sche σ-Algebra.

Es sei X ein topologischer Raum. Die von den offenen (oder äquivalent abgeschlossenen) Mengen erzeugte σ-Algebra heißt Borel'sche σ-Algebra im erweiterten Sinn. Die von den kompakten Mengen erzeugte σ-Algebra heißt Borel'sche σ-Algebra.

Die Borel-Mengen sind genau jene Borel-Mengen im erweiterten Sinn, die in einer abzählbaren Vereinigung kompakter Mengen enthalten sind. D.h. für σ-kompakte Räume fallen die Borel-Mengen mit den Borel-Mengen im erweiterten Sinn zusammen.

Unter der Baire'schen σ-Algebra verstehen wir die kleinste σ-Algebra, s.d. alle stetigen reell-wertigen Funktionen meßbar sind, d.h. ist erzeugt von den Urbildern $f^{-1}(U)$ der offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$ unter allen $f \in C(X, \mathbb{R})$. Die Baire-Mengen sind die Elemente der Baireschen σ-Algebra.

Eine Funktion heißt Baire-messbar (oder kurz Baire'sch), wenn sie meßbar bezüglich der Baire'schen σ-Algebra ist.

Ein Borel-Mass ist ein Maß auf der σ-Algebra der Borel-Mengen, welches auf den kompakten Mengen endlich ist.
Ein Baire-Mass ist ein Maß auf der σ-Algebra der Baire-Mengen, welches auf den kompakten Baire-Mengen endlich ist.

4.1.4 Satz. Baire'sche σ-Algebra.

Es sei X ein lokalkompakter, σ-kompakter Raum. Dann wird die Baire'sche σ-Algebra von den kompakten G_δ-Mengen erzeugt.
Ist X zusätzlich metrisierbar, so stimmen die Borel- und die Baire-Mengen überein. Die Baire-meßbaren Funktionen sind der Folgenabschluß der stetigen Funktionen (mit kompakten Träger) bezüglich punktweiser Konvergenz.

Unter einer G_δ-Menge versteht man eine Teilmenge die ein abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen ist.

Beweis. (kp-$G_\delta \subseteq$ Baire-Mengen) Es sei K eine kompakte G_δ-Menge, dann ist also $K = \bigcap_n U_n$ mit offenen U_n. Nach dem Lemma von Urysohn (siehe [**26**, 1.3]) existieren stetige Funktionen $f_n : X \to [0, 1]$ mit $f_n|_K = 1$ und $f_n|_{X \setminus U_n} = 0$. Die Folge $g_n := \min\{f_1, \dots, f_n\} \in C(X, [0, 1])$ konvergiert dann punktweise monoton fallend gegen χ_K, denn für jedes $x \notin K$, existiert ein n mit $x \notin U_n$, d.h. $f_n(x) = 0$. Somit ist χ_K eine Baire-meßbare Funktion nach 4.1.2, und $K := \chi_K^{-1}(1)$ eine Baire-Menge.

(Baire-Mengen $\subseteq \langle \text{kp-}G_\delta \rangle_{\sigma\text{-Algebra}}$) Da die Baire'sche σ-Algebra von den Urbildern der Intervalle $[c, +\infty)$ bezüglich aller stetiger Funktionen erzeugt wird (siehe 4.1.1), müssen wir nur zeigen, daß $f^{-1}[c, +\infty)$ zu der von den kompakten G_δ-Mengen erzeugten σ-Algebra gehört. Diese Urbilder sind klarerweise abgeschlossene G_δ. Da X als σ-kompakt vorausgesetzt wurde existieren kompakte Mengen K_n mit $X = \bigcup_n K_n$. Wegen der Lokalkompaktheit und dem Lemma von Urysohn (siehe [**26**, 1.3.1]), finden wir $g_n \in C_c(X,[0,1])$ mit $g_n|_{K_n} = 1$. Damit ist aber $f^{-1}[c,+\infty) = \bigcup_n f_{\geq c} \cap (g_n)_{\geq 1}$ und $f_{\geq c} \cap (g_n)_{\geq 1} = (h_n)_{\geq 0}$ ist eine kompakte G_δ-Menge, wobei $h_n := \min\{f-c, g_n - 1\}$.

($\overline{C_c}^{\text{Flg}} \subseteq$ Baire-Funktionen) Die Teilmenge der Baire-meßbaren Funktionen ist Folgen-abgeschlossen bezüglich punktweiser Konvergenz nach 4.1.2. Somit ist der Folgenabschluß der stetigen Funktionen (mit kompakten Träger) in den Baire-meßbaren Funktionen enthalten.

($\overline{C_c}^{\text{Flg}} \supseteq$ Baire-Funktionen) Betrachten wir nun jene Mengen A, für welche die charakteristische Funktion χ_A im Folgen-Abschluß der stetigen Funktionen mit kompakten Träger liegt. Diese bilden eine σ-Algebra $\mathcal{A}$, da der punktweise Grenzwert von χ_{A_n} wieder im Folgen-Abschluß liegt. Die kompakten G_δ-Mengen K sind in $\mathcal{A}$ enthalten, da nach dem ersten Teil des Beweises χ_K der punktweise Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen (mit kompakten Träger) ist. Also ist die Baire'sche σ-Algebra in $\mathcal{A}$ enthalten, und somit sind die elementaren Baire-Funktionen im Folgenabschluß der stetigen Funktionen (mit kompakten Träger). Da aber jede meßbare Funktion punktweiser Grenzwert einer Folge elementarer Funktionen ist (siehe 4.1.2), gilt gleiches auch für alle Baire-meßbaren Funktionen.

Ist X metrisierbar, dann ist jede abgeschlossene Menge A eine G_δ-Menge, denn $A = \bigcap_n U_n$, wobei $U_n := \left\{x : \sup\{d(x,a) : a \in A\} < \frac{1}{n}\right\}$. □

4.1.5 Definition. Magere und nirgends dichte Mengen.

Eine Teilmenge $M \subseteq X$ eines topologischen Raums X heißt NIRGENDS DICHT falls kein Punkt in X eine Umgebung U besitzt in welcher M dicht liegt, d.h. $U \subseteq \overline{M}$ erfüllt, also kurz gesagt dann, wenn das Innere des Abschlusses von M leer ist, siehe [**26**, 3.2.1].

Eine Teilmenge heißt MAGER, falls sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Das ist genau dann der Fall, wenn sie in der abzählbaren Vereinigung abgeschlossener Mengen mit leeren Inneren enthalten ist, siehe [**26**, 3.2.1].

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei $M = \bigcup_n N_n$, dann ist $M \subseteq \bigcup_n \overline{N_n}$.

($\Leftarrow$) E sei $M \subseteq \bigcup_n A_n$, dann ist $M = \bigcup_n (M \cap A_n)$ und $\overline{M \cap A_n} \subseteq \overline{A_n}$. □

Warnung: Mager zu sein ist keine Eigenschaft des topologischen Raumes M sondern hängt wesentlich vom umgebenden Raum X ab: Z.B. ist $\{0\}$ nirgends dicht in $\mathbb{R}$, aber natürlich nicht mager in sich selbst. Jedoch gilt:

4.1.6 Lemma. Mager in Teilräumen.

Falls M nirgends dicht oder mager in X ist, so gilt gleiches auch in jedem Raum Y der X als topologischen Teilraum enthält.

Beweis. Sei M nirgends dicht in X. Angenommen M wäre nicht nirgends dicht in Y, d.h. eine offene Menge $U \neq \emptyset$ in Y existiert mit $U \subseteq \overline{M}^Y$. Dann gilt $U \cap X \subseteq \overline{M}^Y \cap X = \overline{M}^X$ und da $U \cap X$ open in X ist und M nirgends dicht in X ist, folgt $U \cap X = \emptyset$. Weil M dense in $\overline{M}^Y$ liegt, ist jedoch sein Durchschnitt mit der nicht-leeren offenen Menge $U \subseteq \overline{M}^Y$ nicht leer, ein Widerspruch.

Die analoge Aussage für magere Mengen folgt nun offensichtlich. □

4.1.7 Satz von Osgood.

Jede Menge von reell-wertigen stetigen Funktionen die auf einer nicht mageren Menge X punktweise beschränkt ist, ist gleichmäßig beschränkt auf einer offenen, nicht-leeren Teilmenge.

Siehe [**26**, 3.2.2]

Beweis. Es sei $\mathcal{F}$ die gegebene Menge von reell-wertigen stetigen Funktionen auf X. Es sei

$$A_{f,k} := \{x \in X : |f(x)| \le k\}.$$

Dann ist $A_{f,k}$ abgeschlossen, und folglich auch die Menge $A_k := \bigcap_{f\in\mathcal{F}} A_{f,k}$ der Punkte, auf welchen die f's gleichmäßig durch k beschränkt sind. Nach Voraussetzung ist X nicht mager und klarerweise gilt $X = \{x : \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, folglich existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und eine offene nicht leere Menge U mit $U \subseteq A_k$, d.h. $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig durch k auf U beschränkt. □

4.1.8 Satz von Baire.

Konvergiert eine Folge von stetigen reell-wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X punktweise, so ist die Grenzfunktion nur auf einer mageren Menge unstetig.

Siehe [**26**, 3.2.3]

Beweis. Es konvergiere also die Folge stetiger Funktionen $f_n \in C(X,\mathbb{R})$ punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$.

Es sei $A_{k,\varepsilon} := \{x \in X : |f(x) - f_k(x)| \le \varepsilon\}$ und $A_\varepsilon := \bigcup_k (A_{k,\varepsilon})^o$ ist die Menge jener Punkte, wo f lokal durch ein f_k bis auf ε approximiert wird. Dann ist sowohl $A_{k,\varepsilon}$ als auch A_ε wachsend in ε.

Wir behaupten, daß f stetig ist in jedem Punkt aus $\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$ (Es gilt sogar Gleichheit). Falls $a \in \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$, so ist $a \in A_\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, und folglich existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a \in (A_{k,\varepsilon})^0$, d.h. es existiert eine Umgebung $U(a)$ mit $|f(x) - f_k(x)| \le \varepsilon$ für alle $x \in U(a)$. Da f_k stetig ist können wir $U(a)$ so klein wählen, daß $|f_k(x) - f_k(a)| \le \varepsilon$ ist für alle $x \in U(a)$. Somit gilt $|f(x) - f(a)| \le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| \le 3\varepsilon$ für alle $x \in U(a)$, d.h. f ist stetig bei a.

Es bleibt also zu zeigen, daß $X \setminus \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$ mager ist. Sei dazu $F_{k,\varepsilon} := \{x \in X : \forall n : |f_k(x) - f_{k+n}(x)| \le \varepsilon\}$. Dann ist $F_{k,\varepsilon}$ abgeschlossen, da die f_i stetig sind, und $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{k,\varepsilon}$, da die Folge der f_i punktweise konvergiert. Weiters ist $F_{k,\varepsilon} \subseteq A_{k,\varepsilon}$, da f_i punktweise gegen f konvergiert. Also ist auch das Innere von $F_{k,\varepsilon}$ in jenem von $A_{k,\varepsilon}$ enthalten, und folglich gilt: $\bigcup_k (F_{k,\varepsilon})^o \subseteq \bigcup_k (A_{k,\varepsilon})^o = A_\varepsilon$. Für jede abgeschlossene Menge A ist $A \setminus A^o$ abgeschlossen und nirgends dicht, also ist

$$\begin{aligned} X \setminus A_\varepsilon \subseteq X \setminus \bigcup_k (F_{k,\varepsilon})^o = \bigcup_l \Big(F_{l,\varepsilon} \setminus \bigcup_k (F_{k,\varepsilon})^o\Big) = \\ = \bigcup_l \bigcap_k \big(F_{l,\varepsilon} \setminus (F_{k,\varepsilon})^o\big) \subseteq \bigcup_{l=k} \big(F_{k,\varepsilon} \setminus (F_{k,\varepsilon})^o\big) \end{aligned}$$

mager, und somit auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_{1/n}) = X \setminus \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$. □

4.1.9 Definition. Baire'sche Räume.

Ein topologischer Raum X heißt Baire'sch, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist (siehe [**26**, 3.2.3]):

1. Komplemente magerer Teilmengen sind dicht, d.h. $M \subseteq X$, mager $\Rightarrow \overline{X \setminus M} = X$ (oder $M^o = \emptyset$),

2. A_n abg., $A_n^o = \emptyset \Rightarrow (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^o = \emptyset$;
3. O_n offen, $\overline{O_n} = X \Rightarrow \overline{(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n)} = X$.

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$) A_n abg., $A_n^o = \emptyset \Rightarrow M := \bigcup_n A_n$ mager $\Rightarrow M^o = \emptyset$.

($\boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{3}$) A_n abg., $A_n^o = \emptyset \Leftrightarrow O_n := X \setminus A_n$ offen, $\overline{O_n} = X$. Und $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^o = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus O_n)^o = (X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n)^o = X \setminus \overline{\bigcap_n O_n}$.

($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$) M mager $\Rightarrow M = \bigcup_n N_n$ mit $\overline{N_n}^o = \emptyset$. $A_n := \overline{N_n} \Rightarrow M^o \subseteq (\bigcup_n A_n)^o = \emptyset$. □

4.1.10 Lemma. Baire'sche lokalkonvexe Räume.

Ein lokalkonvexer Raum ist genau dann Baire'sch, wenn er nicht mager in sich selbst ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Diese Richtung gilt für jeden topologischen Raum $X \neq \emptyset$, denn wäre X mager im Baire'schen Raum X, dann wäre das Komplement $\emptyset = X \setminus X$ nach $\boxed{4.1.9.1}$ dicht, also $X = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Sei also E ein lokalkonvexer Raum, der nicht mager in sich selbst ist. Angenommen E ist nicht Baire'sch, d.h. nach $\boxed{4.1.9.2}$ $\exists A_n$ abg., $A_n^o = \emptyset$ und $\exists x : x \in (\bigcup_n A_n)^o$, d.h. $\bigcup_n A_n$ ist eine Umgebung von x und somit $U := \bigcup_n (A_n - x) = (\bigcup_n A_n) - x$ eine Umgebung von 0, also absorbierend. Damit ist

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} k\,U = \bigcup_{k,n} k(A_n - x),$$

also mager wegen $(A_n - x)^o = A_n^o - x = \emptyset$. □

4.1.11 Baire-Hausdorff Kategorien-Theorem.

Jeder vollständig metrische Raum ist Baire'sch.
Jeder (lokal-)kompakte topologische Raum ist Baire'sch, siehe [**26**, 3.2.4].

Es gibt Baire'sche metrisierbare LKV'e die nicht vollständig sind, siehe [**14**, S.97].

Beweis für vollständig metrische Räume. Es sei M mager, d.h. enthalten in $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ für abgeschlossene Mengen A_n mit nicht-leeren Inneren. Wegen $\boxed{4.1.9.1}$ müssen wir die Dichtheit des Komplements $X \setminus M =: M^c$ in X zeigen. Sie dazu $U_0 := \{x : d(x, x_0) < r_0\}$ eine offene Umgebung mit Radius $r_0 > 0$ eines Punktes $x_0 \in X$. Wir konstruieren induktiv offene Bälle $U_n := \{x : d(x, x_n) < r_n\}$ mit Mittelpunkt $x_n \in U_{n-1} \setminus A_n$ und Radius $0 < r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$ s.d. $\overline{U_n} \subseteq U_{n-1} \setminus A_n$. Dies ist möglich, denn nach Voraussetzung ist A_n^c dicht und U_{n-1} ist eine offene Umgebung von x_{n-1}, also existiert ein x_n in $U_{n-1} \cap A_n^c$ und wir können den Radius $0 < r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$ so wählen, daß $\overline{U_n} = \{x : d(x, x_n) \leq r_n\}$ enthalten ist in dieser offenen Menge.

Die Folge $(x_n)_n$ ist Cauchy, denn für $k' > k > n$ ist

$$d(x_{k'}, x_k) \leq \sum_{j=k+1}^{k'} d(x_j, x_{j-1}) \leq \sum_{j=k}^{k'-1} r_j < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{r_n}{2^{j-n}} \leq r_n.$$

Sei $x_\infty := \lim_n x_n$. Wegen $x_n \in U_{n-1} \subseteq U_m \subseteq \overline{U_m}$ für alle $n > m$, ist $x_\infty \in \overline{U_m} \subseteq U_0 \setminus A_m$ für alle $m > 0$, also $x_\infty \in U_0 \cap \bigcap_m A_m^c \subseteq U_0 \cap M^c$.

□

4.1.12 Folgerung von Weierstrass.

Es gibt stetige Funktionen auf $[-1,1]$, *die nirgends differenzierbar sind.*

Siehe [**26**, 3.2.5]

Beweis. Wir fassen $C([-1,1],\mathbb{R})$ auf als Teilraum von $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vermöge

$$f \mapsto \tilde{f}\left(: x \mapsto \begin{cases} f(-1) & \text{für } x < -1 \\ f(x) & \text{für } |x| \le 1 \\ f(1) & \text{für } x > 1 \end{cases} \right)$$

Es sei $M_n := \{f \in C([-1,1],\mathbb{R}) : \ \exists t \in [-1,1]\ \forall 0 < |h| \le 1 : |\frac{\tilde{f}(t+h)-\tilde{f}(t)}{h}| \le n\}$. Dann ist M_n abgeschlossen in $C([-1,1],\mathbb{R})$ (denn sei $f_k \in M_n$ mit $f_k \to f_\infty$, dann existieren entsprechende $|t_k| \le 1$ und o.B.d.A. konvergiert t_k gegen ein t_∞ welche $f_\infty \in M_n$ gewährleistet). Weiters ist M_n nirgends-dicht, denn andernfalls enthielte M_n wegen des Approximationssatzes von Weierstrass eine Umgebung eines Polynoms. Das kann nicht sein, denn es gibt beliebig nahe Kurven, mit überall beliebig großen Anstieg (addiere zum Polynom eine kleine Sägezahnkurve mit hinreichend großen Anstieg). Also ist $\bigcup_n M_n$ mager und enthält alle stetige Funktionen, die in mindestens einem Punkt differenzierbar sind. □

4.1.13 Bemerkung. Folgerungen für Baire'sche LKV.

Der Satz 4.1.8 von Baire liefert uns insbesonders für Fréchet-Räume E wegen 4.1.11 sofort, daß für jede punktweise konvergente Folge stetig linearer Funktionale $f_n : E \to \mathbb{R}$, die Grenzfunktion f ein stetig lineares Funktional ist. Denn f muß nach dem Satz von Baire in den Punkten einer dichten Menge stetig sein, und somit mindestens in einem Punkt. Da aber klarerweise f auch linear sein muß, genügt das für die Stetigkeit überall.

Der Satz 4.1.7 von Osgood liefert uns insbesonders für Fréchet-Räume E, daß jede punktweise beschränkte Familie $\mathcal{F}$ von stetigen linearen Funktionalen $f : E \to \mathbb{R}$ gleichgradig-stetig (siehe 4.2.2) und somit beschränkt in $L(E,\mathbb{R})$ ist: Denn nach dem Satz von Osgood existiert eine nicht-leere offenen Menge O, auf welcher $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt ist (durch K). Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $a \in O$, dann ist

$$\begin{aligned} |f(x)| &\le |f(x+a)| + |f(-a)| \\ &\le \sup\{|f(y)| : y \in O, f \in \mathcal{F}\} + \sup\{|f(-a)| : f \in \mathcal{F}\} \\ &\le K + K_{-a} \end{aligned}$$

für alle $x \in O - a$, also ist $\mathcal{F}(U) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$ für die 0-Umgebung $U := \frac{\varepsilon}{K+K_{-a}}(O-a)$.

Leider ist aber jeder (strikt) induktive Limes einer echt aufsteigenden Folge von Fréchet oder insbesonders von Banach-Räumen nicht Baire'sch, denn die abgeschlossenen Stufen haben leeres Inneres, sonst wären sie absorbierend und somit gleich dem ganzen Raum.

4.2 Gleichmäßige Beschränktheit

Wir sollten also diese beiden Stetigkeits-Resultate aus 4.1.13 noch wesentlich verallgemeinern. Sei dazu $\mathcal{F}$ eine punktweise beschränkte Familie stetig linearer Abbildungen $f : E \to F$. Wir wollen Bedingungen finden, so daß jede solche Familie gleichgradig-stetig ist, d.h. für jede (abgeschlossene) 0-Umgebung V in F die Menge $U := \bigcap_{f\in\mathcal{F}} f^{-1}(V)$ eine 0-Umgebung in E ist. Diese Menge ist als Durchschnitt abgeschlossener absolut-konvexer Mengen selbst abgeschlossen und absolut-konvex. Und sie ist absorbierend, denn für $x \in E$ ist $\mathcal{F}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt in

F, also existiert ein $K > 0$, mit $\mathcal{F}(x) \subseteq K \cdot V$, und damit ist $x \in K \cdot U$. Folglich definieren wir:

4.2.1 Definition. Tonnelierte Räume.

Eine Teilmenge U eines LKV's E heißt TONNE oder FASS (engl: barrel), falls sie abgeschlossen, absolut-konvex und absorbierend ist.
Ein LKV E heißt TONNELIERT (FASSBAR wäre mißverständlich; engl: BARRELLED oder BARRELED) falls jede Tonne eine Null-Umgebung ist; das ist genau dann der Fall wenn jede Seminorm, deren Einheitskugel abgeschlossen ist, stetig ist, denn die Tonnen sind genau die Einheitskugeln von solchen Seminormen: Sei nämlich A eine Tonne, dann ist das Minkowski-Funktional p von A nach 1.3.6 eine Seminorm mit $p_{<1} \subseteq A \subseteq p_{\leq 1}$. Da A abgeschlossen vorausgesetzt ist, ist $A = p_{\leq 1}$, denn sei $1 = p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$, dann existieren $\lambda_n \searrow 1$ und $a_n \in A$ mit $x = \lambda_n\, a_n$ und folglich ist $x = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \in A$. Das umgekehrt abgeschlossene Einheitsbälle von Seminormen Tonnen sind ist offensichtlich.

Wir haben also die Implikation ($1 \Rightarrow 3$) des folgenden Satzes bewiesen:

4.2.2 Uniform Boundedness Principle.

Es sei E ein tonnelierter LKV und F ein beliebiger LKV, dann sind für jede Menge $\mathcal{F}$ von stetigen linearen Abbildungen $f : E \to F$ folgende Aussagen äquivalent

1. *$\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt,*
   d.h. für alle $x \in E$ ist die Menge $\mathcal{F}(x)$ in F beschränkt.

$\Leftrightarrow$ 2. *$\mathcal{F}$ ist beschränkt in $L(E, F)$,*
   d.h. für alle beschränkten $B \subseteq E$ ist $\mathcal{F}(B)$ beschränkt in F (siehe 3.1.3).

$\Leftrightarrow$ 3. *$\mathcal{F}$ ist gleichgradig-stetig,*
   d.h. zu jeder 0-Umgebung V von F existiert eine 0-Umgebung U von E mit $f(U) \subseteq V$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Beweis. Wir haben in 4.1.13 bereits (1 $\Rightarrow$ 3) gezeigt, denn danach ist $\bigcap_{f\in\mathcal{F}} f^{-1}(V)$ eine Tonne.
Die Implikationen (1 $\Leftarrow$ 2 $\Leftarrow$ 3) gelten allgemein:

(2 $\Leftarrow$ 3) Es sei $B \subseteq E$ beschränkt. Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{F}(B)$ in F beschränkt ist. Sei also V eine 0-Umgebung. Da $\mathcal{F}$ gleichgradig-stetig ist, existiert eine 0-Umgebung U von E mit $f(U) \subseteq V$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Da B beschränkt ist existiert ein $K > 0$ mit $B \subseteq K \cdot U$, und somit $\mathcal{F}(B) \subseteq K \cdot V$, d.h. $\mathcal{F}(B)$ ist beschränkt.

(1 $\Leftarrow$ 2) ist klar, da einzelne Punkte beschränkte Mengen sind. □

4.2.3 Es gilt auch die Umkehrung.

D.h. ein Raum für den obige Äquivalenzen gelten ist tonneliert. Sei nämlich U eine Tonne. Dann ist $\{x' \in E^* : |x'(U)| \leq 1\}$ eine punktweise beschränkte Menge in E^* da U absorbierend ist, und somit nach Voraussetzung gleichgradig-stetig, d.h. es existiert eine 0-Umgebung $V \subseteq E$, s.d. $|x'(V)| \leq 1$ für alle $x' \in E^*$ mit $|x'(U)| \leq 1$. Es würde folglich genügen zu zeigen, daß $V \subseteq U$. Dazu benötigen wir das Lemma 5.2.4 von Mazur eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach: Falls $x \notin U$, einer abgeschlossenen absolut-konvexen Menge, so existiert ein $x' \in E^*$ mit $|x'(x)| > 1$ und $|x'(U)| \leq 1$.

Jene LKV'e E, für welche das Uniform Boundedness Principle für abzählbare Mengen $\mathcal{F}$ gilt, heißen $\aleph_0$-TONNELIERT, siehe [14, S.252]. Der Dualraum jedes metrisierbaren LKV's hat diese Eigenschaft, ist aber nicht immer tonneliert.

4.2.4 Lemma. Erblichkeit von Tonneliertheit.

Jeder Baire'sche LKV ist tonneliert.
Tonneliert vererbt sich auf finale Strukturen und auf Produkte.

Beweis. Sei A eine Tonne in einen Baire'schen LKV E, dann ist $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot A$, und somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot A^o = (n \cdot A)^o \neq \emptyset$. Also existiert ein $a \in A^0$. Dann ist $-a \in A^0$ und somit $0 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \in A^0$, d.h. A ist eine 0-Umgebung.

Es sei $f_i : E_i \to E$ eine finale Familie und alle E_i seien tonneliert. Sei weiters $q : E \to \mathbb{R}$ eine Seminorm mit abgeschlossener Einheitskugel, dann gilt gleiches für $q \circ f_i$, denn $(q \circ f_i)_{\leq 1} = (f_i)^{-1}(q_{\leq 1})$. Also ist $q \circ f_i$ stetig, und damit auch q.

Bezüglich Produkte siehe [14, S.223]. □

4.2.5 Folgerung. Punktweise Konvergenz ist nicht bornologisch.

Der Dualraum E^* jedes tonnelierten LKV'es der eine beschränkte Menge B besitzt, die in keinen endlich dimensionalen Teilraum enthalten ist, ist mit der Topologie der punktweisen Konvergenz nicht bornologisch.
Z.B. ist das für jeden unendlich dimensionalen Banach-Raum erfüllt.

Beweis. Es sei $B \subseteq E$ beschränkt. Dann ist die Polare $B^o := \{x' \in E^* : \forall x \in B : |x'(x)| \leq 1\}$ eine absolut-konvexe 0-Umgebung in E^* und somit GEFRÄSSIG (d.h. absorbiert beschränkte Mengen) in E^*. Wegen des Uniform Boundedness Principles sind die beschränkten Mengen in E^* genau die bzgl. der Topologie der punktweisen Konvergenz beschränkten. Wäre also diese letztgenannte Struktur bornologisch, so wäre B^o eine ihrer 0-Umgebungen, d.h. es würde eine endliche Menge $A \subseteq E$ existieren mit $A^o \subseteq B^o$. Nach den Bipolarensatz 5.4.7 ist dann $B \subseteq (B^o)_o \subseteq (A^o)_o = \langle A \rangle_{\text{abg.,abs.konv.}}$, also in einem endlich dimensionalen Teilraum enthalten, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

4.2.6 Banach-Steinhaus Theorem.

Der punktweise Grenzwert einer Folge stetig linearer Abbildungen von einem tonnelierten LKV E in einen LKV F ist eine stetig lineare Abbildung. D.h. für vollständiges F ist der Raum $LC(E,F) := L(E,F) \cap C(E,F)$ der stetig linearen Abbildungen bezüglich punktweiser Konvergenz Folgen-vollständig (aber nicht notwendig vollständig).

Beweis. Seien $f_n : E \to F$ stetig lineare Abbildungen. Es konvergiere f_n punktweise gegen f. Dann ist f klarerweise linear und $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ punktweise beschränkt. Also wegen des Uniform Boundedness Principle 4.2.2 gleichgradig-stetig, d.h. für alle (abgeschlossenen) 0-Umgebungen V existiert eine 0-Umgebung U mit $f_n(U) \subseteq V$ für alle n. Dann gilt aber auch $f(U) \subseteq \overline{V} = V$, d.h. f ist stetig. □

4.2.7 Folgerung. Skalare Beschränktheit.

Jede skalar-beschränkte Menge ist beschränkt.

Es heißt eine Menge $B \subset E$ SKALAR-BESCHRÄNKT, falls $x'(B) \subset \mathbb{K}$ beschränkt ist für alle stetig linearen Funktionale $x' \in E^*$.

Beweis. Sei zuerst E ein normierter Raum, dann ist $\iota : E \to E''$ eine Isometrie auf den Teilraum $\iota(E)$, wegen des Satzes von Hahn-Banach (siehe 5.1.10; vgl. mit dem Beweis von 3.8.4, oder direkt mit 5.1.10). Die Menge $\iota(B)$ ist punktweise beschränkt, denn für alle $x' \in E'$ ist $x'(B)$ als beschränkt vorausgesetzt. Da E' ein Banach-Raum ist, ist $\iota(B)$ beschränkt in $L(E', \mathbb{K})$, nach dem Uniform Boundedness Principle 4.2.2, also ist $B \subset E$ beschränkt da ι eine Isometrie ist.

Sei nun $B \subset E$ skalar-beschränkt in einem beliebigen LKV E. Wir müssen zeigen, daß $p(B)$ beschränkt ist, für jede stetige SN p von E. Es sei $N := \ker(p)$. Dann ist $E_p := E/N$ ein normierter Raum, bezüglich der Seminorm $\tilde{p}$ mit $\tilde{p} \circ \pi = p$, wobei $\pi : E \to E_p$ die natürliche Quotienten-Abbildung ist. Es ist $\pi(B)$ skalar-beschränkt im normierten Raum E_p, denn $\tilde{\ell}(\pi(B)) = (\tilde{\ell} \circ \pi)(B)$ ist beschränkt für alle stetig linearen Funktionale $\tilde{\ell}$ auf E_p. Also ist $\pi(B)$ Norm-beschränkt nach dem ersten Teil, d.h. $p(B) = \tilde{p}(\pi(B))$ ist beschränkt. □

4.2.8 Folgerung. Getrennt stetige bilineare Abbildungen.

Es seien E_1 und E_2 metrisierbare LKV'e und E_2 sei tonneliert. Dann ist jede bilineare Abbildung $f : E_1 \times E_2 \to F$ mit Werten in einem beliebigen LKV F, die getrennt stetig ist, stetig.

Dieses Resultat gilt auch für tonnelierte Räume mit einer abzählbaren Basis der Bornologie, siehe [**14**, S.338].

Beweis. Da E_1 und E_2 metrisierbare LKV'e sind, genügt zu zeigen, daß f beschränkt ist (die Folgenstetigkeit bei 0 folgt aus der Homogenität wie in der Folgerung in 2.1.7, die Stetigkeit folgt daraus mittels 1.5.3). Sei also $B_i \subseteq E_i$ beschränkt für $i = 1, 2$. Wir betrachten die Abbildung $\check{f} : E_1 \to L(E_2, F)$, $\check{f}(x_1) : x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$. Diese ist wohldefiniert, da $f(x_1, \_)$ nach Voraussetzung linear und stetig ist. Sie ist auch linear, da $f(\_, x_2)$ linear ist. Weiters ist $\check{f}(B_1)$ punktweise beschränkt in $L(E_2, F)$, denn für $x_2 \in E_2$ ist $\check{f}(B_1)(x_2) = f(B_1 \times \{x_2\})$. Da E_2 tonneliert ist, ist $f(B_1 \times B_2) = \check{f}(B_1)(B_2) \subseteq F$ beschränkt. □

4.2.9 Beispiel. Unstetige aber getrennt stetige natürliche Bilinearform.

Für beliebige LKV's E betrachten wir die offensichtlich bilineare Evaluations-Abbildung $\mathrm{ev} : E^* \times E \to \mathbb{K}$, $(x', x) \mapsto x'(x)$. Diese ist beschränkt, denn wenn $A \subseteq E^*$ und $B \subseteq E$ beide beschränkt sind, dann ist $A(B)$ beschränkt wegen der Struktur von $E^* \subseteq E' = L(E, \mathbb{K})$. Angenommen ev wäre stetig. Dann müßten 0-Umgebungen $V \subseteq E^*$ und $U \subseteq E$ existieren mit $|x'(x)| \leq 1$ für alle $x' \in V$ und $x \in U$. Da V als 0-Umgebung absorbierend ist, existiert für jedes $x' \in E^*$ ein $k > 0$ mit $x' \in k \cdot V$ und somit ist x' auf U durch k beschränkt, also U skalar beschränkt und damit beschränkt in E, also E normierbar nach 1.6.2. Beachte, daß dabei nicht wesentlich war, daß wir die übliche Struktur auf E^* verwenden haben, sondern dies gilt für jede topologische Vektorraumstruktur. Stetigkeit ist also für nichtlineare Abbildungen eine zu starke Einschränkung, wenn schon die natürlichste bilineare Abbildung es nicht ist. Diese Bemerkung berücksichtigend wurde eine Differentialrechnung für Abbildungen zwischen LKV's entwickelt, siehe [**27**].

Schauen wir uns als einfachsten Spezialfall von nicht normierten Räumen $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \coprod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ an. Wegen der universellen Eigenschaft der finalen Struktur ist $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ als Vektorraum, wobei die Wirkung von $x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ auf $y = (y_n)_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ durch $\mathrm{ev}(x, y) = \sum_n x_n y_n$ gegeben ist. Und da die beschränkten Mengen in $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ beschränkt in einem $\mathbb{R}^N$ liegen ist die Topologie auf $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})^*$ gerade jene von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Andererseits ist der Dualraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gerade $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ mit obiger Evaluationsabbildung, denn für stetig lineare $x' : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ muß eine 0-Umgebung, also ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ existieren, s.d. $x'(\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n| < \varepsilon \text{ für alle } n \leq N\}) \subseteq [-1, 1]$. Sei $p = \mathrm{inkl}^* : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^N$ und $i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto (x, 0)$. Dann ist p und i stetig und linear und $|x'(k \cdot (x - (i \circ p)(x)))| \leq 1$ für alle $k > 0$ und somit $x'(x) =$

$x'(i(p(x))) = (i^*(x') \circ p)(x)$, wobei $i^*(x') \in (\mathbb{R}^N)' \cong \mathbb{R}^N$ liegt, also ist $(\mathbb{R}^\mathbb{N})'$ mit der Vereinigung $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^N$ identifizierbar. Das ist sogar ein linearer Homöomorphismus: Die typische 0-Umgebung in $(\mathbb{R}^\mathbb{N})'$ ist die Polare B^o von $B = \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : |x_i| \le \mu_i\}$ für ewisse $\mu_i > 0$, und somit ist

$$B^o = \Big\{x' \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} : \Big|\sum_i x'_i \mu_i \frac{x_i}{\mu_i}\Big| \le 1 \ \forall x \in B\Big\} = \Big\{x' \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} : \underbrace{\sum_i \mu_i |x'_i|}_{=:p(x')} \le 1\Big\},$$

wobei p eine typische Seminorm von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ist.

Die Evaluationsabbildung ist beschränkt und damit getrennt stetig (da beide Faktoren bornologisch sind), denn wenn $A \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ beschänkt und $B \subseteq \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ beschränkt ist, dann ist $B \subseteq \mathbb{R}^N$ beschränkt für ein N und damit die endlich vielen Koordinaten von $y \in B$ und die entsprechenden von $x \in A$ beschränkt also auch $\operatorname{ev}(x,y) = \sum_{n=0}^\infty x_n\, y_n = \sum_{n=0}^N x_n\, y_n$ beschränkt.

Die Evaluationsabbildung ist aber nicht stetig, denn gäbe es 0-Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ mit $\operatorname{ev}(V \times U) \subseteq [-1,1]$, so kann V nur endlich viele Koordinaten kontrollieren, d.h. es gäbe ein n mit $\mathbb{R} \cdot e_n \in V$. Da aber ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $\varepsilon \cdot e_n \in U$ wäre $1 \ge |\operatorname{ev}(k\, e_n, \varepsilon\, e_n)| = k \cdot \varepsilon$ für alle k, ein Widerspruch.

4.3 Abgeschlossene und offene Abbildungen

Wir haben in 4.2.6 gesehen, daß die Baire-Eigenschaft die Stetigkeit gewisser linearer Abbildungen zur Folge hat. Wir wollen das noch weiter ausarbeiten. Sei dazu $f : E \to F$ eine Abbildung. Der Graph von f ist die Menge $\operatorname{Graph}(f) := \{(x,y) \in E \times F : f(x) = y\}$. Der Graph ist genau dann abgeschlossen, wenn $\operatorname{Graph}(f) \ni (x_i, y_i) \to (x_\infty, y_\infty) \Rightarrow (x_\infty, y_\infty) \in \operatorname{Graph}(f)$, d.h. aus der Existenz der Grenzwerte $\lim_i x_i$ und $\lim_i f(x_i)$ die Gleichheit $f(\lim_i x_i) = \lim_i f(x_i)$ folgt. Diese Bedingung ist klarerweise formal schwächer als die der Stetigkeit von f, wo ja die Existenz des 2.ten Grenzwertes nicht vorausgesetzt wird. Wir zeigen nun dennoch die Umkehrung unter geeigneten Voraussetzungen:

4.3.1 Closed Graph Theorem.

Es sei E ein Baire'scher LKV, F ein Fréchet-Raum und $f : E \to F$ eine lineare Abbildung, deren Graph in $E \times F$ abgeschlossen ist. Dann ist f stetig.

Beweis. Wir wählen eine 0-Umgebungs-Basis $(V_n)_n$ von F bestehend aus abgeschlossenen und absolut-konvexer Mengen mit $2\,V_{n+1} \subseteq V_n$. Für jedes n ist $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} k \cdot A_n$, mit $A_n := f^{-1}(V_n)$. Da E als Baire'sch vorausgesetzt ist, enthält $\overline{A_n}$ einen Punkt x so, daß $x + U_n \subseteq \overline{A_n}$ für eine 0-Umgebung U_n von E. Dann gilt aber $U_n = (x + U_n) - x \subseteq (x + U_n) - (x + U_n) \subseteq 2\,\overline{A_n} \subseteq \overline{A_{n-1}}$.

Wir behaupten, daß $f(U_{n+1}) \subseteq V_{n-1}$ ($\Rightarrow f$ ist stetig). Sei dazu $x \in U_{n+1} \subseteq \overline{A_n} \subseteq A_n + U_{n+2}$, d.h. es existiert ein $x_0 \in A_n$ mit $x - x_0 \in U_{n+2}$, und rekursiv finden wir $x_k \in A_{n+k}$ mit $x - \sum_{i=0}^k x_i \in U_{n+2+k}$. Dann erfüllt $\sum_k f(x_k)$ die Cauchy-Bedingung, denn $\sum_{i=k}^{k+p} f(x_i) \in \sum_{i=k}^{k+p} V_{n+i} \subseteq \sum_{j=0}^p 2^{-j} V_{n+k} \subseteq V_{n+k-1}$. Da F vollständig ist existiert somit $y := \sum_{k=0}^\infty f(x_k)$ und liegt in V_{n-1}. da V_{n-1} abgeschlossen ist.

Falls E metrisierbar ist, dürfen wir annehmen, daß die U_n eine 0-Umgebungs-Basis von E bilden, und somit $\sum_k x_k$ gegen x konvergiert. Die Abgeschlossenheit des Graphen liefert dann $f(x) = y \in V_{n-1}$.

Im allgemeinen Fall, nehmen wir zwei beliebige symmetrische (abgeschlossene) 0-Umgebungen U und V in E und F. Da $x - \sum_{i=0}^k x_i \in U_{n+2+k} \subseteq \overline{A_{n+1+k}} \subseteq A_{n+1+k} + U$, existiert ein $a_k \in A_{n+1+k}$, mit $x - \sum_{i=0}^k x_i \in a_k + U$, i.e. $x - \big(a_k + \sum_{i=0}^k x_i\big) \in U$. Damit ist aber $f(a_k) \in V_{n+1+k}$ eine 0-Folge, und somit ist $y - f\big(a_k + \sum_{i=0}^k x_i\big) = \big(y - \sum_{i=0}^k f(x_i)\big) - f(a_k) \in V$ für k hinreichend groß. D.h. $(x, y) + U \times V$ trifft den Graphen von f zumindest an der Stelle $a_k + \sum_{i=0}^k x_i$. Da der Graph abgeschlossen ist, gilt $f(x) = y$. □

4.3.2 Bemerkung. "Versponnene" Räume.

Man kann die wesentliche Eigenschaft der Mengen V_n in F abstrakter fassen. Dazu nennt man eine Abbildung V von der Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen in die absolut-konvexen Teilmengen eines LKV'es F, ein VERVOLLSTÄNDIGENDES GEWEBE (ODER GESPINST, ENGL.: COMPLETING WEB) falls

1. $V(\emptyset) = F$;
2. für jede endliche Folge $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n)$ und jedes k_{n+1} die Inklusion $2\,V(\mathbf{k}, k_{n+1}) \subseteq V(\mathbf{k})$ gilt;
3. für jede endliche Folge $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n)$ jeder Punkt in $V(\mathbf{k})$ absorbiert wird von $\bigcup_{k_{n+1}\in\mathbb{N}} V(\mathbf{k}, k_{n+1})$;
4. und für jede unendliche Folge $(k_1, k_2, \dots)$ und $x_n \in V(k_1, \dots k_n)$ die Reihe $\sum_n x_n$ konvergiert.

Ein LKV F heißt "VERSPONNEN" (engl. webbed) falls er ein vervollständigendes Gewebe V besitzt.

4.3.3 Lemma. Erblichkeit "versponnener" Räume.

Jeder Fréchet-Raum E ist versponnen. Folgen-abgeschlossene Teilräume, abzählbare Produkte, separierte Quotienten und abzählbare Koprodukte versponnener Räume sind versponnen. Das Closed Graph Theorem gilt auch für versponnene Räume F. Die Fréchet-Räume sind genau die Baire'schen versponnenen LKV'e.

Beweis. Jeder Fréchet-Raum E ist versponnen, dazu nehmen man nur eine 0-Umgebungs-Basis V_n wie oben und definiere $V(k_1, \dots, k_n) := V_n$.
Für Teilräume ist die Spur eines vollständigen Gewebes und für Quotienten das Bild eines solchen wieder ein solches (siehe [**14**, S.90]).
Für restlichen Erblichkeiten siehe [**14**, S.91].
Der obige Beweis des Closed Graph Theorems läßt sich nach [**6**] mit folgenden Änderungen direkt auf versponnen Räume F übertragen (siehe [**14**, S.92]): Wir wählen induktiv $k_n \in \mathbb{N}$ so, daß $V_n := V(k_1, \dots, k_n)$ nicht mageres Urbild $A_k := f^{-1}(V_n)$ hat. Dies geht wegen Eigenschaft 4.3.2.3 des Gewebes. Nun zeigt man wie im Beweis von 4.3.1, die Existenz von 0-Umgebungen $U_n \subseteq \overline{A_{n-1}}$ mit $f(U_n) \subseteq \overline{V_{n-1}}$, womit die Stetigkeit von f gezeigt ist.
Für die letzte Aussage siehe [**14**, S.94]. □

4.3.4 Bemerkung.

Üblicherweise wird das Closed Graph Theorem in der Literatur technischer formuliert, indem man nur auf einen nicht mageren Teilraum $G \subseteq E$ definierte lineare Abbildungen $f : G \to F$ mit abgeschlossenen Graphen in $E \times F$ betrachtet. Dies Version folgt aber sofort aus der oben angegebenen, denn G ist dann auch nicht mager in sich selbst nach 4.1.6, also Baire'sch nach 4.1.10 und der Graph ist dann auch abgeschlossen in $G \times F$ also das Theorem 4.3.1 anwendbar, wobei wir nur die schwächeren Voraussetzungen G Baire'sch und der Graph abgeschlossen in $G \times F$ brauchen.

4.3.5 Open Mapping Theorem.

Es sei E versponnen, F Baire'sch und $f : E \to F$ linear und surjektiv mit abgeschlossenen Graphen. Dann ist f eine offene Abbildung, d.h. die Bilder aller offener Mengen sind offen.

Beweis. Wäre f bijektiv, so könnten wir einfach 4.3.1 auf f^{-1} anwenden.
Im allgemeinen betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Graph}(f) \arrow[r, hook] & E \times F & \\
\operatorname{Ker}(f) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & E \arrow[u, hook, "\operatorname{inj}_1"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & F \\
N & & E/N \arrow[u, dotted, "\tilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

Da f abgeschlossenen Graphen hat, ist der Kern $N := \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{inj}_1^{-1}(\operatorname{Graph} f)$ von f abgeschlossen. Somit ist E/N selbst versponnen nach 4.3.3. Wir betrachten nun die bijektive Abbildung $\tilde{f} : E/N \to F$, $[x] \mapsto f(x)$. Falls f abgeschlossenen Graphen hat, so gilt gleiches auch für $\tilde{f}$, denn $\pi \times F : E \times F \to (E/N) \times F$ ist eine Quotientenabbildung (da offen), und $(\pi \times F)^{-1}(\operatorname{Graph} \tilde{f}) = \operatorname{Graph} f$. Die Umkehrabbildung $\tilde{f}^{-1}$ von $\tilde{f}$ hat dann ebenfalls abgeschlossenen Graphen in $F \times (E/N)$, da die Spiegelung $(E/N) \times F \to F \times (E/N)$ ein Isomorphismus ist. Folglich ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen 4.3.1 die Abbildung $\tilde{f}^{-1} : F \to E/N$ stetig, also $\tilde{f}$ offen und damit auch $f = \tilde{f} \circ \pi$ eine offene Abbildung. □

4.3.6 Folgerung. Quotientenabbildungen von Fréchet-Räumen.

Es sei E ein Fréchet-Raum $f : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung mit nichtmageren Bild $f(E)$ in F. Dann ist $f : E \to F$ surjektiv und sogar eine Quotienten-Abbildung, d.h. $F \cong E/\operatorname{Ker}(f)$.

Beweis. Insbesonders ist $f(E)$ nicht mager in sich selbst nach 4.1.6, also Baire'sch nach 4.1.10 und somit $f : E \to f(E)$ eine offene (nach 4.3.5) und stetige Abbildung, also eine Quotientenabbildung. Damit ist auch $f(E) \cong E/\operatorname{Ker}(f)$ ein Fréchet-Raum also vollständig und somit abgeschlossen in F. Wäre $f(E) \neq F$, so wäre damit $f(E)$ nirgends dicht (denn 0-Umgebungen sind absorbierend), ein Widerspruch dazu, daß $f(E)$ als nicht mager vorausgesetzt wurde. □

4.3.7 Folgerung. Inverse Funktionen zwischen Fréchet-Räumen.

Die Inverse einer bijektiven stetigen linearen Abbildung zwischen Fréchet Räumen ist stetig. □

Wir wollen nun Stetigkeit von linearen Abbildungen mit Werten in Räumen glatter Funktionen untersuchen.

4.3.8 Folgerung. Skalare Stetigkeit.

Es sei E ein Baire'scher LKV, F ein versponnener Raum und $\mathcal{F}$ eine Punktetrennende Familie von stetigen linearen Funktionalen auf F. Falls $g : E \to F$ eine *lineare Abbildung ist, deren sämtliche Zusammensetzungen $f \circ g : E \to F \to \mathbb{K}$ mit $f \in \mathcal{F}$ stetig sind, so ist g stetig.*

Beweis. Wir können das Closed Graph Theorem 4.3.1 anwenden, denn dazu müssen wir nur zeigen, daß $g(x) = y$ aus $x_i \to x$ und $g(x_i) \to y$ folgt. Da die $f \in \mathcal{F}$ stetig sind, ist $f(g(x)) = (f \circ g)(\lim_i x_i) = \lim_i (f \circ g)(x_i) = f(\lim_i g(x_i)) = f(y)$. Und da die $f \in \mathcal{F}$ Punkte-trennend sind, ist $g(x) = y$. □

4.3.9 Beispiele.

Diese Folgerung gilt klarerweise auch noch, wenn E selbst nicht notwendig Baire'sch ist, aber die finale Struktur von Baire-Räumen trägt.
Insbesonders läßt sich das mit den Punkt-Evaluationen anstelle von $\mathcal{F}$ auf die Fréchet-Räume $C^n(U)$, $C^\infty_K(U)$ und $\mathcal{E}$; sowie auf die strikt induktiven Limiten $C_c(X)$, $C^n_c(U)$ und $\mathcal{D}$ von Fréchet-Räumen anstelle von E anwenden.

So sieht man sehr einfach, daß die Abbildungen aus [**18**, 4.9] und [**18**, 4.13.4]

1. T_x, S, $\partial^\alpha : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$;
2. $f \cdot (\_) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ für $f \in \mathcal{E}$;
3. $\varphi \star (\_) : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ für $\varphi \in \mathcal{D}'$ (vgl. [**18**, 4.13.5]);
4. $\varphi \star (\_) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ für $\varphi \in \mathcal{E}'$

stetig sind, und daß die initiale Struktur von $C(U)$ und $C^\infty(U)$ auf $H(U)$ ident ist. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ev}_x \circ T_y)(f) &= f(x-y) = \mathrm{ev}_{x-y}(f);\\
(\mathrm{ev}_x \circ S)(f) &= f(-x) = \mathrm{ev}_{-x}(f);\\
(\mathrm{ev}_x \circ \partial^\alpha)(f) &= \partial^\alpha f(x);\\
\mathrm{ev}_x(g \cdot f) &= g(x) \cdot f(x) = (g(x)\, \mathrm{ev}_x)(f);\\
\mathrm{ev}_x(\varphi \star f) &= \varphi(T_x(S(f))) = (\varphi \circ T_x \circ S)(f).
\end{aligned}$$

Im Falle, wo der Zielraum $\mathcal{D}$ ist, läßt sich auch das Closed Graph Theorem 4.3.1 für Fréchet-Räume anwenden, wenn man die Träger mitverfolgt. Z.B. gilt $\mathrm{Trg}(\varphi \star f) \subseteq \mathrm{Trg}\,\varphi + \mathrm{Trg}\, f$.

4.3.10 Bemerkung.

Das Closed Graph Theorem 4.3.1 hat auch das Uniform Boundedness Principle 4.2.2 für Baire'sche Räume zur Folge: Sei nämlich $\mathcal{F} \subset E^*$ punktweise beschränkt. Dann ist die Abbildung $\iota : E \to B(\mathcal{F}, \mathbb{K})$, $x \mapsto (f \mapsto f(x))$ eine wohldefinierte lineare Abbildung. Die Zusammensetzung mit $\mathrm{ev}_f : B(\mathcal{F}, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist gerade f, also stetig. Damit folgt nun, daß ι stetig ist, denn $B(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ ist ein Banach-Raum, und somit existiert eine 0-Umgebung U mit $|\mathcal{F}(U)| = |\iota(U)(\mathcal{F})| \subseteq [0, 1]$.

4.3.11 Gegenbeispiel betreffend das Uniform Boundedness Theorem.

Es sei E der Teilraum der endlichen Folgen in ℓ^∞, und $f_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto \sum_{k \le n} x_k$. Dann ist $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L(E, \mathbb{R})$ punktweise beschränkt, aber keine beschränkte Menge in $L(E, \mathbb{R})$, denn $\|f_n\| := \sup\{|\sum_{k \le n} x_k| : (x_k)_{k=1}^\infty \in E \text{ und } \forall k : |x_k| \le 1\} = n$.

4.3.12 Lemma. Automatische Beschränktheit der Adjungierten.

Es sei $T : E \to F$, $S : F' \to E'$ beide linear mit $y'(Tx) = S(y')(x)$, dann sind T und S beschränkt.

Beweis. Es sei $B \subseteq E$ beschränkt. Dann ist $y'(TB) = S(y')(B)$ beschränkt, d.h. TB skalar-beschränkt, also TB beschränkt nach der Folgerung in 4.2.7. Ist weiters $A \subseteq F'$ beschränkt, so ist $(SA)(B) = A(T(B))$ beschränkt in $\mathbb{K}$, d.h. SA ist beschränkt in E'. □

5. Satz von Hahn Banach

In diesem Kapitel geht es um die Reichhaltigkeit des Raums der stetig linearen Funktionale auf lokalkonvexen Räumen, und den geometrischen Trennungseigenschaften die daraus folgen. Wir wenden das an um einige Dualräume zu bestimmen und auch auf Fragen der komplexen Analysis.

5.1 Fortsetzungssätze

Unser erstes Ziel ist es möglichst viele lineare Funktionale ℓ zu finden, die natürlich stetig sein sollen, d.h. $|\ell| \le q$ für eine (fixe) Seminorm q erfüllen. Mit Beträgen rechnet es sich jedoch schwer und lineare Funktionale und Seminormen lassen sich nicht gut vergleichen. Allerdings haben wir bereits eine gemeinsame Verallgemeinerung, nämlich sublineare Funktionale in 1.1.1 eingeführt. Somit wenden wir uns zuerst der Ungleichung $\ell \le q$ für sublineares q zu.

5.1.1 Lemma. Minimale sublineare Abbildungen sind linear.

Es sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung ist minimal unter allen sublinearen Abbildungen $E \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn sie linear ist.

Beweis. ($\Leftarrow$) Es sei $\ell : E \to \mathbb{R}$ linear und $q : E \to \mathbb{R}$ sublinear und $q \le \ell$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \ell(x) + \ell(-x) \ge q(x) + q(-x) \ge q(0) = 0 \Rightarrow q(x) = -q(-x) \\ \Rightarrow \ell(x) \ge q(x) = -q(-x) \ge -\ell(-x) = \ell(x) \Rightarrow q(x) = \ell(x). \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Es sei $p : E \to \mathbb{R}$ minimal. Angenommen p ist nicht additiv, dann existieren a, $b \in E$ mit $p(a + b) < p(a) + p(b)$. Wir versuchen nun eine kleiner sublineare Abbildung zu finden. Offensichtlich ist $x \mapsto p(x + a) - p(a)$ konvex und im Punkt b kleiner als p. Um auch $\mathbb{R}^+$-Homogenität zu erreichen betrachten wir $p_a(x) := \inf_{t>0}(p(x+t\,a)-t\,p(a))$. Wegen $-p(-x) \le p(x+t\,a)-t\,p(a)$ macht diese Definition Sinn. Weiters gilt $p(x+t\,a)-t\,p(a) \le p(x)$, also $p_a \le p$ und $p_a(b) \le p(a+b)-p(a) < p(b)$.
Die Abbildung p_a ist $\mathbb{R}^+$-homogen, denn für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} p_a(\lambda\, x) &= \inf_{t\ge 0}\Big(p(\lambda\, x + t\, a) - t\, p(a)\Big) = \inf_{t\ge 0}\Big(p(\lambda\,(x + \frac{t}{\lambda}\, a)) - t\, p(a)\Big) \\ &= \inf_{t\ge 0} \lambda \,\Big(p(x + \frac{t}{\lambda}\, a) - \frac{t}{\lambda}\, p(a)\Big) = \lambda \cdot \inf_{s\ge 0}\Big(p(x + s\, a) - s\, p(a)\Big) = \lambda \cdot p_a(x). \end{aligned}$$

Mit $x \mapsto p(x + ta) - p(ta)$ ist auch p_a konvex, ein Widerspruch zur Minimalität.
Aus der Additivität folgt nun aber auch die $\mathbb{R}$-Linearität, denn p ist ungerade, wegen $p(-x) + p(x) = p(0) = 0$. □

5.1.2 Folgerung. Existenz linearer Minorante.

Es sei E ein VR über $\mathbb{R}$ und $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear, so existiert ein lineares $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f \le p$.

Beweis. Wir wollen das Lemma von Zorn auf die Menge

$$\mathcal{S} := \{q \le p : q \text{ ist sublinear}\}$$

anwenden. Sei $\mathcal{L}$ eine linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{S}$. Dann ist $\inf_{q\in\mathcal{L}} q =: q_\infty \in \mathcal{L}$ eine untere Schranke von $\mathcal{L}$: In der Tat ist q_∞ wohldefiniert, denn andernfalls gäbe es ein $x \in E$ so, daß $\mathcal{L}(x)$ nach unten unbeschränkt ist. Dann gäbe es aber $q_n \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}$ mit o.B.d.A. $q_n(x) \le -n$ und $q_n \le q_{n-1}$. Folglich wäre:

$$0 = q_n(0) \le q_n(x) + q_n(-x) \le -n + q_0(-x) \Rightarrow \forall n : q_0(-x) \ge n,$$

ein Widerspruch. Es ist q_∞ als infimum sublinear, da $n \mapsto q_n$ falled ist ($q_{\max\{n,m\}}(x+\lambda\, y) \le q_n(x)+\lambda\, q_m(y)$). Wir können also das Lemma von Zorn anwenden und erhalten ein minimales Element $q \in \mathcal{S}$, das nach dem Lemma 5.1.1 linear sein muß. $\square$

5.1.3 Satz von Hahn und Banach.

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und F ein linearer Teilraum. Sei q ein sublineares Funktional auf E und $f : F \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, welche $f \le q|_F$ erfüllt. Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde f : E \to \mathbb{R}$ welche linear ist, $\tilde f|_F = f$ und $\tilde f \le q$ auf E erfüllt.

Beweis. Wir betrachten $\tilde q : x \mapsto \inf_{y\in F}(q(x+y) - f(y))$. Analog zum Beweis von 5.1.1 folgt, daß $\tilde q$ wohldefiniert ($q(x+y)-f(y) \ge -q(-x)+q(y)-f(y) \ge -q(-x)$), sublinear und $\tilde q \le q$ (setze $y := 0$) ist. Für $x \in F$ ist $\tilde q(x) \le q(x-x) + f(x) = f(x)$. Nach der Folgerung 5.1.2 existiert also ein lineares $\tilde f : E \to \mathbb{R}$ mit $\tilde f \le \tilde q \le q$. Es gilt $\tilde f|_F = f$, denn für alle $y \in F$ ist $\tilde f(y) \le \tilde q(y) \le f(y)$ und somit $\tilde f|_F = f$, da f als lineare Abbildung minimal ist. $\square$

5.1.4 Folgerung.

Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und F ein linearer Teilraum. Sei q eine Seminorm auf E und $f : F \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung, welche $|f| \le q|_F$ erfüllt. Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde f : E \to \mathbb{K}$, welche linear ist, $\tilde f|_F = f$ und $|\tilde f| \le q$ auf E erfüllt.

Beweis. Zuerst für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Es sei q eine Seminorm und $|f| \le q|_F$. Nach 5.1.3 existiert ein lineares $\tilde f : E \to \mathbb{R}$ mit $\tilde f \le q$. Das impliziert aber $|\tilde f| \le q$, denn $-\tilde f(x) = \tilde f(-x) \le q(-x) = q(x)$.

Ist nun der Grundkörper $\mathbb{C}$, dann betrachten wir $f_\mathbb{R} := \Re e f$. Es gilt $f_\mathbb{R} \le |f| \le q|_F$. Also existiert nach dem zuvor Gesagten eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung $\widetilde{f_\mathbb{R}} : E \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{f_\mathbb{R}} \le q$. Nun sei $\tilde f$ die nach 3.9.2.2 $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $x \mapsto \widetilde{f_\mathbb{R}}(x) - i\,\widetilde{f_\mathbb{R}}(i\,x)$. Dann ist $\tilde f|_F = f$ und $\Re e(\tilde f) = \widetilde{f_\mathbb{R}} \le q$. Für $x \in E$ sei $r\, e^{i\vartheta} = \tilde f(x)$ mit $r \ge 0$. Dann ist $\mathbb{R} \ni |\tilde f(x)| = r = \tilde f(e^{-i\vartheta}x) = \widetilde{f_\mathbb{R}}(e^{-i\vartheta}x) \le q(e^{-i\vartheta}x) = q(x)$. $\square$

5.1.5 Folgerung.

Es sei E ein LKV und F ein linearer Teilraum von E. Jedes stetige lineare Funktional $f : F \to \mathbb{K}$ besitzt eine stetig lineare Fortsetzung $\tilde f : E \to \mathbb{K}$. Ist E normiert, dann existiert ein $\tilde f$, welches zusätzlich $\|\tilde f\| = \|f\|$ erfüllt.

Für beschränkte lineare Abbildungen ist dieser Satz im allgemeinen falsch.

Beweis. Da f stetig ist, ist $|f|$ eine stetige Seminorm auf F. Nach 3.1.4 existiert eine Fortsetzung zu einer stetigen Seminorm q auf E. Nach 5.1.4 existiert eine Fortsetzung von f zu einem linearen Funktional $\tilde{f} : E \to \mathbb{K}$, welches $|\tilde{f}| \leq q$ erfüllt und somit stetig ist.

Ist E zusätzlich normiert. So kann für q die Abbildung $x \mapsto \|f\| \cdot \|x\|$ gewählt werden. Also gilt $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, d.h. $\|f\| = \|\tilde{f}|_F\| \leq \|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. Folglich gilt die gewünschte Gleichheit. □

5.1.6 Folgerung. Duale Vektoren.

Es sei E ein LKV und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linear unabhängig und $\ell_i \in \mathbb{K}$, dann existiert ein $\ell \in E^*$ mit $\ell(x_i) = \ell_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Es sei F der lineare Teilraum, welcher von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erzeugt wird. Auf ihm ist durch $\ell(x_i) := \ell_i$ ein eindeutiges lineares Funktional definiert, welches nach 3.4.6.3 stetig ist. Nach 5.1.5 existiert eine stetige Fortsetzung ℓ auf E, und diese hat ebenfalls die gewünschten Eigenschaften. □

5.1.7 Folgerung. Komplemente endlich dimensionaler Teilräume.

Jeder endlich dimensionale Teilraum eines LKV'es besitzt ein topologisches Komplement. Vergleiche mit 3.4.6.4 im Falle endlicher Kodimension.

Beweis. Es sei F ein n-dimensionaler Teilraum von E. Wir wählen eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von F und definieren lineare Funktionale $\ell_k : F \to \mathbb{K}$ durch $\ell_k(e_i) = \delta_{k,i}$. Diese sind automatisch stetig und besitzen somit nach 5.1.5 stetig lineare Fortsetzungen $\tilde{\ell}_k : E \to \mathbb{K}$. Damit erhalten wir eine stetige Abbildung $p : E \to F$ definiert durch $p(x) := \sum_{k=1}^n \tilde{\ell}_k(x)\, e_k$. Diese erfüllt $p|_F = \mathrm{id}$ und liefert eine Zerlegung $E \cong F \oplus K$, wobei K der Kern von p ist, der Isomorphismus durch $x \mapsto (p(x), x-p(x))$ gegeben ist und in die umgekehrte Richtung durch die Addition $(y, k) \mapsto y + k$. □

5.1.8 Folgerung. Funktionale sind Punkte-trennend.

Auf jedem LKV sind die stetig linearen Funktionale Punkte-trennend. Mehr noch: Es sei F ein abgeschlossener linearer Teilraum in einem LKV E und $a \in E \setminus F$. Dann existiert ein $\ell \in E^*$ mit $\ell|_F = 0$ und $\ell(a) = 1$.

Falls E normiert ist, so kann $\ell \in E^*$ so gewählt werden, daß $d(a, F) \cdot \|\ell\| = 1$.

Ist q eine Seminorm von E mit $q|_F = 0$, so kann $\ell \in E^*$ so gewählt werden, daß $|\ell| \leq q$ und $\ell(a) = q(a)$ anstelle von $\ell(a) = 1$.

Beweis. Wir definieren ein Funktional ℓ auf $F_a := \{x + t\,a : x \in F, t \in \mathbb{K}\}$ durch $\ell(x+t\,a) := t$, also mit $\ell|_F = 0$ und $\ell(a) = 1$. Nach 3.4.4 ist $F_a \cong F \times \mathbb{K}$ und somit ℓ auf F_a stetig und linear, also existiert nach 5.1.5 eine stetig lineare Fortsetzung $\tilde{\ell}$ auf E.

Insbesonders sind die stetig linearen Funktionale Punkte-trennend, denn für $a_1 \neq a_2$ liegt $a := a_1 - a_2 \notin F := \{0\}$ und ist somit durch ein $\ell \in E^*$ trennbar.

Falls E normiert ist, so ist $\|\ell\| \leq 1/d(a, F)$, denn $|\ell(x + ta)| \cdot d(a, F) \leq |t| \cdot \|a - (-\frac{x}{t})\| = \|x+ta\|$. Es gilt sogar Gleichheit, denn es existieren $x_n \in F$ mit $\|a-x_n\| \to d(a, F)$, und somit gilt $1 = \ell(a - x_n) \leq \|\ell\| \cdot \|a - x_n\| \to \|\ell\| \cdot d(a, F)$. Nach 5.1.5 kann die Fortsetzung $\tilde{\ell}$ nun so gewählt werden, daß $\|\tilde{\ell}\| = \|\ell\| \leq \frac{1}{d(a,F)}$).

Sei schließlich q eine SN von E mit $q|_F = 0$, dann definieren wir $\ell : F_a \to \mathbb{K}$ durch $\ell(x + t\,a) := t\,q(a)$, also ist $\ell(a) = q(a)$ und $|\ell| \leq q$, denn $|\ell(x + t\,a)| = |t|\,q(a) = q(t\,a) = q(x + t\,a)$. Somit können wir die Erweiterung $\tilde{\ell}$ nach 5.1.4 so wählen, daß auch $|\tilde{\ell}| \leq q$. □

5.1.9 Folgerung. Abschluß als Durchschnitt von Kernen.

Ist E ein LKV und F ein linearer Teilraum, so ist der Abschluß $\overline{F}$ von F gegeben durch $\bigcap\{\ker \ell : \ell \in E^*, \ell|_F = 0\}$.

Beweis. ($\subseteq$) Klarerweise ist $\overline{F} \subseteq \ker \ell$ für alle stetig linearen Funktionale $\ell \in E^*$ mit $\ell|_F = 0$.

($\supseteq$) Ist umgekehrt $a \notin \overline{F}$, so existiert nach 5.1.8 ein stetiges lineares Funktional $\ell : E \to \mathbb{K}$ mit $\ell(a) = 1$ und $\ell(F) = 0$. Folglich ist $a \notin \bigcap\{\ker \ell : \ell \in E^*, \ell|_F = 0\}$. □

5.1.10 Folgerung. Isometrische Einbettung in den Bidual.

Sei E normiert und $x \in E$, so gilt $\|x\| = \max\{|\ell(x)| : \ell \in E^*, \|\ell\| = 1\} = \|\delta(x)\|$, d.h. $\delta : E \to E^{**}$ ist eine Isometrie.

Beweis. ($\geq$) gilt, da $|\ell(x)| \leq \|\ell\| \cdot \|x\|$.
($\leq$) gilt, da nach 5.1.8 ein $\ell \in E'$ existiert mit $\|\ell\| = 1/d(x, 0) = 1/\|x\|$ und $\ell(x) = 1$. Wir ersetzen dieses ℓ durch $\|x\| \cdot \ell$ und erhalten somit $\|\ell\| = 1$ und $\ell(x) = \|x\|$.

Die natürliche Abbildung δ ist eine Isometrie, da

$$\|\delta(x)\| = \sup\{\underbrace{|\delta(x)(x^*)|}_{|x^*(x)|} : x^* \in E^*, \|x^*\| = 1\} = \|x\|. \quad \square$$

5.1.11 Folgerung. Norm des Adjungierten.

Sei $T : E \to F$ beschränkt linear zwischen normierten Räumen. Dann ist $\|T^*\| = \|T\|$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\|T^*\| &= \sup\{\|T^*(y^*)\| : \|y^*\| = 1\} = \sup\{\sup\{|T^*(y^*)(x)| : \|x\| = 1\} : \|y^*\| = 1\} \\
&= \sup\{\underbrace{|T^*(y^*)(x)|}_{|y^*(T(x))|} : \|x\| = 1, \|y^*\| = 1\} \\
&= \sup\{\sup\{|\delta(T(x))(y^*)| : \|y^*\| = 1\} : \|x\| = 1\} = \sup\{\|\delta(T(x))\| : \|x\| = 1\} \\
&\overset{5.1.10}{=\!=} \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = \|T\|. \quad \square
\end{aligned}$$

5.1.12 Folgerung. Separabilität des Dualraums.

Ist der Dualraum eines normierten Raums separabel so auch er selbst.

Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $(\ell^1)' = \ell^\infty$ zeigt, siehe 5.3.1.

Beweis. Es sei $D^* \subseteq E^*$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Für jedes $x^* \in D^*$ wählen wir ein $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und $|x^*(x)| \geq \frac{\|x^*\|}{2}$. Es sei D die Menge all dieser x mit x^* in D^*. Wir behaupten, daß der davon erzeugte Teilraum dicht liegt. Wegen 5.1.9 genügt es zu zeigen, daß jedes $x^* \in E^*$, welches auf D verschwindet, schon 0 ist. Sei also x^* ein solches. Da D^* dicht liegt in E^* existiert eine Folge $x_n^* \in D^*$ mit $\|x_n^* - x^*\| \to 0$. Sei x_n die zugehörige Folge in D. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|x_n^* - x^*\| &= \sup\{|(x_n^* - x^*)(x)| : \|x\| = 1\}\\ &\geq |(x_n^* - x^*)(x_n)| = |x_n^*(x_n)| \geq \tfrac{1}{2}\|x_n^*\|\end{aligned}$$

Also konvergiert x_n^* gegen 0, d.h. $x^* = 0$. □

5.2 Trennungssätze

5.2.1 Trennungssätze für konvexe Mengen.

Es seien A und B disjunkte konvexe nicht leere Teilmengen eines reellen LKV'es E. Dann existiert ein stetig lineares Funktional $f : E \to \mathbb{R}$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so daß für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ folgendes gilt:

1. *Falls A offen ist, so gilt $f(a) < \gamma \leq f(b)$;*
2. *Falls A und B offen sind, so gilt $f(a) < \gamma < f(b)$;*
3. *Falls A abgeschlossen und B kompakt ist, so gilt $f(a) < \gamma < f(b)$.*

Die affine Hyperebene $\{x \in E : f(x) = \gamma\}$ trennt somit die beiden Mengen, d.h. diese liegen auf verschiedenen Seiten von ihr.

Beweis. 1 Es ist $U := A - B$ offen und konvex und $0 \notin U \neq \emptyset$. Wir wählen ein $u \in U$ und setzen $V := U - u$ mit zugehörige Minkowski-Funktional $q := q_V$ (dieses ist nach 1.3.6 sublinear). Sei weiters $F := \{t\,u : t \in \mathbb{R}\}$ und $f : F \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t\,u) := -t$ (wohldefiniert, da $u \neq 0$). Dann ist $f|_U < 0$, denn $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ ist konvex, $-1 = f(u) \in f(U)$ und $0 \notin f(U)$. Folglich ist nach 1.3.7 $f \leq q|_F$, denn für $v \in F$ mit $q(v) < 1$ ist $v \in V = U - u$, also $0 > f(u + v) = f(v) - 1$, d.h. $f(v) < 1$. Nach dem Satz 5.1.3 von Hahn-Banach existiert eine Erweiterung zu einem stetig linearen Funktional auf E (welches wir wieder mit f bezeichnen) mit $f \leq q$. Da $W := V \cap -V$ eine 0-neighborhood ist, weiters $f(w) \leq q(w) \leq 1$ und $-f(w) = f(-w) \leq q(-w) \leq 1$ für alle $w \in W$ ist, folgtwe deduce that f is continuous. Für $x \in U$ ist $x - u \in V \subseteq q_{\leq 1}$ und somit $1 \geq q(x - u) \geq f(x - u) = f(x) + 1$, d.h. $f(x) \leq 0$. Somit ist $f(a - b) \leq 0$, d.h. $f(a) \leq \gamma := \inf f(B) \leq f(b)$. Ist nun A offen, so auch $f(A)$ und damit ist $f(a) < \gamma$ für alle $a \in A$.

2 Ist zusätzlich B offen, so folgt analog zum eben gesagten $f(b) > \gamma$ für alle $b \in B$.

3 Da A abgeschlossen ist, existiert zu jedem $y \notin A$ eine offene absolut-konvexe 0-Umgebung U_y, so daß $A \cap (y + 3\,U_y) = \emptyset$. Da B kompakt ist, gibt es endlich viele $y_i \in B$, so daß $B \subseteq \bigcup_i (y_i + U_i)$ mit $U_i := U_{y_i}$. Wegen $(y_i + 2\,U_i) \cap (A + U_i) = \emptyset$ sind für $U := \bigcap_i U_i$ die beiden offenen konvexen Mengen $A + U$ und $B + U$ disjunkt. Also folgt die Behauptung aus (2). □

5.2.2 Folgerung. Trennung eines Punktes von konvexer Menge.

Sei E ein LKV, U eine nicht leere konvexe offene Teilmenge und F ein linearer Teilraum der U nicht trifft. So existiert eine abgeschlossene Hyperebene $H \supseteq F$, welche U nicht trifft.

Beweis. Sei vorerst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nach 5.2.1.1 folgt mit $A := U$ und $B := F$ die Existenz von $f \in E^*$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < \gamma \leq f(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. Da $b := 0 \in F$ ist $\gamma \leq 0$ und somit $U \cap \mathrm{Ker}(f) = \emptyset$. Weiters ist $F \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, denn $f(y) \neq 0$ impliziert $f(y) < 0$ oder $f(y) > 0$ und damit $f(-y) < 0$, dann ist aber für ein geeignet gewähltes Vielfaches $f(ty) < \gamma$, ein Widerspruch.

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nach dem erstem Fall existiert ein $\mathbb{R}$-lineares $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f(x) < 0$ für $x \in U$ und $f|_F = 0$. Dann ist $\tilde{f} : x \mapsto f(x) - i\, f(i\, x)$ $\mathbb{C}$-linear, mit $0 \notin \tilde{f}(U)$ und $F \subseteq \operatorname{Ker}(\tilde{f})$ (Beachte, daß $\operatorname{Ker}(\tilde{f}) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$). □

5.2.3 Folgerung. Abschluß als Durchschnitt von Halbräumen.

Die abgeschlossene konvexe Hülle einer Teilmenge eines reellen LKV ist der Durchschnitt aller Halbräume, die sie enthalten. Vgl. dies mit 5.1.9.

Dabei versteht man unter einem HALBRAUM eine Teilmenge des Vektorraums der Gestalt $\{x : f(x) \le \gamma\}$ mit einem $f \in E^*$ und $\gamma \in \mathbb{R}$.

Beweis. Folgt wie 5.1.9 unter Verwendung von 5.2.1.3 oder 5.2.4 anstatt 5.1.8: In der Tat sind Halbräume offensichtlich abgeschlossen und konvex, also ist die abgeschlossen konvexe Hülle von A in diesem Durchschnitt enthalten. Sei umgekehrt b nicht in der abgeschlossenen konvexen Hülle von A. Dann existiert nach 5.2.1.3 ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und ein stetig lineares Funktional $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < \gamma < f(b)$ für alle $a \in A$. Also liegt A im Halbraum $\{x : f(x) \le \gamma\}$ nicht aber b, und somit liegt b auch nicht im Durchschnitt dieser. □

Als nächstes eine Verallgemeinerung von 5.1.8.

5.2.4 Lemma von Mazur.

Es sei E LKV über $\mathbb{K}$, weiters $A \subseteq E$ abgeschlossen und konvex und $b \notin A$.

1. *Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $0 \in A$, so existiert ein stetiges lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ mit $f(b) > 1$ und $f(a) \le 1$ für alle $a \in A$.*
2. *Falls A absolut-konvex ist, dann existiert ein stetiges lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ mit $f(b) > 1$ und $|f(a)| \le 1$ für alle $a \in A$.*

Beweis. 1 Nach 5.2.1.3 für die kompakte Menge $B := \{b\}$ existiert ein $f \in E^*$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < \gamma < f(b)$ für alle $a \in A$. Wegen $0 \in A$ ist $0 = f(0) < \gamma$ und somit $g := \frac{1}{\gamma} f : E \to \mathbb{R}$ das gewünschte Funktional mit $g(a) < 1 < g(b)$ für alle $a \in A$.

2 Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist, so folgt dies aus dem ersten Teil, denn dann ist mit $a \in A$ auch $-a \in A$ und somit $-f(a) = f(-a) < 1$, insgesamt also $|f(a)| < 1$.

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Es existiert nach dem eben gesagten ein stetig $\mathbb{R}$-lineares $f : E \to \mathbb{R}$ mit $|f(a)| \le 1 < f(b)$ für alle $a \in A$. Es nimmt die 2π-periodische Funktion $t \mapsto f(e^{i\,t} b)$ ihr Maximum an einer Stelle τ an. An dieser muß ihre Ableitung $f(i\, e^{i\,\tau} b)$ verschwinden. Nun betrachten wir das $\mathbb{C}$-lineare stetige Funktional $\tilde{f} : x \mapsto f(e^{i\,\tau} x) - i\, f(ie^{i\tau} x)$. Es ist $\tilde{f}(b) = f(e^{i\,\tau} b) \ge f(b) > 1$ und für $a \in A$ sei $\tilde{f}(a) = r\, e^{i\,\vartheta}$ die Polarzerlegung. Dann ist $0 \le r = e^{-i\,\vartheta}\, \tilde{f}(a) = \tilde{f}(e^{-i\,\vartheta} a) = f(e^{i\,\tau}\, e^{-i\,\vartheta}\, a) \le 1$, da $e^{i\,(\tau-\vartheta)} a \in A$ ist. □

5.3 Dualräume wichtiger Beispiele

5.3.1 Lemma. Dualraum von ℓ^p.

Es sei $1 \le p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann ist $(\ell^p)' = \ell^q$. Weiters ist $(c_o)' = \ell^1$. Man beachte insbesondere, daß $c_0 \ne \ell^\infty = (\ell^1)' = (c_0)''$.

Wir werden in 5.5.2 zeigen, daß c_0 nicht Dualraum eines Banach-Raums sein kann.

Beweis. Die durch $x \mapsto (y \mapsto \langle x, y\rangle)$ gegebene Abbildung $\iota : \ell^q \to (\ell^p)'$ ist wegen der Hölderungleichung eine wohldefinierte Abbildung mit $\|\iota(x)\| \leq \|x\|$.

$$\begin{tikzcd} \ell^q \arrow[rr, hook, "\iota"] \arrow[dr, hook, "\mathrm{incl}"'] & & (\ell^p)' \arrow[dl, "(\mathrm{ev}_{e_k})_k"] \\ & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \end{tikzcd}$$

Wir zeigen nun die Surjektivität: Sei dazu $\lambda \in (\ell^p)'$. Falls ein $x \in \ell^q$ existiert mit $\iota(x) = \lambda$, so müßte $x_k = \iota(x)(e^k) = \lambda(e^k)$ sein. Wir definieren also $x_k := \lambda(e^k)$. Es seien $\lambda_n \in (\ell^p)'$ gegeben durch

$$\lambda_n(y) := \lambda(y|_{\{1,\dots,n\}}) = \lambda\Big(\sum_{k\leq n} y_k\, e^k\Big) = \sum_{k\leq n} y_k\, x_k.$$

Dann konvergiert $\lambda_n \to \lambda$ punktweise, da $\sum_k y_k\, e^k \to y$ konvergiert in ℓ^p (bzw. in c_0). Also ist $\lambda \in (\ell^p)^*$ wegen dem Banach-Steinhaus Theorem 4.2.6 und

$$\lambda(y) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq n} x_k\, y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, y_k =: \iota(x)(y).$$

Somit gilt $|\sum_k x_k\, y_k| \leq \|\lambda\|\, \|y\|_p$. Für fixes n definieren wir ein $y \in \ell^p$ durch $y_k := \bar{x}_k\, |x_k|^{q-2}$ falls $x_k \neq 0$ und $k \leq n$ und 0 sonst. Es gilt $|y_k|^p = |x_k|^q$ und somit

$$\sum_{k\leq n} |x_k|^q = \sum_{k\leq n} x_k\, y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, y_k \leq \|\lambda\|\, \|y\|_p = \|\lambda\| \Big(\sum_{k\leq n} |x_k|^q\Big)^{1/p}$$

Also ist $\|x\|_q \leq \|\lambda\|$ und somit $x \in \ell^q$. □

5.3.2 Verallgemeinerung. Dualraum von L^p.

Für $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt: $L^q(X) = (L^p(X))^*$ (Für $p = 1$ nur falls X σ-endlich ist).

Für einen Beweis siehe z.B. [**5**, S.381].

5.3.3 Folgerung. Dualraum von $C([0, 1])$.

Die stetigen Funktionale auf $C([0, 1])$ sind genau die Riemann-Stieltjes-Integrale mit Funktionen von beschränkter Variation als Integrator.

Man rufe sich aus der Analysis in Erinnerung, daß in Analogie zu Riemann-Summen die Riemann-Stieltjes-Summe einer Funktion f bezüglich einer anderen Funktion g, einer Zerlegung $Z := \{0 = t_1 < \dots < t_n = 1\}$ und eines Zwischenvektors $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ mit $t_{i-1} < \xi_i < t_i$ durch

$$R_g(f, Z, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

gegeben sind. Die Funktion f heißt Riemann-Stieltjes-integrierbar bezüglich g mit Integral $\int_0^1 f\, dg$, falls der Limes $\int_0^1 f\, dg := \lim_{|Z|\to 0} R_g(f, Z, \xi)$ existiert, wobei $|Z| := \max\{|t_i - t_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}$.

Beweis. Es läßt sich leicht zeigen (siehe [**22**, 6.5.14]), daß für stetiges f und jede Funktion g von beschränkter Variation $V(g)$ (siehe 1.2.3) das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^1 f\, dg$ existiert und $|\int_0^1 f\, dg| \leq \|f\|_\infty \cdot V(g)$ erfüllt. Folglich ist $g \mapsto (f \mapsto \int_0^1 f\, dg)$ eine beschränkte lineare Abbildung mit Norm kleiner oder gleich 1.

Sei nun umgekehrt ℓ ein stetig lineares Funktional auf $C([0,1])$. Wir wollen eine Funktion g finden, mit $\ell(f) = \int_0^1 f\,dg$ für alle stetigen f. Dazu beachte man, daß $\int_0^1 \chi_{[0,s]}\,dg = g(s) - g(0)$ ist. Da das Riemann-Stieltjes-Integral unverändert bleibt, wenn man zu g eine Konstante wie z.B. $-g(0)$ addiert, dürfen wir annehmen, daß $g(0) = 0$ ist und es liegt nun nahe g durch $g(s) := \ell(\chi_s)$ mit $\chi_s := \chi_{[0,s]}$ zu definieren. Diese Definition macht aber vorerst keinen Sinn, da χ_s nicht stetig ist. Nach dem Satz 5.1.5 von Hahn-Banach dürfen wir aber annehmen, daß ℓ auf $B([0,1])$ normerhaltend fortgesetzt ist.

Behauptung: g ist von beschränkter Variation.
Sei $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ eine Partition von $[0,1]$, dann definieren wir $f_k := e^{-i\varphi_k}$, wobei $g(t_k) - g(t_{k-1}) = r_k\,e^{i\varphi_k}$ ist. Schließlich sei f die Treppenfunktion die Wert f_k auf $(t_{k-1}, t_k]$ hat, d.h. $f = \sum_{k=1}^n f_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})$. Dann ist $f \in B([0,1])$ mit $\|f\|_\infty \le 1$ also

$$\|\ell\| \ge |\ell(f)| = \Big|\sum_{k=1}^n f_k(g(t_k) - g(t_{k-1}))\Big| = \sum_{k=1}^n \big|g(t_k) - g(t_{k-1})\big|$$

und somit $\|\ell\| \ge V(g)$.

Behauptung: Für $f \in C([0,1])$ ist $\ell(f) = \int_0^1 f\,dg$.
Sei dazu $Z := \{0 = t_0 < \dots < t_n = 1\}$ eine Partition und $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ein Zwischenvektor. Mit $f_Z \in B([0,1])$ bezeichnen wir $f_Z := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})$. Es gilt $f = \lim_{|Z|\to 0} f_Z$ in $B([0,1])$ und da ℓ stetig ist folgt:

$$\begin{aligned}\ell(f) &= \ell\Big(\lim_{|Z|\to 0} f_Z\Big) = \lim_{|Z|\to 0} \ell(f_Z) = \lim_{|Z|\to 0} \ell\Big(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\Big)\\ &= \lim_{|Z|\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,(g(t_k) - g(t_{k-1})) = \int_0^1 f\,dg. \quad \Box\end{aligned}$$

Die Abbildung $BV([0,1]) \to C([0,1])'$ ist jedoch nicht injektiv selbst wenn man $g(0) = 0$ fordert, siehe [**2**, S.121]: Um Injektivität zu erzwingen, kann man $g(0) = 0$ und $g(x) = g(x+) := \lim_{t\searrow 0} g(x)$ für alle $0 < x < 1$ fordern.

5.3.4 Darstellungssatz von Riesz. Dualraum von $C(K)$.

Es sei K ein kompakter Raum. Dann ist die Abbildung $\mu \mapsto (f \mapsto \int_K f\,d\mu)$ ein isometrischer Isomorphismus vom Raum der Baire-Maße auf $C(K)'$.

Ohne Beweis. Man sieht leicht, daß diese Abbildung eine Isometrie ist. Schwierig zu zeigen ist Surjektivität, siehe [**14**, S.139].

Unter einem *regulären Borel-Maß* μ versteht man ein signiertes Maß μ (d.h. eine σ-additive Abbildung) auf der Algebra der Borel-Mengen, welches REGULÄR ist, d.h.

$$\begin{aligned}|\mu|(A) &= \sup\{|\mu(K)| : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}\\ &= \inf\{|\mu(U)| : U \supset A, A \text{ offen \& Borel-meßbar}\},\end{aligned}$$

wobei das (positive) Maß $|\mu|$ durch

$$|\mu|(A) := \sup\Big\{\sum_n |\mu(A_n)| : A_n \in \mathcal{A}, A = \bigcup_n A_n, A_n \text{ paarweise disjunkt}\Big\}$$

definiert ist. Unter der Variationsnorm $\|\mu\|$ versteht man dann $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

Auf kompakten Räumen stehen die Baire-Maße in eindeutiger Korrespondenz zu den regulären Borel-Maßen, d.h. lassen sich eindeutig von den Baire-Mengen auf die Borel-Mengen fortsetzen.

5.3.5 Folgerung. Dualraum von $C(X)$.

Der Dualraum von $C(X)$ für vollständig reguläres X besteht gerade aus den regulären Borel-Maßen mit Träger in kompakten Teilmengen von X.

Beweis. Zu jedem $\mu \in C(X)^*$ existiert ein kompaktes $K \subseteq X$ und ein $C > 0$ mit $|\mu(f)| \le C\,\|f|_K\|_\infty$. Dann faktorisiert μ über $\mathrm{inkl}^* : C(X) \to C(K)$ zu einem $\tilde\mu \in C(K)^*$ (vermöge $\tilde\mu(f) := \mu(\tilde f)$, wobei $\tilde f \in C(X)$ irgendeine stetige Erweiterung von $f \in C(K)$ ist), ist also nach 5.3.4 durch ein reguläres Borel-Maß auf K gegeben. □

5.3.6 Runge's Approximations-Theorem.

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $A \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K$ eine Menge, die jede Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ trifft. Ist f holomorph in einer Umgebung von K, dann existieren rationale Funktionen mit Polen in A welche gleichmäßig auf K gegen f konvergieren.

Dabei bezeichnet $\mathbb{C}_\infty$ die Riemann'sche Zahlensphäre, d.h. die Einpunkt-Kompaktifizierung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ der Ebene $\mathbb{C}$, siehe [**19**, 2.16,2.22]

Beweis. Wir bezeichnen mit $R_A(K) := \{\frac{p}{q}|_K : p, q \text{ sind Polynome}, q^{-1}(0) \subseteq A\}$ die Menge aller rationalen Funktionen auf K mit Polen in A. Sei $E := \{f|_K : f \text{ ist holomorph auf einer Umgebung von K}\}$ der Teilraum von $C(K)$ jener Funktionen, die eine holomorphe Erweiterung auf eine Umgebung von K besitzen. Wir müssen zeigen, daß der Abschluß von $R_A(K)$ den Raum E umfaßt. Wegen 5.1.9 genügt es zu zeigen, daß jedes $\mu \in C(K)'$ welches auf $R_A(K)$ verschwindet auf ganz E verschwindet (Nach den Darstellungssatz 5.3.5 von Riesz ist solch ein μ durch ein reguläres signiertes Borel-Maß gegeben).

Sei also $f|_K$ in E mit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Menge U die K enthält. Nach der *Cauchy'schen Integralformel* (siehe [**19**, 3.28]) gibt es endlich viele C^1-Kurven (ja sogar Geradenstücke) c_k in $U \setminus K$, sodaß

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

für alle $z \in K$ (siehe 6.21). Also ist

$$\mu(f) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \mu\Big(z \mapsto \int_{c_k} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\Big) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} f(w)\, \underbrace{\mu\Big(z \mapsto \frac{1}{w-z}\Big)}_{=:-\hat\mu(w)}\, dw.$$

5.3.7 Sublemma.

Es sei $\mu \in C(K, \mathbb{C})^*$ mit $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Dann ist durch

$$\hat\mu(w) := \mu\Big(z \mapsto \frac{1}{z-w}\Big)$$

eine holomorphe Funktion $\hat\mu : \mathbb{C}_\infty \setminus K \to \mathbb{C}$ gegeben mit Ableitungen

$$\frac{\hat\mu^{(n)}(w)}{n!} = \mu\Big(z \mapsto \frac{1}{(z-w)^{n+1}}\Big) \text{ für } z \in \mathbb{C}\setminus K$$
$$\frac{\hat\mu^{(n)}(\infty)}{n!} = -\mu\Big(z \mapsto z^{n-1}\Big) \text{ für } n > 0$$

Beweis. Es ist $r : (\mathbb{C}\setminus K)\times K \to \mathbb{C}$ definiert durch $(w,z) \mapsto \frac{1}{z-w}$ stetig, und somit $w \mapsto r_w : z \mapsto r(w,z)$ eine stetige Abbildung $\mathbb{C}\setminus K \to C(K,\mathbb{C})$ (siehe [**26**, 2.4.5]). Damit ist auch $\hat\mu : w \mapsto \mu(r_w)$ stetig. Die Abbildung $\hat\mu : \mathbb{C}\setminus K \to \mathbb{C}$ ist sogar holomorph, denn

$$\frac{\hat\mu(w')-\hat\mu(w)}{w'-w} = \mu\Big(z \mapsto \frac{1}{(z-w')(z-w)}\Big) \to \mu(r_w^2) \text{ für } w' \to w,$$

also ist $\hat\mu'(w) = \mu(r_w^2)$. Induktiv zeigt man $\hat\mu^{(n)}(w) = n!\,\mu(r_w^{n+1})$.

Wegen $r_w \to 0$ für $w \to \infty$, ist $\hat\mu$ durch $\hat\mu(\infty) := 0$ stetig und somit nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz [**19**, 3.31] holomorph auf $\mathbb{C}_\infty\setminus K$ fortsetzbar. Als Taylor-Entwicklung von $\hat\mu$ bei ∞ – d.h. jene von $w \mapsto \hat\mu(\frac{1}{w})$ bei 0 – erhalten wir:

$$\begin{aligned}\hat\mu(w) &= \mu\Big(z \mapsto \frac{1}{z-w}\Big) = \frac{1}{w}\,\mu\Big(z \mapsto \Big(1-\frac{z}{w}\Big)^{-1}\Big)\\ &= -\frac{1}{w}\sum_{n=0}^\infty \mu\Big(z \mapsto \Big(\frac{z}{w}\Big)^n\Big) = -\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{w^{n+1}}\,\mu(z \mapsto z^n).\end{aligned}$$

Also gilt für die Ableitung

$$\frac{1}{n!}\,\hat\mu^{(n)}(\infty) = -\mu\Big(z \mapsto z^{n-1}\Big) \quad \square$$

Nun können wir den Beweis von Runge's Theorem 5.3.6 vervollständigen:
Wegen $\mu|_{R_A(K)} = 0$, ist die Taylor-Entwicklung von $\hat\mu$ bei jedem $a \in A$ gleich 0, und da $\hat\mu$ holomorph ist und A alle Komponenten von $\mathbb{C}_\infty\setminus K$ trifft ist $\hat\mu = 0$ auf $\mathbb{C}_\infty\setminus K$ und somit $\mu(f) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i}\int_{c_k} f(w)\,\hat\mu(w)\,dw = 0$. $\square$

5.3.8 Folgerung. Polynome liegen dicht.

Falls K kompakt ist und $\mathbb{C}\setminus K$ zusammenhängend ist, so läßt sich jede auf einer Umgebung von K holomorphe Funktion durch eine Folge von Polynomen gleichmäßig auf K approximieren.

Beweis. Für $A := \{\infty\}$ sind die rationalen Funktionale mit Polen in A nach dem Fundamentalsatz der Algebra (siehe [**19**, 1.8]) gerade die Polynome. $\square$

5.3.9 Satz. Dualraum von $H(U)$.

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Der Dualraum des Fréchet-Raums $H(U)$ läßt sich mit $H_0(\mathbb{C}_\infty\setminus U)$, dem Raum der Keime holomorpher Funktionen f auf $\mathbb{C}_\infty\setminus U$ mit $f(\infty) = 0$ identifizieren.

Unter einem Keim einer Funktion auf K versteht man eine Äquivalenzklasse von lokal um K definierten Funktionen, wobei "äquivalent" bedeutet, daß sie auf einer Umgebung von K übereinstimmen.

Beweis. Es sei $[g] \in H_0(\mathbb{C}_\infty\setminus U)$, d.h. g auf einer Umgebung W der kompakten Menge $\mathbb{C}_\infty\setminus U$ holomorph. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Rand von

W durch endlich viele C^1-Kurven c_k parametrisierbar, siehe 6.21, und g darauf noch holomorph. Dann definiert

$$\mu_g(f) := \int_{\partial W} f(z)\, g(z)\, dz = \sum_k \int_{c_k} f(z)\, g(z)\, dz$$

ein stetig lineares Funktional auf $C(U) \supseteq H(U)$. Diese Definition hängt nur vom Keim $[g]$ von g ab, denn wenn W_1 eine kleinere Umgebung von $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ mit C^1-parametrisierbaren Rand in W ist, dann ist sowohl g als auch f holomorph auf $\overline{W} \setminus W_1$ und somit verschwindet nach dem Cauchy'schen Integralsatz 6.20 das Integral von $f \cdot g$ über den Rand $\partial(W \setminus \overline{W_1})$, dieses ist aber gerade die Differenz $\int_{\partial W} f \cdot g - \int_{\partial W_1} f \cdot g$.

Umgekehrt sei $\mu \in H(U)^*$ und wegen des Satzes von Hahn-Banach o.B.d.A. $\mu \in C(U, \mathbb{C})^*$. Dann ist der Träger von μ eine kompakte Teilmenge $K \subseteq U$, d.h. $\mu \in C(K, \mathbb{C})^*$. Die Abbildung $\hat\mu : \mathbb{C}_\infty \setminus K \to \mathbb{C}$ ist nach obigen Sublemma 5.3.7 holomorph und wegen der Cauchy'schen Integralformel ist wie im Beweis von Runge's Theorem 5.3.6

$$\mu(f) = -\sum_k \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} f(w)\, \hat\mu(w)\, dw \text{ für } f \in H(U),$$

also ist μ durch ein "inneres Produkt" mit $\hat\mu \in H_0(\mathbb{C}_\infty \setminus K)$ gegeben. □

5.4 Einführung in die Dualitätstheorie

5.4.1 Definition. Annihilatoren.

Es sei E ein LKV und F ein Teilraum. Mit F^o bezeichnen wir den Annihilator von F in E^*, d.h. $F^o := \{\ell \in E^* : \ell|_F = 0\}$. Ist E ein Hilbertraum, so können wir E^* mit E nach [**18**, 6.2.10] identifizieren. Der Menge F^o entspricht dann via $\iota : E \to E^*$, $x \mapsto (y \mapsto \langle x, y\rangle)$ genau das orthogonale Komplement $F^\perp$ von F, denn

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F : 0 = \langle y, x\rangle = \iota(x)(y) \Leftrightarrow \iota(x)|_F = 0 \Leftrightarrow \iota(x) \in F^o.$$

Falls G ein Teilraum von E^* ist, so bezeichnen wir mit G_o den Annihilator von G in E, d.h.

$$\begin{aligned} G_o &:= \{x \in E : \ \forall g \in G : 0 = g(x) = \delta(x)(g)\} = \bigcap\{\ker g : g \in G\} \\ &= \{x \in E : \delta(x)|_G = 0\} = \delta^{-1}(G^o), \end{aligned}$$

wobei nun $\delta : F \to F^{**}$ die kanonische Injektion ist.

5.4.2 Folgerung. Abschluß als Bi-Annihilator.

Ist E ein LKV und F ein Teilraum, so ist sein Abschluß $\overline{F} = (F^o)_o$.

Beweis. Aus 5.1.9 folgt:

$$\overline{F} = \bigcap\{\ker \ell : \ell|_F = 0\} = \bigcap\{\ker \ell : \ell \in F^o\} = (F^o)_o. \quad □$$

5.4.3 Folgerung. Kern der Adjungierten.

Es sei $T : E \to F$ eine stetig lineare Abbildung zwischen LKV'en. Dann gilt $(\operatorname{Bild} T)^o = \ker(T^*)$. *Weiters ist* $\overline{\operatorname{Bild} T} = (\ker T^*)_o$.

Beweis. Die erste Gleichung gilt, da $y' \in (\operatorname{Bild} T)^o \Leftrightarrow \forall x : 0 = y'(Tx) = T^*(y')(x)$ $\Leftrightarrow T^*(y') = 0$, d.h. $y' \in \ker T^*$. Aus 5.4.2 folgt weiters $\overline{\operatorname{Bild} T} = ((\operatorname{Bild} T)^o)_o = (\ker T^*)_o$. □

5.4.4 Folgerung. Dualraum von Quotienten und Teilräumen.

Es sei F ein abgeschlossener linearer Teilraum eines LKV's E. Dann existieren natürliche stetig lineare Bijektionen $E^*/F^o \to F^*$ und $(E/F)^* \to F^o$. Falls E normiert ist, so sind diese Isometrien.

Beweis. Wir dualisieren die Sequenz $F \overset{\iota}{\hookrightarrow} E \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} E/F$ und erhalten:

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{Ker}\iota^* = F^o \arrow[dl, hook, "\text{inkl}"'] \\
F^* & E^* \arrow[l, two heads, "\iota^*"'] \arrow[dl, two heads] & (E/F)^* \arrow[l, tail, "\pi^*"] \arrow[u, dotted, "(2)"'] \\
E^*/F^o \arrow[u, dotted, "(1)"] & &
\end{tikzcd}$$

Da π surjektiv ist, ist π^* injektiv und nach dem Fortsetzungsatz 5.1.5 ist $\iota^* : E^* \to F^*$ surjektiv. Wegen $\operatorname{Ker}\iota^* = F^o$ existiert eine eindeutig bestimmte stetig lineare bijektive Abbildung $(1) : E^*/F^o \to F^*$ gegeben durch $x^* + F^o \mapsto \iota^*(x^*) = x^*|_F$.

Wegen $\iota^* \circ \pi^* = (\pi \circ \iota)^* = 0$ existiert eine eindeutig bestimmte stetig lineare Abbildungen $(2) : (E/F)^* \to F^o$ gegeben durch $\ell \mapsto \pi^*(\ell) = \ell \circ \pi$. Da π^* injektiv ist gilt gleiches für (2) und (2) ist auch surjektiv, denn jedes $y^* \in F^o \subseteq E^*$ verschwindet auf F und faktorisiert somit zu einem $\ell \in (E/F)^*$ mit $y^* = \ell \circ \pi = \pi^*(\ell)$.

Falls nun E normiert ist, so sind mit π und ι auch π^* und ι^* Kontraktionen und damit auch die beiden vertikalen Abbildungen. Zu $y^* \in F^*$ existiert nach 5.1.5 ein $x^* \in E^*$ mit $\|x^*\| = \|y^*\|$ und $\iota^*(x^*) = y^*$. Somit ist $\|x^* + F^o\| \le \|x^*\| = \|y^*\| = \|\iota^*(x^*)\|$, d.h. (1) ist eine Isometrie. Gleiches gilt für (2), denn π^* ist eine Isometrie da $|\ell(x+F)| = |\ell(\pi(x+y))| = \|\pi^*(\ell)(x+y)| \le \|\pi^*(\ell)\|\,\|x+y\|$ für alle $y \in F$ und somit $\|\ell\| \le \|\pi^*(\ell)\|$. □

5.4.5 Definition. Duale Paarung.

Eine DUALE PAARUNG ist eine bilineare Abbildung $\langle \_, \_ \rangle : E \times F \to \mathbb{K}$ auf dem Produkt zweier Vektorräume, welche nicht degeneriert ist, d.h. aus $\forall x : \langle x, y\rangle = 0$ folgt $y = 0$ und genauso mit vertauschten Variablen.

Wir können also z.B. die Elemente $y \in F$ via $\langle \_, y\rangle$ als lineare Funktionale auf E auffassen. Unter der *schwachen Topologie* $\sigma(E, F)$ auf E verstehen wir die initiale Topologie bezüglich aller dieser Funktionale mit $y \in F$.

Eine Basis von SN'en ist durch die Funktionen $x \mapsto |\langle x, y\rangle|$ mit $y \in F$ gegeben. Diese Topologie heißt schwach, weil sie schwächer ist als jede Topologie für welche jedes $y \in F$ ein stetiges lineares Funktional $x \mapsto \langle x, y\rangle$ auf E definiert.

Wir sagen, daß eine Struktur eines LKV'es auf E mit der dualen Paarung $\langle E, F\rangle$ VERTRÄGLICH ist, falls F der Raum der stetigen linearen Funktionale bezüglich dieser Struktur ist, d.h. die natürliche Abbildung $F \to E^*$ eine wohldefinierte Bijektion ist.

5.4.6 Lemma. Verträglichkeit der schwachen Topologie.

Es sei $\langle E, F\rangle$ eine duale Paarung. Dann ist F isomorph zum Raum E^* der stetig linearen Funktionale auf E bzgl. der schwachen Topologie $\sigma(E, F)$. Genauer, die natürliche Abbildung $\iota : F \to E^*$, $y \mapsto \langle \_, y\rangle$ ist eine Bijektion.

Beweis. Die Abbildung ι ist klarerweise wohldefiniert, linear und injektiv wegen der nicht-Degeneriertheit. Es bleibt also nur die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $x^* : E \to \mathbb{K}$ ein bezüglich $\sigma(E,F)$ stetiges lineares Funktional auf E. Wegen der Stetigkeit existieren $y_1, \dots, y_n \in F$ mit $|x^*(x)| \leq p(x) := \max\{|\langle x, y_i\rangle| : i = 1, \dots, n\}$. Es sei $\ell_i := \iota(y_i)$ und $\ell := (\ell_1, \dots, \ell_n) : E \to \mathbb{K}^n$. Dann ist $\ker(\ell) = \bigcap_{i \leq n} \ker \ell_i \subseteq \ker x^*$, wobei $\ell_i := \iota(y_i)$ und somit faktorisiert x^* eindeutig als lineares Funktional über $\ell : E \to \ell(E) \subseteq \mathbb{K}^n$. Diese Faktorisierung läßt sich von dem Teilraum $\ell(E)$ zu einem linearen Funktional $\mu : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ fortsetzen:

$$\begin{tikzcd}
\ker \ell \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\text{inkl}"'] & E \arrow[r, two heads, "\ell"] \arrow[d, equal] & \ell(E) \arrow[r, hook, dotted] \arrow[d, dotted] & \mathbb{K}^n \arrow[d, dotted, "\mu"] \\
\ker x^* \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads, "x^*"] & x^*(E) \arrow[r, hook] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Ein solches μ ist von der Gestalt $\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i \, x_i$ für gewisse skalare $\mu_i \in \mathbb{K}$. Also ist $x^* = \mu \circ \ell = \sum_{i=1}^n \mu_i \, \ell_i = \iota\Big(\sum_{i=1}^n \mu_i \, y_i\Big) \in \iota(F)$. □

5.4.7 Bipolarensatz.

Es sei $\langle E, F\rangle$ eine duale Paarung, und $A \subseteq E$. Dann ist $(A^o)_o$ der $\sigma(E,F)$-Abschluß der absolut-konvexen Hülle von A. Dabei ist $A^o := \{y \in F : |\langle x, y\rangle| \leq 1$ für alle $x \in A\}$, die Polare *von A; und analog für $B \subseteq F$ ist $B_0 := \{x \in E : |\langle x, y\rangle| \leq 1$ für alle $y \in B\}$.*

Man beachte, daß die hier definierte Polare A^o für lineare Teilräume A mit dem in 5.4.1 definierten Annihilator A^o übereinstimmt, denn $\forall a \in A : |\langle a, y\rangle| \leq 1 \Leftrightarrow \forall a \in A \, \forall t > 0 : t \cdot |\langle a, y\rangle| = |\langle t \cdot a, y\rangle| \leq 1,$ i.e. $\langle a, y\rangle = 0$

Beweis. ($\supseteq$) Klarerweise ist $(A^o)_o$ als Polare $\sigma(E,F)$-abgeschlossen und absolutkonvex, weiters ist offensichtlich $A \subseteq (A^o)_o$.

($\subseteq$) Angenommen $x \in E$ ist nicht im $\sigma(E,F)$-Abschluß der absolut-konvexen Hülle von A. Nach 5.2.4 existiert ein $y \in F$ mit $y(x) > 1$ und $|y(z)| \leq 1$ für alle z im (Abschluß der absolut-konvexen Hülle von) A. Also ist $y \in A^o$ und $x \notin (A^o)_o$. □

5.4.8 Lemma. Abschluß konvexer Mengen bzgl. verträglicher Topologien.

Es sei $A \subset E$ eine konvexe Menge die für eine verträgliche Struktur bezüglich der dualen Paarung $\langle E, F\rangle$ abgeschlossen ist. Dann ist A für jede andere solche Struktur ebenfalls abgeschlossen.

Beweis. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sehen wir aus 5.2.3, daß A der Durchschnitt der Halbräume ist, die A enthalten. Diese verwenden aber nur die stetigen linearen Funktionale, also ist A bezüglich jeder verträglichen Topologie abgeschlossen.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ liefert der Realteil der dualen Paarung $\langle \_, \_\rangle : E \times F \to \mathbb{C}$ eine Paarung $\langle \_, \_\rangle_{\mathbb{R}} : E \times F \to \mathbb{R}$ als reelle Vektorräume, denn $\langle x, y\rangle = \mathfrak{Re}(\langle x, y\rangle) + i \, \mathfrak{Im}(\langle x, y\rangle) = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} - i \, \mathfrak{Re}(i\langle x, y\rangle) = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} - i\langle x, i\, y\rangle_{\mathbb{R}}$. Eine Struktur auf E als komplexer LKV ist genau dann verträglich mit der komplexen Paarung, wenn sie es mit dem Realteil ist, denn die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\iota : E \to L_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C})$, $x \mapsto \langle x, \_\rangle$ ist nach 3.9.2.2 genau dann surjektiv, wenn $\mathfrak{Re} \circ \iota : E \to L_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C}) \stackrel{\cong}{\to} L_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R})$, $x \mapsto \mathfrak{Re}(\langle x, \_\rangle)$ es ist. Somit folgt alles aus dem reellen Fall. □

5.4.9 Satz von Mackey.

Eine Teilmenge von E ist genau dann beschränkt, wenn sie bezüglich einer (jeder) verträglichen Topologie τ beschränkt ist.

Beweis. Wir haben in 4.2.7 mittels des Satzes von Hahn-Banach und dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit gezeigt, daß eine Menge genau dann beschränkt ist, wenn sie unter allen stetig linearen Funktionalen beschränkt ist. Diese hängen aber nicht von der verträglichen Topologie ab. □

5.4.10 Bemerkung. Topologien gleichmäßiger Konvergenz.

Es sei X eine Menge, F ein LKV und $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von X. Unter der Topologie der *gleichmäßigen Konvergenz* auf den Mengen in $\mathcal{B}$ am Raume aller auf $B \in \mathcal{B}$ beschränkten Abbildungen $X \to F$, versteht man die durch die SN'en $f \mapsto \|(p \circ f)|_B\|_\infty$ erzeugte Topologie, wobei B ganz $\mathcal{B}$ und p die SN'en von F durchläuft.

Ist insbesonders $X = E$ ein LKV über $\mathbb{K}$ und $F = \mathbb{K}$ und $\mathcal{B}$ eine unter Homothetien abgeschlossene Menge beschränkter Mengen in E, d.h. mit $B \in \mathcal{B}$ und $\lambda > 0$ ist $\lambda\, B \in \mathcal{B}$, dann bilden die Polaren $B^o := \{x^* \in E^* : \forall x \in B : |x^*(x)| \le 1\}$ mit $B \in \mathcal{B}$ eine 0-Umgebungssubbasis der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen aus $\mathcal{B}$. Ist $\mathcal{B}$ zusätzlich unter Vereinigungen abgeschlossen, so ist dies eine 0-Umgebungsbasis.

In 5.1.10 haben wir gezeigt, daß die kanonische Abbildung $\delta : E \to E^{**}$ für normierte Räume E eine isometrische Einbettung ist. Wir wollen nun untersuchen inwieweit sich das auf allgemeine LKV überträgt.

Für die übliche Topologie auf $L(E^*, \mathbb{K})$ der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen $B \subseteq E^*$ bilden die B^o eine 0-Umgebungsbasis. Stetigkeit von δ würde also bedeuten, daß $\delta^{-1}(B^o) = B_o$ eine 0-Umgebung wäre und somit $B \subseteq (B_o)^o$ gleichgradig stetig wäre. Zumindestens für tonneliertes E ist das wegen des Uniform Boundedness Principles 4.2.2 der Fall.

Wir zeigen nun, daß, wenn wir auf $(E^*)^*$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf jeder gleichgradig stetigen Teilmenge $B \subseteq E^*$ verwenden, die Abbildung $\delta : E \to (E^*)^*$ allgemein eine Einbettung LKV'e ist.

5.4.11 Folgerung. Einbettung in den Bidual.

Die Topologie auf einem LKV E ist die der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig-stetigen Teilmengen von E^*. Die natürliche Abbildung $E \to E^{**}$ ist also eine Einbettung, falls man den Zielraum mit der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig-stetigen Teilmengen von E^* versieht.

Man beachte, daß diese natürliche Abbildung bezüglich der üblichen Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen nicht einmal stetig aber offensichtlich beschränkt ist.

Beweis. Sei U eine abgeschlossene absolut-konvexe 0-Umgebung in E. Nach 5.4.8 ist U auch $\sigma(E, E^*)$-abgeschlossen, also ist $(U^o)_o = U$ nach dem Bipolarensatz 5.4.7. Da klarerweise U^o gleichgradig-stetig ist, ist $U = (U^o)_o$ eine Nullumgebung bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig-stetigen Mengen.

Umgekehrt sei $V = A_o = \delta^{-1}(A^o)$ eine typische Nullumgebung für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig-stetigen Mengen $A \subseteq E^*$. Dann existiert eine abgeschlossene absolut-konvexe 0-Umgebung U in E mit $A \subseteq U^o$. Somit ist $V = A_o \supseteq (U^o)_o = U$, also V eine 0-Umgebung von E. □

5.4.12 Satz von Alaoğlu-Bourbaki.

Jede gleichgradig-stetige Teilmenge von E^* ist relativ-kompakt bzgl. $\sigma(E^*, E)$.

Beweis. Wir müssen dies nur für Polare U^o von 0-Umgebungen U zeigen. Dazu betrachten wir die duale Paarung $\langle E, G\rangle$, wobei G aus allen linearen Funktionalen besteht. Es bezeichne $^\bullet$ die Polare bezüglich dieser Paarung. Dann ist $U^\bullet \subseteq G$ abgeschlossen und beschränkt (da U absorbierend ist) bzgl. $\sigma(G, E)$. Die natürliche Abbildung $\delta : G \to \prod_E \mathbb{K}$, $y \mapsto (\langle x, y\rangle)_{x\in E}$ ist linear, injektiv, hat als Bild einen abgeschlossenen Teilraum (der punktweise Grenzwert linearer Abbildungen ist linear) und die schwache Topologie $\sigma(G, E)$ ist gerade so definiert, daß δ initial ist. Das Bild von $U^\bullet$ ist also wegen des Satzes von Tychonov (Produkte kompakter Räume sind kompakt, siehe [**26**, 2.1.13]) kompakt und damit ist $U^\bullet$ selbst $\sigma(G, E)$-kompakt. Wegen $E^* \subseteq G$, gilt $U^o \subseteq U^\bullet$, aber sogar Gleichheit, denn $x \in U^\bullet$ ist stetig bezüglich der 0-Umgebung U (da $x^{-1}(\{t : |t| \leq 1\}) \supseteq U$). Also ist U^o bzgl. $\sigma(G, E)$ kompakt. Da aber $\sigma(G, E)$ auf E^* gerade die Topologie $\sigma(E^*, E)$ induziert, ist alles gezeigt. □

5.4.13 Folgerung. Normierte Räume als Teilräume von $C(K)$.

Die abgeschlossene Einheitskugel K im Dualraum E^* eines normierten Raumes E ist $\sigma(E^*, E)$-kompakt. Folglich ist E isometrisch isomorph zu einem Teilraum von $C(K)$, wobei die Einbettung durch $\delta : E \to E^{**} \to C(K)$, $x \mapsto (x^* \mapsto x^*(x))$ gegeben ist. □

In 7.10, siehe auch 6.43, werden wir die Banach-Algebren der Form $C(K)$ mit kompakten K charakterisieren.

Da die Einheitskugel in der Normtopologie wegen 3.4.5 genau dann kompakt ist, wenn E endlich dimensional ist, ist andernfalls $\sigma(E^*, E)$ echt gröber als diese.

5.4.14 Definition. Mackey-Topologie.

Es sei $\langle E, F\rangle$ eine duale Paarung. Dann versteht man unter der Mackey-Topologie $\mu(E, F)$ auf E die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den $\sigma(F, E)$-kompakten, absolut-konvexen Mengen in F.

5.4.15 Satz von Mackey-Arens.

Eine Topologie auf E ist genau dann mit der dualen Paarung $\langle E, F\rangle$ verträglich, wenn sie zwischen der schwachen Topologie $\sigma(E, F)$ und der Mackey-Topologie $\mu(E, F)$ liegt.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Verträglichkeit von $\mu(E, F)$. Sei dazu $\ell : E \to \mathbb{K}$ ein bezüglich $\mu(E, F)$ stetiges lineares Funktional. Also existiert eine $\sigma(F, E)$-kompakte absolut-konvexe Menge $K \subseteq F$ mit $|\ell(K_o)| \leq 1$. Wir betrachten nun wieder die duale Paarung $\langle E, G\rangle$, wobei $G \supseteq F$ den Raum aller linearer Funktionale auf E bezeichnet. Da $\sigma(G, E)$ auf F die Topologie $\sigma(F, E)$ induziert, ist $K \subseteq F \subseteq G$ auch $\sigma(G, E)$-kompakt und somit abgeschlossen. Aus dem Bipolarensatz folgt, daß $K = (K_\bullet)^\bullet$ ist, wobei $^\bullet$ wie im Beweis von 5.4.12 die Polare bezüglich $\langle G, E\rangle$ bezeichnet. Wegen $K \subseteq F$ ist $K_o = K_\bullet$ und wegen $|\ell(K_o)| \leq 1$ liegt $\ell \in (K_o)^\bullet = (K_\bullet)^\bullet = K$, also auch in F. D.h. der $\mu(E, F)$-Dual von E ist in F enthalten.
Die Umkehrung folgt sofort daraus, daß jedes $y \in F$ sogar bezüglich $\sigma(E, F)$ und damit auch bezüglich $\mu(E, F)$ stetig ist.

Sei nun τ eine verträgliche Topologie auf E. Da somit alle $y \in F$ bzgl. τ stetige Funktionale sind, ist τ feiner als die schwache Topologie $\sigma(E, F)$.
Andererseits sei U eine 0-Umgebung in E bzg. τ. Wegen 5.4.11 dürfen wir annehmen, daß $U = K_o$ ist, mit gleichgradig-τ-stetigen absolut-konvexen $K \subseteq F$. Wegen des Satzes 5.4.12 von Alaoğlu-Bourbaki ist K bezüglich $\sigma(F, E)$ kompakt, und somit $U = K_o$ eine 0-Umgebung bezüglich der Mackey-Topologie $\mu(E, F)$. □

5.4.16 Bemerkung. Topologien am Dualraum.

Für einen LKV E betrachten wir die duale Paarung $E \times F \to \mathbb{K}$ mit $F := E^*$ und folgende Typen $\sigma(F,E)$-abgeschlossen und absolut-konvex vorausgesetzter Teilmengen $B \subseteq E^*$:

1. Die absolut-konvexe Hüllen endlicher Teilmengen;
2. Die gleichgradig stetigen;
3. Die $\sigma(F,E)$-kompakten;
4. Die Banach-Scheiben;
5. Die auf beschränkten Teilmengen von E gleichmäßig beschränkten, also die in $L(E,\mathbb{K})$ beschränkten;
6. Die auf Punkten in E beschränkten, also die $\sigma(F,E)$-beschränkten.

Dabei heißt eine Menge $B \subseteq F$ Banach-Scheibe falls sie absolut-konvex, $\sigma(F,E)$-beschränkt und der normierte Raum F_B (siehe 3.6.2) vollständig ist.

Die entsprechenden Topologien auf E der glm. Konvergenz auf den jeweiligen Mengen in F haben als Nullumgebungsbasis gerade die ($\sigma(E,F)$-abgeschlossenen absolut-konvexen) Polaren der aufgelisteten Mengen. Diese Topologien sind also

1. Die schwache Topologie $\sigma(E,F)$ nach Definition;
2. Die ursprüngliche Topologie von E nach 5.4.11;
3. Die Mackey-Topologie $\mu(E,F)$ nach Definition;
4. Diese hat keinen allgemein üblichen Namen;
5. Die mit den gefräßigen (siehe 4.2.5) Tonnen als 0-Umgebungsbasis;
6. Die mit den Tonnen (siehe 4.2.1) als 0-Umgebungsbasis.

Für die beiden letzten Topologien verwendet man folgendes:
B_o absorbiert $A \Leftrightarrow \langle A,B\rangle$ ist beschränkt, d.h. B ist gleichmäßig beschränkt auf A: In der Tat ist $A \subseteq K\,B_o \Leftrightarrow |\langle A,B\rangle| \le K$. Folglich sind die Polaren von den Mengen in (6) und (5) gerade die Tonnen bzw. die gefräßigen Tonnen:
Die Polare B_o einer auf endlichen/beschränkten Mengen beschränkten Menge B absorbiert nämlich nach dem eben Gezeigten all diese Mengen. Umgekehrt ist für jede (gefräßige) Tonne $A = (A^o)_o$ nach dem Bipolarensatz 5.4.7 und somit nach dem eben Gezeigten A^o beschränkt auf endlichen (beschränkten) Mengen.

Wir wollen nun zeigen, daß die aufgezählten Topologien in der angegeben Reihenfolge stärker werden, oder äquivalent (wegen dem Lemma in 5.4.20), daß die entsprechden Inklusionen der zugrundeliegenden Mengensysteme gelten. Für (1) $\Rightarrow$ (2) und (5) $\Rightarrow$ (6) ist das trivial, (2) $\Rightarrow$ (3) ist der Satz 5.4.12 von Alaoğlu-Bourbaki. Die verbleibenden Implikationen (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) werden in den folgenden beiden Sätzen gezeigt:

5.4.17 Lemma.

Jede $\sigma(E,F)$-kompakte absolut-konvexe Menge ist eine Banach-Scheibe.

Beweis. Sei dazu $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in E_B. Dann ist $\sup_n p_B(x_n) < \infty$ und somit existiert ein $K > 0$ mit $x_n \in K\,B$ für alle n. Da $K\,B$ ebenfalls $\sigma(E,F)$-kompakt ist, existiert ein $\sigma(E,F)$-Häufungswert $x_\infty \in K\,B$ von $(x_n)_n$. Für $\varepsilon > 0$ ist $p_B(x_m - x_n) < \varepsilon$ für n und m hinreichend groß und damit $x_m \in x_n + \varepsilon\,B$. Da $x_n + \varepsilon\,B$ ebenfalls $\sigma(E,F)$-abgeschlossen ist und x_∞ ein Häufungswert von $(x_m)_m$ ist, liegt $x_\infty \in x_n + \varepsilon\,B$ und damit ist $p_B(x_\infty - x_n) \le \varepsilon$ für diese n. Also konvergiert $x_n \to x_\infty$ in E_B. □

5.4.18 Banach-Mackey-Theorem.

Jede Tonne absorbiert jede Banach-Scheibe. Folglich sind Banach-Scheiben in $F = E^*$ gleichmäßig auf beschränkten Mengen in E beschränkt.

Beweis. Es sei $B \subseteq E$ eine Banach-Scheibe, d.h. B ist absolut-konvex, $\sigma(E,F)$-beschränkt und der bezüglich dem Minkowski-Funktional $p_B : E_B \to \mathbb{R}$ normierte Raum $E_B := \langle B \rangle_{\mathrm{VR}}$ ist vollständig. Es bezeichne $\iota : E_B \to E$ die lineare Inklusion.

Weiters sei $A \subseteq E$ eine Tonne, d.h. absolut-konvex, $\sigma(E,F)$-abgeschlossen und absorbierend. Dann ist das Minkowski-Funktional p_A auf $\langle A \rangle_{\mathrm{VR}} = E$ eine wohldefinierte Seminorm. Es sei E_A der Quotientenraum $E/\ker(p_A)$ und $\pi : E \to E_A$ die kanonische lineare Quotientenabbildung. Die Seminorm p_A faktorisiert über $\pi : E \to E_A$ zu einer Norm $E_A \to \mathbb{R}$ und diese können wir eindeutig zur Norm $\widetilde{p_A}$ auf der Vervollständigung $\widetilde{E_A}$ fortsetzen.

Offensichtlich ist $A \subseteq \pi^{-1}(\pi A) \subseteq (p_A)_{\leq 1}$. Es gilt sogar Gleichheit, denn aus $1 \geq p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda\, A\}$ folgt die Existenz einer Folge $\lambda_n \searrow 1$ mit $x \in \lambda_n\, A$ und somit ist $A \ni \frac{1}{\lambda_n} x \to x$. Da A bezüglich $\sigma(E,F)$ abgeschlossen ist schließlich $x \in A$.

Wir wollen nun die Stetigkeit und damit Beschränktheit der Zusammensetzung

$$E_B \xrightarrow{\iota} (E, \sigma(E,F)) \xrightarrow{\pi} E_A \hookrightarrow \widetilde{E_A}$$

zeigen. Nach 4.3.8 genügt es dazu eine Punkte-trennende Familie stetig linearer Funktionale $\tilde{\ell}$ auf $\widetilde{E_A}$ zu finden, für die die Zusammensetzung $\tilde{\ell} \circ \pi \circ i : E_B \to \mathbb{K}$ stetig ist.

Jedes $y \in A^o \subseteq F$ erfüllt $\{x \in E : |\langle x, y \rangle| \leq 1\} \supseteq A = (p_A)_{\leq 1}$ und somit ist für das zugehörige lineare Funktional $|y| \leq p_A$. Dieses faktorisiert also über $\pi : E \to E_A$ zu einer Kontraktion $\ell : E_A \to \mathbb{K}$ und hat somit eine stetige Fortsetzung $\tilde{\ell} : \widetilde{E_A} \to \mathbb{K}$. Die Zusammensetzung $\tilde{\ell} \circ \pi \circ \iota = y \circ \iota : E_B \to \mathbb{K}$ ist stetig(=beschränkt), denn B ist $\sigma(E,F)$-beschränkt.

Bleibt zu zeigen, daß diese $\tilde{\ell}$ Punkte-trennend auf $\widetilde{E_A}$ wirken. Sei dazu $0 \neq \tilde{x} \in \widetilde{E_A}$, d.h. $\widetilde{p_A}(\tilde{x}) > 0$. Dann existiert ein $x \in E$ mit $\widetilde{p_A}(\tilde{x} - \pi(x)) < \frac{1}{2} \widetilde{p_A}(\tilde{x}) =: \delta > 0$. Es ist folglich $p_A(x) = \widetilde{p_A}(\pi(x)) > \delta$. Nach 5.2.4.2 existiert ein $y \in A^o \subseteq F$ mit $y(\frac{x}{\delta}) > 1$. Das zugehörige $\tilde{\ell} : \widetilde{E_A} \to \mathbb{K}$ erfüllt somit $|\tilde{\ell}| \leq \widetilde{p_A}$ und $\tilde{\ell}(\pi(x)) = y(x) > \delta$. Also ist

$$\begin{aligned} |\tilde{\ell}(\tilde{x})| &\geq |\tilde{\ell}(\pi(x))| - |\tilde{\ell}(\tilde{x} - \pi(x))| \\ &\geq |y(x)| - \widetilde{p_A}(\tilde{x} - \pi(x)) > \delta - \delta = 0 \end{aligned}$$

Den zweiten Teil zeigen wir nun wie folgt: Sei dazu $B \subseteq F$ eine Banach-Scheibe und $C \subseteq E$ beschränkt. Dann ist C punkteweise auf F beschränkt nach 4.2.7 und somit $C^o \subseteq F$ eine Tonne. Wegen dem ersten Teil existiert ein $K > 0$ mit $B \subseteq K\, C^o$, d.h. B ist auf C durch K beschränkt. □

5.4.19 Bemerkung.

Damit $\delta : E \to (E^*)^*$ stetig bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Mengen $B \subseteq E^*$ ist, benötigen wir nach dem in 5.4.10 gezeigten, daß $B_o = \delta^{-1}(B^o)$ eine 0-Umgebung und die $B \subseteq (B_o)^o$ somit gleichgradig stetig sind.

Offensichtlich ist $B_o = \bigcap_{x^* \in B} \{x : |x^*(x)| \leq 1\}$ abgeschlossen und absolut-konvex. Wenn $\mathcal{B}$ die Menge aller beschränkten Teilmengen von $E^* = L(E, \mathbb{K})$ bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Mengen in E ist, d.h. gerade die auf beschränkten Mengen in E gleichmäßig beschränkten Mengen von E^* sind, dann ist B_o sogar gefräßig nach dem in 5.4.16 Gezeigten.

Ist andererseits $\mathcal{B}$ die Menge aller beschränkten Teilmengen von $E^* = L(E, \mathbb{K})$ bezüglich der punktweisen Konvergenz, d.h. gerade die auf endlichen Mengen in E gleichmäßig beschränkten Mengen von E^*, dann ist B_o zumindest absorbierend nach dem in 5.4.16.6 Gezeigten.

Dies liefert nun:

5.4.20 Folgerung. Tonneliertheit und Bidual.

Die Topologie eines LKV'es E ist genau dann die der gleichmäßigen Konvergenz auf pktw. beschränkten Mengen von E^*, falls E tonneliert ist.

Sie ist genau jene der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen von $E^* \subseteq L(E, \mathbb{K})$, falls E infra-tonneliert ist.

In beiden Fällen ist sie auch gleich $\mu(E, E^*)$.

Dabei heißt ein LKV INFRA-TONNELIERT oder auch QUASI-TONNELIERT falls jede gefräßige Tonne eine 0-Umgebung ist. Beachte, daß offensichtlich sowohl alle bornologischen als auch alle tonnelierten LKV's infra-tonneliert sind.

Verwandt damit ist auch noch der Begriff ULTRA-BORNOLOGISCH, falls jede Banachdisks fressende absolut-konvexe Menge eine 0-Umgebung ist. Offensichtlich sind ultra-bornologische Räume bornologisch und nach 5.4.18 sind sie auch tonneliert.

Beweis. Wegen 5.4.16.5 und 5.4.16.6 bilden die (gefräßigen) Tonnen gerade eine Nullumgebungsbasis der genannten Topologien der glm. Konvergenz. Diese stimmt also genau dann mit jener von E überein, wenn diese Tonnen 0-Umgebungen sind, d.h. der Raum (infra-)tonneliert ist.

Da $\mu(E, E^*)$ nach 5.4.16 zwischen der Topologie von E und jenen der glm. Konvergenz auf den beschränkten Mengen liegt, gilt in diesen Fällen Gleichheit. □

Lemma.

Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Familien beschränkter Teilmengen von E die unter Teilmengen, absolut-konvexen Hüllen, Abschlüssen und zweifachen Summen (und somit endlichen Vereinigungen und Homothetien) invariant sind. Dann sind die induzierten Topologien auf E^* genau dann gleich, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ gilt.

Beweis. Für $B \in \mathcal{B}$ ist B^o eine 0-Umgebung der assozierten Topologie(n), also existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $A^o \subseteq B^o$ und somit ist $B \subseteq (B^o)_o \subseteq (A^o)_o = \langle A \rangle_{\text{abg.,abs.konv.}} \in \mathcal{A}$, also auch $B \in \mathcal{A}$. □

5.4.21 Definition. Reflexivität.

Ein LKV E heißt (REFLEXIV) SEMIREFLEXIV falls die kanonische Abbildung $\iota : E \to E^{**}$ surjektiv (ein topologischer Isomorphismus) ist.

5.4.22 Proposition. Semireflexivität.

[14, S,227] *Für LKV E sind äquivalent:*

1. *E ist semireflexiv;*
2. *$(E^*, \mu(E^*, E))$ ist tonneliert;*
3. *Jede abg. absolut-konvexe und beschränkte Menge ist $\sigma(E, E^*)$-kompakt;*
4. *$(E, \sigma(E, E^*))$ ist* QUASI-VOLLSTÄNDIG, *d.h. jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge ist vollständig.*

Beweis.

(1⇔2) Da $\mu(E^*, E)$ nach 5.4.15 die feinste Topologie auf E^* mit Dualraum E ist und die natürliche Topologie von $E^* = L(E, \mathbb{K})$ nach 5.4.16 (bzw. 5.4.17 und 5.4.18) feiner ist, ist E genau dann semireflexiv, wenn diese beiden Topologien übereinstimmen. Nach 5.4.20 angewendet auf E^* ist dies genau dann der Fall, wenn $\mu(E^*, E)$ tonneliert ist, denn die pktw. (=skalar) beschränkten Mengen von $(E^*, \mu(E^*, E))^* = E$ sind nach 4.2.7 gerade die beschränkten Mengen und die gleichmäßige Konvergenz auf ihnen somit die natürliche Topologie.

(2⇔3) Die beiden Topologie in (1⇔2) stimmen nach dem Lemma aus 5.4.20 genau dann überein, wenn die Polaren der 0-Umgebungen es tuen, also die beschränkten abgeschlossenen absolut-konvexen Mengen $\sigma(E, E^*)$-kompakt sind.

(3⇔4) Die beschränkten $\sigma(E, E^*)$-abgeschlossenen absolut-konvexen Mengen sind in $\prod_{E^*} \mathbb{K}$ beschränkt, also relativ kompakt dort, und somit präkompakt in $\sigma(E, E^*)$. Präkompakte Mengen sind genau dann kompakt, wenn sie vollständig sind, siehe [26, 3.5.9]. □

5.4.23 Proposition. Reflexivität.

[14, S.227] *Für LKV E sind äquivalent:*

1. *E ist reflexiv;*
2. *E ist semireflexiv und infra-tonneliert;*
3. *Jede abg. absolut-konvexe und beschränkte Menge ist $\sigma(E, E^*)$-kompakt und E ist infra-tonneliert;*
4. *E ist semireflexiv und tonneliert.*

Beweis. Nach 5.4.20 ist $E \to E^{**}$ genau dann eine Einbettung, wenn E infra-tonneliert ist. Falls E reflexiv ist, so ist E aber sogar tonneliert, denn dazu müssen wir zeigen, daß alle Tonnen in E gefräßig sind und nach 5.4.16 und dem Lemma in 5.4.20 ist dies genau dann der Fall, wenn alle $\sigma(E^*, E)$-beschränkten Teilmengen A in E^* beschränkt sind also auf beschränkten Teilmengen B gleichmäßig beschränkt sind. Wegen 5.4.22.4 können wir B als $\sigma(E, E^*)$-vollständig voraussetzen und damit ist E_B ein Banach-Raum (Sei nämlich (x_n) eine Cauchy-Folge in E_B, also o.B.d.A. $x_n \in B$. Dann ist (x_n) auch $\sigma(E, E^*)$-Cauchy also $\sigma(E, E^*)$-konvergent gegen $x_\infty \in E$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist schließlich $x_n - x_m \in \varepsilon B$ also auch $x_n - x_\infty \in \varepsilon B$, d.h. $x_n \to x_\infty$ in E_B) also 4.2.2 auf diesen anwendbar und somit $A \subseteq (E_B)^*$ beschränkt. Nun folgt das Resultat aus 5.4.22. □

5.5 Nochmals Kompakte Mengen

5.5.1 Satz von Krein-Milman.

Es sei K eine kompakte konvexe Teilmenge eines LKV'es. Dann ist K die abgeschlossene konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte

$$\begin{aligned}\operatorname{ext} K &:= \{a \in K : K \setminus \{a\} \text{ ist konvex }\}\\ &= \{a \in K : \forall x, y \in K\ \forall 0 < t < 1 : a = tx + (1-t)y \Rightarrow x = a = y\}.\end{aligned}$$

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $K \neq \emptyset$. Die beiden Beschreibungen von extremal-Punkten sind äquivalent, denn es ist $K \setminus \{a\}$ genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in K$ mit $x \neq a$, $y \neq a$ und alle $0 < t < 1$ gilt: $t\,x + (1-t)\,y \neq a$, oder äquivalent: $t\,x + (1-t)\,y = a \Rightarrow x = a$ oder $y = a$. Wegen $t\,x + (1-t)\,y = a$ ist aber $x = a$ und $y = a$ äquivalent.

Der wesentliche Teil des Beweises besagt, daß $\operatorname{ext} K$ nicht leer ist. Dazu bezeichnen wir eine Teilmenge $A \subseteq K$ als EXTREMAL in K, falls $\forall x, y \in K \;\; \forall 0 < t < 1 : t\,x + (1-t)\,y \in A \Rightarrow x, y \in A$. Eine einpunktige Menge $\{a\}$ ist genau dann extremal, wenn a ein Extremalpunkt ist. Es sei

$$\mathcal{E} := \{A \subseteq K : A \text{ ist extremal in } K, \text{ abgeschlossen(=kompakt) und konvex}\}.$$

Es existieren Extremalpunkte. Klarerweise ist $\mathcal{E}$ unter Durchschnittsbildungen abgeschlossen. Wir wollen nun das Lemma von Zorn auf $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$ anwenden. Die endlichen Durchschnitte jeder linear geordneten Teilmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}_0$ sind nicht leer, also wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft (ist jeder endliche Durchschnitt nicht leer, so auch der gesamte) kompakter Mengen ist auch der gesamte Durchschnitt in $\mathcal{E}_0$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es (zu jedem $B \in \mathcal{E}_0$) also ein minimales Element $A \in \mathcal{E}_0$ (mit $A \subseteq B$).
Wir behaupten, daß A einelementig ist. Es sei $x, y \in A$. Falls $x \neq y$ so existiert nach 5.1.6 ein stetig lineares Funktional $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Beh. Für $f \in E^*$ ist mit A auch $A_f := A \cap f^{-1}(\sup f(A)) \in \mathcal{E}_0$:
Da f stetig ist und A kompakt ist, wird das Supremum $M := \sup f(A)$ von $f(A)$ angenommen, also ist die abgeschlossene Menge $A_f \neq \emptyset$.
Wir behaupten, daß A_f extremal in A ist. Sei dazu $x, y \in A$ mit $z = tx + (1-t)y \in A_f$ mit $0 < t < 1$. Wegen $f(x), f(y) \le M$ ist

$$\begin{aligned}
&M = f(z) = t\,f(x) + (1-t)\,f(y)\\
\Rightarrow\ & t\,f(x) = M - (1-t)\,f(y) \ge (1-(1-t))\,M = t\,M \ge t\,f(x)\\
\Rightarrow\ & f(x) = M \text{ und analog } f(y) = M \Rightarrow x, y \in A_f.
\end{aligned}$$

Folglich ist A_f eine nicht leere extremale Teilmenge von A, also auch in K extremal. Sie ist konvex, da f linear und A konvex ist.

Wegen der Minimalität von A folgt $A = A_f$. Dies ist ein Widerspruch, da f auf $\{x, y\} \subseteq A$ nicht konstant ist.

Es sei nun B die abgeschlossene konvexe Hülle von $\operatorname{Ext}(K)$. Klarerweise gilt $B \subseteq K$. Angenommen $B \neq K$, dann existiert ein $a \in K \setminus B$ und somit nach 5.2.4 ein stetig lineares $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f(b) < f(a)$ für alle $b \in B$, also ist $B \cap K_f = \emptyset$. Wegen $f \in E^*$ und $K \in \mathcal{E}_0$ ist wie oben gezeigt $K_f \in \mathcal{E}_0$ und nach den ersten Teil existiert ein Extremalpunkt $b \in K_f$ von K, d.h. $b \in \operatorname{Ext}(K) \cap K_f \subseteq B \cap K_f = \emptyset$, ein Widerspruch. □

5.5.2 Folgerung.

Weder c_0 noch $L^1(\mathbb{R})$ sind Dualräume von normierten Räumen.

Beweis. Falls ein Banach-Raum E topologisch isomorph zum Dualraum eines normierten Raumes F ist, so muß sein abgeschlossener Einheitsball in einem Vielfachen der dualen Kugel von F enthalten sein. Er ist also eine $\sigma(E, F)$-abgeschlossene Teilmenge des nach dem Satz 5.4.12 von Alaoğlu-Bourbaki $\sigma(E, F)$-kompakten dualen Balls. Also ist er selbst $\sigma(E, F)$-kompakt, und besitzt nach den Satz 5.5.1 von Krein-Milman Extremalpunkte. Dies ist aber weder für c_0 noch für $L^1(\mathbb{R})$ der Fall:

Sei nämlich $x = (x_k)_k \in c_0$ mit $\|x\|_\infty \le 1$. Dann existiert ein k mit $|x_k| < 1$ und nach Wahl eines $\varepsilon > 0$ mit $|x_k| + \varepsilon \le 1$ gilt für die beiden Punkte

$$x^\pm : j \mapsto \begin{cases} x_j & \text{für } j \neq k \\ x_k \pm \varepsilon & \text{für } j = k \end{cases}$$

gilt: $x = \frac{1}{2}(x^+ + x^-)$, $x^+ \neq x \neq x^-$ und $\|x^\pm\| \le 1$. Also ist x kein Extremalpunkt.

Sei andererseits $[f] \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_1 \le 1$. O.B.d.A. sei $\|f\|_1 \neq 0$. Dann existiert eine meßbare Teilmenge X_0 in $\mathbb{R}$ mit $0 < \int_{X_0} |f| < \|f\|_1$. Es gilt die analoge Ungleichung dann auch für $X_1 := \mathbb{R} \setminus X_0$. Nun sei $t_i := \|f|_{X_i}\|/\|f\| > 0$ und $t_i\, f_i := f \cdot \chi_{X_i}$ für $i = 0, 1$. Dann ist $\|f_i\|_1 = \|f\|_1$, $f_0 \neq f \neq f_1$, $f = t_0\, f_0 + t_1\, f_1$ und $t_0 + t_1 = 1$. Also ist f kein Extremalpunkt. □

Ein weiterer wichtiger Satz über kompakte konvexe Mengen ist der folgende

5.5.3 Fixpunktsatz von Brouwer-Schauder-Tychonoff.

Es sei K eine nicht-leere kompakte konvexe Menge eines LKV'es E und $f : K \to K$ eine stetige Abbildung. Dann besitzt f einen Fixpunkt $x \in K$.

Beweis. In der algebraischen Topologie (siehe auch [**11**] oder [**17**, 9.2] oder [**24**, 7.6.13] oder Aufgabe [**25**, 7.63]) zeigt man unter den Namen Brouwer's Fixpunktsatz, daß dieser Satz für endlich dimensionales E gilt.

Nun für LKV'e E: Vergleiche dies mit den Aufgaben [**25**, 7.65] und [**25**, 7.66]. Wir zeigen die Existenz eines Fixpunktes unter der schwächeren Bedingung, daß $K \subseteq E$ abgeschlossen, konvex und nicht-leer ist, $f : K \to K$ stetig und $f(K)$ relativ kompakt ist. Für jede abgeschlossene absolut-konvexe 0-Umgebung U existiert eine endliche Menge $M_U \subseteq \overline{f(K)} \subseteq K$ mit $\overline{f(K)} \subseteq M_U + U$. Weiters existiert eine bzgl. der Metrik p_U stetige Partition $\{h_U^y : y \in M_U\}$ der 1 die der Überdeckung $\{y + U : y \in M_U\}$ untergeordnet ist, z.B. $g_U^y : x \mapsto \max\{0, 1 - p_U(x - y)\}$ und $h_U^y := g_U^y / \sum_{z \in M_U} g_U^z$. Dann ist $f_U := \sum_{y \in M_U} (h_U^y \circ f) \cdot y$ eine stetige Abbildung in die konvexe Hülle K_U von M_U und

$$\begin{aligned} p_U(f(x) - f_U(x)) &= p_U\Big(\sum_{y \in M_U} h_U^y(f(x)) \cdot (f(x) - y)\Big) \\ &\le \sum_{f(x) \in y + U} h_U^y(f(x)) \cdot p_U(f(x) - y) \le \sum_{y \in M_U} h_U^y(f(x)) = 1. \end{aligned}$$

Nach dem Brouwer'schen Fixpunktsatz hat $f_U : K_U \to K_U \subseteq \overline{f(K)} \cap \langle M_U \rangle_{\mathrm{VR}}$ einen Fixpunkt $x_U \in K_U$.

Es ist $\{x - f(x) : x \in K\}$ abgeschlossen, denn sei $\lim_i x_i - f(x_i) = z$ dann hat $i \mapsto f(x_i)$ einen Häufungswert $y \in \overline{f(K)}$ und somit ist $x := z + y$ eine Häufungswert von $i \mapsto x_i$, also $x \in K$ und da f stetig ist $f(x) = y = x - z$, also $z = x - f(x)$.

Angenommen f hätte keinen Fixpunkt, dann wäre 0 nicht in der abgeschlossenen Menge $\{x - f(x) : x \in K\}$, also gäbe es eine absolut-konvexe abgeschlossene 0-Umgebung U mit $x - f(x) \notin U$ für alle $x \in K$. Wegen $x_U - f(x_U) = (f_U - f)(x_U) \in U$ ist dies ein Widerspruch. □

5.5.4 Fixpunktsatz von Kakutani. [31] **und** [4]**.**

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^m$ eine nicht-leere, konvexe und kompakte Teilmenge und $f : K \to 2^K \cong \mathcal{P}(K)$ eine konvex-wertige Mengenabbildung mit abgeschlossenen Graphen $\{(x, y) : y \in f(x)\} \subseteq K \times K$ und $f(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in K$.
Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h. $\exists x \in K : x \in f(x)$.

Beweis. Da der Graph von f abgeschlossen ist, ist $f(x) \cong \{x\} \times f(x) = \text{Graph}(f) \cap \{x\} \times K$ abgeschlossen. Weiters ist f nach oben halbstetig, d.h. U offen $\Rightarrow \{x : f(x) \subseteq U\}$ offen, andernfalls gäbe es zu $f(x_\infty) \subseteq U$ ein Netz $x_i \to x_\infty$ und $y_i \in f(x_i) \subseteq K$ mit $y_i \notin U$. Da K kompakt ist besitzt (y_i) einen Häufungswert y_∞ und da der Graph abgeschlossen ist liegt $y_\infty \in f(x_\infty) \subseteq U$, also auch $y_i \in U$ immer wieder, ein Widerspruch.

Da K (prä)kompakt ist existiert zu jeder absolut-konvexen 0-Umgebung U eine endliche Menge $M_U \subseteq K$ mit $K \subseteq M_U + U$ und damit wie im Beweis von 5.5.3 eine untergeordnete Partition $\{h_U^x : x \in M_U\}$ der 1. Für $x \in M_U$ wählen wir $y_x \in f(x)$ und definieren damit eine stetige Abbildung $f_U : K \to K$ durch $f_U(z) := \sum_{x \in M_U} h_U^x(z)\, y_x$ welche nach 5.5.3 einen Fixpunkt $x_U \in K$ besitzt. Insbesonders können wir für U die Bälle mit Radius $\frac{1}{n}$ verwenden und die entsprechenden f_U mit f_n und M_U mit M_n bezeichnen. Die Folge der zugehörigen Fixpunkte $x_n \in K$ besitzt einen Häufungswert x_∞. Wir zeigen, daß x_∞ ein Fixpunkt von f ist. Da f nach oben halbstetig ist, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene δ-Umgebung $U_\delta(x_\infty)$ von x_∞ s.d. $f(x) \subseteq f(x_\infty) + U_\varepsilon$ für alle $x \in U_\delta(x_\infty) \cap K$.

Beh.: $f_n(U_{\delta-1/n}(x_\infty) \cap K) \subseteq f(x_\infty) + U_\varepsilon$ für $1/n < \delta$. Sei $z \in U_{\delta-1/n}(x_\infty) \cap K$, also $\|z - x_\infty\| < \delta - \frac{1}{n}$. Wegen $K \subseteq M_U + U$ existiert zu z ein $x \in M_n$ mit $\|z - x\| < \frac{1}{n}$. Für jedes solche $x \in M_U$ (mit $z \in x + U$) ist $\|x - x_\infty\| \leq \|x - z\| + \|z - x_\infty\| < \delta$, d.h. $x \in U_\delta(x_\infty) \cap K$ und damit $y_x \in f(x) \subseteq f(x_\infty) + U_\varepsilon$. Da dies für alle $x \in M_U$ mit $h_U^x(z) \neq 0$ (also $z \in x + U$) gilt ist $f_n(z) = \sum_{x \in M_U} h_U^x(z)\, y_x \in f(x_\infty) + U_\varepsilon$.

Für hinreichend große n ist $x_n \in U_{\delta/2}(x_\infty) \cap K$ und somit $x_n = f_n(x_n) \in f(x_\infty) + U_\varepsilon$. Also ist der Häufungswert $x_\infty \in f(x_\infty) + U_{2\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Angenommen $x_\infty \notin f(x_\infty)$. Dann ist $\rho := d(x_\infty, f(x_\infty)) > 0$, also $x_\infty \notin f(x_\infty) + U_\rho$ für ein hinreichend kleines $\rho > 0$, ein Widerspruch. □

5.5.5 Fixpunktsatz von Kakutani für lokal-konvexe Räume. [7] **und** [9]**.**

Sei $K \subseteq E$ eine nicht-leere, konvexe und kompakte Teilmenge eines LKV E und $f : K \to 2^K \cong \mathcal{P}(K)$ eine konvex-wertige Mengenabbildung mit abgeschlossenen Graphen und $f(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in K$.
Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h. $\exists x \in K\colon x \in f(x)$.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine 0-Umgebungsbasis absolut-konvexer abgeschlossener Mengen. Für $U \in \mathcal{U}$ sei $K_U := \{x \in K : x \in f(x) + U\} = \{x \in K : \exists y \in f(x) : x - y \in U\}$.

Es ist K_U abgeschlossen, denn $\Delta_U := \{(x, y) : x - y \in U\}$ ist eine abgeschlossene Umgebung der Diagonale in $K \times K$ und somit $\text{pr}_1(\Delta_U \cap \text{Graph}(f)) = K_U$ kompakt, also abgeschlossen.

Es ist $K_U \neq \emptyset$: Für ein endliches $M_U \subseteq K$ ist $K \subseteq M_U + U$. Sei A die konvexe Hülle von M_U und $f_A : A \to 2^A$ gegeben durch $x \mapsto (f(x) + U) \cap A$. Dann erfüllt f_A die Voraussetzungen von 5.5.4 (wegen $K \subseteq M_U + U$ ist $(f(x) + U) \cap A$ nicht leer und $\text{Graph}(f_A) = (\text{Graph}(f) + \{0\} \times U) \cap (A \times A)$ ist abgeschlossen, denn $\text{Graph}(f)$ ist kompakt und $\{0\} \times U$ abgeschlossen) und somit existiert ein $x \in (f(x) + U) \cap K$, i.e. $K_U \neq \emptyset$.

Die Familie K_U hat die endliche Durchschnittseigenschaft (da monoton), also existiert ein $x_0 \in \bigcap_U K_U$. Angenommen $x_0 \notin f(x_0)$, i.e. $\exists U$: $x_0 \notin f(x_0) + U$, ein Widerspruch zu $x_0 \in K_U$. □

Bemerkung.

Offensichtlich hat der Fixpunktssatz 5.5.5 von Kakutani umgekehrt auch den Fixpunktsatz 5.5.3 von Brouwer-Schauder-Tychonoff zur Folge. Ersterer hat u.a. Anwendungen in Form eines Minimax-Theorems in der Spiel-Theorie und damit in der mathematischen Wirtschaftswissenschaft.

5.5.6 Lemma. Approximierbarkeit linearer Funktionale.

Es sei E ein LKV, $A \subseteq E$ absolut-konvex und $f : E \to \mathbb{K}$ linear. Dann ist $f|_A$ genau dann stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists x^* \in E^*\ \forall x \in A$: $|\langle f - x^*, x\rangle| \leq \varepsilon$.

Proof. ($\Leftarrow$) ist offensichtlich, denn der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig.

($\Rightarrow$) Es sei $F := \langle A\rangle_{\mathrm{vs}}$ das lineare Erzeugnis von A versehen mit dem Minkowski-Funktional q_A als Seminorm. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f|_A$ stetig ist, existiert eine absolut-konvexe 0-Umgebung $U \subseteq E$ mit $|\langle f, y\rangle| < \varepsilon$ für alle $y \in A \cap U$, i.e. $\max\{q_A, q_U\}_{<1} \subseteq (\frac{1}{\varepsilon}|f|)_{<1}$ und nach 1.3.7 ist somit $|\langle f, y\rangle| \leq \varepsilon \max\{q_A, q_U\}(y) \leq \varepsilon\,(q_A(y) + q_U(y))$ für alle $y \in F$. Wir setzen $\varphi := \varepsilon\, q_A$ und $\psi := \varepsilon\, q_U$. Für $(x, y) \in E \times F$ gilt somit

$$\begin{aligned}-\psi(x) &\leq \psi(-y) + \varphi(-y) - \langle f, -y\rangle - \psi(x) = \psi(y) + \varphi(y) + \langle f, y\rangle - \psi(x)\\ &\leq \psi(x - y) + \langle f, y\rangle + \varphi(y)\end{aligned}$$

und folglich ist $p : x \mapsto \inf\{\psi(x-y) + \langle f, y\rangle + \varphi(y) : y \in F\}$ wohldefiniert, sublinear und erfüllt $p(x) \leq \psi(x) = \varepsilon\, q_U(x)\ \forall x \in E$ und $p(y) \leq \langle f, y\rangle + \varepsilon\, q_A(y)\ \forall y \in F$. Da p sublinear ist existiert ein lineares $x^* : E \to \mathbb{K}$ with $x^* \leq p$ nach 5.1.2. Wegen obiger Ungleichungen ist $x^* \in E^*$ und $\langle x^* - f, y\rangle \leq \varepsilon\ \forall y \in A$ und da A kreisförmig ist gilt auch $\langle f - x^*, y\rangle = \langle x^* - f, -y\rangle \leq \varepsilon$ für alle $y \in A$. Dies zeigt das Theorem im reellen Fal.

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für auf A stetiges $f : E \to \mathbb{K}$ und $f_{\mathbb{R}} := \Re e \circ f : E \to \mathbb{R}$ ist $f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i\, f_{\mathbb{R}}(i\, x)$. Wegen des reellen Falls existiert ein stetig $\mathbb{R}$-lineares $x^* : E \to \mathbb{R}$ mit $|\langle f_{\mathbb{R}} - x^*, x\rangle| \leq \varepsilon$ für alle $x \in A$. Sei $\tilde{x}^* : x \mapsto x^*(x) - i\, x^*(i\, x)$. Dann ist $\tilde{x}^* : E \to \mathbb{C}$ stetig und $\mathbb{C}$-linear mit $|\langle f - \tilde{x}^*, x\rangle| \leq \sqrt{2}\,\varepsilon$. □

5.5.7 Proposition. Grothendieck's Vervollständigungssatz.

Die Vervollständigung $\tilde{E}$ eines LKV E kann beschrieben werden als

$$\hat{E} := \Big\{ f : E^* \to \mathbb{K} \text{ linear } : f|_{U^o} \text{ ist } \sigma(E^*, E)\text{-stetig}\, \forall 0\text{-Umgebungen } U \subseteq E \Big\}$$

versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den U^o.

Proof. Wir werden 3.8.3 anwenden.
($\hat{E}$ ist vollständig), denn gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen sind stetig.

($E \subseteq \hat{E}$) Wegen $E \cong (E^*, \sigma(E^*, E))^* \subseteq \hat{E}$ können wir E als Teilraum von $\hat{E}$ auffassen und nach 5.4.11 trägt E vermöge dieser Einbettung die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den $U^o \subseteq E^*$, i.e. die Spurtopologie von $\hat{E}$.

(E ist dicht in $\hat{E}$) Sei $f \in \hat{E}$. Dann ist $f : F := E^* \to \mathbb{K}$ linear. Für jede (absolut-konvexe) 0-Umgebung U in E ist die Menge $A := U^o$ absolut-konvex in E^*. Nach Lemma 5.5.6 existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x^* \in F^* = (E^*, \sigma(E^*, E))^* \cong E$ mit $|\langle f - x^*, x\rangle| \leq \varepsilon$ für alle $x \in A$, i.e. f kann in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den U^o durch $x^* \in E$ approximiert werden, d.h. E ist dicht in $\hat{E}$. □

Teil II

Spektraltheorie

6 Spektral- und Darstellungstheorie von Banach-Algebren

Vorbemerkungen

Ziel der Spektraltheorie ist es zu einen gegebenen linearen Operator eine möglichst explizite und invariante Darstellung zu finden. Im 1-dimensionalen ist jeder lineare Operator $T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ein Multiplikations-Operator der Form $T : x \mapsto \lambda \cdot x$, wobei der Anstieg λ durch $\lambda := T(1)$ gegeben ist. Im endlich-Dimensionalen wäre nach Wahl einer Basis die Matrizendarstellung ein Analogon, bzw. im unendlich-Dimensionalen die Darstellung als Integraloperator durch einen Integralkern. Diese Darstellungen sind einerseits natürlich so explizit wie nur möglich aber andererseits nicht invariant unter Basiswechseln bzw. Bewegungen (Drehungen). Ein invarianterer Ansatz besteht darin möglichst viele nicht-triviale Teilräume (d.h. Eigenräume) zu finden, auf denen T als Multiplikations-Operator mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ (dem zugehörigen Eigenwert) gegeben ist. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist also der Kern von $T - \lambda \cdot \mathrm{id}$. Und dieser Kern ist genau dann nicht trivial, wenn $T - \lambda \cdot \mathrm{id}$ nicht injektiv ist, was für endlich dimnensionale E equivalent zu nicht invertierbar, also $\det(T - \lambda \cdot \mathrm{id}) = 0$ ist. Die Eigenwerte λ sind also genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $x \mapsto \det(T - x \cdot \mathrm{id})$.

Die Existenz genügend vieler solcher Teilräume sollte nun wohl heißen, daß der Operator durch die Einschränkungen auf diesen Teilräumen schon eindeutig gegeben ist. In der linearen Algebra lernt man, daß dies für normale Operatoren in komplexen endlich-dimensionalen Vektorräumen wirklich möglich ist, d.h. jeder solche Operator diagonalisierbar ist. Bis auf dem Isomorphismus $E \cong \mathbb{C}^{\dim E}$ welcher durch $(x_k)_k \mapsto \sum_k x_k e_k$ für eine Basis $(e_k)_k$ von Eigenvektoren gegeben ist, wirkt T als Multiplikationsoperator $(x_k)_k \mapsto (\lambda_x x_k)_k$. Da wir für normale Operatoren die e_k so wählen können, daß sie ein orthonormales System bilden, erhalten wir $T(x) = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$, wobei die λ_k die zu e_k gehörenden Eigenwerte sind.

Wie sieht das nun aber für unendlich-dimensionale Räume aus? Für selbstadjungierte kompakte Operatoren auf Hilbert-Räumen haben wir in [**18**, 6.5.4] gesehen, daß die Eigenwerte eine Folge λ_k bilden, für die eine orthonormal-Basis von Eigenvektoren e_k existiert, und $T(x) = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$ ist. Dies stimmt auch für nicht selbstadjungierte normale kompakte Operatoren, siehe 8.24.

Beispiele nicht kompakter Operatoren.

1. Der links-Translations-Operator $T : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist definiert durch $T : (x_k)_{k \geq 0} \mapsto (x_{k+1})_{k \geq 0}$. Die Gleichung $T(x) = \lambda\, x$ ist in Koordinaten das Gleichungssystem $(x_{k+1} = \lambda\, x_k)_{k \geq 0}$. Die einzig mögliche Lösung ist $x = (\lambda^k\, x_0)_{k \geq 0}$. Für $|\lambda| < 1$ ist dieser Vektor $x \in \ell^2$ und somit λ ein Eigenwert. Für $|\lambda| \geq 1$ und $x_0 \neq 0$ ist $x \notin \ell^2$, d.h. λ kein Eigenwert. Die Menge der Eigenwerte ist also die offene Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$, und somit nicht mehr abzählbar, also T nicht als Reihe wie oben darstellbar.

Da für lineare Operatoren S mit $\|S\| = 1$ der Operator $1 - S$ invertierbar mit Inverser $\sum_{k=0}^{\infty} S^k$ ist (siehe 6.2.1), ist $\lambda - T = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda}T)$ invertierbar für jedes $|\lambda| > \|T\| = 1$ (siehe 6.25) Da die Menge der invertierbaren Operatoren offen ist (siehe 6.2.2), ist $\lambda - T$ nicht invertierbar genau dann wenn $|\lambda| < 1$. Wir sehen also, daß für $|\lambda| = 1$ der Operator $\lambda - T$ zwar injektiv aber nicht invertierbar ist.

2. Der adjungierte Operator $T^* : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ zu T ist gerade der rechts-Translations-Operator $T^* : (x_0, x_1, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots)$, denn

$$\langle T^*(x), y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} \cdot \overline{y_k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot \overline{y_{k+1}} = \langle x, T(y)\rangle.$$

Da T^* eine Isometrie ist, folgt aus $T^*x = \lambda x$ für ein $x \neq 0$, daß $|\lambda| = 1$ ist und somit aus $0 = \lambda x_0$, $x_0 = \lambda x_1$, ... rekursiv $x_k = 0$ für alle k. Es gibt also keinen einzigen Eigenwert von T^*.
Wie zuvor folgt, daß für jedes $|\lambda| > 1$ die Abbildung $\lambda - T^*$ invertierbar ist. Tei nun $\lambda - T^*$ invertierbar mit $|\lambda| \leq 1$. Es sei T die Inverse von $\lambda - T^*$. Dann ist T^* eine Inverse zu $(\lambda - T^*)^* = \overline{\lambda} - T$, ein Widerspruch zu dem über T Gesagten. Also ist $\lambda - T^*$ genau dann nicht invertierbar, wenn $|\lambda| \leq 1$.

3. Als nächstes Beispiel betrachten wir den unitären (rechts-)Translations-Operator $T : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ definiert durch $T : (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$. Dann kommen wieder nur λ mit $|\lambda| = 1$ als Eigenwerte in Frage. Kein solches λ kann aber Eigenwert sein, denn die Gleichung $T(x) = \lambda\, x$ ist äquivalent zum System $(x_{k-1} = \lambda\, x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Es wäre also $|x_{k-1}| = |x_k|$ für alle k und somit $x \notin \ell^2$ für $x \neq 0$.
Andererseits ist für $|\lambda| = 1$ die Abbildung $\lambda - T$ nicht invertierbar, denn der 0-te Einheitsvektor e_0 liegt nicht im Bild: Sei nämlich $(\lambda - T)(x) = e_0$, dann wäre $\lambda\, x_k - x_{k-1} = 0$ für $k \neq 0$. Also wäre $|x_k| = |x_{k-1}|$ für $k \neq 0$ und damit $x = 0$, ein Widerspruch zu $\lambda\, x_0 - x_{-1} = 1$.
Die Fourier-Reihenentwicklung $\mathcal{F} : L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ aus [**18**, 6.3.8] übersetzt den Operator T in den Multiplikations-Operator M_f mit $f : x \mapsto e^{ix}$, denn in [**18**, 5.4.4] haben wir gezeigt: $\mathcal{F}(M_f\, g) = T(\mathcal{F}g)$. Die λ, für welche also $\lambda - T$ nicht invertierbar ist, sind somit genau jene am Einheitskreis S^1 und T ist bis auf den Isomorphismus $\mathcal{F}$ ein Multiplikations-Operator auf $L^2(S^1, \mathbb{C}) \cong L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ist.

Wir sehen also, daß der Begriff Eigenwert im unendlich-Dimensionalen zu strikt ist. Besser geeignet zu sein scheint die (im endlich-Dimensionalen äquivalente) Bedingung "$\lambda - T$ ist nicht invertierbar". Man nennt solch ein λ einen SPEKTRAL-WERT von T, und die Menge aller Spektral-Werte wird als SPEKTRUM $\sigma(T)$ bezeichnet.

Im Falle, daß der Raum E, auf welchem der Operator T wirkt, nicht normierbar ist, ist selbst dieser Begriff zu schwach und es gibt auch keine vernünftige Spektral-Theorie für Operatoren auf beliebigen LKV'en:

4. Sei z.B. E der Raum aller $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, für welche $x_k = 0$ für k hinreichend klein. Wir versehen E mit der strikt induktiven Limes-Struktur mit den Stufen $E_n := \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x_k = 0 \text{ für } k < n\} \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Sei T die links-Translation $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$. Dann ist T offensichtlich ein Isomorphismus, da $T|_{E_n} : E_n \to E_{n-1}$ ein Isomorphismus ist. Es ist $E^* = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_-} \times \mathbb{C}^{\{0\}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+} \cong E$ vermöge der Spiegelung $(x_k)_k \mapsto (x_{-k})_k$ und die links-Translation entspricht der rechts-Translation unter diesen Isomorphismus, d.h. T is selbst-adjungiert bezüglich der dualen Paarung $\langle \_, \_ \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \sum_k x_k y_{-k}$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $T - \lambda \cdot \mathrm{id}$ invertierbar, da für $y \in E_n$ die Gleichung $T(x) - \lambda \cdot x = y$ eine eindeutige Lösung $x \in E_{n+1} \subset E$ existiert. Diese kann rekursiv aus $x_{k+1} = \lambda\, x_k + y_k$ berechnet werden, da $x_{k+1} = \lambda\, x_k$ und somit $x_{k+1} = 0$ für $k < n$ gilt und $x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} y_{n+j}$. Also folgt die Stetigkeit der Inversen und somit ist das Spektrum von T leer.

Im Unterschied zu Eigenwerten sieht man sofort, daß es für obige Definitionen für Spektral-Werte und Spektrum von T die Vektoren in E keine Rolle spielen. Es genügt die Ausdrücke $T - \lambda \cdot \mathrm{id}$ bilden zu können um von der Invertierbarkeit dieser Ausdrücke sprechen zu können. Für ersteres sollte T in einem Vektorraum liegen und für zweiteres sollte dieser Vektorraum eine Algebra mit 1 sein. Damit wir Invertierbarkeit gut kontrollieren können sollte die absolut konvergente geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ konvergieren, d.h. T in einer Banach-Algebra liegen. Wir werden also die Spektral-Theorie für Elemente abstrakter Banach-Algebren (siehe [**18**, 3.2.9]) durchführen. Rufen wir uns dazu nochmals die wichtigsten Beispiele in Erinnerung:

6.1 Beispiele.

1. Für jeden Banach-Raum E ist $L(E) := L(E, E)$ eine Banach-Algebra mit 1 bezüglich der Komposition als Multiplikation, siehe [**18**, 3.2.9]
2. Für jeden kompakten Raum X ist $C(X, \mathbb{K})$ eine kommutative Banach-Algebra mit 1 bezüglich der punktweisen Multiplikation. Allgemeiner gilt dies auch für den Raum $B(X, \mathbb{K})$ der beschränkten Funktionen auf einer Menge X, siehe 2.2.3.
3. Somit ist auch der Banach-Raum $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ für jeden σ-endlichen Maßraum (X, Ω, μ) eine kommutative Banach-Algebra mit 1 bezüglich der punktweisen Operationen, siehe [**18**, 4.12.3].
4. Weiters sind $\ell^1(\mathbb{N})$ und $\ell^1(\mathbb{Z})$ bezüglich Faltung kommutative Banach-Algebren mit 1.

6.2 Bemerkung über die Invertierbarkeit in einer Banach-Algebra.

Wir haben in [**18**, 3.3.1] gezeigt, daß bezüglich der invertierbaren Elemente $a \in \mathrm{Inv}(A)$ folgendes gilt:

1. Ist $\|a - 1\| < 1$, so ist $a \in \mathrm{Inv}(A)$ und $a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-a)^k$, die absolut konvergente geometrische Reihe.
2. Ist $a_0 \in \mathrm{Inv}(A)$ und $\|a - a_0\| < \frac{1}{\|a_0^{-1}\|}$ so ist nach (1) auch $a = (a\, a_0^{-1})\, a_0 \in \mathrm{Inv}(A)$; insbesonders ist $\mathrm{Inv}(A)$ offen in A.
3. Ist $a_1\, a_2 = a_2\, a_1 \in \mathrm{Inv}(A)$, so ist auch $a_1, a_2 \in \mathrm{Inv}(A)$.
   Dies gilt in jeder Halbgruppe, denn sei $a_1\, a_2$ invertierbar mit Inversen $b := (a_1\, a_2)^{-1}$. Dann ist $a_1\, a_2\, b = 1 = b\, a_1\, a_2 = b\, a_2\, a_1$, also $r := a_2\, b$ ein Rechtsinverses zu a_1 und $l := b\, a_2$ ein Linksinverses zu a_1, also $r = l\, a_1\, r = l$, d.h. $r = l$ das eindeutige beidseitige Inverse zu a_1.
4. $a \mapsto a^{-1}$ ist eine (komplex-)differenzierbare Abbildung $\mathrm{inv} : \mathrm{Inv}(A) \to \mathrm{Inv}(A)$ und für die Ableitung gilt: $\mathrm{inv}'(a)(h) = -a^{-1}\, h\, a^{-1}$.
   Diese Ableitung läßt sich durch Differenzieren der impliziten Gleichung $a^{-1}\, a = 1$ erhalten: Sei dazu mit $\mathrm{mult} : A \times A \to A$ die bilineare Multiplikation bezeichnet. Dann folgt durch Differenzieren von $1 = \mathrm{mult} \circ (\mathrm{inv}, \mathrm{id})$ an der Stelle $a \in \mathrm{Inv}(A)$ in Richtung h, daß
   $$\begin{aligned} 0 &= \partial_1 \mathrm{mult}(\mathrm{inv}(a), \mathrm{id}(a))\, (\mathrm{inv}'(a)(h)) + \partial_2 \mathrm{mult}(\mathrm{inv}(a), \mathrm{id}(a))\, (\mathrm{id}'(a)(h)) \\ &= \mathrm{mult}(\mathrm{inv}'(a)(h), \mathrm{id}(a)) + \mathrm{mult}(\mathrm{inv}(a), \mathrm{id}(h)) \\ &= \mathrm{inv}'(a)(h) \cdot a + a^{-1} \cdot h \end{aligned}$$

und somit $\operatorname{inv}'(a)(h) = \operatorname{inv}'(a)(h) \cdot a \cdot a^{-1} = -a^{-1} \cdot h \cdot a^{-1}$. Daß inv differenzierbar mit dieser Ableitung ist läßt sich auch direkt wie folgt nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\|(a+h)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}\,h\,a^{-1}\|}{\|h\|} &= \frac{\left\|a^{-1}\Big((1+h\,a^{-1})^{-1} - 1 + h\,a^{-1}\Big)\right\|}{\|h\|} \\
&\leq \|a^{-1}\| \sum_{k\geq 2} \frac{\|(h\,a^{-1})^k\|}{\|h\|} \\
&\leq \|a^{-1}\|\,\|h\| \sum_{k\geq 0} (\|h\|\,\|a^{-1}\|)^k\,\|a^{-1}\|^2 \\
&\leq \|h\|\,\|a^{-1}\|^3 \,\frac{1}{1-\|h\|\,\|a^{-1}\|} \to 0 \text{ für } h \to 0
\end{aligned}$$

Bevor wir nun in die Spektral-Theorie von Banach-Algebren einsteigen, sollten wir uns noch überlegen, was wir machen können, wenn die betreffende Algebra nicht alle Axiome einer Banach-Algebra erfüllt.

6.3 Vervollständigung

Beispiele unvollständiger Algebren.

1. Die Polynome auf einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ bilden bezüglich der ∞-Norm eine nicht-vollständige Teil-Algebra von $C(K)$.
2. Die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompakten Träger bilden bezüglich der 1-Norm und der Faltung eine nicht-vollständige Banach-Algebra. Ebenso die stetigen Funktionen auf S^1.
3. Die endlich-dimensionalen Operatoren eines Hilbert-Raums H bilden eine unvollständige Teilalgebra von $L(H)$.

Proposition.

Es sei A eine normierte Algebra, d.h. ein normierter Raum mit einer Algebra-Struktur $\bullet$, so daß $\|x \bullet y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Banach-Algebra $\widetilde{A}$ und eine isometrische Einbettung $\iota : A \to \widetilde{A}$ (d.h. $\forall x \in A : \|\iota(x)\| = \|x\|$) mit folgender universeller Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{A} \arrow[d, dotted, "\exists!"', "\tilde{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

wobei f und $\tilde{f}$ stetige Algebra-Homomorphismen sind und B eine vollständige Algebra ist.

Beweis. Es sei A eine normierte Algebra. Dann existiert nach 3.8.4 ein Banach-Raum $\widetilde{A}$ mit der universellen Erweiterungseigenschaft für stetige lineare Abbildungen. Wir wollen nun die Multiplikation $\mu : A \times A \to A$ zu einer Abbildung $\widetilde{\mu} : \widetilde{A} \times \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ erweitern. Dazu betrachten wir die assoziierte Abbildung $\check{\mu} : A \to L(A, A)$. Die natürliche isometrische Abbildung $\iota : A \to \widetilde{A}$ liefert uns eine Isometrie $L(A, E) \cong L(\widetilde{A}, E)$ für jeden Banach-Raum E. Folglich erhalten wir eine isometrische Einbettung $L(A, A) \xrightarrow{\iota_*} L(A, \widetilde{A}) \cong L(\widetilde{A}, \widetilde{A})$. D.h. wir können $\check{\mu}$ auffassen als stetige Abbildung (Kontraktion) von A in $L(\widetilde{A}, \widetilde{A})$. Nach der universellen

Eigenschaft besitzt diese eine Erweiterung $\widetilde{\tilde{\mu}} : \widetilde{A} \to L(\widetilde{A}, \widetilde{A})$. Die assoziierte Abbildung $\widetilde{\mu} : \widetilde{A} \times \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ ist dann die gewünschte Multiplikation auf $\widetilde{A}$, denn alle nötigen (stetigen) Gleichungen gelten auf dem dichten Teilraum $A \times A$ und somit überall.

Man beachte, daß der wesentliche Punkt besagt, daß multi-lineare stetige Abbildungen $E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ sich eindeutig zu solchen auf $\widetilde{E_1} \times \ldots \times \widetilde{E_n} \to \widetilde{F}$ erweitern lassen.

Nun zur universellen Eigenschaft.
Da wir wissen, daß $\|f\| = \|\tilde{f}\|$, müssen wir nur nachrechnen, daß $\tilde{f}$ multiplikativ ist:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\tilde{\mu}(\tilde{a}, \tilde{b})) &= \tilde{f}(\tilde{\mu}(\lim_n a_n, \lim_m b_m)) = \tilde{f}(\lim_{n,m} \tilde{\mu}(a_n, b_m)) = \lim_{n,m} \tilde{f}(\tilde{\mu}(a_n, b_m)) \\ &= \lim_{n,m} f(\mu(a_n, b_m)) = \lim_{n,m} f(a_n) \cdot f(b_m) = \lim_n f(a_n) \cdot \lim_m f(b_m) \\ &= \lim_n \tilde{f}(a_n) \cdot \lim_m \tilde{f}(b_m) = \tilde{f}(\lim_n a_n) \cdot \tilde{f}(\lim_m b_m) \\ &= \tilde{f}(\tilde{a}) \cdot \tilde{f}(\tilde{b}). \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung.

Die Vervollständigung in obigen Beispielen ist:

1. Die Banach-Algebra der stetigen Funktionen nach dem Satz [**18**, 3.4.1] von Weierstraß;
2. Die Banach-Algebra L^1 mit der Faltung, da die C_c-Funktionen darin dicht liegen, siehe [**18**, 4.13.9];
3. Die kompakten Operatoren nach [**18**, 6.4.8].

6.4 Adjunktion einer 1

Beispiele von Algebren ohne 1.

1. $L^1(\mathbb{R})$ und $L^1(S^1)$ mit der Faltung. Die Einheit wäre die Delta-Distribution.
2. Die Algebra der kompakten Operatoren auf einem unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum. Die Einheit wäre die Identität.
3. Für jeden lokal-kompakten Raum X die Algebra $C_0(X)$, der bei ∞-verschwindenden stetigen Funktionen. Die Einheit wäre die konstante Funktion 1.

Proposition.

Es sei A eine Banach-Algebra ohne 1. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Banach-Algebra A_1 mit 1 sowie eine isometrische Einbettung $\iota : A \to A_1$ mit folgender universeller Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & A_1 \arrow[d, dotted, "\exists!\ f_1"] \\ & B \end{tikzcd}$$

wobei f und f_1 stetige Algebra-Homomorphismen sind, B eine Banach-Algebra mit 1 ist und f_1 die Eins erhält.

Beweis. Es sei also A eine Banach-Algebra (nicht notwendig mit 1). Sei $A_1 := A \oplus \mathbb{K}$. Die Multiplikation sei durch $(a \oplus \lambda) \bullet (b \oplus \mu) := (a \bullet b + \mu a + \lambda b) \oplus \lambda\mu$ definiert. Dann ist leicht nachzurechnen, daß A_1 eine Algebra mit $1 = 0 \oplus 1$ ist, und $\iota : A \to A_1$, $a \mapsto a \oplus 0$ ein Algebra-Homomorphismus ist. Wir definieren eine Norm auf A_1 durch $\|a \oplus \lambda\| := \|a\| + |\lambda|$. Dann ist $\|1\| = \|0\| + |1| = 1$ und

$$\begin{aligned}\|(a \oplus \lambda) \bullet (b \oplus \mu)\| &= \|(a \bullet b + \mu a + \lambda b) \oplus \lambda\mu\| = \|a \bullet b + \mu a + \lambda b\| + |\lambda\mu| \\ &\le \|a\| \cdot \|b\| + |\mu| \cdot \|a\| + |\lambda| \cdot \|b\| + |\lambda| \cdot |\mu| \\ &= (\|a\| + |\lambda|) \cdot (\|b\| + |\mu|) \\ &= \|a \oplus \lambda\| \cdot \|b \oplus \mu\|.\end{aligned}$$

Nun zur universellen Eigenschaft:
Ein f_1, welches das Diagramm kommutativ macht, muß $f_1(a \oplus \lambda) = f_1(a) + \lambda \cdot f_1(1) = f(a) + \lambda$ erfüllen. Und das dadurch definierte f_1 ist multiplikativ, denn:

$$\begin{aligned}f_1((a \oplus \alpha) \cdot (b \oplus \mu)) &= f_1((a\,b + \lambda\,b + \mu\,a) \oplus \lambda\mu) = f(ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu \\ &= f(a)\,f(b) + \lambda\,f(b) + \mu\,f(a) + \lambda\mu = (f(a) + \lambda)\,(f(b) + \mu) \\ &= f_1(a \oplus \alpha) \cdot f_1(b \oplus \mu).\end{aligned}$$

Da ι eine Isometrie ist, gilt $\|f\| = \|f_1 \circ \iota\| \le \|f_1\| \cdot \|\iota\| = \|f_1\|$. Andererseits ist $\|f_1\| = \sup\{\|f(a) + \lambda\| : \|a \oplus \lambda\| \le 1\} \le \sup\{\|f\|\,\|a\| + |\lambda| : \|a\| + |\lambda| \le 1\} \le \max\{\|f\|, 1\}$. Also ist f genau dann eine Kontraktion (bzw. stetig) wenn f_1 es ist. Man beachte aber, daß nicht $\|f\| = \|f_1\|$ gilt: Sei z.B. $f = 0$, dann ist $f_1 = \mathrm{pr}_2$ und $\|f_1\| = 1$. □

Bemerkung.

Bezüglich obiger Beispiele gilt:

1. Eine Banach-Algebra mit 1, welche $L^1(G)$ umfaßt, ist die Algebra der regulären Borel-Maße auf G mit der Faltung, siehe [5, 193]. Diese kann wegen des Ries'schen Darstellungssatzes 5.3.4 mit $C_0(G)^*$ identifiziert werden. Die Faltung entspricht dabei der Abbildung $(\mu, \nu) \mapsto (f \mapsto (\mu \otimes \nu)(f \circ m))$, wobei $m : G \times G \to G$ die Multiplikation bezeichnet und $\mu \otimes \nu$ die Fortsetzung von $(f, g) \mapsto \mu(f)\,\nu(g)$ auf $C_0(G \times G) \supseteq C_0(G) \times C_0(G)$ ist.
2. Die Operatoren der Form $1 + K$ mit kompaktem K, sind die sogenannten Fredholm-Operatoren, siehe [5, Chapt.XI] und 8.26.
3. Die Algebra $C_0(X)_1$ besteht gerade aus jenen stetigen Funktionen f auf X, für die $\lim_{x \to \infty} f(x)$ existiert, das sind genau die Einschränkungen von stetigen Funktionen auf der 1-Punkt Kompaktifizierung X_∞ von X, d.h. $C_0(X)_1 \cong C(X_\infty)$.

Als nächstes wollen wir untersuchen inwieweit man die Stetigkeitsbedingung $\|x \bullet y\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ abschwächen kann.

6.5 Proposition (Submultiplikativität).

Es sei A ein Banach-Raum und eine assoziative Algebra mit 1, s.d. die Multiplikation $\mu : A \times A \to A$ getrennt stetig ist. Dann existiert eine äquivalente Norm, die A zu einer Banach-Algebra macht. Auf Elementen x mit $\|x \bullet y\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ für alle y stimmt sie mit der gegebenen Norm überein.

Beweis. O.B.d.A. ist $\|1\| = 1$, andernfalls ersetze $\|\_\|$ durch $\frac{1}{\|1\|}\,\|\_\|$. Es ist μ nach 4.2.8 stetig, d.h. $\|\mu\| := \sup\{\|x \bullet y\| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} < \infty$. Wir betrachten die Abbildung $L : A \to L(A, A)$, die jedem $x \in A$ die Linksmultiplikation $L_x : A \to A$,

$y \mapsto x \bullet y$ zuordnet. Wegen $\|L_x\| = \sup\{\|x \bullet y\| : \|y\| \le 1\} \le \|\mu\| \cdot \|x\|$ hat L Werte in $L(A, A)$ und ist eine stetig lineare Abbildung $A \to L(A, A)$. Für jeden Banach-Raum A ist aber $L(A, A)$ eine Banach-Algebra (siehe [**18**, 3.2.9]). Die Abbildung L ist auch ein Algebra-Homomorphismus, denn $L_{x_1 \bullet x_2}(y) = (x_1 \bullet x_2) \bullet y = x_1 \bullet (x_2 \bullet y) = (L_{x_1} \circ L_{x_2})(y)$. Außerdem ist $\|L_x\| = \sup\{\|x \bullet y\| : \|y\| \le 1\} \ge \|x \bullet 1\| = \|x\|$, da $\|1\| = 1$. Also ist L ein Homöomorphismus von A auf sein Bild A_0 in $L(A, A)$, d.h. A_0 ist auch vollständig und somit abgeschlossen in $L(A, A)$ und damit ist $L : A \to A_0$ ein topologischer Algebra-Isomorphismus auf die Banach-Algebra A_0. Man beachte, daß dies bedeutet, daß man die Norm $\|\_\|$ durch die äquivalente aber submultiplikative Norm $x \mapsto \|L_x\| := \sup\{\|x \bullet y\| : \|y\| \le 1\}$ ersetzt.

Falls für ein $x \in A$ die Ungleichung $\|x \bullet y\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ für alle y gilt, so wird seine Norm dadurch nicht verändert, denn es folgt $\|L_x\| \le \|x\|$ und $\|x\| \le \|L_x\|$ gilt immer. $\square$

6.6 Komplexifizieren reeller Banach Algebren

Beispiele reeller Algebren.

1. Für jeden kompakten Raum X ist $C(X; \mathbb{R})$ eine reelle kommutative Banach-Algebra.
2. Für jeden reellen Banach-Raum E ist $L(E)$ eine reelle Banach-Algebra.

In $\boxed{3.9.1}$ haben wir die Komplexifizierung $E_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E \cong E \times E$ reeller Banach-Räume E behandelt. Die Multiplikation von $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $w = u + i\,v := (u, v) \in E_{\mathbb{C}}$ war dabei durch $(x + i\,y)(u + i\,v) := (x\,u - y\,v) + i\,(x\,v + y\,u)$ gegeben und die Norm durch

$$p_{\mathbb{C}}(w) := \max\{\|\Re e(z\,w)\| : |z| = 1\} = \max\{\|x\,u - y\,v\| : x^2 + y^2 = 1\}.$$

In $\boxed{3.9.2}$ hatten wir zwei universelle Eigenschaften, die besagten, daß für jeden komplexen Banach-Raum G die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Re e_* &: L_{\mathbb{C}}(G, E_{\mathbb{C}}) \to L_{\mathbb{R}}(G, E) \\ \iota^* &: L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}, G) \to L_{\mathbb{R}}(E, G) \end{aligned}$$

topologische lineare Isomorphismen sind, und erstere sogar eine Isometrie. In der Folge hatten wir in $\boxed{3.9.3}$ dann für reelle Banach-Räume ein kommutatives Diagramm aus lauter topologischen linearen Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
& L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}}) \arrow[dl, "\Re e_*"'] \arrow[dr, "\iota^*"] \arrow[dd, dotted, "\cong"] & \\
L_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{C}}, F) \arrow[dr, "\cong"] & & L_{\mathbb{R}}(E, F_{\mathbb{C}}) \arrow[dl, "\cong"'] \\
& L_{\mathbb{R}}(E, F)_{\mathbb{C}} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& z \mapsto h(z) - i\,h(i\,z) & & & & (x + i\,y \mapsto h(x) + i\,h(y)) & \\
h \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & (x + i\,y \mapsto f(x) - g(y)) & & (x \mapsto f(x) + i\,g(x)) & & h \arrow[ul, mapsto] \arrow[dl, mapsto] \\
& h \circ \iota - i\,h \circ I \circ \iota & & f + i\,g \arrow[ul, mapsto] \arrow[ur, mapsto] & & \Re e \circ h - i \Re e \circ I \circ h &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die schräg nach links unten gehenden Abbildungen Isometrien und der Diagonal-Isomorphismus $L_{\mathbb{R}}(E,F)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}},F_{\mathbb{C}})$ ist durch $f + i\,g \mapsto (x + i\,y \mapsto (f(x) - g(y)) + i\,(f(y) + g(x)))$ gegeben.

Proposition (Komplexifizierung).

Es sei A eine reelle Banach-Algebra (mit 1). Dann existiert eine (bis auf Isomorphie eindeutige) komplexe Banach-Algebra $A_{\mathbb{C}}$ (mit 1 und) mit folgender universellen Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & A_{\mathbb{C}} \arrow[d, dotted, "\exists!\ f_{\mathbb{C}}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

wobei B eine beliebige komplexe Banach-Algebra ist, f ein stetiger $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus (der die 1 bewahrt) und $f_{\mathbb{C}}$ ein stetiger $\mathbb{C}$-Algebra-Homomorphismus (der die 1 bewahrt).

Beweis. Klarerweise sollte $A_{\mathbb{C}}$ als Vektorraum gerade die Komplexifizierung des reellen Banach-Raums A sein. Wir müssen nun die Multiplikation $\mu : A \times A \to A$ zu einer bilinearen Abbildung $\mu_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \times A_{\mathbb{C}} \to A_{\mathbb{C}}$ ausdehnen. Wir brauchen also die universelle Eigenschaft der Komplexifierung eines Banach-Raums auch für stetig bilineare Abbildungen. Dazu betrachten wir wieder die lineare Kontraktion $\check{\mu} : A \to L_{\mathbb{R}}(A,A) \subseteq L_{\mathbb{R}}(A,A)_{\mathbb{C}} \cong L_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}},A_{\mathbb{C}})$, mit $x_1 \mapsto (x_2 \oplus i\,y_2 \mapsto \mu(x_1,x_2) \oplus i\,\mu(x_1,y_2))$. Diese hat wegen der universellen Eigenschaft eine komplex-lineare Fortsetzung $(\check{\mu})_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \to L_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}},A_{\mathbb{C}})$, welche gegeben ist durch:

$$x_1 \oplus i\,y_1 \mapsto \Big(x_2 \oplus i\,y_2 \mapsto \big(\mu(x_1,x_2) - \mu(y_1,y_2)\big) \oplus i\,\big(\mu(x_1,y_2) + \mu(y_1,x_2)\big)\Big).$$

Die assoziierte Abbildung $\mu_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \times A_{\mathbb{C}} \to A_{\mathbb{C}}$,

$$(x_1 \oplus i\,y_1, x_2 \oplus i\,y_2) \mapsto \big(\mu(x_1,x_2) - \mu(y_1,y_2)\big) \oplus i\,\big(\mu(x_1,y_2) + \mu(y_1,x_2)\big)$$

ist dann die gewünschte Multiplikation. Folgende einfache Rechnung zeigt die Assoziativität (und offensichtlich ist $1 \in A \subset A_{\mathbb{C}}$ eine Einheit):

$$\begin{aligned}
&\Big((x_1 \oplus i\,y_1) \bullet (x_2 \oplus i\,y_2)\Big) \bullet (x_3 \oplus i\,y_3) \\
&= \Big((x_1x_2 - y_1y_2) \oplus i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\Big) \bullet (x_3 \oplus i\,y_3) \\
&= \Big((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3\Big) \oplus i\,\Big((x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3\Big) \\
&= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3) \oplus i\,(x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3).
\end{aligned}$$

Man beachte daß $A_{\mathbb{C}}$ kommutativ ist, falls A es ist.

Die in 3.9.1 definierte Norm $p_{\mathbb{C}}$ ist im allgemeinen nicht submultiplikativ. Sei nämlich $A = \mathbb{R}^2$ mit der Multiplikation von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und der Euklidischen Norm. Dann gilt für $w := \binom{1}{0} \oplus i\,\binom{0}{1} \in A_{\mathbb{C}}$ die Identität

$$w \bullet w = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^2\right) \oplus 2\,i \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \oplus i \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 2\,w$$

und da

$$p_{\mathbb{C}}(w) := \max\left\{\left\|\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\right\| : x^2 + y^2 = 1\right\} = 1$$

erhalten wir aus

$$p_{\mathbb{C}}(w \bullet w) = 2\,p_{\mathbb{C}}(w) = 2 > 1 = p_{\mathbb{C}}(w)^2$$

einen Widerspruch.

Folglich kann auch keiner der übrigen Isomorphismen in dem rautenförmigen Diagram eine Isometrie sein. Wäre nämlich einer von Ihnen eine Isometrie, so auch alle anderen wegen der Kommutativität, und damir wäre $\check{\mu} : A \to L_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}, A_{\mathbb{C}})$ eine Kontraktion und somit auch $(\check{\mu})_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \to L_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}, A_{\mathbb{C}})$ eine, also $\|\mu_{\mathbb{C}}\| \leq 1$, d.h. $p_{\mathbb{C}}$ submultiplikativ.

Es ist aber möglich eine äquivalente submultiplikative Erweiterung der Norm von A auf $A_{\mathbb{C}}$ zu finden. Sei nämlich $\|\_\|_{\mathbb{C}}$ die nach 6.5 existente äquivalente submultiplikative Norm zu $p_{\mathbb{C}}$. Sie stimmt auf A mit $p_{\mathbb{C}}$ und damit mit $p := \|\_\|$ überein, denn für $a \in A \subseteq A_{\mathbb{C}}$, $w \in A_{\mathbb{C}}$ und $|z| = 1$ haben wir

$$\begin{aligned} p_z(a\,w) &:= p(\Re e(z\,a\,w)) = p(a\,\Re e(z\,w)) \leq p(a)\,p(\Re e(z\,w)) \\ &\leq p_{\mathbb{C}}(a)\,p_{\mathbb{C}}(w) \end{aligned}$$

und somit $p_{\mathbb{C}}(a \cdot w) \leq p_{\mathbb{C}}(a) \cdot p_{\mathbb{C}}(w)$.

Nun zur universellen Eigenschaft: Sei dazu $f_{\mathbb{C}}$ die eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung. Dann ist $f_{\mathbb{C}}$ auch ein Algebra-Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} & f_{\mathbb{C}}((u_1 \oplus i\,v_1) \bullet (u_2 \oplus i\,v_2)) \\ &\quad = f_{\mathbb{C}}((u_1 u_2 - v_1 v_2) \oplus i\,(u_1 v_2 + v_1 u_2)) \\ &\quad = f(u_1 u_2 - v_1 v_2) + i\,f(u_1 v_2 + v_1 u_2) \\ &\quad = f(u_1)f(u_2) - f(v_1)f(v_2) + i\,f(u_1)f(v_2) + i\,f(v_1)f(u_2) \\ &\quad = (f(u_1) + i\,f(v_1)) \cdot (f(u_2) + i\,f(v_2)) \\ &\quad = f_{\mathbb{C}}(u_1 \oplus i\,v_1) \cdot f_{\mathbb{C}}(u_2 \oplus i\,v_2). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung.

Die Komplexifizierungen der obigen Beispiele sind offensichtlich die folgenden:

$$\begin{aligned} C(X, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} &\cong C(X, \mathbb{C}) \\ L_{\mathbb{R}}(E, E)_{\mathbb{C}} &\cong L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

Wir können also von nun an annehmen, daß alle Banach-Algebren über $\mathbb{C}$ sind, eine 1 besitzen, und $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ und $\|1\| = 1$ erfüllen. Damit zurück zur Spektral-Theorie.

Wie wir bereits angedeutet haben geben wir folgende

6.7 Definition.

Es sei A eine Banach-Algebra mit 1 und $a \in A$. Dann nennt man die Menge

$$\sigma_A(a) := \sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\,1 - a \text{ ist nicht invertierbar in } A\}$$

das SPEKTRUM von a. Das Komplement

$$\rho(a) := \mathbb{C}_\infty \setminus \sigma(a) = \{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus \sigma(a)),$$

in $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt RESOLVENTEN-MENGE von a und die Abbildung

$$r_a : \rho(a) \to A, \quad \lambda \mapsto \begin{cases} (\lambda\,1 - a)^{-1} & \text{für } \lambda \neq \infty \\ 0 & \text{für } \lambda = \infty \end{cases}$$

heißt RESOLVENTEN-FUNKTION von a. Beachte, daß die Definition $r_a(\infty) := 0$ vernünftig ist wegen

$$\begin{aligned}\|r_a(\lambda)\| &= \|(\lambda 1 - a)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|(1-\frac{1}{\lambda}a)^{-1}\right\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}a\right)^n\right\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{1}{\lambda}a\right\|^n \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\|\frac{1}{\lambda}a\|} = \frac{1}{|\lambda|-\|a\|} \to 0 \text{ für } |\lambda| \to \infty\end{aligned}$$

Beispiele.

1. Es sei $A = C(X, \mathbb{C})$. Dann ist $f \in A$ genau dann invertierbar, wenn $0 \notin f(X)$. Folglich ist $\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in (\lambda - f)(X)\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in f(X)\} = f(X)$.
2. Es sei $A = L(E) := L(E, E)$. Dann ist $a \in A$ nach dem offenen Abbildungssatz genau dann invertierbar, wenn a bijektiv ist. Also ist $\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \operatorname{id} - a \text{ ist nicht bijektiv}\}$.

Wir wollen die Holomorphie von $r_a : \mathbb{C}_\infty \supseteq \rho(a) \to A$ beweisen. Dazu und für das Folgende benötigen wir etwas Instrumentarium aus der Funktionentheorie.

Nötiges aus der komplexen Analysis

In diesem Abschnitt fassen wir die benötigten Resultate aus der komplexen Analysis zusammen (vgl. [**19**]). Dabei sei F ein Folgen-vollständiger LKV. Die klassischen Sätze beziehen sich auf den Fall $F = \mathbb{C}$ und wir werden zunächst die Beweise für diesen Fall skizzieren. Wie man die Vektor-wertigen Resultate daraus erhält skizzieren wir am Ende dieses Abschnitts.

6.8 Differentialformen und Kurvenintegrale.

Es seien E und F LKV und $U \subseteq E$ offen. Eine F-wertige 1-FORM auf $U \subseteq E$ ist eine Abbildung $\omega : E \supseteq U \to L(E, F)$ (siehe [**22**, 6.5.3]).

Ist ω stetig und $c : [a, b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve und E Folgenvollständig, so ist das KURVEN-INTEGRAL durch das Vektor-wertige Riemann-Integral

$$\int_c \omega := \int_a^b \omega(c(t))(c'(t))\,dt \in F$$

definiert (siehe [**22**, 6.5.6]). Dieses ist unter Reparametrisierungen von c invariant und für normierte Räume E und F gilt

$$\left\|\int_c \omega\right\|_F \le (b-a)\cdot \sup_{t\in[a,b]}\|\omega(c(t))\|_{L(E,F)} \cdot \sup_{t\in[a,b]}\|c'(t)\|_E.$$

Bekanntlich läßt sich diese Definition mittels Vektor-wertigen RIEMANN-STIELTJES INTEGRAL auch auf REKTIFIZIERBARE KURVEN in normierten Räumen ausdehnen, und es ist dann $\|\int_c \omega\| \le (b-a)\cdot\sup\{\|\omega(c(t))\| : t \in [a,b]\}\cdot V(c)$, wobei $V(c) := \sup\{\sum_{k=1}^n \|c(t_k) - c(t_{k-1})\| : a = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n = b\}$ die TOTALE VARIATION von c ist (siehe [**22**, 6.5.10]).

Jede differenzierbare Abbildung $f : E \supseteq U \to F$ zwischen Banach-Räumen E und F hat als Ableitung $f' : E \supseteq U \to L(E, F)$ (siehe [**22**, 6.1.4]) eine 1-Form die auch als df bezeichnet wird und TOTALES DIFFERENTIAL von f genannt wird. Falls f affin ist, so ist df konstant.

Wegen des Satzes von Schwarz (siehe [22, 6.3.11]) erfüllt diese Differentialform für $f \in C^2$ folgende Symmetriebedingung:

$$(df)'(x)(v)(w) = f''(x)(v,w) = f''(x)(w,v) = (df)'(x)(w)(v),$$

d.h. df ist geschlossen im folgenden Sinn: Eine GESCHLOSSENE 1-FORM ist eine stetig differenzierbare 1-Form, deren ÄUSSERE ABLEITUNG $d\omega$ verschwindet, wobei $d\omega : E \supseteq U \to L(E, L(E,F)) \cong L(E,E;F)$ gegeben ist durch $d\omega(x)(v,w) = \omega'(x)(v)(w) - \omega'(x)(w)(v)$. Man sagt anstelle von "ω ist geschlossen" auch, daß die INTEGRABILITÄTSBEDINGUNG $\omega'(x)(v)(w) = \omega'(x)(w)(v)$ erfüllt ist.

Umgekehrt kann man für sternförmige oder allgemeiner für einfach zusammenhängende Mengen U zeigen, daß jede geschlossene 1-Form $\omega : U \to L(E,F)$ EXAKT ist, d.h. eine differenzierbare Abbildung $f : E \supseteq U \to F$ existiert mit $df = \omega$ (siehe [22, 6.5.4])

Als Konsequenz ist das Kurvenintegral geschlossener 1-Formen lokal Kurven-unabhängig und folglich global längs homotoper Kurven gleich. Dabei heißen zwei Kurven c_0 und c_1 HOMOTOP, falls eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [a,b] \to U$ existiert mit $H(j,t) = c_j(t)$ für alle $j \in \{0,1\}$ und alle $t \in [a,b]$.

6.9 Holomorphe Funktionen.

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ heißt $\mathbb{C}$-DIFFERENZIERBAR oder üblicherweise auch HOLOMORPH, falls für alle $z \in U$ folgender Limes existiert

$$f'(z) := \lim_{\mathbb{C} \ni w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} \in F.$$

Wir bezeichnen mit $H(U,F)$ (und $H(U)$ falls $F = \mathbb{C}$) den Vektorraum aller holomorphen Funktionen $f : U \to F$. Wenn $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ holomorph ist, so ist f auch $\mathbb{R}$-differenzierbar als Abbildung $f_\mathbb{R}$ von $U \subseteq \mathbb{R}^2$ in den reellen Vektorraum $F_\mathbb{R}$ und deren Ableitung $(f_\mathbb{R})'(z) \in L_\mathbb{R}(\mathbb{R}^2, F_\mathbb{R})$ ist dann $\mathbb{C}$-linear und stimmt mit $w \mapsto f'(z) \cdot w$ überein, denn

$$\lim_{\|w\| \to 0} \frac{\|f(z+w) - f(z) - f'(z) \cdot w\|_F}{\|w\|_\mathbb{C}} = \lim_{w \to 0} \left\| \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - f'(z) \right\|_F = 0.$$

Es gilt aber auch die Umkehrung [19, 2.5]: Die $\mathbb{C}$-Linearität der Ableitung $(f_\mathbb{R})'(z) \in L_\mathbb{R}(\mathbb{R}^2, F)$ einer $\mathbb{R}$-differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$, bedeutet, daß $(f_\mathbb{R})'(z)$ durch Multiplikation $w = 1 \cdot w \mapsto (f_\mathbb{R})'(z)(1 \cdot w) = (f_\mathbb{R})'(z)(1) \cdot w$. Falls wir $f'(z) := (f_\mathbb{R})'(z)(1) \in F$ setzten, so ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\|w\| \to 0} \frac{\|f(z+w) - f(z) - f'(z) \cdot w\|}{\|w\|} = \lim_{\|w\| \to 0} \left\| \frac{f(z+w) - f(z) - f'(z) \cdot w}{w} \right\| \\ &= \lim_{w \to 0} \left\| \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - f'(z) \right\|, \text{ also } f'(z) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}. \end{aligned}$$

Für $F = \mathbb{C}$ können wir die $\mathbb{C}$-Linearität der Ableitung In reellen Koordinaten auch wie folgt beschreiben: Dazu zerlegen wir f in Real- und Imaginärteil, d.h. $f = g + i\,h$, und ebenso $w = (u,v) = u + i\,v$. Dann ist

$$(f_\mathbb{R})'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(z) & \frac{\partial g}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(z) & \frac{\partial h}{\partial y}(z) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn

$$\begin{pmatrix} bu - av \\ du - cv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cu - dv \\ au + bv \end{pmatrix}$$

für alle $u+iv \in \mathbb{C}$ gilt, d.h. (mittels Koeffizientenvergleich) wenn $d=a$ und $c=-b$ gilt. Dies sind genau die CAUCHY-RIEMANN'SCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN (siehe [**19**, 2.6])

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Wenn $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ holomorph ist, so ist $\omega : U \to L(\mathbb{R}^2, F_\mathbb{R})$, definiert durch $\omega(z) := f(z)\,dz$, eine geschlossene $F_\mathbb{R}$-wertige 1-Form, wobei dz die (konstante) Ableitung der $\mathbb{C}$-linearen Funktion $\mathrm{id} : z \mapsto z$ bezeichnet. Die Multiplikation $f(z)\cdot dz$ ist durch die Abbildung $F \times L(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to L(\mathbb{C}, F)$, $(y,T) \mapsto (z \mapsto T(z)\cdot y)$, gegeben. Unter leichtem Misbrauch der Bezeichnungsweise benutzen wir das gleiche Symbol dz für die konstante 1-Form $U \to L(\mathbb{C},\mathbb{C})$ als auch für Ihren Wert $\mathrm{id} \in L(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Falls f holomorph ist, so ist die 1-Form $z \mapsto f(z)\cdot dz$ geschlossen, denn ihre (reelle) Ableitung an der Stelle z ist durch $v \mapsto (w \mapsto f'(z)\cdot v \cdot w)$ gegeben, und ist somit symmetrisch in v und w (siehe [**19**, 3.5]).

Es seien weiters dx und dy die (konstanten) Ableitungen der $\mathbb{R}$-linearen Funktionen $\mathfrak{Re} : z = x + i\,y \mapsto x$ und $\mathfrak{Im} : x + i\,y \mapsto y$. Diese bilden eine Basis des reellen Vektorraums $L_\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{R})$. Dann gilt offensichtlich $dz = dx + i\,dy$ und analog $d\bar z = dx - i\,dy$, wobei $d\bar z$ die Ableitung von $z \mapsto \bar z$ bezeichnet. Also ist $\{dz, d\bar z\}$ eine zu $\{dx, dy\}$ äquivalente Basis des komplexen Vektorraums $L_\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{R})_\mathbb{C} \cong L_\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Für jedes $\mathbb{R}$-differenzierbare $f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ haben wir

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\,dy.$$

Folglich muß es auch eine Darstellung bzgl. der Basis $\{dz, d\bar z\}$ geben, deren Koeffizienten (die Wirtinger-Ableitungen) wir in Analogie mit $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ bezeichen, d.h.

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,d\bar z.$$

Wegen $2\,dx = dz + d\bar z$ und $2i\,dy = dz - d\bar z$ können wir diese Koeffizienten auch leicht berechnen:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dz + d\bar z}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dz - d\bar z}{2i} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{=\frac{\partial f}{\partial z}} dz + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{=\frac{\partial f}{\partial \bar z}} d\bar z, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Da dz $\mathbb{C}$-linear und $d\bar z$ konjugiert $\mathbb{C}$-linear ist, ist f genau dann holomorph, wenn $\frac{\partial}{\partial \bar z} f = 0$ ist (siehe [**19**, 2.11]). Analog ist f genau dann ANTI-HOLOMORPH, d.h. $\overline{f}$ holomorph, wenn $\frac{\partial}{\partial z} f = 0$, denn

$$d\bar f = \frac{\partial \bar f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}\,d\bar z = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)}\,dz + \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}\,d\bar z.$$

6.10 Cauchy'scher Integralsatz.

Ist $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ holomorph und c_0 und c_1 zwei Kurven $I \to U$ die relativ $\partial I = \{0, 1\}$ in U homotop sind (d.h. die Homotopie erfüllt neben $H(j, t) = c_j(t)$ zusätzlich $H(s, k) = c_j(k)$ für alle $j, k \in \{0, 1\}$ und alle t und s) so ist

$$\int_{c_0} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz.$$

Ist insbesonders $c : S^1 \to U$ eine geschlossene Kurve, welche in U homotop zu einer konstanten Kurve ist (dann heißt sie 0-HOMOTOP), so ist $\int_c f(z)\,dz = 0$.

Siehe [**19**, 3.18] und [**19**, 3.23].

Beweis. Der erste Teil ist eine Konsequenz der Geschlossenheit der 1-Form $z \mapsto f(z)\,dz$.

Für den zweiten Teil beachte man, daß aus einer (freien) Homotopie H zwischen c und einer konstanten Kurve konst_x sich eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ von c mit der Hintereinandersetzung der Kurven $c_1 : t \mapsto H(t, 1)$, der konstanten Kurve konst_x und der umgekehrt durchlaufenen Kurve $c_1^{-1} : t \mapsto H(1 - t, 1)$ konstruieren läßt. Also ist $\int_c f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz - \int_{c_1} f(z)\,dz = 0$. □

6.11 Windungszahl.

Es sei c eine geschlossene C^1-Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, so heißt

$$\mathrm{ind}_c(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{w - z}\,dw$$

die WINDUNGSZAHL (oder auch UMLAUFZAHL) von c um z, siehe [**19**, 3.24]. Für einen Kreis $c : t \mapsto z + r\,e^{2\pi i\,t}$ mit Mittelpunkt z und Radius r erhalten wir offensichtlich

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_c(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{w - z}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i\,r\,e^{2\pi i\,t}}{r\,e^{2\pi i\,t}}\,dt \\ &= \int_0^1 1\,dt = 1.\end{aligned}$$

Da $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ ist, ist dieses Integral Homotopie-invariant und folglich konstant für z laufend in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus c(S^1)$: In der Tat ist

$$\mathrm{ind}_c(z_s) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{w - z_s}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_s} \frac{1}{w}\,dw$$

für jede Kurve $s \mapsto z_s$ in $\mathbb{C} \setminus c(S^1)$ wobei $c_s(t) := c(t) - z_s$ eine Homotopie beschreibt.

Für eine geschlossene Kurve c, die in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ homotop zum k-mal durchlaufenem Kreis ist, gilt folglich $\mathrm{ind}_c(z) = k$, denn $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ ist offensichtlich holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. In der algebraischen Topologie (siehe [**17**, 2.17]) zeigt man, daß die Windungszahl eine topologische Invariante ist, d.h. auch für geschlossene stetige Kurve wohldefiniert ist, Homotopie-invariant ist und in $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ liegt. Weiters zeigt man, daß jede geschlossene Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ homotop zum $\mathrm{ind}_c(z)$-fach durchlaufenen Einheits-Kreis mit Mittelpunkt z ist.

6.12 Cauchy'sche Integralformeln.

Es sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ holomorph, K eine abgeschlossene Kreisscheibe in U und z im Inneren von K. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z}\,dw,$$

wobei ∂K den positiv-parametrisierten (d.h. $\operatorname{ind}_{\partial K}(z) = +1$) Rand von K bezeichnet.

Weiters ist f unendlich oft $\mathbb{C}$-differenzierbar und es gilt

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{p+1}}\, dw.$$

Siehe [**19**, 3.28].

Beweis. Es sei $g(w) := \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$. Dann ist g holomorph auf $U \setminus \{z\}$ und auf K beschränkt, da f bei z differenzierbar ist. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz ist $\int_{\partial K} g = \int_{\partial K_\varepsilon} g$, wobei K_ε eine Kreisscheibe von Radius $\varepsilon > 0$ um z ist. Nun verwendet man $\| \int_{K_\varepsilon} g\| \leq 2\pi\varepsilon \|g|_K\|_\infty \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ und erhält $0 = \int_{\partial K} g = \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z)\cdot 2\pi i$.

Daß f unendlich oft differenzierbar ist, folgt, indem man die Ableitung mit den Integral vertauscht:

$$\begin{aligned} f^{(p)}(z) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^p \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(w) \left(\frac{d}{dz}\right)^p \frac{1}{w-z}\, dw \\ &= \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{p+1}}\, dw. \quad \square \end{aligned}$$

6.13 Cauchy-Abschätzung.

Es sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ holomorph und K eine Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt z in U. Dann gilt:

$$\left\| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right\| \leq \frac{\|f|_{\partial K}\|_\infty}{r^n}.$$

Insbesonders ist die Taylorreihe von f im Punkt z auf K gleichmäßig konvergent .

Siehe [**19**, 3.30].

Beweis. Die Ungleichung folgt durch Abschätzen des Integrals, und die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Taylorreihe, indem man für eine die Ungleichung für eine etwas größere Kreisscheibe K_R mit Radius $R > r$ wie folgt abschätzt:

$$\Big\|\sum_k \frac{w^k}{k!} f^{(k)}(z)\Big\| \leq \sum_k |r|^k \frac{\|f^{(k)}(z)\|}{k!} \leq \|f|_{K_R}\|_\infty \sum_k \left(\frac{r}{R}\right)^k.$$

Die Tayler-Reihe von f konvergiert gleichmäßig auf K, denn wegen der Integralformel 6.12 von Cauchy gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &\overset{6.12}{=\!=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R} \sum_{k=0}^\infty \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k\, dw \\ &= \sum_{k=0}^\infty (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw \overset{6.12}{=\!=} \sum_{k=0}^\infty (z-z_0)^k \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \square \end{aligned}$$

6.14 Identitätssatz.

Es sei $f : U \to F$ holomorph auf der offenen zusammenhängenden Menge U und verschwinde auf einer in U konvergenten nicht schließlich konstanten Folge. Dann ist $f = 0$.

Siehe [**19**, 4.7].

Beweis. Für (die Koeffizienten einer) konvergenter Potenzreihen um den Grenzwert folgt das mittels Induktion, also ist f lokal um den Grenzwert 0. Eine maximale offene zusammenhängende Menge $W \subseteq U$ auf der f verschwindet existiert also. Sie muß aber auch abgeschlossen in U sein und damit mit U übereinstimmen. □

6.15 Hebbare Singularität.

Es sei $z \in U$ und $f : U \setminus \{z\} \to F$ holomorph und f lokal um z beschränkt. Dann ist f auf U holomorph erweiterbar.

Siehe auch [**19**, 3.31].

Beweis. Es sei K eine Kreisscheibe um z in U auf welcher f beschränkt ist. Es sei $z' \in K\setminus\{z\}$. Wie im Beweis der Cauchy'schen Integral-Formel 6.12 zeigt man, daß für die auf $U \setminus \{z, z'\}$ holomorphe und auf K beschränkte Funktion $w \mapsto \frac{f(w)-f(z')}{w-z'}$ gilt: $0 = \int_{\partial K} \frac{f(w)-f(z')}{w-z'}\, dw = \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z'}\, dw - f(z')\, 2\pi i$. Das rechte Integral ist aber holomorph in z' im Inneren von K, also gilt gleiches für f. □

6.16 Satz von Liouville.

Es sei $f : \mathbb{C} \to F$ holomorph und beschränkt, dann ist f konstant.

Siehe [**19**, 3.42].

Beweis. Nach 6.13 ist $|f'(z)| \le \frac{\|f\|_\infty}{r}$ für alle $r > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$ also ist $f' = 0$ und damit f konstant. □

6.17 Maximum-Modulus-Prinzip.

Es sei U offen und zusammenhängend sowie $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ holomorph und nicht konstant. Dann besitzt $z \mapsto \|f(z)\|$ kein Maximum.

Siehe [**19**, 3.41].

Beweis. Es sei $F = \mathbb{C}$. Angenommen es gäbe ein Maximum bei $z_0 \in U$, d.h. $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für alle $z \in U$. Wir zeigen zuerst, daß daraus die Konstanz von $z \mapsto |f(z)|$ folgt. Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann gäbe ein $z_1 \in U$ mit $|f(z_0)| > |f(z_1)|$. Da U zusammenhängend ist können wir z_0 mit z_1 durch einer Kurve $t \mapsto z_t$ verbinden. Wir wählen t_0 maximal mit $|f(z_{t_0})| = |f(z_0)|$. Dann existieren beliebig nahe an z_{t_0} Punkte z_t mit $|f(z_0)| > |f(z_t)|$. Wir wählen einen Kreis $K \subseteq U$ um z_{t_0} dessen Peripherie solch einen Punkt z_{t_1} enthält. Dann ist $|f(z_{t_1})| < |f(z_0)|$ und $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für alle $z \in \partial K$. Aus der Cauchy'schen-Integralformel 6.12 erhalten wir somit $|f(z_{t_0})| < |f(z_0)|$, einen Widerspruch.

Falls die Konstante $|f|$ gerade 0 ist sind wir fertig. Andernfalls folgt durch Differenzieren der Konstanten $|f|^2$ die Gleichung

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar z}(f \cdot \bar f)(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial \bar z} \cdot \bar f(z) + f(z) \cdot \frac{\partial \bar f(z)}{\partial \bar z} = 0 + f(z) \cdot \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

Wegen $|f| \neq 0$ folgt $0 = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$, d.h. f ist konstant. □

6.18 Differenzierbare Struktur von $\mathbb{C}_\infty$.

Um nun für Funktionen wie r_a auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}_\infty$ von Differenzierbarkeit sprechen zu können, müssen wir $\mathbb{C}_\infty$ mit einer differenzierbaren Struktur versehen (siehe [**19**, 2.18,2.19]). Dazu identifizieren wir $\mathbb{C}_\infty$ mit der Einheitssphäre $S^2 := \{(y, t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} : |y|^2+t^2 = 1\}$ in $\mathbb{C}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Die Einbettung von $\mathbb{C}$ in S^2 wird vermittelt durch die Inverse der stereographischen Projektion der Äquator-Ebene

$\mathbb{C}\times\{0\}\cong\mathbb{C}$ mit dem Nordpol $N:=(0,0,1)$ als Zentrum. Es entsprechen sich dabei der Nordpol $N\in S^2$ und der Punkt $\infty\in\mathbb{C}_\infty$. Der Strahlensatz $z:1=y:(1-t)$ zeigt, daß die stereographische Projektion durch

$$\mathbb{C}\times\mathbb{R}\supset S^2\setminus\{N\}\ni(y,t)\mapsto z=\frac{1}{1-t}y\in\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\times\{0\}$$

gegeben ist und ihre Inverse ist

$$\varphi_+:\mathbb{C}\ni z\mapsto\frac{1}{|z|^2+1}(2z,|z|^2-1)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R},$$

da der zweite Schnittpunkt der Geraden $t\mapsto z+t(N-z)$ durch N und z mit der Sphäre durch die Lösung $t=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$ der Gleichung $1=\|t\,N+(1-t)\,z\|^2=t^2+(1-t)^2\|z\|^2$ gegben ist

Diese liefert also eine "Karte" von S^2. Wir können auch eine Karte um N definieren, indem wir auf analoge Weise die Inverse φ_- der stereographische Projektion $(y,t)\mapsto(y,-t)\mapsto\frac{1}{1+t}y$ um den Südpol $S:=-N$ verwenden.

Nun können wir Differenzierbarkeits-Definitionen auf Funktionen $f:S^2\supseteq U\to F$ übertragen, indem wir verlangen, daß die beiden Zusammensetzungen $f\circ\varphi_j:\mathbb{C}\subseteq\varphi_j^{-1}(U)\to U\to F$ für $j\in\{+,-\}$ diese haben. Man sollte aber noch überprüfen, daß für Punkte $(x,t)\in S^2$ in gemäßigten Breiten, d.h. solche in $\varphi_+(\mathbb{C})\cap\varphi_-(\mathbb{C})$, die Differenzierbarkeit von $f\circ\varphi_+$ bei $\varphi_+^{-1}(x,t)$ gleichbedeutend ist mit jener von $f\circ\varphi_-$ bei $\varphi_-^{-1}(x,t)$. Wegen $f\circ\varphi_-=(f\circ\varphi_+)\circ(\varphi_+^{-1}\circ\varphi_-)$ genügt zu zeigen, daß der Kartenwechsel $\varphi_+^{-1}\circ\varphi_-:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ differenzierbar ist. Dieser ist durch

$$z\mapsto\frac{1}{|z|^2+1}(2z,-(|z|^2-1))\mapsto\frac{1}{1-\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}}\frac{2z}{|z|^2+1}=\frac{z}{|z|^2}=\frac{1}{\overline{z}}$$

gegeben. Dies ist die Spiegelung am Einheitskreis, wie auch mittels elementar geometrischer Überlegungen leicht einzusehen ist. Diese Abbildung ist glatt und antiholomorph, also sollten wir die zweite Karte noch mit der Konjugation $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\overline{z}$ zusammensetzen, um als neuen Kartenwechsel die holomorphe Abbildung $z\mapsto\frac{1}{z}$ zu erhalten.

Zusammenfassend bedeutet dies also, daß eine Abbildung $f:\mathbb{C}_\infty\supseteq U\to F$ holomorph genannt wird, wenn sowohl $f|_{\mathbb{C}}:\mathbb{C}\cap U\to F$ holomorph ist, als auch $z\mapsto f(\frac{1}{z})$ von $\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{z}\in U\}\to F$ es ist. Siehe auch [**19**, 2.18].

6.19 Ketten und Zyklen.

Da wir nicht nur Kreisscheiben, sondern allgemeine kompakte K verwenden wollen, müssen wir geschlossene Kurven durch etwas allgemeineres ersetzen. Dies sind sogenannte 1-KETTEN, d.h. formale linear-Kombination $c:=\sum_j k_j\,c_j$ von Kurven $c_i:[0,1]\to U$ mit Koeffizienten $k_i\in\mathbb{Z}$. Die Menge aller 1-Ketten bildet eine Abelsche Gruppe (aller Abbildungen $C([0,1],U)\to\mathbb{Z}$ mit endlichen Träger) bezüglich der komponentenweisen Addition. Der Rand ∂c einer 1-Kette ist eine 0-KETTE, d.h. eine formale linear-Kombination von Punkten, die wie folgt definiert ist $\partial c:=\sum_j k_j\,(c_j(1)-c_j(0))$. Eine 1-Kette c heißt ZYKEL, falls $\partial c=0$ ist. Das ist insbesonders der Fall, wenn alle c geschlossene Kurven sind. Die Teilmenge der Zyklen ist eine Untergruppe der 1-Ketten. Man dehnt das Kurven-Integral von 1-Formen ω auf 1-Ketten c durch Linearität aus, d.h.

$$\int_c\omega=\sum_j k_j\int_{c_j}\omega$$

und definiert die Windungszahl von 1-Zyklen c wieder durch

$$\operatorname{ind}_c(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{w-z}\,dw$$

für alle $z \notin \operatorname{Bild}(c) := \bigcup_j c_j[0,1]$.

Ein 1-Zykel c heißt 0-HOMOLOG in U, falls $\operatorname{ind}_c(z) = 0$ für alle $z \notin U$. Zwei Zyklen c_1 und c_2 heißen HOMOLOG in U, falls $c_1 - c_2$ 0-homolog ist, also $\operatorname{ind}_{c_1}(z) = \operatorname{ind}_{c_2}(z)$ für alle $z \notin U$ gilt. Die 0-homologen Zyklen bilden eine Untergruppe der Zyklen. Die Quotientengruppe $H_1(U,\mathbb{Z})$ heißt 1-te HOMOLOGIE-GRUPPE von U mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

Man beachte, daß zwei geschlossene Kurven die in U homotop sind, wegen der Homotopieinvarianz der Windungszahl auch homolog sind. Die Umkehrung gilt nicht, da Homotopie nicht kommutativ ist. Wir wollen nun den Cauchy'schen Integralsatz 6.10 und die Cauchy'sche Integralformel 6.12 darauf verallgemeinern.

6.20 Verallgemeinerter Cauchy'scher Integralsatz und Integralformel.

Es sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ holomorph. Für beliebige in U homologe Zyklen c_1 und c_2 gilt

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz.$$

Ist c ein 0-homologer Zykel in U, so gilt

$$f(z)\,\operatorname{ind}_c(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(w)}{w-z}\,dw \text{ für alle } z \in U \setminus \operatorname{Bild}(c).$$

Beweis. Zuerst zum zweiten Teil. Dazu betrachten wir die Abbildung $\varphi : (z,w) \mapsto \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ für $z \neq w$ und $\varphi : (z,z) \mapsto f'(z)$. Es ist $\varphi : U \times U \to F$ stetig (und in der Tat sogar holomorph, nach Hartogs' Theorem und dem Satz 6.15 über hebbare Singularitäten). Für $z \in U$ sei $h(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_c \varphi(z,w)\,dw$ und inbesonders für $z \in U \setminus \operatorname{Bild}(c)$ somit:

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_c \frac{1}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\,\operatorname{ind}_c(z). \end{aligned}$$

Es ist also zu zeigen, daß $h = 0$ ist. Man sieht leicht, daß $h : U \to F$ durch

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(w)}{w-z}\,dw \text{ für } z \in U_1 := \{z \notin \operatorname{Bild}(c) : \operatorname{ind}_c(z) = 0\} \supseteq \mathbb{C} \setminus U.$$

holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar ist. Da für $z \to \infty$ dieses Integral gegen 0 geht, ist h beschränkt und somit nach dem Satz 6.16 von Liouville identisch $h(\infty) = 0$.

Nun zum ersten Teil. Dazu genügt offensichtlich zu zeigen, daß $\int_c f(z)\,dz = 0$ ist für den 0-homologen Zykel $c := c_1 - c_2$. Für $z \in U \setminus \operatorname{Bild}(c)$ sei $f_z(w) := (w-z)\,f(w)$. Dann gilt nach dem zweiten Teil, daß

$$0 = f_z(z)\,\operatorname{ind}_c(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_z(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(w)\,dw \quad \square$$

6.21 Lemma. Einfangen von Löchern.

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subseteq U$ kompakt. Dann existiert ein 1-Zykel $c = \sum_j c_j$ von glatten geschlossenen Kurven c_j in $U \setminus K$ so, daß $\operatorname{ind}_c(z) \in \{0,1\}$ für alle $z \notin \operatorname{Bild}(c)$ gilt. Es sei das Innere und das Äußere von c definiert durch

$$\operatorname{Inn}(c) := \{z \notin \operatorname{Bild}(c) : \operatorname{ind}_c(z) = 1\}$$
$$\operatorname{Äuß}(c) := \{z \notin \operatorname{Bild}(c) : \operatorname{ind}_c(z) = 0\}.$$

Dann gilt weiters $K \subseteq \operatorname{Inn}(c) \subseteq U$, oder äquivalent $\mathbb{C} \setminus U \subseteq \operatorname{Äuß}(c) \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. So einen Zykel nennt man ein JORDAN-SYSTEM.

Beweis. Es sei $0 < 2\delta < d(K, \mathbb{C} \setminus U)$. Wir betrachten Achsen-parallele Geraden im Abstand δ. Es seien $R_1, \dots, R_m$ jene (endlich vielen) Quadrate (mit Seitenlänge δ) welche (die kompakte Menge) K treffen. Der Rand ∂R_j von R_j ist ein Kantenzug welchen wir positiv orientieren.

Für $z \in R_j$ ist $d(z, K) < \sqrt{2}\delta$ und somit $R_j \subseteq U$. Seien $c_1, \dots, c_n$ jene Seiten die zu genau einem der R_i gehören. Dann ist $\sum_{k=1}^n \int_{c_k} \omega = \sum_{j=1}^m \int_{\partial R_j} \omega$ für jede auf $\bigcup_{j=1}^m \partial R_j$ stetige 1-Form ω, denn die anderen Seiten gehören jeweils zu zwei der R_i mit vertauschter Orientierung.

Es ist das Bild von c_k in $U \setminus K$ enthalten, andernfalls würden die beiden angrenzenden Quadrate K treffen und somit in U liegen, ein Widerspruch zur Wahl der c_k.

Für $f \in H(U)$ und $z \in K \setminus \bigcup_j \partial R_j$ ist $w \mapsto \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$ eine stetige 1-Form auf $\bigcup \partial R_j$ und somit ist

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_j} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Es ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_j} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \begin{cases} 0 & \text{für } z \notin R_j \\ f(z) & \text{für } z \in R_j \end{cases}$$

nach der Cauchy'schen Integralformel 6.20. Da z innerer Punkt genau eines der R_j ist, gilt

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Da beide Seiten stetig für $z \in K$ sind gilt diese Gleichung auf ganz K.

Wenn man den Schnitt von K mit den 4 Quadraten mit einer gemeinsamen Ecken untersucht, so sieht man, daß $c := \sum_j c_j$ ein Zykel ist, also eine endliche Summe einfach geschlossener Polygone.

Für $z \in K$ gilt offensichtlich $1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{1}{w-z}\, dw = \operatorname{ind}_c(z)$, also $K \subseteq \operatorname{Inn}(c)$.

Für $z \notin U$ ist $\int_{\partial R_j} \frac{1}{w-z}\, dw = 0$ und somit $\operatorname{ind}_c(z) = 0$, i.e. $\operatorname{Inn}(c) \subseteq U$. □

Um diese Sätze der komplexen Analysis für Vektor-wertige Funktionen zu erhalten, kann man erfolgreich folgendes Lemma verwenden.

6.22 Lemma.

Es sei F ein Folgen-vollständiger LKV. Dann ist $f : \mathbb{C} \supseteq U \to F$ genau dann holomorph, wenn $\ell \circ f : \mathbb{C} \supseteq U \to F \to \mathbb{C}$ holomorph ist für alle $\ell \in F^*$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Ist offensichtlich, da $\ell \in F^*$ als lineare stetige Abbildung mit Limiten und Differenzenquotienten-Bildung vertauscht.

($\Leftarrow$) Es gilt:

$$\ell\left(\frac{f(z)-f(0)}{z}-\frac{f(w)-f(0)}{w}\right)=\frac{(\ell\circ f)(z)-(\ell\circ f)(0)}{z}-\frac{(\ell\circ f)(w)-(\ell\circ f)(0)}{w}$$
$$=\int_0^1(\ell\circ f)'(t\,z)-(\ell\circ f)'(t\,w)\,dt$$
$$=(z-w)\int_0^1\int_0^1 t\,(\ell\circ f)''(tw+ts(z-w))\,ds\,dt.$$

Da $\ell\circ f$ holomorph ist, ist $\ell\circ f$ 2-mal stetig differenzierbar und somit der Integrand für $t,s\in[0,1]$ und z,w nahe 0 gleichmäßig beschränkt. Also ist auch das Integral lokal in z und w nahe 0 beschränkt, und somit ist

$$\frac{1}{z-w}\left(\frac{f(z)-f(0)}{z}-\frac{f(w)-f(0)}{w}\right)$$

skalar beschränkt und nach 4.2.7 sogar beschränkt. Damit konvergiert aber das Netz $\frac{f(z)-f(0)}{z}-\frac{f(w)-f(0)}{w}\to 0$ für $w,z\to 0$, d.h. $w\mapsto\frac{f(w)-f(0)}{w}$ ist ein Cauchy-Netz und konvergiert folglich (da jede Teilfolge konvergiert). D.h. f ist holomorph. □

Mittels dieses Lemmas lassen sich nun alle oben angeführten Resultate aus der komplexen Analysis auf den Vektor-wertigen Fall übertragen.

Für den Satz 6.16 von Liouville geht das z.B. wie folgt: Es sei $f:\mathbb{C}\to F$ holomorph und beschränkt. Dann ist $\ell\circ f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, also nach dem klassischen Satz konstant, für alle $\ell\in F^*$. Da diese ℓ Punkte-trennend sind, ist f selbst konstant.

Für den Cauchy'sche Integralsatz 6.10 und die Integralformel 6.12, bzw. 6.20, z.B. beachte man:

$$\ell\left(\int_c f\right)=\int_c \ell\circ f\text{ und }\ell\circ f'=(\ell\circ f)'.$$

Sei im folgenden nun A eine komplexe Banach-Algebra mit 1.

6.23 Lemma.

Für $a\in A$ gilt:

1. *Ist $\lambda\in\rho(a)$, so ist* $\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(a))\ge\|(\lambda-a)^{-1}\|^{-1}$.
2. *Für $\lambda,\mu\in\rho(a)$ gilt die Resolventengleichung:*
$$\frac{r_a(\lambda)-r_a(\mu)}{\lambda-\mu}=-r_a(\lambda)\,r_a(\mu)=-r_a(\mu)\,r_a(\lambda).$$

Beweis. (1) Es sei $\lambda\in\rho(a)$ und $|\mu|<\|(\lambda-a)^{-1}\|^{-1}$. Dann ist $\lambda+\mu\in\rho(a)$ und somit gilt $\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(a))\ge\|(\lambda-a)^{-1}\|^{-1}$, denn $\lambda+\mu-a$ ist nach 6.2.2 invertierbar da $\|(\lambda+\mu-a)-(\lambda-a)\|=|\mu|<\|(\lambda-a)^{-1}\|^{-1}$.

(2) Mit $x:=\lambda-a$ und $y:=\mu-a$ gilt

$$r_a(\lambda)-r_a(\mu)=x^{-1}-y^{-1}=x^{-1}\,(y-x)\,y^{-1}$$
$$=(\lambda-a)^{-1}\,(\mu-\lambda)\,(\mu-a)^{-1}=(\mu-\lambda)\,(\lambda-a)^{-1}\,(\mu-a)^{-1}$$
$$=(\mu-\lambda)\,r_a(\lambda)\,r_a(\mu).\quad\square$$

6.24 Satz.

Es sei $a\in A$. Dann ist das Spektrum $\sigma(a)$ von a kompakt und nicht-leer. Die Resolventen-Funktion ist holomorph von der offenen Teilmenge $\rho(a)$ der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C}_\infty$ nach A.

Beweis. Für $|\lambda| > \|a\|$ gilt: $\lambda\,1 - a = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda}a)$ und $\|1 - (1 - \frac{1}{\lambda}a)\| = \|\frac{1}{\lambda}a\| = \frac{\|a\|}{|\lambda|} < 1$, also ist $1 - \frac{1}{\lambda}a$ invertierbar nach 6.2.1, und damit auch $\lambda\,1 - a = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda}a)$, d.h. $\lambda \in \rho(a)$. Also ist $\sigma(a) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq \|a\|\}$ und folglich beschränkt.

Es ist $\rho(a) \cap \mathbb{C} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\,1 - a \in \operatorname{Inv}(A)\}$. Da die affine Abbildung $\lambda \mapsto \lambda\,1 - a$ stetig ist, ist ihr inverses Bild der offenen Menge $\operatorname{Inv}(A)$ ebenfalls offen. Also ist $\rho(a) \cap \mathbb{C}$ offen in $\mathbb{C}$.

Folglich ist $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus (\rho(a) \cap \mathbb{C})$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Also ist $\sigma(a)$ auch in $\mathbb{C}_\infty$ kompakt, und damit $\rho(a) = \mathbb{C}_\infty \setminus \sigma(a)$ offen in $\mathbb{C}_\infty$.

Die Abbildung $\lambda \mapsto (\lambda\,1 - a) \mapsto (\lambda\,1 - a)^{-1}$ ist als Zusammensetzung einer affinen mit einer (nach 6.2.4) komplex-differenzierbaren Abbildung, selbst eine komplex differenzierbare Abbildung $r_a : \rho(a) \cap \mathbb{C} \to \operatorname{inv}(A) \subseteq A$ und für die Ableitung gilt wegen der Kettenregel:

$$r_a'(\lambda) = \operatorname{inv}'(\lambda\,1 - a) \cdot 1 = -(\lambda - a)^{-1}\,1\,(\lambda - a)^{-1} = -(\lambda - a)^{-2}.$$

Will man nicht die komplexe Differenzierbarkeit der Inversion verwenden, so läßt sich dies mittels Resolventengleichung 6.23.2 auch direkt leicht nachrechnen.

Für die Holomorphie bei ∞ müssen wir die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z} \mapsto r_a(\frac{1}{z})$ nahe 0 studieren. Für $z \neq 0$ ist diese holomorph da $\rho(a)$ eine Umgebung von ∞ ist und wegen $\lim_{z\to\infty} r_a(z) = 0$ ist r_a vermöge $r_a(\infty) := 0$ holomorph bei 0 nach 6.15. Direkt sieht man das auch daraus, daß diese Abbildung sich für $\|z\,a\| < 1$, d.h. für $|z| < \frac{1}{\|a\|}$, wie folgt in eine konvergente Potenzreihe entwickeln läßt

$$\begin{aligned} r_a\left(\frac{1}{z}\right) &= \left(\frac{1}{z} - a\right)^{-1} = \left(\frac{1}{z}(1 - z\,a)\right)^{-1} = z\,(1 - z\,a)^{-1} \\ &= z\sum_{k=0}^{\infty}(z\,a)^k = z\sum_{k=0}^{\infty} z^k\,a^k. \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß das Spektrum nicht-leer ist:
Andernfalls wäre $r_a : \mathbb{C}_\infty \to A$ eine auf ganz $\mathbb{C}_\infty$ holomorphe (also beschränkte) Funktion und somit nach dem Satz 6.16 von Liouville konstant. Wegen $r_a(\infty) = 0$ wäre also $r_a = 0 \notin \operatorname{Inv}(A)$, ein Widerspruch. □

6.25 Lemma und Definition.

Unter dem Spektral-Radius $r(a)$ *von* $a \in A$ *versteht man*

$$r(a) := \max\{|z| : z \in \sigma(a)\}.$$

Für ihn gilt:

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Beweis. Da $r_a : \rho(a) \to A$ nach 6.24 holomorph ist, ist $z \mapsto r_a(\frac{1}{z})$ für $\frac{1}{z} \in \rho(a)$ holomorph, also konvergiert die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} a^k$ dieser Funktion im Inneren der größten Scheibe welche in $\{z : \frac{1}{z} \in \rho(a)\}$ enthalten ist. Diese hat nach Definition gerade den Radius $\inf\{|z| : \frac{1}{z} \notin \rho(a)\} = \frac{1}{\sup\{|z| : z \in \sigma(a)\}} = \frac{1}{r(a)}$. Da für $|z| > \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}}$ diese Potenzreihe divergent ist (mehr noch, ihr Konvergenzradius ist gerade $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$) ist somit $\frac{1}{r(a)} \leq \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}}$, d.h. $r(a) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$ (und es gilt sogar Gleichheit).

Bleibt zu zeigen, daß dieser Limes-superior sogar ein Limes ist. Mittels der Ungleichung $\|a^{n+m}\| \leq \|a^n\|\,\|a^m\|$ kann man das direkt zeigen, siehe [**11**, 169]. Ein

anderer Beweis geht wie folgt:
Für $z \in \sigma(a)$ ist $z - a \notin \mathrm{Inv}(A)$. Da $z^n - a^n = (z-a)\,(z^{n-1} + z^{n-2}\,a + \dots + z\,a^{n-2} + a^{n-1})$ und die beiden Faktoren miteinander kommutieren ist auch $z^n - a^n \notin \mathrm{Inv}(A)$ nach 6.2.3, also $|z|^n \le \|a^n\|$ nach 6.2.1 und damit $|z| \le \|a^n\|^{1/n}$. Somit ist $r(a) \le \inf_n \|a^n\|^{1/n} \le \overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \le r(a)$. □

Funktionenkalkül

Bemerkung.

In der endlich-dimensionalen Spektral-Theorie spielt für Operatoren T die Algebra $\{p(T) : p \text{ ist ein Polynom}\}$ eine große Rolle. Man denke nur an den Satz von Cayley-Hamilton und an die Rolle die das minimal-Polynom spielt. Im unendlich-Dimensionalen werden wohl Polynome nicht mehr ausreichen. Die naheliegendste Verallgemeinerung sind konvergente Potenzreihen. Wir haben in [18, 3.2.10] gezeigt, daß die Konvergenz für alle $|z| < R$ einer Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^\infty f_k z^k$ mit Koeffizienten $f_k \in \mathbb{C}$ auch die Konvergenz der Reihe $f(a) := \sum_{k=0}^\infty f_k\, a^k$ in A für alle $a \in A$ mit $\|a\| < R$ impliziert. Dies funktioniert also, wenn der Konvergenzradius größer als $\|a\|$ ist. Die Reihe $f(a) := \sum_{k=0}^\infty f_k\, a^k$ konvergiert aber nach Wurzeltest (siehe [20, 2.5.10]) auch dann (absolut), wenn ihr Konvergenzradius größer als $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = r(a)$ ist ($\overline{\lim}_k \sqrt[k]{|f_k|\,\|a^k\|} < 1 \Leftrightarrow r(a) = \lim_k \|a^k\|^{1/k} < \frac{1}{\overline{\lim}_k |f_k|^{1/k}}$). Unter diesen Vorausssetzungen ist $z \mapsto f(z)$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe die $\sigma(a)$ enthält.

Wir wollen nun versuchen $f(a)$ auch für Funktionen f zu definieren, die holomorph auf einer Umgebung von $\sigma(a)$ sind. Dabei können wir nicht mehr die Potenzreihenentwicklung verwenden, denn diese braucht nur im Inneren der größten ganz im Definitionsbereich von f liegenden Kreisscheibe konvergieren. Um eine Definition von $f(a)$ auch in diesen Fall zu erhalten, geben wir zuerst eine andere Beschreibung von $f(a)$ für Potenzreihen f mit Konvergenzradius $R > \|a\|$. Nach der Cauchy'schen Integral-Formel 6.20 gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

wobei c einen Kreis mit Radius $r < R$ parametrisiert. Analog können wir nun versuchen $f(a)$ als

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_c f(w)\,(w-a)^{-1}\, dw$$

zu definieren, wobei wir voraussetzen müssen, daß die Kurve c ganz in $\rho(a)$ verläuft, damit $(w-a)^{-1}$ einen Sinn macht für alle $w \in \mathrm{Bild}(c)$.

Wegen der Cauchy'schen Integralformel 6.20 ist $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{w^k}{w-z}\, dw = z^k$, folglich sollte analog $\frac{1}{2\pi i}\int_c w^k (w-a)^{-1}\, dw = a^k$ sein. Dies ist in der Tat der Fall, denn

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_c w^k (w-a)^{-1}\, dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_c w^{k-1}\left(1 - \frac{1}{w}a\right)^{-1} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_c w^{k-1} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{w^j} a^j\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^\infty \underbrace{\left(\int_c w^{k-(j+1)}\, dw\right)}_{2\pi i \delta_k^j} a^j = a^k\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_c f(w)\,(w-a)^{-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_c \sum_{k=0}^\infty f_k w^k\,(w-a)^{-1}\,dw \\ &= \sum_{k=0}^\infty f_k \frac{1}{2\pi i}\int_c w^k\,(w-a)^{-1}\,dw = \sum_{k=0}^\infty f_k\,a^k \end{aligned}$$

Diese Definition von $f(a)$ als Kurven-Integral macht nun auch Sinn, wenn c nicht notwendig ein Kreis ist, sondern irgendeine 1-Kette c in $\rho(a)\cap U$ und $f\in H(U)$ ist. Wir definieren also wie folgt:

6.26 Definition.

Für $a\in A$ sei $f:U\to\mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Umgebung U von $K:=\sigma(a)$ in $\mathbb{C}$ und c ein Jordan-Zykel wie in 6.21. Dann sei

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i}\int_c f(w)\,(w-a)^{-1}\,dw \in A.$$

Lemma.

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der 1-Kette ab.

Beweis. Es seien $c=\sum_{j=1}^n c_j$ und $d=\sum_{j=1}^m d_j$ zwei Jordan-Zykel wie im Lemma 6.21. Mit c_{n+j} für $j\in\{1,\dots,m\}$ bezeichnen wir die negativ durchlaufene Kurve d_j. Für $z\notin U\setminus\sigma(a)$ ist entweder $z\notin U$ oder $z\in\sigma(a)$. Im ersten Fall ist $\sum_{j=1}^{n+m}\operatorname{ind}_{c_j}(z)=\operatorname{ind}_c(z)-\operatorname{ind}_d(z)=0-0=0$ und im zweiten ist $\sum_{j=1}^{n+m}\operatorname{ind}_{c_j}(z)=\operatorname{ind}_c(z)-\operatorname{ind}_d(z)=1-1=0$. Also ist $\Gamma:=\sum_{j=1}^{n+m}c_j$ ein Zykel geschlossener Kurven in $U\setminus\sigma(a)$ und für alle $z\notin U\setminus\sigma(a)$ ist $\operatorname{ind}_\Gamma(z)=0$ und da $w\mapsto f(w)\,(w-a)^{-1}$ holomorph ist auf $U\setminus\sigma(a)$, folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz 6.20, daß

$$0=\int_\Gamma f(w)\,(w-a)^{-1}\,dw=\int_c f(w)\,(w-a)^{-1}\,dw-\int_d f(w)\,(w-a)^{-1}\,dw. \qquad\square$$

6.27 Keime

Da wir gerade gesehen haben, daß $f(a)$ nicht von der Auswahl des Jordan-Zykels c in $U\setminus\sigma(a)$ abhängt, ist $f_1(a)=f_2(a)$ falls f_1 und f_2 auf irgendeiner Umgebung U von $K:=\sigma(a)$ übereinstimmen. Wir benötigen also folgende

Definition.

Es sei $K\subseteq\mathbb{C}$ kompakt. Unter einem HOLOMORPHEN KEIM auf K verstehen wir eine Äquivalenz-Klasse von holomorphen Funktionen f, welche auf offenen Umgebungen $U\subseteq\mathbb{C}$ von K definiert sind. Dabei ist die Äquivalenz-Relation wie folgt gegeben: $f_1:U_1\to\mathbb{C}$ und $f_2:U_2\to\mathbb{C}$ heißen äquivalent, wenn eine offenen Umgebung $U\subseteq U_1\cap U_2$ von K existiert mit $f_1|_U=f_2|_U$. Mit $H(K):=H(K,\mathbb{C})$ bezeichnen wir die Menge aller holomorphen Keime auf K. Dies ist eine $\mathbb{C}$-Algebra, wenn wir die Operationen repräsentantenweise definieren.

Die Abbildungen $H(U,\mathbb{C})\to H(K)$, $f\mapsto[f]$, sind injektiv, falls jede Zusammenhangskomponente von U mindestens einen Punkt aus K enthält, denn dann folgt aus dem Eindeutigkeitssatz (siehe 6.14), daß zwei holomorphe Funktionen auf U die auf einer Umgebung von K übereinstimmen schon identisch sind. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß alle auftretenden Umgebungen U diese Eigenschaft haben, und somit daß $H(U,\mathbb{C})$ ein Teilraum ist von $H(K,\mathbb{C})$. Nach Definition ist $H(K)$ die Vereinigung dieser Teilräume, und wir können folglich $H(K)$ mit der finalen Struktur versehen.

6.28 Theorem (holomorpher Funktionenkalkül).

Für $a \in A$ definiert $[f] \mapsto f(a)$ den eindeutig bestimmten stetigen Algebra-Homomorphismus $H(\sigma(a)) \to A$, der id *auf a abbildet, also die Polynom-Auswertung $\sum_k f_k z^k \mapsto \sum_k f_k a^k$ erweitert.*

Beweis. Zuerst die Existenz-Aussage:
Nach obigem Lemma ist $f(a) := \frac{1}{2\pi i}\int_c f(w)\,(w-a)^{-1}\,dw$ wohldefiniert und hängt nicht von der Wahl von c und dem Repräsentanten des Keims f ab.

Klarerweise ist $f \mapsto f(a)$ linear.

Wir zeigen, daß dies auch ein Algebra-Homomorphismus ist. Seien dazu f und g zwei auf einem offenen $U \supseteq \sigma(a)$ definierte holomorphe Funktionen. Es sei Λ ein passender Jordan-Zykel in U und Γ ein solcher in $\mathrm{Inn}(\Lambda)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f(a)\,g(a) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_\Gamma f(w)\,(w-a)^{-1}\,dw\right)\left(\int_\Lambda g(z)\,(z-a)^{-1}\,dz\right)\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma\int_\Lambda f(w)\,g(z)\,(w-a)^{-1}\,(z-a)^{-1}\,dz\,dw\\
&\overset{\boxed{6.23.2}}{=\!=\!=} -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma\int_\Lambda f(w)\,g(z)\,\frac{r_a(w)-r_a(z)}{z-w}\,dz\,dw\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma f(w)\left(\int_\Lambda \frac{g(z)}{z-w}\,dz\right)(w-a)^{-1}\,dw+\\
&\quad+\frac{1}{4\pi^2}\int_\Lambda g(z)\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{z-w}\,dw\right)(z-a)^{-1}\,dz.
\end{aligned}$$

Für alle $z \in \mathrm{Bild}(\Lambda) \subseteq \mathrm{Äuß}(\Gamma)$ gilt nach dem Cauchy'schen Satz $\boxed{6.20}$, daß $\int_\Gamma \frac{f(w)}{z-w}\,dw = 0$. Für alle $w \in \mathrm{Bild}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Inn}(\Lambda)$ gilt $\int_\Lambda \frac{g(z)}{z-w}\,dz = 2\pi i\,g(w)$, also ist

$$f(a)\,g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\,g(w)\,(w-a)^{-1}\,dw = (f\,g)(a).$$

Nun zur Stetigkeit. Wir müssen nur zeigen, daß $f \mapsto f(a)$ von $H(U) \to A$ stetig ist, bzw. da $H(U)$ ein Fréchet-Raum ist bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von U, daß diese Abbildung beschränkt ist. Sei also $\mathcal{F} \subseteq H(U)$ beschränkt. Dann ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt auf dem Bild von c, also existiert eine Konstante K mit $\|f|_{\mathrm{Bild}(c)}\|_\infty \le K$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Weiters ist $r_a(\mathrm{Bild}(c))$ kompakt, also beschränkt und folglich existiert eine Konstante K_1 mit $\|(w-a)^{-1}\| \le K_1$ für alle $w \in \mathrm{Bild}(c)$. Insgesamt ist folglich $\|f(a)\| \le \frac{1}{2\pi}\,K\,K_1\,L(c)$, und somit ist $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt.

Sei schließlich $f(z) = \sum_k f_k\,z^k$ ein Polynom, oder allgemeiner eine Potenzreihe, die auf einer Umgebung von $\sigma(a)$ konvergiert. Dann ist $f(a) = \sum_{k=0}^\infty f_k\,a^k$, wie wir bereits oben gezeigt haben.

Nun zur Eindeutigkeits-Aussage:
Sei τ solch ein Algebra-Homomorphismus. Als Algebra-Homomorphismus der id auf a abbildet gilt $\tau(f) = f(a)$ für alle Polynome $f \in \mathbb{C}[z]$. Sei nun $f = \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion mit Polen außerhalb $\sigma(a)$. Also dürfen wir annehmen, daß q ein auf $\sigma(a)$ nicht verschwindendes Polynom ist, und somit $\frac{1}{q} \in H(\sigma(a))$ liegt. Dann

gilt aber $1 = \tau(1) = \tau(q\frac{1}{q}) = \tau(q)\,\tau(\frac{1}{q})$, also ist $\tau(\frac{1}{q}) = \tau(q)^{-1}$ und somit gilt $\tau(\frac{p}{q}) = \tau(p)\cdot\tau(q)^{-1} = p(a)\cdot q(a)^{-1} = \frac{p}{q}(a) = f(a)$.

Sei nun $f \in H(\sigma(a))$ beliebig, d.h. o.B.d.A. $f \in H(U,\mathbb{C})$ für eine offene Umgebung U von $\sigma(a)$. Sei $K \subseteq U$ eine kompakte Menge, welche $\sigma(a)$ in ihrem Inneren enthält. Nach dem Runge'schen Approximations-Satz 5.3.6 existiert eine Folge rationaler Funktionen f_n mit Polen außerhalb K, welche auf K gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergieren aber die Keime $[f_n]$ gegen jenen von f, und aus der Stetigkeits-Aussage folgt $f(a) = \lim f_n(a) = \lim \tau(f_n) = \tau(f)$. □

6.29 Spektral-Abbildungssatz.

Für $f \in H(\sigma(a))$ gilt $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

Beweis. Es sei $f \in H(U)$ mit offenen $U \supseteq \sigma(a)$.
($\supseteq$) Für $z \in \sigma(a)$ ist

$$g : w \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf U. Angenommen $f(z) \notin \sigma(f(a))$. Dann wäre $(z - a)\,g(a) = f(z) - f(a)$ invertierbar und da die beiden Faktoren miteiander kommutieren damit auch $z - a$ nach 6.2.3, d.h. $z \notin \sigma(a)$, ein Widerspruch.

($\subseteq$) Umgekehrt sei $z \notin f(\sigma(a))$. Dann ist $g : w \mapsto (z - f(w))^{-1}$ eine holomorphe Funktion auf der Umgebung $U \setminus f^{-1}(z)$ von $\sigma(a)$ mit $1 = g(a)\,(z - f(a))$. Also wäre $z - f(a)$ invertierbar nach 6.2.3, d.h. $z \notin \sigma(f(a))$. □

6.30 Lemma.

Sei A eine Banach-Algebra und $a, b \in A$. Dann ist $\sigma(a\,b) \cup \{0\} = \sigma(b\,a) \cup \{0\}$.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $\lambda - a\,b \in \operatorname{inv}(A) \Leftrightarrow \lambda - b\,a \in \operatorname{inv}(A)$ für alle $\lambda \neq 0$. O.B.d.A. sei $\lambda = 1$ und $1 - a\,b$ invertierbar mit $u := (1 - a\,b)^{-1}$. Wir behaupten, daß $1 - b\,a$ invertierbar ist und $(1 - b\,a)^{-1} = 1 + b\,u\,a$:

$$\begin{aligned}(1 - b\,a)\,(1 + b\,u\,a) &= 1 - b\,a + b\,u\,a - b\,a\,b\,u\,a = 1 + b\,(-1 + u - a\,b\,u)\,a \\ &= 1 + b\,((1 - a\,b)\,u - 1)\,a = 1 \\ (1 + b\,u\,a)\,(1 - b\,a) &= 1 + b\,u\,a - b\,a - b\,u\,a\,b\,a = 1 + b\,(u - 1 - u\,a\,b)\,a \\ &= 1 + b\,(u\,(1 - a\,b) - 1)\,a = 1. \quad \square\end{aligned}$$

6.31 Definition. Kommutante.

Wir bezeichnen die Menge der mit allen b in einer Menge $B \subseteq A$ kommutierenden Elemente als KOMMUTANTE $B^k := \{x \in A : x\,b = b\,x \ \forall b \in B\}$ von B. In der Algebra sagt man dafür auch ZENTRALISATOR von B in A.

Es ist $B \mapsto B^k$ eine antitone Abbildung auf der Potenzmenge von A und es gilt $B_1 \subseteq B_2^k \Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1^k$, denn beide Seiten bedeuten, daß $\forall b_1, b_2 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2 \Rightarrow b_1\,b_2 = b_2\,b_1$.

Somit ist $B \subseteq (B^k)^k =: B^{kk}$ wegen $B^k \subseteq B^k$.

Außerdem gilt immer $B^k = B^{kkk}$, denn aus $B \subseteq B^{kk}$ folgt $B^k \supseteq (B^{kk})^k$ und andererseits gilt $B^k \subseteq (B^k)^{kk}$.

Beachte, daß B^k eine abgeschlossene (bzgl. jeder Topologie für die die Multiplikation getrennt stetig ist) Teilalgebra von A für jede Teilmenge $B \subseteq A$ ist, denn $x_1\,x_2\,b = x_1\,b\,x_2 = b\,x_1\,x_2$.

Weiters ist $B^k = B_1^k$, falls B_1 den Abschluß der von B erzeugten Teilalgebra in einer Topologie bzgl. welcher die Multiplikation getrennt stetig ist bezeichnet.

Schließlich ist klarerweise B genau dann kommutativ, wenn $B \subseteq B^k$ gilt. Somit ist für kommutative B auch B^{kk} kommutativ, denn $B \subseteq B^k \Rightarrow B^{kk} \subseteq B^k \Rightarrow B^{kk} \subseteq B^{kkk} = (B^{kk})^k$.

6.32 Folgerung.

Für $f \in H(\sigma(a))$ kommutiert $f(a)$ mit allen $b \in A$, die mit a kommutieren, d.h. $f(a) \in \{a\}^{kk}$, bzw. auch $\{f(a) : f \in H(\sigma(a))\}^k = \{a\}^k$.

Beweis. Wegen des Approximationssatzes 5.3.6 von Runge ist $\{a\}^k = \{f(a) : f \in H(\sigma(a))\}^k$ (für Polynome f ist das offensichtlich. Daraus folgt leicht (siehe 6.28), daß es auch für rationale Funktionen mit Polen außerhalb $\sigma(a)$ gilt) und somit $f(a) \in \{a\}^{kk}$ für alle $f \in H(\sigma(a))$. □

Im endlich-dimensionalen verwendet man die Zerlegung des charakteristischen Polynoms in Primfaktoren um eine direkte Summenzerlegung (diagonale Blockdarstellung) des Operators zu erhalten. Dies können wir nun auf Elemente einer Banach-Algebren übertragen. Da wir da allerdings keinen Raum zur Verfügung haben, auf denen diese Elemente operieren, und wir die Summanden also nicht auf invariante Teilräume einschränken können enthält das Spektrum der Summanden die 0.

6.33 Folgerung.

Es sei $a \in A$ und $\sigma(a) = K_1 \sqcup K_2$ eine Zerlegung in abgeschlossene disjunkte Mengen. Dann gibt es ein idempotentes $e \in \{a\}^{kk}$ (d.h. $e^2 = e$) und für $a_1 := a\,e$ und $a_2 := a\,(1-e)$ gilt $a = a_1 + a_2$, $a_1\,a_2 = 0 = a_2\,a_1$ und $\sigma(a_j) = K_j \cup \{0\}$ für $j \in \{1, 2\}$.

Beweis. Die Beweisidee besteht darin dies zuerst für das Urbild $\mathrm{id} \in H(\sigma(a))$ unter dem Algebra-Homomorphismus $H(\sigma(a)) \to \{a\}^{kk} \subseteq A$ aus 6.28 zu zeigen und dann diesen anzuwenden. Für $j \in 1, 2$ seien U_j zwei disjunkte offene Umgebungen von K_j. Dann ist die charakteristische Funktion $\chi_{U_1} \in H(U_1 \cup U_2)$. Also ist $e := \chi_{U_1}(a) \in A$ wohldefiniert. Nach 6.32 kommutiert e mit allen b, welche mit a kommutieren, insbesonders mit a selbst. Wegen $\chi_{U_1}^2 = \chi_{U_1}$ ist e idempotent. Weiters ist $1-e = (1-\chi_{U_1})(a) = \chi_{U_2}(a)$. Es ist $1 = e+(1-e)$ und $e(1-e) = e-e^2 = e-e = 0$ also gelten alle behaupteten Gleichungen für $a_1 := a\,e = e\,a$ und $a_2 := a\,(1-e) = (1-e)\,a$. Aus dem Spektral-Abbildungssatz 6.29 folgt $\sigma(a_j) = \sigma((\mathrm{id}\cdot\chi_{U_j})(a)) = (\mathrm{id}\cdot\chi_{U_j})(K_1 \sqcup K_2) = \mathrm{id}(K_j) \cup \{0\} = K_j \cup \{0\}$. □

Abhängigkeit des Spektrums von der Algebra

Es sei A eine Banach-Algebra und B eine Teil-Banach-Algebra mit $a \in B$. Dann ist offensichtlich $\rho_B(a) \subseteq \rho_A(a)$ und somit $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_B(a)$. Wir wollen nun untersuchen inwieweit die beiden Spektren verschieden sein können. Dazu vorerst ein eher typisches Beispiel.

6.34 Beispiel für die Abhängigkeit des Spektrums von der Algebra.

Es sei $A := C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$ und B die Teil-Banach-Algebra die von der Identität $a : z \mapsto z$ erzeugt wird. Dann ist $\sigma_A(a) = \partial\mathbb{D}$ und $\sigma_B(a) = \overline{\mathbb{D}}$:
Nach 6.7.1 ist $\sigma_A(a) = a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Da $\|a\|_\infty = 1$ ist $\sigma_B(a) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Angenommen es gäbe ein $\lambda \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \sigma_B(a)$, d.h. $\exists b \in B$ mit $(\lambda - a)\,b = 1$ also $(\lambda - z)\,b(z) = 1$

für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Wegen $b \in B$ existiert eine Folge von Polynomen b_n, welche auf $\partial\mathbb{D}$ gleichmäßig gegen b konvergiert. Nach dem Maximum-Modulus Prinzip 6.17 bilden die b_n eine Cauchyfolge in $C(\overline{\mathbb{D}})$, konvergieren also gleichmäßig gegen ein $\tilde{b} \in C(\overline{\mathbb{D}})$, welches somit holomorph auf $\mathbb{D}$ ist und mit b auf $\partial\mathbb{D}$ übereinstimmt. Auf die gleiche Weise erhalten wir, daß $(\lambda - z)\, b_n(z) - 1 \to 0$ gleichmäßig für $z \in \overline{\mathbb{D}}$, also gilt $(\lambda - z)\tilde{b}(z) = 1$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Für $z := \lambda$ erhalten wir folglich den Widerspruch $0 = (\lambda - \lambda)\, \tilde{b}(\lambda) = 1$. Also gilt $\sigma_B(a) = \overline{\mathbb{D}}$.

6.35 Definition.

Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Dann ist die *polynomial konvexe Hülle* $\hat{K}$ von K definiert durch:

$$\widehat{K} := \{z \in \mathbb{C} : |p(z)| \le \|p|_K\|_\infty \forall p \in \mathbb{C}[z]\},$$

also die Menge aller Punkte auf denen kein Polynom vom Betrag größere Werte annimmt als auf K. Die Menge K heißt *polynomial konvex* falls $K = \widehat{K}$.

Das Komplement $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ hat als offene Teilmenge von $\mathbb{C}_\infty$ nur abzählbar viele Komponenten: Einerseits die in $\mathbb{C}$ unbeschränkte Komponente, also jene welche ∞ enthält, und die in $\mathbb{C}$ beschränkten Komponenten, die sogenannten LÖCHER von K.

Lemma.

Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Dann ist das Komplement $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}$ von $\widehat{K}$ die unbeschränkte Komponente des Komplements $\mathbb{C} \setminus K$ von K. Also entsteht $\widehat{K}$ durch Ausfüllen aller Löcher von K. Und K ist genau dann polynomial konvex, wenn das Komplement von K zusammenhängend ist.

Beweis. Es sei $\mathbb{C}_\infty \setminus K = U_\infty \sqcup \bigsqcup_{k \ne \infty} U_k$ die Zerlegung in die Zusammenhangs-Komponenten. Dabei sei U_∞ die unbeschränkte Komponente. Es sei $L := \mathbb{C}_\infty \setminus U_\infty = K \sqcup \bigsqcup_{k \ne \infty} U_k$.

Wir behaupten $L \subseteq \widehat{K}$:
Wegen $L = K \sqcup \bigsqcup_k U_k$ und $K \subseteq \widehat{K}$ genügt zu zeigen $U_k \subseteq \widehat{K}$ für $k \ne \infty$. Sei dazu vorerst $x \in \partial U_k = \overline{U_k} \setminus U_k \subseteq \mathbb{C} \setminus U_k$. Und da auch $x \notin U_j$ für $j \ne k$ ist (da U_j offen und disjunkt zu U_k ist), gilt $x \in K$. Nach dem Maximum-Modulus Prinzip 6.17 ist $U_k \subseteq \widehat{K}$.

Angenommen $L \subset \widehat{K}$:
Sei $z \in \widehat{K} \setminus L$. Dann ist $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von L. Da $\mathbb{C}_\infty \setminus L = U_\infty$ zusammenhängend ist existiert nach dem Runge'schen Approximations-Satz 5.3.8 eine Folge von Polynomen p_n mit $\sup_{w \in L} |p_n(w) - \frac{1}{w-z}| \to 0$, . Es sei $q_n : w \mapsto (w - z)\, p_n(w)$. Dann gilt $\|(q_n - 1)|_L\|_\infty \to 0$. Wegen $|q_n(z) - 1| = |0 - 1| = 1$ folgt $z \notin \widehat{K}$, denn andernfalls wäre $1 = |q_n(z) - 1| \le \sup\{|q_n(w) - 1| : w \in \widehat{K}\} = \sup\{|q_n(w) - 1| : w \in K\} \le \sup\{|q_n(w) - 1| : w \in L\} \to 0$, ein Widerspruch. □

6.36 Theorem.

Es sei A eine Banach-Algebra, B eine Teil-Banach-Algebra, und $a \in B$. Dann entsteht $\sigma_B(a)$ durch vollständiges Ausfüllen einiger Löcher von $\sigma_A(a)$. Insbesonders gilt:

1. *$\sigma_B(a) \supseteq \sigma_A(a)$;*
2. *$\partial\sigma_B(a) \subseteq \partial\sigma_A(a)$;*

3. $\widehat{\sigma_B(a)} = \widehat{\sigma_A(a)}$.

4. *Falls B als Banach-Algebra von a erzeugt wird, so ist $\sigma_B(a) = \widehat{\sigma_A(a)}$.*

Beweis. (1) ist offensichtlich, da ein Inverses zu $z - a$ in B auch ein solches in A ist.

(2) Sei $z \in \partial\sigma_B(a)$. Angenommen $z \notin \sigma_A(a)$. Dann existiert $(z-a)^{-1} \in A$. Da $z \in \partial\sigma_B(a)$ existiert eine Folge $z_n \notin \sigma_B(a)$ mit $z_n \to z$. Also existiert $(z_n-a)^{-1} \in B$ und wegen der Stetigkeit der Inversion in A gilt $(z_n-a)^{-1} \to (z-a)^{-1}$. Da aber B abgeschlossen ist, folgt $(z-a)^{-1} \in B$, d.h. $z \notin \sigma_B(a) \supseteq \partial\sigma_B(a)$, ein Widerspruch. Damit muß aber $z \in \partial\sigma_A(a)$ liegen, denn das Innere von $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_B(a)$ muß im Inneren von $\sigma_B(a)$ und somit in $\mathbb{C} \setminus \partial\sigma_B(a)$ liegen.

(3) Wegen $\sigma_B(a) \supseteq \sigma_A(a)$ gilt $\widehat{\sigma_B(a)} \supseteq \widehat{\sigma_A(a)}$. Angenommen $\exists z_0 \in U_\infty := \widehat{\sigma_B(a)} \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus \widehat{\sigma_A(a)})$. Sei $z : [0,1] \to U_\infty \subseteq \mathbb{C}_\infty$ eine Kurve in der wegen dem Lemma in 6.35, unbeschränkten Zusammenhangskomponente U_∞ z_0 mit ∞ verbindet und sei $t_0 := \sup\{t : z(t) \in \widehat{\sigma_B(a)} = \sigma_B(a) \sqcup \bigsqcup_{k\neq\infty} U_k\}$. Dann ist $z(t_0) \in \sigma_B(a)$ nicht im Inneren von $\sigma_B(a)$, also $z_0 \in \partial\sigma_B(a) \subseteq \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$, ein Widerspruch.

(4) Nach 3 gilt immer $\sigma_B \subseteq \widehat{\sigma_B} = \widehat{\sigma_A}$. Angenommen es gäbe ein $z \in \widehat{\sigma_A} \setminus \sigma_B$. Dann existiert $(z-a)^{-1} \in B \subseteq A$. Da B der Abschluß der Polynome in a ist, existiert eine Folge von Polynomen p_n mit $p_n(a) \to (z-a)^{-1}$. Es sei $q_n : w \mapsto (z-w)\, p_n(w)$. Dann gilt $q_n(a) = (z-a)p_n(a) \to (z-a)\,(z-a)^{-1} = 1$. Nach dem Spektral-Abbildungssatz 6.29 gilt: $\sigma_A\Big((q_n-1)(a)\Big) = (q_n-1)\Big(\sigma_A(a)\Big)$ und somit nach 6.25

$$\begin{aligned}\|q_n(a)-1\| \geq r_A(q_n(a)-1) &:= \sup\Big\{|w| : w \in \sigma_A(q_n(a)-1) = q_n(\sigma_A(a))-1\Big\}\\ &= \sup\Big\{|q_n(w)-1| : w \in \sigma_A(a)\Big\} \geq |q_n(z)-1| = 1,\end{aligned}$$

da $z \in \widehat{\sigma_A(a)}$, ein Widerspruch zu $q_n(a) \to 1$.

Bleibt noch z.z. daß $\sigma_B(a)$ durch vollständiges Ausfüllen gewisser Löcher von $\sigma_A(a)$ entsteht.
Sei dazu U ein Loch von σ_A. Dann ist $U = U_1 \sqcup U_2$, wobei $U_1 := U \cap \sigma_B = U \cap (\sigma_B \setminus \partial\sigma_B)$, denn $\partial\sigma_B \subseteq \partial\sigma_A \subseteq \sigma_A \subseteq \mathbb{C} \setminus U$ nach 2, und $U_2 := U \cap \rho_B$. Somit sind U_1 und U_2 offen. Da U als Loch zusammenhängend ist, ist eine der beiden Mengen leer, also gehört das ganze Loch U zu σ_B oder zu ρ_B. □

Kommutative Banach-Algebren

Wir wollen nun eine Dualitätstheorie für Banach-Algebren A entwickeln. Anstatt der linearen Funktionale sollten wir dazu wohl Banach-Algebra-Homomorphismen $A \to \mathbb{C}$ verwenden. Wir sollten also damit beginnen, Algebra-Homomorphismen zu studieren. Da Stetigkeit linearer Funktionale nach 3.4.2 durch Abgeschlossenheit des Kerns beschrieben werden kann, sollten wir insbesonders die Kerne von Algebra-Homomorphismen studieren.

6.37 Definition (Ideale).

Eine Teilmenge $I \subseteq A$ einer (Banach-)Algebra A heißt Ideal, falls I ein linearer Teilraum ist und mit $i \in I$ und $a \in A$ auch $i\,a \in I$ und $a\,i \in I$.

Ein Ideal heißt ECHT, falls $I \neq A$, oder äquivalent falls $1 \notin I$, oder weiters äquivalent $\mathrm{inv}(A) \cap I = \emptyset$: Die Richtungen ($\Leftarrow$) sind offensichtlich. Umgekehrt sei $i \in I$ invertierbar in A und $a \in A$ beliebig. Dann ist $a = i^{-1}\, i\, a \in I$.

Der Kern jedes Algebra-Homomorphismus ist klarerweise ein (wegen $f(1) = 1$) echtes Ideal, und umgekehrt definiert jedes Ideal $I \subset A$ einer Algebra A eine Algebra A/I und einen Algebra-Homomorphismus $\pi : A \to A/I$ mit Kern I: Damit die Projektion $\pi : A \to A/I$ ein Algebra-Homomorphismus wird, muß man die Multiplikation durch $(a + I) \cdot (b + I) := a \cdot b + I$ definieren. Da I ein Ideal ist, macht diese Definition Sinn, denn $(a+i)\cdot(b+j) = a\cdot b+a\cdot j+i\cdot b+i\cdot j \in a\cdot b+A\cdot I+I\cdot A+I\cdot I \subseteq a\cdot b+I$ für $i, j \in I$.

Ein Ideal I in A heißt *maximal*, falls es maximal unter allen echten Idealen bezüglich der Inklusion ist.

Lemma.

Die maximalen Ideale einer kommutativen Algebra sind genau die Kerne von surjektiven Algebra-Homomorphismen mit Werten in Divisions-Algebren (d.h. wo jedes Element ungleich 0 invertierbar ist).

Beweis. Sei $f : A \to B$ ein surjektiver Algebra-Homomorphismus (zwischen nicht notwendig kommutativen Algebren) und jedes $0 \neq b \in B$ sei invertierbar. Dann ist $\mathrm{Ker}\, f$ ein maximales Ideal, denn wenn $I \supset \mathrm{Ker}\, f$ ein Ideal ist, dann ist leicht zu sehen, daß $f(I) \neq \{0\}$ ein Ideal in B ist, also ein invertierbares Element $b = f(i)$ mit $i \in I$ enthält. Es sei $f(a) = b^{-1}$. Dann ist $f(1-a\, i) = 0$, d.h. $1 \in \mathrm{Ker}\, f + a\, i \subseteq I$, also ist $I = A$.

Sei umgekehrt $I \subset A$ ein maximales Ideal. Und sei $\pi : A \to A/I$ die kanonische Quotienten-Abbildung. Weiters sei $0 \neq b \in A/I$. Dann existiert ein $a \in A \setminus I$ mit $\pi(a) = b$. Es sei I_a das von I und a erzeugte Ideal. Wegen der Kommutativität ist $I_a = I + A\, a$. Aus der Maximalität von I folgt $1 \in I_a$, d.h. es gibt $i \in I$ und $a' \in A$ mit $1 = i + a'\, a$, also gilt $1 = 0 + \pi(a')\, b$ in A/I. Folglich ist b invertierbar. □

6.38 Satz von Gelfand-Mazur.

Es sei A eine Banach-Algebra mit $\mathrm{inv}(A) = A \setminus \{0\}$ *(also eine Divisions-Algebra). Dann ist $A = \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $a \in A$. Dann ist $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sei also $z \in \sigma(a)$. Dann hat $z\,1 - a$ kein Inverses, also ist $z\,1 - a = 0$, d.h. $a \in \mathbb{C}\,1$. □

6.39 Proposition. Automatische Stetigkeit.

Es sei A eine Banach-Algebra und $f : A \to \mathbb{C}$ ein Algebra-Homomorphismus. Dann ist f stetig und $\|f\| = 1$.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß $|f(a)| \leq \|a\|$ für alle $a \in A$. Angenommen nicht: Dann existiert $b := (1 - \frac{1}{f(a)}a)^{-1}$ mit $1 = b(1 - \frac{1}{f(a)}a) = b - \frac{1}{f(a)}ba$ nach 6.2.2 und somit $1 = f(1) = f(b) - \frac{1}{f(a)}f(b)f(a) = 0$, ein Widerspruch. Gleichheit gilt, da $f(1) = 1$ ist. □

6.40 Lemma.

Es sei A eine Abelsche Banach-Algebra. Dann existiert eine Bijektion

$$\mathrm{Alg}(A, \mathbb{C}) \rightleftarrows \{I \lhd A : I \textit{ ist maximal}\}$$
$$f \mapsto \mathrm{Ker}(f)$$

Dabei ist das einem maximalen Ideal zugeordnete $f : A \to \mathbb{C}$ durch $f(a) \cdot 1 = \pi(a)$ mit der kanonischen Projektion $\pi : A \to A/I$ festgelegt.

Beweis. ($\mapsto$) ist wohldefiniert nach dem Lemma in 6.37.

($\leftarrow$) Sei nun I ein maximales Ideal. Dann ist $\mathrm{Inv}(A) \cap I = \emptyset$ und, da $\mathrm{inv}(A)$ offen ist, ist auch $\mathrm{Inv}(A) \cap \bar{I} = \emptyset$. Da $\bar{I}$ klarerweise wieder ein Ideal ist, folgt aus der Maximalität, daß $I = \bar{I}$, d.h. daß I abgeschlossen ist.

Wir behaupten nun, daß für jedes abgeschlossene echte Ideal $I \lhd A$ der Banach-Raum A/I eine Banach-Algebra ist.
Nach 6.37 definiert $(a + I) \cdot (b + I) := a \cdot b + I$ eine Multiplikation die A/I zu einer Algebra macht und $\pi : A \to A/I$ zu einen Algebra-Homomorphismus. Die Quotienten-Norm ist submultiplikativ, denn

$$\begin{aligned}
\|(a + I) \cdot (b + I)\| &= \|a \cdot b + I\| \\
&= \inf\{\|a \cdot b + i\| : i \in I\} \\
&\le \inf\{\|a \cdot b + k\| : k = a \cdot j + i \cdot b + i \cdot j \text{ mit } i, j \in I\} \\
&= \inf\{\|(a + i) \cdot (b + j)\| : i, j \in I\} \\
&\le \inf\{\|a + i\| \cdot \|b + j\| : i, j \in I\} \\
&= \inf\{\|a + i\| : i \in I\} \cdot \inf\{\|b + j\| : j \in I\} \\
&= \|a + I\| \cdot \|b + I\|
\end{aligned}$$

Es ist $\|1 + I\| = \inf\{\|1 + i\| : i \in I\} \le \|1 + 0\| = 1$. Angenommen $\|1 + I\| < 1$. Dann wäre $\|1 + I\| = \|(1 + I)^2\| \le \|1 + I\|^2 < \|1 + I\|$ ein Widerspruch.

Da I maximal und A Abel'sch ist, ist A/I eine Divisionsalgebra nach 6.37, und somit $A/I = \mathbb{C} \cdot 1 \cong \mathbb{C}$ nach 6.38. Also $f : A \to A/I \cong \mathbb{C}$ der gesuchte Algebra-Homomorphimus mit $f(a) \cdot 1 = \pi(a)$.

Offensichtlich sind die beiden Abbildungen invers zueinander, denn einerseits ist $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\pi) = I$ und andererseits sind zwei Algebra-Homomorphismen f_1 und f_2 von $A \to B$ die gleichen Kern besitzen ident, denn $f_2(a) = f_2(a - f_1(a)\,1) + f_2(f_1(a)\,1) = f_1(a)\,f_2(1) = f_1(a)$, da $a - f_1(a)\,1 \in \mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Ker}(f_2)$. □

6.41 Lemma. Abelisierung von Banach-Algebren.

Es sei A eine Banach-Algebra. Mit A' bezeichnen wir das von $\{ab - ba : a, b \in A\}$ erzeugte abgeschlossene Ideal von A. Dann ist $A_{Abel} := A/A'$ eine kommutative Banach-Algebra und die natürliche Projektion $A \to A_{Abel}$ ein Banach-Algebra-Homomorphismus mit folgender universeller Eigenschaft: Zu jedem Banach-Algebra-Homomorphismus $f : A \to B$ mit Werten in einer kommutativen Banach-Algebra B existiert genau ein Banach-Algebra-Homomorphismus $f_{Abel} : A_{Abel} \to B$ welcher folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & A_{Abel} \arrow[dl, dotted, "\exists!"', "f_{Abel}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir haben im Beweis von 6.40 gezeigt, daß A/A' eine Banach-Algebra ist, da A' ein abgeschlossenes Ideal ist. Offensichtlich ist A/A' kommutativ, denn $(a+A')\,(b+A') - (b+A')\,(a+A') = (ab - ba) + A' \subseteq A'$. Sei also B eine kommutative Banach-Algebra und $f : A \to B$ ein Banach-Algebra-Homomorphismus. Dann ist $f(ab - ba) = f(a)\,f(b) - f(b)\,f(a) = 0$ und, da f stetig ist, auch $A' \subseteq \mathrm{Ker}\, f$. Also faktorisiert f zu einer eindeutigen stetigen linearen Abbildung $f_{Abel} := \tilde{f} : A/A' \to B$. Es ist $\tilde{f}$ ein Algebra-Homomorphismus, denn $\tilde{f}((a+A')\,(b+A')) = \tilde{f}(a\,b+A') = f(a\,b) = f(a)\,f(b) = \tilde{f}(a+A')\,\tilde{f}(b+A')$. □

6.42 Von $\mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$ zurück zu A

Wir wollen nun feststellen, inwieweit man aus der Menge $X := \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$ aller Algebra-Homomorphismen $A \to \mathbb{C}$ die Algebra A zurückgewinnen kann.
Da alle diese Homomorphismen über die Abelisierung faktorisieren, können wir höchstens Abelsche Banach-Algebren aus ihren $\mathbb{C}$-wertigen Homomorphismen zurückgewinnen. Sehen wir uns also vorerst unser Erzbeispiel $A := C(X,\mathbb{C})$ einer kommutativen Banach-Algebra an und versuchen wir die Algebra-Homomorphismen $A \to \mathbb{C}$ möglichst explizit zu beschreiben. Klarerweise definiert jedes $x \in X$ einen solchen Homomorphismus $\mathrm{ev}_x : A \to \mathbb{C}$ durch $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$. Diese Zuordnung $\delta : x \mapsto \mathrm{ev}_x$ ist injektiv, da die stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ auf kompakten Räumen X Punkte-trennend sind (Spezialfall des Lemmas von Urysohn).

Wir zeigen nun, daß die Zuordnung δ surjektiv ist:
Es sei dazu $\varphi : A \to \mathbb{C}$ ein Algebra-Homomorphismus. Wir suchen einen Punkt $x \in X$ mit $\varphi(f) = f(x)$ für alle $f \in A$. Sei dazu $I := \mathrm{Ker}\,\varphi$. Für jedes $f \in I$ betrachten wir die abgeschlossene Nullstellen-Menge $f^{-1}(0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Diese ist nicht leer, denn sonst wäre f invertierbar in A, d.h. $1 \in I$. Diese Familie der Nullstellen-Mengen hat die endliche Durchschnitts-Eigenschaft, denn $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (f\bar{f} + g\bar{g})^{-1}(0)$ und mit $f,g \in I$ ist auch $f\bar{f} + g\bar{g}$ in diesem Ideal. Da X kompakt ist, ist folglich der Durchschnitt $\bigcap_{f\in I} f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Sei also $x \in f^{-1}(0)$ für alle $f \in I$. Für beliebiges $f \in A$ ist dann $f - \varphi(f)\,1 \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$ und somit $0 = (f - \varphi(f)\,1)(x) = f(x) - \varphi(f)$, d.h. $\varphi = \mathrm{ev}_x$.

Wir können also die Punkte von X mit den $\mathbb{C}$-wertigen Algebra-Homomorphismen auf $A := C(X,\mathbb{C})$ identifizieren. Wenn wir die Algebra A zurückgewinnen wollen, so müssen wir $\mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$ so mit einer Hausdorff-Topologie versehen, daß die Abbildung $X \to \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$ stetig ist (dann ist sie automatisch ein Homöomorphismus da X kompakt ist). Es muß also aus $x_i \to x$ folgen, daß $\mathrm{ev}_{x_i} \to \mathrm{ev}_x$. Punktweise bei $f \in A$ ist das erfüllt, denn $\mathrm{ev}_{x_i}(f) = f(x_i) \to f(x)$.

Wir haben somit folgendes gezeigt:

Proposition.

Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $A := C(X,\mathbb{C})$. Wenn wir $\mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, also als Teilraum von $\mathbb{C}^A = \prod_{a\in A}\mathbb{C}$ auffassen, so ist die Abbildung $\delta : X \to \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}) = \mathrm{Alg}(C(X,\mathbb{C}),\mathbb{C})$ ein Homöomorphismus. □

Allgemeiner heißt ein vollständig regulärer topologischer Raum reell-kompakt, falls diese Abbildung $\delta : X \to \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}) = \mathrm{Alg}(C(X,\mathbb{C}),\mathbb{C})$ ein Homöomorphismus ist, siehe [**26**, 2.5].

Für die Banach-Algebra $A := C(X,\mathbb{C})$ erhalten wir daraus einen Isomorphimus $\delta^* : C(\mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}),\mathbb{C}) \cong C(X,\mathbb{C}) = A$. Beachte, daß $(\delta^*)^{-1} : A \to C(\mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}),\mathbb{C})$ gegeben ist durch $\delta : a \mapsto \mathrm{ev}_a(: \varphi \mapsto \varphi(a))$, denn

$$(\delta^* \circ \delta)(f)(x) = \delta^*(\delta(f))(x) = \delta(f)(\delta(x)) = \delta(x)(f) = f(x)$$

Wir wollen dies nun soweit wie möglich auf beliebige (kommutative) Banach-Algebren A verallgemeinern. Dazu versehen wir $\sigma(A) := \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$ ebenfalls mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Wenn wir die Kompaktkeit von $\sigma(A)$ beweisen können, dann ist $C(\sigma(A),\mathbb{C})$ bzgl. gleichmäßiger Konvergenz eine Banach-Algebra und $\delta : A \to C(\sigma(A),\mathbb{C})$, $a \mapsto \mathrm{ev}_a(: \varphi \mapsto \varphi(a))$ ein wohldefinierter Algebra-Homomorphismus, den wir nun genauer untersuchen.

6.43 Gelfand'scher Darstellungssatz.

Es sei A eine kommutative Banach-Algebra. Dann ist ihr Spektrum $\sigma(A) := \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}) =: X$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ein kompakter Hausdorff-Raum. Die GELFAND-TRANSFORMATION

$$\mathcal{G} = \delta : A \to C(X,\mathbb{C}) = C\Big(\mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}),\mathbb{C}\Big), \quad a \mapsto \mathrm{ev}_a(: \varphi \mapsto \varphi(a))$$

ist ein Banach-Algebra Homomorphismus mit dem Radikal von A als Kern

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{G}) = \mathrm{Rad}(A) := \bigcap\{I : I \textit{ ist maximales Ideal von } A\}.$$

Für $a \in A$ gilt $\sigma_A(a) = \sigma_{C(X,\mathbb{C})}(\mathcal{G}(a))$ und $\|\mathcal{G}(a)\|_\infty = r(a)$.

Beweis. Offensichtlich ist $X := \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$ abgeschlossen in $\mathbb{C}^A$, denn aus $X \ni \varphi_i \to \varphi$ folgt $\varphi(a\,b) = \lim \varphi_i(a\,b) = \lim \varphi_i(a)\,\varphi_i(b) = \lim_i \varphi_i(a)\,\lim_j \varphi_j(b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ und ähnlich zeigt man die Linearität von φ. Weiters ist X beschränkt in $\mathbb{C}^A$, denn für $a \in A$ und $\varphi \in X$ gilt $|\,\mathrm{pr}_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \le \|a\|$ nach 6.39. Nach dem Satz von Tychonoff ist somit X kompakt.

Die Abbildung $\mathcal{G}$ hat Werte in $C(X,\mathbb{C})$, denn $\mathcal{G}(a)$ ist stetig, weil $\varphi_i \stackrel{pktw.}{\to} \varphi$ zur Folge hat, daß $\mathcal{G}(a)(\varphi_i) = \varphi_i(a) \to \varphi(a) = \mathcal{G}(a)(\varphi)$.

Offensichtlich ist $\mathcal{G}$ ein Algebra-Homomorphismus, da $\mathrm{ev}_\varphi \circ \mathcal{G} = \varphi$ einer ist für alle $\varphi \in X$.

Bezüglich des Kerns von $\mathcal{G}$ gilt:

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{G} &\Leftrightarrow 0 = \mathcal{G}(a) \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in X : 0 = \mathcal{G}(a)(\varphi) = \varphi(a) \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{\varphi \in X} \mathrm{Ker}\,\varphi = \bigcap_I I = \mathrm{Rad}(A), \end{aligned}$$

wobei der letzte Durchschnitt über alle maximalen Ideale I von A zu nehmen ist.

Nun zur Aussage $\sigma_A(a) = \sigma_{C(X,\mathbb{C})}(\mathcal{G}(a))$ über das Spektrum für $a \in A$:
Dazu beachte man, daß $\sigma_{C(X,\mathbb{C})}(\mathcal{G}(a)) = \{\mathcal{G}(a)(\varphi) = \varphi(a) : \varphi \in X\}$ gilt nach 6.7.1.
($\supseteq$) Sei $z = \varphi(a) \in \sigma_{C(X,\mathbb{C})}(\mathcal{G}(a))$, dann ist $\varphi(a)\,1 - a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ und somit nicht invertierbar, d.h. $z = \varphi(a) \in \sigma_A(a)$.
($\subseteq$) Sei nun $z \in \sigma_A(a)$, d.h. $z\,1 - a$ ist nicht invertierbar. Dann ist das von $z\,1 - a$ erzeugte Ideal $A \cdot (z\,1 - a)$ ein echtes Ideal. Somit existiert nach dem Lemma von Zorn ein maximales Ideal I, welches $z\,1 - a$ enthält. Sei $\varphi : A \to \mathbb{C}$ der Algebra-Homomorphismus mit Kern I. Dann ist $0 = \varphi(z\,1 - a) = z - \varphi(a)$, d.h. $z \in \sigma_{C(X,\mathbb{C})}(\mathcal{G}(a))$.

Bezüglich der Norm haben wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(a)\|_\infty &:= \sup\{|\mathcal{G}(a)(\varphi)| = |\varphi(a)| : \varphi \in X\} \\ &= \sup\{|z| : z \in \sigma_{C(X,\mathbb{C})}(\mathcal{G}(a)) = \sigma_A(a)\} = r(a) \le \|a\|. \quad \square \end{aligned}$$

Eine kommutative Banach-Algebra heißt HALBEINFACH, falls $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$, d.h. der Gelfand-Homomorphismus injektiv ist.

Wegen $\sigma(a) = \sigma(\mathcal{G}(a)) = \{\varphi(a) : \varphi \in \sigma(A)\}$ ist $\mathrm{ev}_a : \sigma(A) \to \sigma(a)$ surjektiv und nach Definition der Topologie auf $\sigma(A)$ auch stetig, denn $\varphi_i \to \varphi$ punktweise impliziert, daß $\mathrm{ev}_a(\varphi_i) = \varphi_i(a) \to \varphi(a) = \mathrm{ev}_a(\varphi)$. Da $\sigma(A) = \mathrm{Alg}(A, \mathbb{C})$ kompakt ist, ist $\mathrm{ev}_a : \sigma(A) \to \sigma(a)$ somit eine Quotienten-Abbildung.

6.44 Proposition.

Es sei A eine Banach-Algebra, die von einem $a \in A$ als Banach-Algebra erzeugt wird, d.h. $\{p(a) : p \in \mathbb{C}[z]\}$ liegt dicht in A.

Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{ev}_a : \sigma(A) := \mathrm{Alg}(A, \mathbb{C}) \to \sigma(a)$$

ein Homöomorphismus und folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} C(\sigma(A), \mathbb{C}) & C(\sigma(a), \mathbb{C}) \arrow[l, "(ev_a)^*"', "\cong"] \\ A \arrow[u, "\mathcal{G}"] & H(\sigma(a)). \arrow[l, "\mathrm{ev}_a"] \arrow[u, "(\_)|_{\sigma(a)}"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Quotientenabbildung $\mathrm{ev}_a : \sigma(A) \to \sigma(a)$ ist injektiv und damit ein Homöomorphismus, denn für $\varphi_j \in \mathrm{Alg}(A, \mathbb{C})$ mit $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ gilt $\varphi_1(p(a)) = \varphi_2(p(a))$ für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ und – da die Menge $\{p(a) : p \in \mathbb{C}[z]\}$ nach Voraussetzung dicht liegt in A – gilt $\varphi_1 = \varphi_2$.

Das Diagramm kommutiert, denn es genügt die Kommutativität für $\mathrm{id} : z \mapsto z$ nachzuweisen, weil alle Pfeile stetige Algebra-Homomorphismen sind und $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ nach 6.36 zusammenhängend ist, also $\mathbb{C}[z]$ in $H(\sigma(a))$ nach 5.3.8 dicht liegt:

$$(\mathrm{ev}_a)^*(\mathrm{id}|_{\sigma(a)})(\varphi) = (\mathrm{id} \circ \mathrm{ev}_a)(\varphi) = \mathrm{id}(\varphi(a)) = \varphi(a) = \mathcal{G}(a)(\varphi) = \mathcal{G}(\mathrm{id}(a))(\varphi). \qquad \square$$

Beispiel.

Es sei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Das ist die 2-dimensionale kommutative Teil-Banach-Algebra von $L(\mathbb{C}^2)$ welche von $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Einziger Eigenwert von T ist 0, also ist $\sigma(A) \cong \sigma(T) = \{0\}$ nach 6.44. Es gibt also einen einzigen Algebra-Homomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{C}$ und dieser erfüllt $\varphi(T) = 0$. Direkt sieht man das auch folgendermaßen: Sei $\varphi \in \sigma(A)$, also ein Algebra-Homomorphismus $A \to \mathbb{C}$. Dann ist $\varphi(T)^2 = \varphi(T^2) = \varphi(0) = 0$ und somit

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \varphi(a\,1 + b\,T) = a.$$

Das einzige maximale Ideal ist somit $M = \ker(\varphi) = \mathbb{C} \cdot T$ und folglich ist $\mathrm{Rad}(A) = M \neq \{0\}$, d.h. A ist nicht halbeinfach. Damit ist $\mathcal{G} : A \to C(\sigma(A), \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ die Abbildung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a.$$

Beispiel.

Eine kontinuierliche Verallgemeinerung des letzten Beispiels ist wie folgt gegeben. Es sei

$$(Kf)(x) := \int_0^1 k(x, y)\, f(y)\, dy = \int_0^x k(x, y)\, f(y)\, dy$$

mit meßbarem Integralkern $k \in L^\infty([0, 1]^2)$ und $k(x, y) = 0$ für $x < y$. Dann ist $K : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ ein sogenannter Volterra-Operator mit Norm $\|K\| \le \|k\|_\infty$ und weiters ist $\|K^n\| \le \frac{1}{n!}\, \|k\|_\infty^n$. Für all dies siehe [18, 3.5.5]. Folglich ist $\|K^n\|^{1/n} \le \frac{\|k\|_\infty}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$. Also ist der Spektral-Radius $r(K)$ gleich 0, und somit

$\sigma(K) = \{0\}$, d.h. die von K erzeugte Banach-Algebra besitzt also nach 6.44 genau ein maximales Ideal (nämlich den Abschluß von $\{p(K) : p \in \mathbb{C}[z] \text{ und } p(0) = 0\}$) und ist somit nicht halbeinfach.

Beispiel.

Der Gelfand-Homomorphismus $\mathcal{G}$ ist im allgemeinen nicht surjektiv. Sei nämlich A der Abschluß der Polynome in $C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$, also die von der Identität $a : z \mapsto z$ erzeugte echte Teil-Banach-Algebra von $C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$. Dann ist nach obiger Proposition 6.44 $\sigma(A) = \operatorname{Alg}(A, \mathbb{C}) \cong \sigma_A(a) = \overline{\mathbb{D}}$ nach 6.34. Hätte also $\mathcal{G}$ dichtes Bild in $C(\sigma(A), \mathbb{C})$, so auch die Zusammensetzung mit $\mathbb{C}[z] \subseteq H(\sigma_A(a)) \to A$ also $\mathbb{C}[z] \to C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$, was nicht der Fall ist (Gleichmäßige Grenzwerte von Folgen von Polynomen müssen auf $\mathbb{D}$ holomorph sein).

Als eine erste Anwendung der Gelfand-Transformation beweisen wir die Existenz der Stone-Čech-Kompaktifizierung:

6.45 Stone-Čech Kompaktifizierung.

Zu jedem topologischen Raum X existiert ein kompakter Raum βX, die sogenannte STONE-ČECH-KOMPAKTIFIZIERUNG *und eine stetige Abbildung $\delta : X \to \beta X$ mit folgender universellen Eigenschaft:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] & & \beta X \arrow[dl, dotted, "\exists!"', "\tilde f"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

wobei K kompakt ist und sowohl f als auch $\tilde{f}$ stetig sind.

Beweis. Es sei $A := C_b(X, \mathbb{C})$ die Banach-Algebra der stetigen beschränkten Funktionen auf X mit der ∞-Norm und den punktweisen Operationen. Es sei $\beta X := \operatorname{Alg}(A, \mathbb{C})$. Die Abbildung $\delta_X : X \to \beta X$, $x \mapsto \operatorname{ev}_x$ ist nach Definition der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\operatorname{Alg}(A, \mathbb{C})$ stetig.

Sei nun K ein kompakter Raum. Nach 6.42 ist $\delta : K \to \operatorname{Alg}(C(K, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ ein Homöomorphismus. Jedes stetige $f : X \to K$ induziert einen Algebra-Homomorphismus $f^* : C(K, \mathbb{C}) \to C(X, \mathbb{C})$, $g \mapsto g \circ f$ und da K kompakt ist, hat dieser Werte in der Teilalgebra $C_b(X, \mathbb{C})$. Durch erneutes Dualisieren erhalten wir also eine stetige Abbildung $f^{**} : \operatorname{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \to \operatorname{Alg}(C(K, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ und somit eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \operatorname{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \to K$ mit $\delta \circ \tilde{f} = f^{**}$. Diese erfüllt $\tilde{f} \circ \delta = f$, denn

$$\begin{aligned}(\delta \circ \tilde{f} \circ \delta)(x)(h) &= (f^{**} \circ \delta)(x)(h) = f^{**}(\delta(x))(h) = \delta(x)(f^*(h)) = (f^*(h))(x) \\ &= h(f(x)) = \delta(f(x))(h) = (\delta \circ f)(x)(h).\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"] & \operatorname{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \arrow[d, "f^{**}"] \arrow[dl, dotted, "\tilde f"'] \\ K \arrow[r, "\delta", "\cong"'] & \operatorname{Alg}(C(K, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Für die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$ genügt die Dichtheit des Bildes von $\delta : X \to \operatorname{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ zu zeigen. Sei also $\varphi \in \operatorname{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$. Eine typische Umgebung von φ ist durch

$$U := \{\psi : |(\psi - \varphi)(f_i)| < \varepsilon \text{ für } 1 \le i \le n\}$$

mit endlich vielen $f_1, \dots, f_n \in C_b(X, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $x \in X$ finden mit $\operatorname{ev}_x \in U$. Betrachte dazu die Funktion $f := \sum_{i=1}^n |f_i - \varphi(f_i)\, 1|^2 =$

$\sum_{i=1}^n (f_i - \varphi(f_i)\,1)\,\overline{(f_i - \varphi(f_i)\,1)} \in C_b(X,\mathbb{C})$. Offensichtlich ist $\varphi(f) = 0$. Angenommen für kein $x \in X$ ist $\mathrm{ev}_x \in U$ und somit ist $f(x) \geq \varepsilon^2$ für alle $x \in X$ und damit auch $\frac{1}{f} \in C_b(X,\mathbb{C})$, also $f \in \ker(\varphi)$ invertierbar, ein Widerspruch. $\square$

7 Darstellungstheorie von C^*-Algebren

Grundlegendes über C^*-Algebren

Wir wollen nun jene kommutativen Banachalgebren A finden, für die der Gelfand-Homomorphismus $\mathcal{G} : A \to C(\mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}),\mathbb{C})$ aus 6.43 ein Isomorphismus ist. Dazu beachten wir, daß die punktweise Konjugation $C(X,\mathbb{C}) \to C(X,\mathbb{C})$, $f \mapsto \overline{f}$ eine Involution definiert, d.h. eine konjugiert lineare Isometrie, deren Quadrat die Identität ist und die $\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$ erfüllt. Wegen $\overline{f} \cdot f = |f|^2$, gilt für die ∞-Norm zusätzlich $\|\overline{f} \cdot f\| = \|f\|^2$.

Allgemeiner hat auch die Konjugation auf $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ für σ-endliche Maßräume $(X,\mathcal{A},\mu)$ diese Eigenschaften.

Wie sieht es nun mit nicht kommutativen Beispielen aus: Für jeden komplexen Hilbert-Raum H hat Adjungieren $(\_)^* : L(H) \to L(H)$ dieselben Eigenschaften, allerdings mit $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, denn

$$\begin{aligned}
\|fx\|^2 = \langle fx, fx\rangle = \langle f^*fx, x\rangle \le \|f^*f\| \cdot \|x\|^2 \\
&\Rightarrow \|f\|^2 \le \|f^*f\| \\
&\Rightarrow \|f\| \le \|f^*\| \le \|(f^*)^*\| = \|f\| \\
&\Rightarrow \|f^*\| = \|f\| \\
&\Rightarrow \|f\|^2 \le \|f^*f\| \le \|f\|^2.
\end{aligned}$$

7.1 Definition.

Eine C^*-Algebra ist eine Banach-Algebra A zusammen mit einer Involution, d.h. einer konjugiert linearen Abbildung $(\_)^* : A \to A$, mit $(a \bullet b)^* = b^* \bullet a^*$ und $(a^*)^* = a$, welche zusätzlich $\|a^* \bullet a\| = \|a\|^2$ erfüllt. Wir sagen für die letzte Gleichung auch, daß $\|\_\|$ eine $*$-Norm ist. Falls A eine 1 besitzt, so ist $1^* = 1$, denn $1^* = 1^* \bullet 1 = 1^* \bullet 1^{**} = (1^* \bullet 1)^* = 1^{**} = 1$.

Ein Algebra-Homomorphismus welcher mit der Involution vertauscht heißt $*$-Homomorphismus

7.2 Lemma.

Es sei A eine C^*-Algebra (möglicherweise ohne 1) und $a \in A$. Dann gilt

$$\|a^*\| = \|a\| = \max\{\|a\,x\| : \|x\| \le 1\} = \max\{\|x\,a\| : \|x\| \le 1\}.$$

Weiters ist die Gleichung $\|a^* \cdot a\| = \|a\|^2$ äquivalent zu $\|a \cdot a^*\| = \|a\|^2$.

Beweis. Es ist $\|a\|^2 = \|a^*a\| \le \|a^*\|\,\|a\|$, also ist $\|a\| \le \|a^*\|$. Ersetzen wir a durch $b := a^*$ so erhalten wir $\|a^*\| \le \|a^{**}\| = \|a\|$, also gilt das erste Gleichheitszeichen und somit auch

$$\|a \cdot a^*\| = \|b^* \cdot b\| = \|b\|^2 = \|a^*\|^2 = \|a\|^2.$$

Es sei $\alpha := \sup\{\|a\,x\| : \|x\| \leq 1\}$. Wegen $\|a\,x\| \leq \|a\|\,\|x\|$ gilt $\alpha \leq \|a\|$. Es sei $x := \frac{1}{\|a\|}a^*$. Nach dem 1.ten Teil gilt dann $\|x\| = 1$ und $\|ax\| = \frac{1}{\|a\|}\|a \cdot a^*\| = \|a\|$, also ist $\|a\| = \alpha$ und das Supremum ein Maximum. Damit gilt auch das zweite Gleichheitszeichen. Das dritte folgt aus Symmetrie-Gründen. □

7.3 Folgerung (Adjunktion einer 1).

Es sei A eine C^*-Algebra ohne 1, dann ist durch $A_1 := \{L_a + \lambda \cdot \mathrm{id} : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ mit $L_a : b \mapsto a\,b$ eine Teil-Algebra von $L(A)$ definiert, welche bezüglich $(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^* := L_{a^*} + \bar\lambda \cdot \mathrm{id}$ eine C^*-Algebra ist und die kanonische Abbildung $\iota : A \to A_1$, $a \mapsto L_a$ ist eine Isometrie mit folgender universellen Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & A_1 \arrow[d, dotted, "\exists!\ f_1"] \\ & B \end{tikzcd}$$

wobei f und f_1 $*$-Homomorphismen sind, B eine C^*-Algebra mit 1 ist und f_1 die Eins erhält.

Vergleiche das mit $\boxed{6.4}$. Die dort definierte Norm ist aber keine $*$-Norm. Die Zuordung $f \mapsto f_1$ ist keine Isometrie, denn $0 \mapsto 0_1 \neq 0$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die Operatornorm A_1 zu einer C^*-Algebra macht. Algebra ist wegen $(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})\,(L_b + \mu \cdot \mathrm{id}) = L_{a\,b+\mu\,a+\lambda b} + \lambda\mu \cdot \mathrm{id}$ klar und der durch $(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^* := L_{a^*} + \bar\lambda \cdot \mathrm{id}$ definierte Stern ist eine Involution. Wir müssen also nur die C^*-Bedingung nachrechnen.
Sei dazu $a \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\|x\| = 1$ mit

$$\begin{aligned}
\|L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}\,\|^2 - \varepsilon^2 &\leq \|a\,x + \lambda\,x\|^2 = \|(a\,x + \lambda\,x)^*\,(a\,x + \lambda\,x)\| \\
&= \|(x^*a^* + \bar\lambda\,x^*)\,(a\,x + \lambda\,x)\| \\
&\leq \|x^*\|\,\|(a^* + \bar\lambda)\,(a + \lambda)\,x\| \\
&\leq 1\,\|(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^*(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})\|\,\|x\| \\
&= \|(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^*(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})\| \\
&\leq \|(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^*\| \cdot \|L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}\,\|.
\end{aligned}$$

Wir müssen also nur mehr zeigen, daß $\|(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^*\| \leq \|L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}\,\|$ ist. Für $x, y \in A$ ist

$$\begin{aligned}
\|y(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^* x\| &= \|y\,a^*\,x + \bar\lambda\,y\,x\| = \|(y\,a^*\,x + \bar\lambda\,y\,x)^*\| \\
&= \|x^*\,a\,y^* + \lambda\,x^*\,y^*\| = \|x^*(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})y^*\| \\
&\leq \|x^*\|\,\|L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}\,\|\,\|y^*\| = \|x\|\,\|L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}\,\|\,\|y\|.
\end{aligned}$$

Bilden wir nun das Supremum über alle $\|y\| \leq 1$, so erhalten wir $\|(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^* x\| \leq \|L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}\,\|\,\|x\|$ nach $\boxed{7.2}$ und somit $\|(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^*\| \leq \|L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}\,\|$.

Die universelle Eigenschaft folgt sofort, da ein $*$-Homomorphismus $f : A \to B$ als einzige mögliche Ausdehnung $\tilde f(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}) = f(a) + \lambda \cdot 1$ besitzt. Diese Ausdehnung ist in der Tat ein Algebra-Homomorphismu wegen obigen Ausrucks für das Produkt. Er ist auch ein $*$-Homomorphismus, wegen $\tilde f((L_a + \lambda \cdot \mathrm{id})^*) = \tilde f(L_{a^*} + \bar\lambda \cdot \mathrm{id}) = f(a^*) + \bar\lambda \cdot 1 = f(a)^* + (\lambda \cdot 1)^* = (\tilde f(L_a + \lambda \cdot \mathrm{id}))^*$. □

7.4 Definition.

Es sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$.
Das Element a heißt HERMITE'SCH (oder SELBST-ADJUNGIERT) $:\Leftrightarrow a = a^*$.

Das Element a heißt NORMAL $:\Leftrightarrow a^*a = a\,a^*$.
Das Element a heißt UNITÄR $:\Leftrightarrow a^*a = 1 = a\,a^*$.

Beispiel.

Für $a \in A = C(X, \mathbb{C})$ mit kompakten X gilt:

1. a ist automatisch normal.
2. a ist Hermite'sch $\Leftrightarrow \sigma(a) = a(X) \subseteq \mathbb{R}$.
3. a ist unitär $\Leftrightarrow \sigma(a) = a(X) \subseteq S^1$.

7.5 Lemma.

Es sei H ein Hilbert-Raum, dann entsprechen den stetigen linearen Operatoren $T \in L(H)$ in bijektiver und isometrischer Weise die stetigen sesqui-linearen Formen $b : H \times H \to \mathbb{K}$ vermöge der Relation

$$b(x, y) = \langle Tx, y\rangle \;\forall x, y \in H.$$

Es ist T genau dann selbstadjungiert, wenn b konjugiert-symmetrisch ist, und T genau dann positiv, wenn b es ist.

Beweis. Es sei $\overline{H}$ der zu H konjugierte Hilbert-Raum, d.h. er unterscheidet sich von H einzig in der Definition der skalar-Multiplikation $\lambda \bar{\cdot} a := \overline{\lambda} \cdot a$. Nach dem Riesz'schen Satz [**18**, 6.2.9] ist $\iota : H \to \overline{H}^*$, $x \mapsto \langle x, \_\rangle$ eine surjektive $\mathbb{C}$-lineare Isometrie, und somit auch $\iota_* : L(H, H) \to L(H, \overline{H}^*) \cong L(H, \overline{H}; \mathbb{C})$. Der letztgenannte Raum ist aber gerade jener der stetigen sesqui-linearen Formen auf H. Dabei entspricht $T \in L(H, H)$ genau jenem $b : H \times H \to \mathbb{C}$ mit $b(x, y) := \langle Tx, y\rangle$. Der Operator T ist genau dann selbstadjungiert, wenn $b(x, y) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \overline{b(y, x)}$ ist, d.h. b konjugiert symmetrisch ist; und analog für Positivität. □

7.6 Proposition.

Es sei $b : H \times H \to \mathbb{C}$ sesqui-linear. Dann gilt:

1. *Die Parallelogramm-Gleichung:*
$$b(x + y, x + y) + b(x - y, x - y) = 2\Big(b(x, x) + b(y, y)\Big) \;\forall x, y \in H$$
2. *Die Polarisierungsgleichung:*
$$\begin{aligned} 4\,b(x, y) &= b(x + y, x + y) - b(x - y, x - y) \\ &\quad + i\,b(x + i\,y, x + i\,y) - i\,b(x - i\,y, x - i\,y), \end{aligned}$$
d.h. b ist durch seine Werte auf der Diagonale $\{(x, x) : x \in H\}$ bereits eindeutig bestimmt.
3. $b = 0 \Leftrightarrow \forall x \in H : b(x, x) = 0$.
4. *b ist konjugiert symmetrisch* $\Leftrightarrow \forall x \in H : b(x, x) \in \mathbb{R}$.
5. *Ist b positiv (d.h. $b(x, x) \geq 0$ für alle $x \in H$), so gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:*
$$|b(x, y)|^2 \leq b(x, x)\, b(y, y) \;\forall x, y \in H.$$

Beachte, daß (3) besagt, daß ein Operator $B \in L(H)$ genau dann der 0-Operator ist, wenn die zugehörige sesqui-lineare Form b auf der Diagonale verschwindet, d.h. $\forall x \in H : Bx \perp x$ gilt. Im reellen ist dies offensichtlich falsch!

Beweis. (1) haben wir in [**18**, 6.2.2] gezeigt.

([2]) folgt ebenso durch Ausmultiplizieren.

([3]) folgt sofort aus der Polarisierungsgleichung ([2]).

([4]) Die sesqui-lineare Form $(x, y) \mapsto b(x, y) - \overline{b(y, x)}$ verschwindet nach ([3]) genau dann, wenn sie auf (x, x) verschwindet für alle x, d.h. $b(x, x) \in \mathbb{R}$ ist für alle x.

([5]) Das haben wir in [18, 6.2.1] gezeigt. □

7.7 Proposition.

Es sei H ein Hilbert-Raum und $a \in L(H)$, dann gilt:

1. *a ist Hermite'sch $\Leftrightarrow \forall x \in H : \langle ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.*
2. *a ist normal $\Leftrightarrow \forall x \in H : \|ax\| = \|a^* x\|$.*
3. *$a^* a = 1 \Leftrightarrow \forall x \in H : \|ax\| = \|x\| \Leftrightarrow \forall x, y \in H : \langle ax, ay\rangle = \langle x, y\rangle$, d.h. a ist eine Isometrie.*
4. *a ist unitär $\Leftrightarrow$ a ist eine surjektiv Isometrie.*

Beweis. ([1]) Es ist $a = a^*$ genau dann, wenn die konjugiert lineare Form $b(x, y) := \langle ax, y\rangle$ konjugiert symmetrisch ist. Das ist nach [7.6.4] genau dann der Fall, wenn $\langle ax, x\rangle = b(x, x)$ reell ist für alle x.

([2]) Es ist $b := a^* a - a\, a^*$ nach [7.6.3] genau dann 0, wenn $0 = \langle bh, h\rangle = \langle (a^* a - a\, a^*)h, h\rangle = \|ah\|^2 - \|a^* h\|^2$ ist für alle $h \in H$.

([3]) Es ist $a^* a = 1 \Leftrightarrow \forall x, y \in H : \langle x, y\rangle = \langle a^* a\, x, y\rangle = \langle a\, x, a\, y\rangle$ und wegen der Polarisierungs-Gleichung bzw. [7.6.3] ist das äquivalent zu $\forall x \in H : \|x\|^2 = \|a\, x\|^2$.

([4]) Aus $a^* a = 1$ folgt $a\, a^* a = a = 1\, a$ und daraus vermöge der Surjektivität von a die Gleichung $a\, a^* = 1$. Umgekehrt folgt aus $a\, a^* = 1$ direkt die Surjektivität von a. □

7.8 Lemma.

Es sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$. Dann gilt:

1. *Ist a invertierbar, so auch a^* und es gilt $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Allgemeiner ist $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$ für alle $a \in A$.*
2. *Es ist existiert eine eindeutige Zerlegung $a = \mathfrak{Re}(a) + i\, \mathfrak{Im}(a)$, wobei $\mathfrak{Re}(a) := \frac{a+a^*}{2}$ und $\mathfrak{Im}(a) := \frac{a-a^*}{2i}$ Hermite'sch sind.*
3. *Das Element a ist normal $\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(a)\, \mathfrak{Im}(a) = \mathfrak{Im}(a)\, \mathfrak{Re}(a)$.*
4. *Ist a Hermite'sch, so ist $\|a\| = r(a)$.*

Beweis. ([1]) Anwenden der Involution auf $a^{-1}\, a = 1 = a\, a^{-1}$ liefert $a^*\, (a^{-1})^* = 1 = (a^{-1})^*\, a^*$. Somit ist $\lambda - a$ genau dann invertierbar, wenn $\overline{\lambda} - a^* = (\lambda - a)^*$ es ist.

([2]) Es sei $a = a_1 + i\, a_2$ eine Zerlegung in Hermite'sche Elemente a_1 und a_2. Dann ist $a^* = a_1 - i\, a_2$ und somit $a_1 = \mathfrak{Re}(a)$ und $a_2 = \mathfrak{Im}(a)$. Andererseits gilt offensichtlich $a = \mathfrak{Re}(a) + i\, \mathfrak{Im}(a)$ und $(\mathfrak{Re}(a))^* = \frac{a^*+a^{**}}{2} = \mathfrak{Re}(a)$ sowie $(\mathfrak{Im}(a))^* = \frac{a^*-a^{**}}{-2i} = \mathfrak{Im}(a)$.

([3]) Es ist $a^* = \mathfrak{Re}(a) - i\, \mathfrak{Im}(a)$ und folglich ist

$$a^* a = (\mathfrak{Re}(a))^2 - i\, \mathfrak{Im}(a)\, \mathfrak{Re}(a) + i\, \mathfrak{Re}(a)\, \mathfrak{Im}(a) + (\mathfrak{Im}(a))^2$$

sowie

$$a\,a^* = (\Re e(a))^2 + i\,\Im m(a)\,\Re e(a) - i\,\Re e(a)\,\Im m(a) + (\Im m(a))^2$$

und somit $a^*a = a\,a^* \Leftrightarrow \Im m(a)\,\Re e(a) = \Re e(a)\,\Im m(a)$.

(4) Für Hermite'sches a gilt $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$ und somit durch Induktion $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$. Also ist $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_n \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$. □

Spektral-Theorie Abelscher C^*-Algebren

Wir wollen nun den Gelfand-Homomorphismus für C^*-Algebren studieren. Dazu müssen wir zuerst die $\mathbb{C}$-wertigen Algebra-Homomorphismen untersuchen.

7.9 Lemma.

Es sei A eine C^*-Algebra und $f : A \to \mathbb{C}$ ein Algebra-Homomorphismus. Dann ist f ein $*$-Homomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß f Selbstadjungiertheit erhält. Sei also $a^* = a \in A$ und $t \in \mathbb{R}$. Wegen $\|f\| = 1$ nach 6.39 ist

$$\begin{aligned}|f(a + i\,t)|^2 &\le \|a + i\,t\|^2 = \|(a + it)^*(a + it)\| = \|(a - i\,t)\,(a + i\,t)\|\\ &= \|a^2 + t^2\| \le \|a\|^2 + t^2.\end{aligned}$$

Falls $f(a) = \alpha + i\,\beta$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ist, so erhalten wir:

$$\|a\|^2 + t^2 \ge |f(a + i\,t)|^2 \ge |\alpha + i\,(\beta + t)|^2 = \alpha^2 + (\beta + t)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2,$$

also ist $\|a\|^2 \ge \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t$. Falls $\beta \ne 0$ so folgt mit $|t| \to \infty$ ein Widerspruch. Also ist $\beta = 0$, d.h. $f(a) = \alpha \in \mathbb{R}$.

Sei nun $a \in A$ beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}f(a^*) &\overset{7.8.2}{=\!=} f(\Re e(a) - i\,\Im m(a)) = f(\Re e(a)) - i\,f(\Im m(a)) = \overline{f(\Re e(a)) + i\,f(\Im m(a))}\\ &= \overline{f(\Re e(a) + i\,\Im m(a))} = \overline{f(a)},\end{aligned}$$

da $f(\Re e(a))$ und $f(\Im m(a))$ nach Obigem reell sind. □

7.10 Satz von Gelfand-Naimark.

Genau für jene Banach-Algebren A ist der Gelfand-Homomorphismus $\mathcal{G} : A \to C(\mathrm{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ aus 6.43 ein ($*$-)Isomorphismus, die durch Angabe einer Involution zu einer kommutativen C^*-Algebra gemacht werden können.

Beweis. ($\Rightarrow$) Falls $\mathcal{G}$ ein Isomorphismus von Banach-Algebren ist, so können wir durch ihm die Involution $f \mapsto \bar f$ von $C(\mathrm{Alg}(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ auf A zurückziehen und somit A zu einer kommutativen C^*-Algebra machen.

($\Leftarrow$) Umgekehrt sei A eine kommutative C^*-Algebra. Dann gilt $\mathcal{G}(a^*)(f) = f(a^*) = \overline{f(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(f)}$ für alle $f \in \mathrm{Alg}(A, \mathbb{C})$ nach 7.9, also ist $\mathcal{G}$ ein $*$-Homomorphismus.

Nach 6.43 ist $\|\mathcal{G}(a)\|_\infty = r(a) \le \|a\|$ für alle $a \in A$ und für Hermite'sche Elemente a gilt $\|\mathcal{G}(a)\|_\infty = r(a) = \|a\|$ nach 7.8. Insbesonders ist $\|\mathcal{G}(a)\|_\infty^2 = \|\mathcal{G}(a^*a)\|_\infty = \|a^*a\| = \|a\|^2$ für alle $a \in A$, also $\mathcal{G}$ eine Isometrie und insbesonders injektiv.

Da $\mathcal{G}$ als Isometrie abgeschlossenes Bild hat, genügt für Surjektivität die Dichtheit des Bildes zu zeigen. Es ist $\mathcal{G}(A)$ eine Teilalgebra von $C(X,\mathbb{C})$ mit $X := \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$, welche die Konstanten enthält und unter dem Stern abgeschlossen ist. Sie ist auch Punkte-trennend: Sei nämlich $f_1 \neq f_2$ in $X = \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C})$, dann existiert nach Definition ein $a \in A$ mit $\mathcal{G}(a)(f_1) = f_1(a) \neq f_2(a) = \mathcal{G}(a)(f_2)$. Nach dem Satz [**18**, 3.4.3] von Stone-Weierstraß ist also $\mathcal{G}(A)$ dicht. □

Resumeé.

Man kann also mit Elementen einer C^*-Algebra so rechnen, als wären sie stetige Funktionen auf einem kompakten Raum, solange man dabei in einer kommutativen Teilalgebra bleibt.

7.11 Bemerkung.

Für jede Menge X ist der Raum $A := B(X,\mathbb{C})$ der beschränkten $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf X eine kommutative C^*-Algebra, also nach 7.10 via Gelfand-Homomorphismus isomorph zu $C(\sigma(A),\mathbb{C})$. Es ist $\sigma(A)$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung βX des diskreten Raums X, denn $A = B(X,\mathbb{C}) = C_b(X,\mathbb{C})$ und nach 6.45 somit $\beta X = \sigma(C_b(X,\mathbb{C})) = \sigma(A)$.

Insbesonders ist $\sigma(\ell^\infty) = \sigma(B(\mathbb{N},\mathbb{C})) = \beta\mathbb{N}$, vgl. mit [**26**, 2.1.15,2.1.16].

7.12 Proposition.

Es sei A als C^*-Algebra von einem normalen $a \in A$ erzeugt. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} C(\mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}),\mathbb{C}) & C(\sigma(a),\mathbb{C}) \arrow[l, "(ev_a)^*"', "\cong"] \\ A \arrow[u, "\mathcal{G}", "\cong"'] & \mathbb{C}[z,\bar{z}]. \arrow[l, "ev_a"] \arrow[u, "(\text{-})|_{\sigma(a)}"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. Da a normal ist, ist die dichte Teil-Algebra $\{p(a,a^*) : p \in \mathbb{C}[z,\bar{z}]\}$ kommutativ und somit auch A selbst. Nach 7.10 ist also $\mathcal{G}$ ein Isomorphismus. Daß $\mathrm{ev}_a : \mathrm{Alg}(A,\mathbb{C}) \to \sigma(a)$ ein Homömorphismus ist, sieht man wie im Beweis von 6.44 (Achtung: A muß nicht als Banach-Algebra von a erzeugt sein): Wegen der Nachbemerkung in 6.43 ist ev_a surjektiv und aus $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ folgt $\varphi_1(p(a,a^*)) = p(\varphi_1(a),\varphi_1(a)^*) = p(\varphi_2(a),\varphi_2(a)^*) = \varphi_2(p(a,a^*))$ für alle $p \in \mathbb{C}[z,\bar{z}]$ und schließlich $\varphi_1 = \varphi_2$, da $\{p(a,a^*) : p \in \mathbb{C}[z,\bar{z}]\}$ dicht in A liegt.

Da alle auftretenden Abbildungen $*$-Homomorphismen sind, und $\mathbb{C}[z,\bar{z}]$ von der Identität als $*$-Algebra erzeugt wird, genügt es die Kommutativität auf $\mathrm{id} : z \mapsto z$ zu überprüfen, dies geschah bereits in der Proposition 6.44 □

Im Unterschied zu Banach-Algebren ist das Spektrum eines Elements einer C^*-Algebra nicht von der Algebra abhängig:

7.13 Proposition.

Es sei A eine C^*-Algebra, B eine Teil-C^*-Algebra und $b \in B$. Dann ist $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.

Beweis. Sei vorerst $b \in B$ Hermite'sch und $C^*(b)$ die von b erzeugte Teil-Banach-Algebra von B. Da diese eine Abel'sche C^*-Algebra ist, ist $\sigma_{C^*(b)}(b) = \{\varphi(b) : \varphi \in$

$\mathrm{Alg}(C^*(b),\mathbb{C})\} \subseteq \mathbb{R}$ nach 6.43 und 7.9. Nach Theorem 6.36 ist also

$$\sigma_B(b) \overset{6.36.1}{\subseteq} \sigma_{C^*(b)}(b) \overset{\sigma\subseteq\mathbb{R}}{=\!=\!=} \partial\sigma_{C^*(b)}(b) \overset{6.36.2}{\subseteq} \partial\sigma_B(b) \subseteq \sigma_B(b)$$

und damit $\sigma_B(b) = \sigma_{C^*(b)}(b)$. Gleiches gilt natürlich für A, also ist $\sigma_B(b) = \sigma_{C^*(b)}(b) = \sigma_A(b)$.

Nun sein $b \in B$ beliebig. Es bleibt zu zeigen, daß aus der Invertierbarkeit in A von b die Invertierbarkeit in B folgt, d.h. $\mathrm{Inv}(B) = \mathrm{Inv}(A) \cap B$. Sei also $a\,b = 1 = b\,a$ für ein $a \in A$. Dann ist $(b^*b)(aa^*) = b^*(ba)a^* = b^*a^* = (ab)^* = 1^* = 1$ und analog $(aa^*)(b^*b) = 1$. Da b^*b Hermite'sch und invertierbar in A ist, folgt aus dem ersten Teil, daß b^*b auch in B invertierbar ist, und wegen der Eindeutigkeit des Inversen, daß $a\,a^*$ in B liegt. Also ist $a = a\,1 = a(a^*b^*) = (aa^*)b^* \in B$. □

Folgerung.

Es sei $a \in A$ normal. Dann gilt $\|a\| = r(a)$.

Beweis. Da die von a erzeugte C^*-Algebra $C^*(a)$ kommutativ ist, ist $\|a\| = \|\mathcal{G}(a)\|_\infty = r(a)$ nach 7.10 und 6.43. □

7.14 Definition.

Es sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal. Dann definieren wir vermöge 7.12 und 7.13 eine $*$-Isometrie $\rho : C(\sigma(a),\mathbb{C}) \to A$, durch die Zusammensetzung

$$\begin{tikzcd}
C(\mathrm{Alg}(C^*(a),\mathbb{C}),\mathbb{C}) & C(\sigma(a),\mathbb{C}) \arrow[l, "(ev_a)^*"', "\cong"] \arrow[dl, dotted, "\rho"] \\
A \supseteq C^*(a) \arrow[u, "\mathcal{G}", "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $C^*(a)$ die von a erzeugte (kommutative) Teil-C^*-Algebra von A bezeichnet. Diese Abbildung heißt FUNKTIONEN-KALKÜL für $a \in A$.

Theorem (Funktionen-Kalkül).

Es sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal. Dann ist der Funktionen-Kalkül die eindeutige $*$-Isometrie $\rho : C(\sigma(a),\mathbb{C}) \cong C^*(a) \subseteq A$, welche den Riesz-Funktionen-Kalkül aus 6.28 erweitert, d.h. folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}[z] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
H(\sigma(a)) \arrow[rr, "(_)|_{\sigma(a)}"] \arrow[dr, "\mathrm{Riesz}"'] & & C(\sigma(a),\mathbb{C}) \arrow[dl, "\rho"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Da ρ durch Zusammensetzen von C^*-Isomorphismen gewonnen wurde, ist auch ρ eine (nicht notwendig surjektive) $*$-Isometrie. Wegen Proposition 7.12 stimmt ρ mit dem Riesz-Kalkül auf Polynomen aus $\mathbb{C}[z]$ überein. Da der Riesz-Funktionen-Kalkül nach 6.28 dadurch eindeutig festgelegt ist kommutiert das untere Dreieck.

Nun zur Eindeutigkeit. Sei $\rho : C(\sigma(a),\mathbb{C}) \to A$ irgendein $*$-Homomorphismus, welcher den Riesz-Kalkül erweitert. Für jedes $f \in C(\sigma(a),\mathbb{C})$ existiert nach dem

Satz [**18**, 3.4.1] von Stone-Weierstraß eine Folge von Polynomen $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ welche auf $\sigma(a)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Es ist $\mathbb{C}[\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z)] \cong \mathbb{C}[z, \overline{z}]$, vermöge $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. Auf der Identität $z \mapsto z$ ist ρ durch $\rho(\mathrm{id}) = a$ gegeben und somit als $*$-Homomorphismus auf der von id erzeugten $*$-Algebra $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ eindeutig festgelegt. Wegen Stetigkeit ist somit ρ auf $C(\sigma(a), \mathbb{C})$ eindeutig bestimmt. □

Folgerung.

Es sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal.

1. *a Hermite'sch $\Leftrightarrow \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*
2. *a unitär $\Leftrightarrow \sigma(a) \subseteq S^1$.*

Dies verallgemeinert das Beispiel in 7.4.

Beweis. Da a normal ist, haben wir den $*$-Homomorphismus $\rho : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} C^*(a) \subseteq A$. Somit gilt:

(1) $\rho(\mathrm{id}) = a = a^* = \rho(\overline{\mathrm{id}}) \Leftrightarrow \mathrm{id} = \overline{\mathrm{id}}$ auf $\sigma(a)$, also $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

(2) $\rho(\overline{\mathrm{id}})\rho(\mathrm{id}) = a^*a = 1 = \rho(1) \Leftrightarrow |\,\mathrm{id}\,|^2 = \overline{\mathrm{id}}\,\mathrm{id} = 1$ auf $\sigma(a)$, also $\sigma(a) \subseteq S^1$. □

7.15 Spektral-Abbildungs-Satz.

Es sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal. Dann gilt für jedes $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$ die Gleichung

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Beweis. Es sei $\rho : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} C^*(a) \subseteq A$ der Funktionen-Kalkül $f \mapsto f(a)$. Da ρ ein $*$-Isomorphismus ist, gilt

$$\sigma(f(a)) = \sigma_A(\rho(f)) \overset{7.13}{=\!=} \sigma_{C^*(a)}(\rho(f)) = \sigma(f) \overset{6.7.1}{=\!=} f(\sigma(a)). \quad \square$$

7.16 Folgerung.

Es sei $a \in A$ normal und $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$. Dann ist $f(a) \in \{a, a^*\}^{kk}$, der Doppelkommutante von $\{a, a^*\}$. Äquivalent, $\{a, a^*\}^k = \{f(a) : f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})\}^k$.

Vgl. 6.32 und 8.15.

Beweis. Nach dem Satz [**18**, 3.4.1] von Stone-Weierstraß liegt die von $\{a, a^*\}$ erzeugte Teilalgebra $\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}$ (denn a ist normal) dicht in $\{f(a) : f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})\}$, also ist nach den Bemerkungen in 6.31 $\{a, a^*\}^k = \{f(a) : f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})\}^k$ und somit $f(a) \in \{a, a^*\}^{kk}$ für alle $f \in (\sigma(a), \mathbb{C})$. □

Anwendungen auf Hermite'sche Elemente

Wir wollen nun einige Anwendungen des Funktionen-Kalküls für normale Elemente von C^*-Algebren geben.

7.17 Definition.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Re}(A) := \{a \in A : a = a^*\}$ den linearen Teilraum der Hermite'schen Elemente. Wir haben in 7.8 gesehen, daß $A = \mathfrak{Re}(A) \oplus i \cdot \mathfrak{Re}(A)$.

Ein $a \in A$ heißt "POSITIV" und wir schreiben $a \geq 0$ falls a Hermite'sch ist und $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Die Menge der positiven Elemente bezeichnen wir mit A_+. Ein

$f \in C(X,\mathbb{C})$ ist genau dann positiv, wenn $\forall x \in X : f(x) \geq 0$, denn $\sigma(f) = f(X)$ nach 6.7.1.

Wir schreiben $a \geq b$ für Hermite'sche Elemente a und b, falls $a - b \geq 0$ ist. Für $a \in \mathfrak{Re}(A)$ und $f, g \in C(\sigma(a), \mathbb{R})$ mit $f \geq g$ ist $f(a) \geq g(a)$, denn $\sigma(f(a) - g(a)) = \sigma((f-g)(a)) = (f-g)(\sigma(a)) \in \mathbb{R}_+$ Insbesonder ist $\|a\| \geq a$, denn wegen $\sigma(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|]$ ist $\|a\| \geq \mathrm{id}|_\sigma(a)$.

7.18 Proposition (positiver und negativer Teil).

Es sei $a \in \mathfrak{Re}(A)$. Dann existieren eindeutige Elemente a_+, $a_- \in A_+$ mit $a = a_+ - a_-$ und $a_+a_- = 0 = a_-a_+$.

Beweis. Die Idee ist dies auf $a \in C(X)$ zurückzuspielen. Existenz: Es sei $\mathrm{id}_\pm(t) := \max\{\pm t, 0\}$. Dann ist $\mathrm{id}_\pm \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mit $\mathrm{id} = \mathrm{id}_+ - \mathrm{id}_-$ und $\mathrm{id}_+ \, \mathrm{id}_- = 0$. Mittels Spektral-Abbildungs-Satz 7.15 folgt $a_\pm := \mathrm{id}_\pm(a) \geq 0$ und $a = \mathrm{id}(a) = (\mathrm{id}_+ - \mathrm{id}_-)(a) = a_+ - a_-$ sowie $a_+a_- = \mathrm{id}_+(a)\,\mathrm{id}_-(a) = (\mathrm{id}_+\,\mathrm{id}_-)(a) = 0(a) = 0$.

Eindeutigkeit: Sei dazu $a = b_+ - b_-$ eine zweite Zerlegung mit $b_\pm \geq 0$ und $b_+b_- = 0 = b_-b_+$. Die von $\{a_+, a_-, b_+, b_-\}$ erzeugte abgeschlossene Teil-Banach-Algebra ist eine kommutative $*$-Algebra, denn $ab_+ = (b_+ - b_-)b_+ = b_+b_+ = b_+(b_+ - b_-) = b_+a$ und somit $a_\pm b_+ = b_+ a_\pm$ nach 7.16. Und analog $a_\pm b_- = b_- a_\pm$. Nach 7.10 ist diese Teilalgebra isomorph zu $C(X,\mathbb{C})$ für einen kompakten Raum X und dort ist die Zerlegung von $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen in positiven und negativen Teil eindeutig, d.h. $b_\pm = a_\pm$. □

7.19 Proposition (Wurzel).

Es sei $a \in A_+$ und $n \geq 1$, dann existiert ein eindeutiges Element $\sqrt[n]{a} \in A_+$ mit $a = (\sqrt[n]{a})^n$.

Beweis. Wie in der vorigen Proposition verwendet man den Funktionen-Kalkül 7.14 um nun $\sqrt[n]{a}$ durch $\sqrt[n]{a} := f(a)$ mit $f : t \mapsto \sqrt[n]{t}$ zu definieren und wegen 7.16 kommutiert $f(a)$ mit jeder anderen “n-te Wurzel” b von a, da diese mit $b^n = a$ kommutiert. Wegen 7.10 und der Eindeutigkeit der n-ten positiven Wurzel für $0 \leq a \in C(\sigma(a),\mathbb{C})$, folgt die Eindeutigkeit von $\sqrt[n]{a}$. □

7.20 Lemma.

Für $a \in \mathfrak{Re}(A)$ sind äquivalent:

1. $a \geq 0$;
2. $\|t - a\| \leq t$ *für alle* $t \in [\|a\|, +\infty)$;
3. $\|t - a\| \leq t$ *für ein* $t \in [\|a\|, +\infty)$.

Diese Beschreibung vermeidet das Spektrum, welches sich kompliziert auf Summen und Produkten verhält.

Beweis. (1 ⇒ 2) Es sei $a \geq 0$ und $t \geq \|a\|$, dann ist $0 \leq t - s \leq t$ für alle $s \in \sigma(a) \subseteq [0, \|a\|]$. Folglich ist via Funktional-Kalkül 7.14 $\|t - a\| = \|t - \mathrm{id}\|_\infty \leq \|t\|_\infty = t$.

(2 ⇒ 3) ist trivial.

(3 ⇒ 1) Wegen $a = a^*$ ist $C^*(a)$ Abelsch und somit nach 7.14 isomorph zu $C(X,\mathbb{C})$ wobei $X := \sigma(a)$. Nach Voraussetzung ist folglich $|t - s| \leq t$ für ein $t \geq \|a\|$ und alle $s \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Kein solches s kann somit negativ sein, sonst wäre $|t - s| \geq t - s > t$. □

Folgerung.

Die Menge A_+ der positiven Elemente einer C^*-Algebra ist ein abgeschlossener Kegel.

Dabei verstehen wir unter einen KEGEL K eine konvexe Teilmenge $K \subseteq A$, die $\lambda a \in K$ für $0 \neq a \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann erfüllt, wenn $\lambda \geq 0$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß A_+ abgeschlossen ist. Sei also $a_n \in A_+$ mit $a_n \to a$. Dann ist wegen der Stetigkeit von $*$ auch a Hermite'sch. Und aus $\|a_n - \|a_n\|\| \leq \|a_n\|$ folgt $\|a - \|a\|\| \leq \|a\|$, d.h. nach obigen Lemma $\boxed{7.20}$ ist $a \geq 0$.

Falls $a \in A_+$ und $\lambda \geq 0$, dann ist offensichtlich $\lambda\, a \in A_+$ nach $\boxed{7.15}$. Weiters ist $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$, denn aus $a \in A_+$ folgt $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$ und aus $a \in -A_+$ folgt $\sigma(a) \subseteq (-\infty, 0]$. Also ist $\sigma(a) = \{0\}$ und $\|a\| = r(a) = 0$ nach $\boxed{7.8.4}$, d.h. $a = 0$.

Falls also $\lambda a \in A_+$ mit $\lambda < 0$, so ist $\lambda a \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ wegen $-\lambda a \in A_+$, d.h. $a = 0$.

Es bleibt zu zeigen, daß mit $a, b \in A_+$ auch $a+b \in A_+$. Es ist $\big\|\|a\|+\|b\|-(a+b)\big\| \leq \big\|\|a\| - a\big\| + \big\|\|b\| - b\big\| \leq \|a\| + \|b\|$ und $\|a\| + \|b\| \geq \|a + b\|$, also nach $\boxed{7.20}$ auch $a + b \geq 0$. □

Bemerkung.

Für a, $b \in A_+$ gilt: $a\, b \in A_+ \Leftrightarrow a\, b = b\, a$:
Es ist $a\, b \in \mathfrak{Re}(A) \Leftrightarrow a\, b = (a\, b)^* = b^*\, a^* = b\, a$. Und unter diesen äquivalenten Bedingungen sind nach Funktionen-Kalkül $a, b \in C(X, \mathbb{R}_+)$ und damit auch $a\, b \geq 0$.

7.21 Folgerung.

Es seien $a_i \in A_+$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_1 + \cdots + a_n = 0$.
Dann ist $a_i = 0$ für alle i.

Beweis. Es ist $-a_1 = a_2 + \cdots + a_n \geq 0$ wegen der Folgerung in $\boxed{7.20}$. Also $a_1 \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ und wegen Symmetrie sind alle $a_i = 0$. □

7.22 Folgerung.

Für $a \in A$ sind äquivalent:

1. *$a \geq 0$;*
2. *$a = b^2$ für ein $b \in \mathfrak{Re}(A)$;*
3. *$a = x^* x$ für ein $x \in A$.*

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$) ist $\boxed{7.19}$ für $n = 2$.

($\boxed{1} \Leftarrow \boxed{2}$) Sei $b \in \mathfrak{Re}(A)$ und $a = b^2$. Wegen Spektralabbildungssatz ist $\sigma(a) = \sigma(b^2) = \sigma(b)^2 \subseteq \{t^2 : t \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$, also $a \in A_+$.

($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$) ist offensichtlich mit $x := b$.

($\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$) Sei also $a = x^* x$ mit $x \in A$. Dann ist offensichtlich $a^* = a$. Es sei $a = a_+ - a_-$ die Zerlegung in positiven und negativen Teil nach $\boxed{7.18}$. Wir müssen zeigen: $a_- = 0$. Sei $x\sqrt{a_-} = b + i\, c$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil nach $\boxed{7.8.2}$. Dann ist $(x\sqrt{a_-})^*(x\sqrt{a_-}) = (b - i\, c)\,(b + i\, c) = b^2 + c^2 + i(b\, c - c\, b)$ aber auch $(x\sqrt{a_-})^*(x\sqrt{a_-}) = \sqrt{a_-} x^* x \sqrt{a_-} = \sqrt{a_-}\,(a_+ - a_-)\sqrt{a_-} = -(a_-)^2$. Die Eindeutigkeit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil impliziert folglich: $b\, c = c\, b$ und $b^2 + c^2 + (a_-)^2 = 0$. Wegen ($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$) ist $b^2, c^2, (a_-)^2 \geq 0$ und nach $\boxed{7.21}$ somit

$(a_-)^2 = 0$ und schließlich das positive Element $a_- = 0$ wegen der Eindeutigkeit der Wurzel. □

Proposition.

Es sei H ein Hilbert-Raum und $a \in L(H)$. Dann ist a genau dann positiv, wenn $\langle ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$.

Vgl. dies mit 7.7.

Beweis. ($\Rightarrow$) Falls $a \geq 0$, so ist $a = b^*b$ für ein $b \in L(H)$ nach 7.22. Also ist $\langle ax, x\rangle = \langle b^*b\,x, x\rangle = \langle b\,x, b\,x\rangle = \|b\,x\|^2 \geq 0$.

($\Leftarrow$) Nach 7.7.1 folgt $a = a^*$ und es bleibt zu zeigen, daß $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Für $t < 0$ gilt

$$\begin{aligned}\|(a-t)h\|^2 &= \|ah\|^2 - t\langle ah, h\rangle - t\langle h, ah\rangle + t^2\|h\|^2\\ &= \|ah\|^2 + 2(-t)\langle ah, h\rangle + t^2\|h\|^2 \geq 0 + 0 + t^2\|h\|^2.\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Ker}(a-t) = \{0\}$ und $\operatorname{Bild}(a-t)$ abgeschlossen sowie darauf eine stetige Inverse b zu $a - t$ eindeutig festgelegt. Wir erweitern diese durch $b|_{(\operatorname{Bild}(a-t))^\perp} = 0$ und erhalten $b \circ (a-t) = 1$ und somit $1 = (b\circ(a-t))^* = (a-t)^* \circ b^* = (a-t)\circ b^*$. Also besitzt $a-t$ sowohl ein links- wie auch ein rechts-Inverses und ist somit invertierbar (siehe 6.2.3), d.h. $t \notin \sigma(a)$. □

7.23 Proposition.

Für Elemente jeder C^*-Algebra gilt:

1. *Aus $a \leq b$ folgt $x^*ax \leq x^*bx$.*
2. *Aus $0 \leq a \leq b$ und a invertierbar folgt b invertierbar und $0 \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.*

Beweis. (1) Es ist $b - a \geq 0$ und somit $\exists y : b - a = y^*y$ nach 7.22. Folglich ist $x^*bx - x^*ax = x^*(b-a)x = (yx)^*(yx) \geq 0$, i.e. $x^*bx \geq x^*ax$.

(2) Indem man alles auf stetige Funktionen auf $\sigma(b) \subseteq [0, \|b\|]$ zurückführt zeigt man folgende kommutativen spezial-Fälle:

3. Ist $b \geq 0$ invertierbar, so ist $\sqrt{b}$ invertierbar und $\frac{1}{b} \geq 0$;
4. Ist $b \geq 1$, so ist b invertierbar und $\frac{1}{b} \leq 1$.

Nun sei $a \geq 0$ invertierbar. Wegen $0 \leq b - a$ ist nach 1 somit $0 \leq (\frac{1}{\sqrt{a}})^*(b-a)\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}b\frac{1}{\sqrt{a}} - 1 =: b_1 - 1$. Also ist $b_1 \geq 1$ und nach 4 invertierbar mit $\frac{1}{b_1} \leq 1$. Dann ist aber auch $b = \sqrt{a}b_1\sqrt{a}$ invertierbar nach 3 und $\frac{1}{b} = (\frac{1}{\sqrt{a}})^*\frac{1}{b_1}\frac{1}{\sqrt{a}} \leq (\frac{1}{\sqrt{a}})^* 1 \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a}$ nach 1. □

7.24 Proposition (Polarzerlegung).

Es seien H_1 und H_2 zwei Hilbert-Räume und $a \in L(H_1, H_2)$. Dann existiert ein eindeutiges positives $|a| \in L(H_1)$ und eine eindeutige, partielle Isometrie $u \in L(H_1, H_2)$ mit $a = u \circ |a|$ und $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Bild}|a|)^\perp$.

Weiters gilt: $\operatorname{Ker} a = \operatorname{Ker}|a| = \operatorname{Ker} u$ *und* $\overline{\operatorname{Bild} a} = \overline{\operatorname{Bild} u}$ *sowie* $\overline{\operatorname{Bild}|a|} = (\operatorname{Ker}|a|)^\perp$.

Dabei heißt ein $u \in L(H_1, H_2)$ PARTIELLE ISOMETRIE, falls $u|_{\operatorname{Ker}(u)^\perp}$ eine Isometrie ist. Den Teilraum mit $\operatorname{Init} u := (\operatorname{Ker} u)^\perp$ auf welchem u als Isometrie wirkt, nennt man INITIAL-RAUM von u. Der Raum $\operatorname{Fini} u := \operatorname{Bild} u = \overline{\operatorname{Bild} u}$ heißt auch FINAL-RAUM von u.

Es wird das positive Element $|a|$ auch für a in einer abstrakten C^*-Algebra durch $|a| := \sqrt{a^*a}$ nach 7.19 definiert.

Beweis. Existenz: Wir definieren $|a| := \sqrt{a^*a}$. Für $h \in H_1$ gilt

$$\|ah\|^2 = \langle ah, ah\rangle = \langle a^*ah, h\rangle = \langle |a|^2 h, h\rangle = \langle |a|h, |a|h\rangle = \big\||a|h\big\|^2.$$

Folglich ist $\operatorname{Ker}|a| = \operatorname{Ker} a$ und die Abbildung $u : \operatorname{Bild}|a| \to \operatorname{Bild} a$ durch $u(|a|h) := ah$ eine wohldefinierte Isometrie. Damit läßt sie sich zu einer Isometrie $u : \overline{\operatorname{Bild}|a|} \to \overline{\operatorname{Bild} a}$ ausdehnen. Und wenn wir $u|_{\operatorname{Ker} a} = 0$ setzen, wegen $(\operatorname{Ker} a)^\perp = (\operatorname{Ker}|a|)^\perp = \overline{\operatorname{Bild}|a|}$ nach 5.4.3, zu einer partiellen Isometrie mit $a = u\,|a|$.

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, dotted, "u"] & & H_2 \\
\overline{\operatorname{Bild}(|a|)} \arrow[u, hook] \arrow[rr, dotted, "u", "\cong"'] & & \overline{\operatorname{Bild}(a)} \arrow[u, hook] \\
& H_1 \arrow[ul, "|a|"] \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gilt also $\operatorname{Ker}|a| = \operatorname{Ker} a = \operatorname{Ker} u$ und $\overline{\operatorname{Bild} a} = \overline{\operatorname{Bild} u}$.

Eindeutigkeit: Sei $a = w\,p$ mit $p \in L(H_1)$, $p \geq 0$ und einer partielle Isometrie $w \in L(H_1, H_2)$ mit $\operatorname{Ker} w = (\operatorname{Bild} p)^\perp$. Dann ist w^*w die orthogonal-Projektion auf $(\operatorname{Ker} w)^\perp = (\operatorname{Bild} p)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Bild} p}$: Es ist $w_1 := w|_{(\operatorname{Ker} w)^\perp} : \operatorname{Init} w \to \operatorname{Fini} w$ eine surjektive Isometrie, und somit gilt $w_1^* w_1 = 1$ wie in 7.7.4. Bezüglich der orthogonalen Zerlegungen $H_1 := \operatorname{Init} w \oplus \operatorname{Ker} w$ und $H_2 := \operatorname{Fini} w \oplus (\operatorname{Fini} w)^\perp$ ist

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w^* = \begin{pmatrix} w_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$w^*w = \begin{pmatrix} w_1^* w_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die orthogonal-Projektion auf $\operatorname{Init} w$. Damit ist $a^*a = pw^*wp = p^2$, d.h. $p = |a|$ wegen der Eindeutigkeit der positiven Wurzel $|a| := \sqrt{a^*a}$ nach 7.19. Weiters ist $w|a| = wp = a = u|a|$, d.h. auf $\operatorname{Bild}|a|$ gilt $w = u$ und dieses Bild liegt nach Voraussetzung dicht in $(\operatorname{Ker} w)^\perp = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ also gilt $w = u$. □

Ideale und Quotienten von C^*-Algebren

Unser Ziel ist auch nicht-kommutative C^*-Algebren A zu behandeln. Kommutative können wir nach dem Satz 7.10 von Gelfand-Naimark völlig durch ihre Algebra-Homomorphismen $f : A \to \mathbb{C}$ beschreiben. Für allgemeines A faktorisieren die Algebra-Homomorphismen $f : A \to \mathbb{C}$ aber über die Abelisierung $A \twoheadrightarrow A/A' = A_{\text{Abel}}$ und liefern somit zuwenig Information über A. Wir sollten also statt dessen Algebra-Homorphismen $f : A \to B$ in allgemeinere C^*-Algebren B (wie z.B. $B = L(H)$) anstelle $\mathbb{C}$ diskutieren und somit Ideale $I := \ker(f)$, die nicht notwendig maximal sind (siehe 6.40).

7.25 Lemma.

Es sei I ein abgeschlossenes (einseitiges) Ideal einer C^*-Algebra A, weiters sei $a \in I$ Hermite'sch und $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$ mit $f(0) = 0$. Dann ist $f(a) \in I$. Insbesonders gehört a_+, a_-, $|a|$ und $\sqrt{|a|}$ zu I.

Beweis. O.B.d.A. sei $I \neq A$. Dann ist $0 \in \sigma(a)$, denn $a \in I$ darf nach 6.37 nicht invertierbar sein. Da a Hermite'sch vorausgesetzt ist, gilt $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Sei nun f_n eine Folge von Polynomen, welche auf $\sigma(a)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Da $f_n(0) \to f(0) = 0$ konvergiert, können wir f_n durch $f_n - f_n(0)$ ersetzen und somit o.B.d.A. annehmen, daß $f_n(0) = 0$ ist. Dann ist aus $f_n(t)$ ein t heraushebbar, und somit $f_n(a) \in I$. Da I abgeschlossen ist, ist schließlich auch $f(a) \in I$.

Alle die Elemente a_+, a_-, $|a|$ und $\sqrt{|a|}$ sind mittels Funktional-Kalkül als $f(a)$ dargestellt mit $f(0) = 0$ und gehören somit nach dem 1.ten Teil zu I. □

7.26 Theorem (approximierende Einheit).

Es sei I ein Ideal in einer C^*-Algebra A. Dann existiert ein monoton wachsendes Netz $j \mapsto u_j$ in I mit $0 \le u_j \le 1$ und $\|a\,u_j - a\| \to 0$ für jedes $a \in I$.

Beweis. Die Indexmenge des Netzes sei $\{j : \emptyset \ne j \subseteq I, j \text{ endlich}\}$ mit der Inklusion als partielle Ordnung. Für $j \subseteq I$ sei $v_j := \sum_{x\in j} x^* x \ge 0$. Klarerweise ist $v_j \in I$ und für $j \subseteq j'$ gilt $v_{j'} - v_j = \sum_{x \in j'\setminus j} x^* x \ge 0$, d.h. $v_j \le v_{j'}$.

Es sei $u_j := v_j \left(\frac{1}{|j|} + v_j\right)^{-1} = f_{1/|j|}(v_j)$, wobei $f_t(s) := \frac{s}{t+s}$ für $s \ge 0$ und $t > 0$. Wegen $0 \le f_t(s) \le 1$ ist $0 \le u_j \le 1$ und $u_j \in I$ weil I ein Ideal ist. Ist $0 < t' \le t$ und $0 \le u \le u'$, so ist $f_t(u') \le f_{t'}(u')$ und $f_t(u) \le f_t(u')$, denn einerseits ist $f_t(s) \le f_{t'}(s)$ für alle $s \ge 0$, also $f_t(u') \le f_{t'}(u')$, und andererseits ist $t \le t+u \le t+u'$ und somit $\frac{1}{t+u'} \le \frac{1}{t+u}$ nach 7.23.2 und folglich $f_t(u) = u\frac{1}{t+u} = 1 - t\frac{1}{t+u} \le 1 - t\frac{1}{t+u'} = u'\frac{1}{t+u'} = f_t(u')$. Insgesamt ist also $u_j \le u_{j'}$ für $j \subseteq j'$.

Bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{x\in j}(x(u_j-1))^*(x(u_j-1)) &= (u_j-1)\left(\sum_{x\in j} x^*x\right)(u_j-1) = (u_j-1)v_j(u_j-1)\\ &= \frac{1}{|j|^2} v_j \left(\frac{1}{|j|} + v_j\right)^{-2}\\ &= \frac{1}{|j|^2} g_{1/|j|}(v_j) \quad \text{mit } g_t(s) := \frac{s}{(t+s)^2},\end{aligned}$$

denn

$$u_j - 1 = v_j\left(\frac{1}{|j|} + v_j\right)^{-1} - \left(\frac{1}{|j|} + v_j\right)\left(\frac{1}{|j|} + v_j\right)^{-1} = -\frac{1}{|j|}\left(\frac{1}{|j|} + v_j\right)^{-1}.$$

Die Ableitung g_t' bei s ist $1(t+s)^{-2} - 2s(t+s)^{-3} = \frac{t-s}{(t+s)^3}$. Also liegt das Maximum bei $s = t$ und es ist $g_t(s) \le g_t(t) = \frac{1}{4t}$ für $s \ge 0$ und $t > 0$. Für $a \in j$ ist folglich $(a(u_j-1))^*(a(u_j-1)) \le \sum_{x\in j}(x(u_j-1))^*(x(u_j-1)) = \frac{1}{|j|^2} g_{1/|j|}(v_j) \le \frac{1}{4|j|}$. Also ist $\|a(u_j-1)\|^2 = \|(a(u_j-1))^*(a(u_j-1))\| \le \frac{1}{4|j|}$, und damit folgt $\|au_j - a\| \to 0$. □

Folgerung.

Es sei I ein abgeschlossenes Ideal einer C^*-Algebra A.
Dann ist I auch $*$-abgeschlossen, d.h. $a \in I \Rightarrow a^* \in I$.

Beweis. Es sei $a \in I$. Wegen obigen Theorems 7.26 existiert ein Netz $u_j \in I$ mit $0 \le u_j \le 1$ und $\|u_j^*\, a^* - a^*\| = \|a\,u_j - a\| \to 0$. Mit $u_j \ge 0$ gilt $u_j = u_j^*$ und somit ist $u_j^*\, a^* = u_j\, a^* \in I$ und damit auch $a^* \in I$. □

Lemma.

Es sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra A. Für $a \in A$ gilt $\|a+I\|_{A/I} = \lim_j \|a - au_j\|_A$, wobei $j \mapsto u_j$ eine approximierende Einheit wie in 7.26 ist.

Beweis. Wegen $u_j \in I$ ist auch $au_j \in I$ und somit $\|a - au_j\| \ge \inf\{\|a-y\| : y \in I\} =: \|a + I\|$, also gilt $\|a+I\| \le \inf_j \|a - au_j\|$.

Sei $y \in I$, dann gilt $\|yu_j - y\| \to 0$ und somit

$$\begin{aligned}\overline{\lim_j}\, \|a - au_j\| &= \overline{\lim_j}(\|a - au_j\| - \|yu_j - y\|) \le \overline{\lim_j}\, \|a - au_j - yu_j + y\| \\ &= \overline{\lim_j}\, \|(a+y) - (a+y)u_j\| \le \overline{\lim_j}\, \|a+y\| \cdot \|1 - u_j\| \\ &\le \|a + y\|, \qquad \text{da } 0 \le 1 - u_j \le 1 \Rightarrow \|1 - u_j\| \le 1\end{aligned}$$

(denn $0 \le w \le \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda - \sigma(w) = \sigma(\lambda - w) \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sigma(w) \subseteq (-\infty, \lambda] \cap \mathbb{R}^+ = [0, \lambda]$ $\Rightarrow \|w\| = r(w) \le \lambda$). Also ist $\overline{\lim}_j \|a - au_j\| \le \|a + I\| = \inf\{\|a + y\| : y \in I\}$.

Somit ist $\lim_j \|a - au_j\| = \|a + I\|$. □

7.27 Proposition.

Es sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra A. Dann ist A/I eine C^*-Algebra und $\pi : A \to A/I$ ein $*$-Homomorphismus.

Beweis. Wir wissen bereits, daß A/I eine Banach-Algebra ist, siehe 6.40. Da I nach der Folgerung in 7.26 unter $*$-abgeschlossen ist, induziert $*$ eine Involution auf A/I durch $(a + I)^* := a^* + I$.

Um die C^*-Eigenschaft der Quotienten-Norm nachzuweisen verwenden wir das vorangegangene Lemma in 7.26: Für $y \in I$ ist

$$\begin{aligned}\|a + I\|^2 &= \lim_j \|a - au_j\|^2 = \lim_j \|(a - au_j)^*(a - au_j)\| = \lim_j \|(1 - u_j)a^*a(1 - u_j)\| \\ &= \lim_j \|(1 - u_j)(a^*a + y)(1 - u_j)\| \quad (\text{da } \|y(1 - u_j)\| \to 0) \\ &\le \|a^*a + y\| \quad (\text{da } \|1 - u_j\| \le 1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|a + I\|^2 \le \inf_{y \in I} \|a^*a + y\| = \|a^*a + I\| = \|(a + I)^*(a + I)\| \le \|a + I\|^2. \quad \square$$

7.28 Theorem.

Es sei $f : A \to B$ ein $*$-Homomorphismus zwischen C^*-Algebren. Dann ist $\|f\| = 1$ und $\operatorname{Bild}(f)$ *ist abgeschlossen. Ist f zusätzlich injektiv, so ist f eine Isometrie.*

Beweis. ($\|f\| = 1$) Für $a \in A$ gilt $\sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a)$, denn aus $b(a - \lambda) = 1 = (a - \lambda)b$ folgt $f(b)\,(f(a) - \lambda) = (f(a) - \lambda)\,f(b)$, d.h. $\rho(a) \subseteq \rho(f(a))$. Also ist $r(f(a)) \le r(a)$. Wenden wir dies auf das Hermite'sche Element a^*a an, so erhalten wir wegen 7.8.4 und weil $f(\Re e A) \subseteq \Re e B$: $\|f(a)\|^2 = \|f(a)^* f(a)\| = \|f(a^*a)\| = r(f(a^*a)) \le r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Also ist $\|f\| \le 1$. Da f die 1 erhält, gilt $\|f\| = 1$.

Sei nun f injektiv. Falls a Hermite'sch ist, so auch $f(a)$ mit $\sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ und nebenstehendes Diagramm kommutiert wegen der Eindeutigkeit des Funktionen-Kalküls. Also ist auch inkl^* injektiv und nach dem Lemma von Urysohn ist inkl surjektiv, d.h. $\sigma(a) = \sigma(f(a))$. Also ist $\|a\| \overset{7.8.4}{=\!=} r(a) = \sup\{|t| : t \in \sigma(a)\} = \sup\{|t| : t \in \sigma(f(a))\} = r(f(a)) = \|f(a)\|$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] & B \\ C^*(a) \arrow[u, hook] \arrow[r, tail, "f"] & C^*(f(a)) \arrow[u, hook] \\ C(\sigma(a)) \arrow[u, two heads, "\cong"] \arrow[r, "\text{inkl}^*"] & C(\sigma(f(a))) \arrow[u, two heads, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Sei nun $a \in A$ beliebig. Dann gilt $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|f(a^*a)\| = \|f(a)^* f(a)\| = \|f(a)\|^2$, d.h. f ist eine Isometrie.

Sei schließlich f wieder beliebig. Dann induziert f einen injektiven $*$-Homomorphismus von $A/_{\operatorname{Ker} f} \to B$ nach 7.27. Dieser ist nach dem vorigen Teil eine Isometrie und somit ist $\operatorname{Bild} f$ abgeschlossen. □

7.29.

Es sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$\Phi : \{A : A \subseteq X\} \to \{I : I \subseteq C(X,\mathbb{C})\}, \quad A \mapsto \{f : f|_A = 0\},$$
$$\Psi : \{I : I \subseteq C(X,\mathbb{C})\} \to \{A : A \subseteq X\}, \quad I \mapsto \{x : f(x) = 0\, \forall f \in I\}.$$

Diese beschreiben eine Galois-Beziehung, d.h. sie sind antiton zwischen den durch Inklusion partiell geordneten Mengen $\{A : A \subseteq X\}$ und $\{I : I \subseteq C(X,\mathbb{C})\}$, und erfüllen $I \subseteq \Phi(A) \Leftrightarrow A \subseteq \Psi(I)$, denn

$$\begin{aligned}
I \subseteq \Phi(A) &\Leftrightarrow \forall f \in I : f \in \Phi(A), \text{d.h. } f|_A = 0\\
&\Leftrightarrow \forall f \in I \forall a \in A : f(a) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall a \in A \forall f \in I : f(a) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall a \in A : a \in \Psi(I)\\
&\Leftrightarrow A \subseteq \Psi(I).
\end{aligned}$$

Jede Galois-Beziehung induziert eine Bijektion zwischen dem Bild von Φ und Bild von Ψ gegeben durch $\Psi : \mathrm{Bild}(\Phi) \to \mathrm{Bild}(\Psi)$ mit Inverser $\Phi : \mathrm{Bild}(\Psi) \to \mathrm{Bild}(\Phi)$:

Aus obiger Äquivalenz folgt sofort $I \subseteq \Phi(\Psi(I))$ und $A \subseteq \Psi(\Phi(A))$ für alle I und A und daraus für $I = \Phi(A)$ durch Anwenden von Φ weiters $\Phi(A) \subseteq \Phi(\Psi(\Phi(A))) \subseteq \Phi(A)$. Also gilt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ auf $\mathrm{Bild}(\Phi)$ und aus Symmetriegründen $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ auf $\mathrm{Bild}(\Psi)$.

Proposition.

Es sei X kompakt. Dann stehen die abgeschlossenen Ideale von $C(X,\mathbb{C})$ in bijektiver Beziehung zu den abgeschlossenen Teilmengen von X. Dabei wird jedem Ideal I von $C(X,\mathbb{C})$ die abgeschlossene Teilmenge $\Psi(I) := \{x \in X : f(x) = 0\, \forall f \in I\}$ von X zu geordnet. Und umgekehrt wird jeder Teilmenge A von X das Ideal $\Phi(A) := \{f \in C(X,\mathbb{C}) : f|_A = 0\}$ zugeordnet. Weiters ist $C(X,\mathbb{C})/I \cong C(\Psi(I),\mathbb{C})$.

Beweis. Es bleibt nur zu zeigen, daß das Bild von Φ gerade aus den abgeschlossenen Idealen von $C(X,\mathbb{C})$ und jenes von Ψ aus den abgeschlossenen Teilmengen von X besteht.

Daß die Bilder aus abgeschlossenen Mengen bestehen, ist offensichtlich, denn $\Psi(I) = \bigcap_{f\in I} f^{-1}(0)$ und $\Phi(A) = \{f : 0 = f(a) = \delta(a)(f)\, \forall a \in A\} = \bigcap_{a\in A} \delta(a)^{-1}(0)$, wobei $\delta : X \to \mathrm{Alg}(C(X,\mathbb{C}),\mathbb{C})$ der Homöomorphismus aus 6.42 ist. Da die $\delta_a : C(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ Algebra-Homomorphismen sind ist $\Phi(A)$ ein Ideal.

Sei nun $A \subseteq X$ abgeschlossen. Es ist nach obigen $A \subseteq \Psi(\Phi(A))$. Angenommen $A \neq \Psi(\Phi(A))$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert ein $f \in C(X,[0,1])$ mit $f|_A = 0$ und $f|_{\Psi(\Phi(A))} \neq 0$, d.h. $f \in \Phi(A)$ aber $f \notin \Phi(\Psi(\Phi(A))) = \Phi(A)$, ein Widerspruch.

Sei andererseits $I \subseteq C(X,\mathbb{C})$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist $C(X,\mathbb{C})/I$ eine kommutative C^*-Algebra nach 7.27, also isomorph zu $C(Y,\mathbb{C})$ für den kompakten Raum $Y := \sigma(C(X,\mathbb{C})/I)$. Die kanonische Quotienten-Abbildung induziert somit einen $*$-Homomorphismus $\pi : C(X,\mathbb{C}) \to C(X,\mathbb{C})/I \cong C(Y,\mathbb{C})$. Dieser ist α^* für die stetige Abbildung $\alpha : Y \to X$ welche durch

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(C(Y,\mathbb{C}),\mathbb{C}) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Alg}(C(X,\mathbb{C}),\mathbb{C}) \\
Y \arrow[u, "\cong"', "\delta"] \arrow[r, dotted, "\alpha"'] & X \arrow[u, "\cong"', "\delta"]
\end{tikzcd}$$

gegeben ist, denn

$$\begin{aligned}\alpha^*(f)(y) &= (f\circ\alpha)(y) = f(\alpha(y)) = \delta(\alpha(y))(f)\\ &= (\delta\circ\alpha)(y)(f) = (\pi^*\circ\delta)(y)(f) = (\pi^*(\delta(y)))(f)\\ &= (\delta(y)\circ\pi)(f) = \delta(y)(\pi(f)) = \pi(f)(y).\end{aligned}$$

Somit ist $I = \operatorname{Ker}(\pi) = \operatorname{Ker}(\alpha^*) = \{f : 0 = \alpha^*(f) = f\circ\alpha\} = \{f : f|_{\alpha(Y)} = 0\} = \Phi(\alpha(Y))$, d.h. $I \in \operatorname{Bild}(\Phi)$.

Schließlich ist $\operatorname{inkl}^* : C(X,\mathbb{C}) \to C(\Psi(I),\mathbb{C})$ eine surjektive stetige Abbildung mit $\operatorname{Ker}(\operatorname{inkl}^*) = \{f \in C(X,\mathbb{C}) : f|_{\Psi(I)} = 0\} = \Phi(\Psi(I)) = I$, also $C(X,\mathbb{C})/I \cong C(\Psi(I),\mathbb{C})$ nach 7.28. □

7.30 Proposition.

Es sei I ein abgeschlossenes Ideal in $L(H)$ mit $I \neq \{0\}$. Dann enthält I das Ideal $K(H)$ der kompakten Operatoren.

Wir werden später zeigen, daß das auch schon das einzige nicht-triviale Ideal ist falls H separabel ist. Die Quotienten-Algebra $L(H)/K(H)$ heißt CALKIN-ALGEBRA. Die Operatoren, deren Restklasse in der Calkin-Algebra invertierbar sind, heißen FREDHOLM OPERATOREN, siehe [**5**].

Beweis. Es sei $I \neq \{0\}$ und $0 \neq a \in I$. Dann existiert ein $h_0 \neq 0$ mit $h_1 := a(h_0) \neq 0$. Es sei $g_0 \neq 0$ beliebig. Dann ist $b_0 : h \mapsto \frac{\langle h,g_0\rangle}{\|g_0\|^2} h_0$ ein stetiger linearer Operator mit $b_0(g_0) = h_0$ und $b_0(h) = 0$ für $h \perp g_0$. Für $g_1 \neq 0$ sei $b_1 : h \mapsto \frac{\langle h,h_1\rangle}{\|h_1\|^2} g_1$. Dann ist b_1 ebenfalls ein stetiger linearer Operator mit $b_1(h_1) = g_1$. Also bildet $b_1\,a\,b_0 \in I$ den Vektor g_0 auf g_1 ab und $g_0^\perp$ auf 0. Daraus folgt leicht, daß alle endlich-dimensionalen Operatoren T in I liegen, denn diese lassen sich als $h \mapsto \sum_{j=1}^n \langle h,h_j\rangle k_j$ mit einer orthonormalen Familie h_j schreiben: In der Tat sei $\{k_1,\dots,k_n\}$ eine Orthonormalbasis des endlich dimensionalen Bildes von T. Dann läßt sich $T(h)$ als $T(h) = \sum_{i=1}^n T_i(h)\,k_i$ schreiben, wobei $\langle h, T^*(k_i)\rangle = \langle T(h),k_i\rangle = T_i(h)$ ist. Orthonormalisieren wir die $T^*(k_i)$ so erhalten wir ein orthonormal-System $\{h_1,\dots,h_n\}$, wobei $T^*(k_i) = \sum_j t_{i,j}h_j$ mit $t_{i,j} \in \mathbb{C}$ ist. Damit ist

$$\begin{aligned}T(h) &= \sum_{i=1}^n T_i(h)\,k_i = \sum_i \langle h, T^*(k_i)\rangle\,k_i = \sum_i \Big\langle h, \sum_j t_{i,j}\,h_j\Big\rangle\,k_i\\ &= \sum_j \langle h,h_j\rangle \sum_i t_{i,j}\,k_i,\end{aligned}$$

wie gewünscht. Da I abgeschlossen ist, liegen auch alle kompakten Operatoren als Abschluß der endlich-dimensionalen in I (nach [**18**, 6.4.8]). □

Zyklische Darstellungen von C^*-Algebren

Wir wollen nun die Struktur von nicht-kommutativen C^*-Algebren näher untersuchen. Für kommutative C^*-Algebren haben wir in 7.10 gesehen, daß die $*$-Homomorphismen nach $\mathbb{C}$ die Algebra völlig beschrieben haben, und wir damit einen isometrischen $*$-Homomorphismus auf $C(X,\mathbb{C})$ für ein geeignetes kompaktes X erhalten haben. Unser Erzbeispiel für nicht kommutative C^*-Algebren ist $L(H)$ für jeden Hilbert-Raum H. Es liegt folglich nahe $*$-Homomorphismen $A \to L(H)$ zu untersuchen.

7.31 Definition (Darstellungen und invariante Teilräume).

Es sei A eine C^*-Algebra. Unter einer Darstellung von A (auf einem Hilbert-Raum H) versteht man einen $*$-Homomorphismus $\rho : A \to L(H)$.

Zwei Darstellungen $\rho_i : A \to L(H_i)$ mit $i \in \{1,2\}$ heißen Äquivalent falls eine surjektive Isometrie $U : H_1 \to H_2$ existiert, die die Wirkungen austauscht, d.h. $\forall a \in A : \rho_2(a) \circ U = U \circ \rho_1(a)$.

Ein Teilraum $N \subseteq H$ heißt invarianter Teilraum der Darstellung, falls $\rho(a) \cdot N \subseteq N$ für alle $a \in A$. Für jedes $h \in H$ ist $\rho(A)h$ ein invarianter Teilraum. Falls N invariant ist, so ist offensichtlich auch der Abschluß $\overline{N}$ und das orthogonale Komplement $N^\perp$ invariant ($h \perp N \Rightarrow \langle \rho(a)h, k\rangle = \langle h, \rho(a^*)k\rangle = 0$ für alle $k \in N$, denn für diese ist $\rho(a^*)k \in N$). Durch Einschränken induziert jede Darstellung $\rho : A \to L(H)$ eine Darstellung $\rho_N : A \to L(N)$, definiert durch $\rho_N(a) := \rho(a)|_N$.

Die orthogonale Summe einer Familie von Darstellungen $\{\rho_i : A \to L(H_i)\}_{i\in I}$ ist die Darstellung $\rho := \bigoplus_i \rho_i : A \to L(H)$ am Hilbert-Raum

$$H := \bigoplus_{i\in I} H_i := \Big\{h = (h_i) \in \prod_{i\in I} H_i : \|h\|^2 := \sum_{i\in I} \|h_i\|^2 < \infty\Big\},$$

gegeben durch $\rho(a)(h) = (\rho_i(a)(h_i))_{i\in I}$.

Ist N ein invarianter Teilraum, so ist ρ äquivalent zur orthogonalen Summe von $\rho|_{\overline{N}}$ und $\rho|_{N^\perp}$.

Eine Darstellung $\rho : A \to L(H)$ heißt irreduzibel falls es genau(!) zwei abgeschlossene invarianten Teilräume gibt, nämlich $\{0\} \neq H$.

Es liegt nun nahe zu versuchen den Darstellungs-Raum H einer Darstellung ρ soweit in invariante Teilräume N zu zerlegen, daß diese nicht weiter zerlegt werden können, also die Einschränkung ρ_N irreduzibel ist, und ρ bis auf Äquivalenz als orthogonale Summe dieser irreduziblen Darstellungen zu schreiben. Dies geht aber im allgemeinen nicht. Um jede Darstellung in einfachere Teil-Darstellungen zu zerlegen benötigen wir einen schwächeren Begriff als irreduzibel, nämlich zyklisch:

Ein $h \in H$ heißt zyklischer Vektor falls der Orbit (die Bahn) $\rho(A)h$ von h in H dicht liegt.
Eine Darstellung $\rho : A \to L(H)$ heißt zyklisch falls sie einen zyklischen Vektor besitzt.
Klarerweise ist jeder Vektor $h \neq 0$ einer irreduziblen Darstellung ein zyklischer Vektor, und die Darstellung somit zyklisch.

Hauptbeispiel einer zyklischen Darstellung.

Für einen σ-endlichen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ definiert

$$\rho : L^\infty(X) \to L(L^2(X)), \qquad \rho(f)(g) := f \cdot g$$

eine Darstellung, denn

$$\langle h, \rho(f^*)(g)\rangle = \langle h, \overline{f} \cdot g\rangle = \int_X h \cdot f \cdot \overline{g}\, d\mu = \langle h \cdot f, g\rangle = \langle \rho(f)(h), g\rangle = \langle h, \rho(f)^*(g)\rangle$$

Diese Darstellung ist zyklisch:
Falls $\mu(X) < \infty$, so können wir als zyklischen Vektor $h := \chi_X$ verwenden, denn da nach [**18**, 4.12.5] die elementaren Funktionen $g \in L^\infty(X)$ in L^2 dicht liegen, ist erst recht $\{g\, h : g \in L^\infty\} = L^\infty$ dicht in L^2. Falls $\mu(X) = \infty$, so wählen wir eine Zerlegung $X = \bigsqcup_n A_n$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und setzen $h := \sum_n \frac{1}{\sqrt{2^n \mu(A_n)}} \chi_{A_n}$. Dann ist $h \in L^2$ ein zyklischer Vektor, denn jedes $f \in L^2$ wird nach dem Satz [**18**, 4.11.12] von Lebesgue über dominierte Konvergenz durch $f \cdot \chi_{\bigcup_n A_n} = \sum_n f \cdot \chi_{A_n}$ in L^2

approximiert (denn $|f|^2 \geq |f - f \cdot \chi_{\bigcup_{k \leq n} A_k}|^2 \to 0$) und diese Partialsummen lassen sich nach dem ersten Teil durch $\{g \cdot h : g \in L^\infty(X)\}$ approximieren.

Diese Darstellung $\rho : L^\infty(X) \to L(L^2(X))$ ist aber nach 7.42 nur dann irreduzibel, wenn $L^2(X) \cong \mathbb{C}$, also μ ein Punktmaß δ_a für ein $a \in X$ ist.

Für ein positives Borel-Maß μ auf einem kompakten Raum X induziert das eine Darstellung: $\rho|_{C(X,\mathbb{C})} : C(X, \mathbb{C}) \to L(L^2(X))$, $\rho(f)(g) := f \cdot g$.

7.32 Theorem.

Jede Darstellung einer C^*-Algebra ist äquivalent zu einer orthogonalen Summe von zyklischen Darstellungen.

Beweis. Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Teilmengen $M \subseteq H \setminus \{0\}$ mit $\rho(A)h_1 \perp \rho(A)h_2$ für alle $h_1, h_2 \in M$ mit $h_1 \neq h_2$. Mittels Zorn's Lemma erhalten wir ein bezüglich der Inklusion maximales Element $M \in \mathcal{M}$. Angenommen der von $\rho(A)M$ erzeugte Teilraum von H ist nicht dicht. Sei $k \neq 0$ ein Element des orthogonalen Komplements. Dann ist $\langle \rho(a)k, \rho(b)h\rangle = \langle k, \rho(a^*b)h\rangle = 0$ für alle $a, b \in A$ und $h \in M$, d.h. $\rho(A)k \perp \rho(A)h$, ein Widerspruch zur Maximalität.

Für $h \in H$ sei H_h der invariante Teilraum $\overline{\rho(A)h}$ von H und ρ_h die Einschränkung der Darstellung ρ auf diesen Teilraum. Es ist ρ_h klarerweise zyklisch, mit zyklischem Vektor h. Weiters ist $U : \bigoplus_{h\in M} H_h \to H$, $x = (x_h) \mapsto \sum_h x_h$ eine surjektive (da $\langle \rho(A)M\rangle$ dicht liegt) Isometrie (nach Pythagoras), bezüglich welcher $\bigoplus_{h\in M} \rho_h$ äquivalent zu ρ ist. □

7.33 Von zyklischen Darstellungen zu positiven Funktionalen.

Wir sollten also zyklische Darstellungen genauer studieren. Sei $\rho : A \to L(H)$ eine (zyklische) Darstellung mit einem (zyklischen) Vektor $h \in H$. Dann ist

$$f : A \to \mathbb{C}, \quad f(a) := \langle \rho(a)h, h\rangle$$

ein beschränktes lineares Funktional mit $\|f\| = \|h\|^2$, denn für $\|a\| \leq 1$ ist auch $\|\rho(a)\| \leq 1$ nach 7.28 und damit $|f(a)| = |\langle \rho(a)h, h\rangle| \leq \|\rho(a)h\| \cdot \|h\| \leq \|h\|^2$. Dieses Funktional wird wohl sehr viel Information der Darstellung tragen.

Jedes stetige Funktional $f : A \to \mathbb{C}$ auf einer C^*-Algebra definiert eine sesquilineare Form $g : A \times A \to \mathbb{C}$ durch $g(a, b) := f(b^*a)$. Für obiges f liefert dies eine positive (und somit Hermite'sche) Form

$$g(a, a) = f(a^*a) = \langle \rho(a^*a)h, h\rangle = \langle \rho(a)h, \rho(a)h\rangle = \|\rho(a)h\|^2 \geq 0.$$

Folglich definieren wir:

Definition. Positive Funktionale und Zustände.

Ein lineares Funktional $f : A \to \mathbb{C}$ auf einer C^*-Algebra heißt POSITIV, falls $f(a) \geq 0$ für alle $a \in A_+$. So ein f ist monoton, d.h. aus $a \leq b$ folgt $f(a) \leq f(b)$. Die zu einem positiven Funktional f gehörende sesqui-lineare Form $g : (a, b) \mapsto f(b^*a)$ ist somit eine positive sesqui-lineare Form.

Das Funktional f heißt ZUSTAND, falls zusätzlich $\|f\| = 1$ gilt.

Proposition.

Ein lineares Funktional $f : A \to \mathbb{C}$ auf einer C^*-Algebra ist genau dann positiv, wenn $\|f\| = f(1)$ gilt (und es somit beschränkt ist).

Beweis. ($\Rightarrow$) Für Hermite'sche x ist $x \leq \|x\|$ (siehe 7.17) und somit $f(x) \leq f(\|x\|) = \|x\| f(1)$.

Für beliebige x erhalten wir aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung [**18**, 6.2.1] für g die Ungleichung

$$|f(x)|^2 = |g(x,1)|^2 \le g(x,x)\, g(1,1) = f(x^*x)\, f(1) \le \|x^*x\|\, f(1)^2 = (f(1)\,\|x\|)^2,$$

d.h. $\|f\| \le f(1)$. Wegen $|f(1)| = f(1) \cdot \|1\|$ gilt Gleichheit.

($\Leftarrow$) Dazu nehmen wir o.B.d.A. an, daß $1 = \|f\| = f(1)$ ist. Wegen 7.22 müssen wir zeigen, daß $f(a^*a) \ge 0$ ist. Es gilt $\sigma(a^*a) \subseteq [0, \|a^*a\|]$. Dieses Intervall ist der Durchschnitt aller Kreisscheiben $\lambda_0 + K_r := \lambda_0 + \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r\}$ mit $r > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ die es enthalten. Es genügt folglich $f(a^*a) - \lambda_0 \in K_r$ zu zeigen für diese $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dies ist in der Tat der Fall, denn $|f(a^*a) - \lambda_0| = |f(a^*a - \lambda_0)| \le \|f\|\, \|a^*a - \lambda_0\| \le 1 \cdot r(a^*a - \lambda_0) \le r$ nach der Folgerung in 7.13, da $\sigma(a^*a - \lambda_0) = \sigma(a^*a) - \lambda_0 \subseteq K_r$. □

Beispiel.

Die positiven linearen Funktionale auf $C(X, \mathbb{C})$ sind genau die positiven Baire-Maße, und die Zustände genau die Wahrscheinlichkeitsmaße μ, d.h. $\mu(X) = 1$.

7.34 Erweiterungssatz für positive Funktionale und für Zustände.

Es sei A eine C^*-Algebra und B eine Teil-C^*-Algebra. Dann läßt sich jedes positive Funktional und jeder Zustand von B zu einem ebensolchen von A erweitern.

Beweis. Es sei $f : B \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional, also nach 7.33 ein lineares Funktional mit $\|f\| = f(1)$. Nach der Folgerung 5.1.5 aus dem Satz von Hahn-Banach existiert eine lineare Erweiterung $\tilde f : A \to \mathbb{C}$ mit $\|\tilde f\| = \|f\| = f(1) = \tilde f(1)$. Folglich ist $\tilde f$ ebenfalls ein positives Funktional. □

7.35 Rekonstruktion der Darstellung aus dem positiven Funktional.

Es sei $\rho : A \to L(H)$ eine Darstellung einer C^*-Algebra A. Wir wollen versuchen diese Darstellung aus dem Funktional $f : a \mapsto \langle \rho(a)h, h\rangle$ zurückzugewinnen. Dafür sollte wohl h ein zyklischer Vektor sein.

Versuchen wir zuerst den Hilbert-Raum H zu rekonstruieren. Es sei $U : A \to H$ die stetig lineare Abbildung $a \mapsto \rho(a)h$. Da h zyklisch ist, hat sie dichtes Bild. Weiters gilt: $\langle U(a), U(b)\rangle = \langle \rho(a)h, \rho(b)h\rangle = \langle \rho(b^*a)h, h\rangle = f(b^*a)$, d.h. insbesonders ist der Kern von U die Menge $I_f := \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$ und H ist vermöge U isometrisch isomorph zu der Vervollständigung H_f von $\mathrm{Bild}(U) \cong A/_{I_f}$ bezüglich der Norm $\|a + I_f\|^2 := f(a^*a)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "U"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathrm{Bild}(U) \arrow[r, hook] & H \\
& A/I_f \arrow[u, "\cong", "\tilde U"'] \arrow[r, hook] & H_f \arrow[u, dotted, "\cong", "\tilde U"']
\end{tikzcd}$$

Nun zur Rekonstruktion der Darstellung ρ:
Die via $\tilde U$ auf H_f durch ρ induzierte Darstellung ρ_f ist durch

$$\begin{aligned}\tilde U(\rho_f(a)(b + I_f)) &:= \rho(a)(\tilde U(b + I_f)) = \rho(a)(U(b)) = \rho(a)(\rho(b)h) = \rho(ab)h \\ &= U(ab) = \tilde U(ab + I_f)\end{aligned}$$

gegeben, also ist $\rho_f(a) : b + I_f \mapsto ab + I_f$ von der Linksmultiplikation mit a in A induziert. Dem zyklischen Vektor $h \in H$ entspricht via $\tilde U$ offensichtlich $h_f := 1 + I_f \in H_f$.

Sei nun A kommutativ, d.h. o.B.d.A. $A = C(X)$ für ein kompaktes X. Da $f : C(X) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional ist, ist nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 5.3.4 $f(g) = \int_X g\, d\mu$ für ein positives Baire-Maß μ und alle $g \in C(X)$.

Bezüglich des Maßes μ ist

$$I_f = \Big\{g : \|g\|_2^2 := \int_X g\,\overline{g}\, d\mu = 0\Big\} = \{g \in C(X) : g = 0 \quad \mu\text{-f.ü.}\},$$

d.h. H_f ist isomorph zu $L^2(X, \mu)$.

Die induzierte Darstellung ρ_f ist also nichts anderes als die Darstellung von $C(X)$ auf $L^2(X, \mu)$ durch Multiplikation. Wir haben also folgendes gezeigt:

Proposition.

Bis auf Äquivalenz sind die zyklischen Darstellungen der kommutativen C^*-Algebren $A = C(X)$ genau die Darstellungen $C(X) \to L(L^2(\mu))$ mit Baire-Maßen μ auf X durch Multiplikation. □

Nun wollen wir das auf beliebige C^*-Algebren verallgemeinern:

7.36 Theorem (Gelfand-Naimark-Segal).

Es sei A eine C^*-Algebra. Dann existiert eine bijektive Zuordnung zwischen positiven linearen Funktionalen (Zuständen) auf A und Äquivalenzklassen von zyklischen Darstellungen mit ausgezeichneten zyklischen (normierten) Vektoren. Diese Zuordnung ist wie folgt gegeben:

- ($\leftarrow\!\shortmid$) *Sei $\rho : A \to L(H)$ ein Darstellung mit zyklischen Vektor h, dann ist $f = f_{\rho,h} : a \mapsto \langle \rho(a)h, h\rangle$ ein positives lineares Funktional auf A.*
- ($\mapsto$) *Sei $f : A \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional, dann sei $I_f := \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$ und H_f die Vervollständigung von A/I_f bezüglich der sesquilinearen Form $\langle a + I_f, b + I_f\rangle := f(b^*a)$. Die assoziierte Darstellung $\rho_f : A \to L(H_f)$ ist durch $\rho_f(a)(b + I_f) := ab + I_f$ gegeben und $h_f := 1 + I_f$ ist ein ausgezeichneter zyklischer Vektor.*

Beweis. ($\leftarrow\!\shortmid$) Dies ist 7.33.

($\mapsto$) Es sei $f : A \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional und $g : (x, y) \mapsto f(y^*x)$ die dazugehörende positive sesqui-lineare Form. Dann ist $I_f := \{a : f(a^*a) = g(a, a) = 0\} = \{a : g(a, b) = 0 \text{ für alle } b \in A\}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum, denn die Gleichung gilt, da $|g(a, b)|^2 \le g(a, a)\, g(b, b)$. Folglich faktorisiert g zu einer positiv-definiten sesqui-linearen Form $\tilde g$ auf $A/_{I_f}$ gegeben durch $\tilde g(a+I_f, b+I_f) := g(a, b) = f(b^*a)$. Es sei H_f der Hilbert-Raum, der durch Vervollständigen aus $A/_{I_f}$ bezüglich des inneren Produkts $\tilde g$ entsteht. Für $x \in I_f$ gilt

$$g(a\,x, b) = f(b^*ax) = f((a^*b)^*x) = g(x, a^*b) = 0,$$

also ist $a\,I_f \subseteq I_f$, und folglich

$$\rho_f : A \times (A/_{I_f}) \to A/_{I_f}, \quad (a, b + I_f) \mapsto a\,b + I_f$$

eine wohldefinierte bilineare Abbildung. Wir müssen die Stetigkeit von $b + I_f \mapsto ab + I_f$ bezüglich der Norm $\|b + I_f\|^2 := f(b^*b)$ nachrechnen:

$$\|ab + I_f\|^2 = f(b^*a^*ab) \le \|a\|^2\, f(b^*b) = \|a\|^2\, \|b + I_f\|^2,$$

da $a^*a \le \|a^*a\|$ und somit $b^*\,a^*a\,b \le b^*\,\|a^*a\|\,b = \|a\|^2\,b^*b$ nach 7.23.1. Wie man leicht sieht liefert somit die Abbildung ρ_f durch Fortsetzen auf die Vervollständigung H_f von $A/_{I_f}$ einen Algebra-Homomorphismus $\rho_f : A \to L(H_f)$.

Es ist $\rho_f : A \to L(H_f)$ ein $*$-Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned}\tilde g\Big(\rho_f(a)(x+I_f), y+I_f\Big) &= \tilde g(ax+I_f, y+I_f) = g(ax,y)\\ &= g(x,a^*y) = \tilde g\Big(x+I_f, \rho_f(a^*)(y+I_f)\Big).\end{aligned}$$

Außerdem ist $h_f := 1 + I_f$ ein zyklischer Vektor von ρ_f, denn nach Konstruktion ist $\rho_f(A)\,(1+I_f) = \{a + I_f : a \in A\} = A/_{I_f}$ dicht in H_f.

Es ist f gerade das zu ρ_f und h_f gehörende Funktional $a \mapsto \tilde g(\rho_f(a)(h_f), h_f) = \tilde g(\rho_f(a)(1+I_f), 1+I_f) = f(1^*a) = f(a)$.

Umgekehrt sei $\rho : A \to L(H)$ eine Darstellung mit zyklischem Vektor h und dazu assoziiertem $f = f_{\rho,h} : a \mapsto \langle \rho(a)h, h\rangle$. In 7.35 haben wir gezeigt, daß die daraus konstruierte Darstellung $\rho_h : A \to L(H_f)$ via der surjektiven Isometrie $\tilde U$ zu ρ isomorph ist. $\square$

7.37 Definition. Raum aller Zustände.

Es sei $\mathrm{Zust}(A)$ der Raum aller Zustände $f : A \to \mathbb{C}$ versehen mit der punktweisen Konvergenz.

Proposition.

Es sei A eine C^*-Algebra. Dann ist der Raum $\mathrm{Zust}(A)$ aller Zustände ein kompakter konvexer Teilraum der Einheitssphäre von A^*.
Und für $a \in A_+$ ist $\|a\| = \max\{f(a) : f \in \mathrm{Zust}(A)\}$.

Beweis. Der Raum $\{f \in A^* : \|f\| \le 1 = f(1)\}$ der Zustände ($|f(1)| \le \|f\|$ gilt immer) ist klarerweise eine abgeschlossene konvexe Menge in der Einheitskugel von A^* bezüglich der punktweisen Konvergenz, also auch kompakt nach 5.4.13.

Es sei $C^*(a)$ die von $a \ge 0$ erzeugte kommutative Teil-C^*-Algebra von A. Es existiert ein $\lambda \in \sigma(a) \subseteq [0, \|a\|]$ mit $\lambda = r(a) = \|a\|$. Dann ist $f : C^*(a) \cong C(\sigma(a), \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_\lambda} \mathbb{C}$ ein Algebra-Homomorphismus mit $f(a) = \lambda = \|a\|$ und $\|f\| \le 1 = f(1)$. Somit ist f ein Zustand auf $C^*(a)$, und kann nach 7.34 zu einem Zustand $f : A \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Andererseits gilt für Zustände f klarerweise $|f(a)| \le \|f\|\,\|a\| = \|a\|$. $\square$

7.38 Theorem.

Jede C^*-Algebra A besitzt eine TREUE *(d.h. injektive und nach 7.28 somit isometrische) Darstellung $\pi : A \to L(H)$ auf einen Hilbert-Raum H.*

Ist A separabel, so kann die Darstellung zyklisch gewählt werden, siehe [**5**, S.259], [**3**, S.265].

Beweis. Es sei $H = \bigoplus_{f \in \mathrm{Zust}\,A} H_f$ und $\rho(a) := \bigoplus_{f \in \mathrm{Zust}\,A} \rho_f(a)$. Dann ist $\rho : A \to L(H)$ eine Darstellung.

Diese ist treu: Es sei $\rho(a) = 0$ und somit $\rho_f(a) = 0$ für alle $f \in \mathrm{Zust}(A)$. Da $a^*a \ge 0$ nach 7.22 gilt, existiert nach 7.37 ein Zustand $f : A \to \mathbb{C}$ mit $f(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Der zur Darstellung ρ_f gehörende zyklische Vektor $h \in H_f$ erfüllt $\|h\| = 1$ und $f(b) = \langle \rho_f(b)h, h\rangle$ für alle $b \in A$. Insbesonders ist $\|a\|^2 = f(a^*a) = \langle \rho_f(a^*a)h, h\rangle = \langle \rho_f(a)h, \rho_f(a)h\rangle = \|\rho_f(a)h\|^2 = 0$, also ist $a = 0$. $\square$

Irreduzible Darstellungen von C^*-Algebren

Wir sollten also (invariante) abgeschlossene Teilräume von H genauer studieren. Jeder solche läßt sich als Bild einer orthogonalen Projektion beschreiben. Dazu die folgenden zwei Lemmas.

7.39 Lemma.

Es sei H ein Banachraum und $P \in L(H)$ IDEMPOTENT*, d.h. $P^2 = P$, bzw. P ist eine* PROJEKTION*. Dann gilt:*

1. $1 - P$ *ist auch idempotent;*
2. $\operatorname{Bild} P = \operatorname{Ker}(1-P)$ *und* $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Bild}(1-P)$*;*
3. $H = \operatorname{Bild} P \oplus \operatorname{Ker} P$*;*
4. *Für $A \in L(H)$ gilt: $P \circ A = A \circ P \Leftrightarrow \operatorname{Bild} P$ und $\operatorname{Ker} P$ sind A-invariant.*

Beweis. ($\boxed{1}$) $(1-P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - 2P + P = 1 - P$.

($\boxed{2}$) $h \in \operatorname{Bild} P \Leftrightarrow h = Pk$ für ein $k \in H \Leftrightarrow Ph = P^2 k = Pk = h \Leftrightarrow h \in \operatorname{Ker}(1-P)$. Weiters folgt $\operatorname{Bild}(1-P) = \operatorname{Ker} P$, da $1 - P$ idempotent ist.

($\boxed{3}$) Es gilt $\operatorname{Bild} P \cap \operatorname{Ker} P = \{0\}$, da $h \in \operatorname{Bild} P$ zur Folge hat, daß $Ph = h$ und andererseits ist $Ph = 0$ für $h \in \operatorname{Ker} P$. Jedes $h \in H$ läßt sich als $h = Ph + (1-P)h$ schreiben, mit $Ph \in \operatorname{Bild} P$ und $(1-P)h \in \operatorname{Bild}(1-P) = \operatorname{Ker} P$.

($\boxed{4}$) ($\Rightarrow$) Dies gilt für jede Abbildung $P \in L(H)$:
Es ist $A(\operatorname{Bild} P) = A(P(H)) = P(A(H)) \subseteq P(H) = \operatorname{Bild} P$, d.h. $\operatorname{Bild} P$ ist A-invariant, und $P(A(\operatorname{Ker} P)) = A(P(\operatorname{Ker} P)) = 0$, d.h. $\operatorname{Ker} P$ ist auch A-invariant.

($\Leftarrow$) Sei nun P eine Projektion mit A-invarianten Kern und Bild. Für $x \in H$ ist nach ($\boxed{3}$) $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in \operatorname{Ker} P$ und $x_1 \in \operatorname{Bild} P$ und somit $Ax_0 \in \operatorname{Ker} P$ und $Ax_1 \in \operatorname{Bild} P$, d.h. $P(Ax_0) = 0 = A(0) = A(Px_0)$ und $P(Ax_1) = Ax_1 = A(Px_1)$ zusammen also $(P \circ A)(x) = (A \circ P)(x)$. □

7.40 Lemma.

Für Hilbert-Räume H und idempotente $P \in L(H)$ sind äquivalent:

1. *P ist orthogonal-Projektion, d.h.* $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Bild} P)^\perp$*;*
2. $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Bild} P$*;*
3. *$\|P\| \leq 1$, d.h. P ist eine Kontraktion;*
4. *$P \geq 0$, d.h. P ist positiv.*
5. *$P^* = P$, d.h. P ist Hermite'sch;*
6. *$P^*P = PP^*$, d.h. P ist normal;*

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$) ist trivial.

($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$) Wegen $\operatorname{Bild} P \ni Ph \perp h - Ph \in \operatorname{Ker} P$ ist $\|h\|^2 = \|Ph\|^2 + \|h - Ph\|^2$ und somit $\|Ph\| \leq \|h\|$.

($\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$) Es ist $h - Ph = (1-P)h \in \operatorname{Bild}(1-P) = \operatorname{Ker} P$. Für $h \perp \operatorname{Ker} P$ gilt folglich $0 = \langle h - Ph, h\rangle = \|h\|^2 - \langle Ph, h\rangle$ und damit ist $\|h\|^2 = \langle Ph, h\rangle \leq \|Ph\|\,\|h\| \leq \|h\|^2$. Weiters folgt $\|Ph\| = \|h\| = \sqrt{\langle Ph, h\rangle}$ und $\|h - Ph\|^2 = \|h\|^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle Ph, h\rangle) + \|Ph\|^2 = 0$ für diese h. D.h. $(\operatorname{Ker} P)^\perp \subseteq \operatorname{Ker}(1-P) = \operatorname{Bild} P$.

Sei nun $h = h_0 + h_1$ beliebig mit $h_0 \in \operatorname{Ker} P$ und $h_1 \in (\operatorname{Ker} P)^\perp \subseteq \operatorname{Bild} P$. Folglich ist $\langle Ph, h\rangle = \langle Ph_1, h_1 + h_0\rangle = \langle h_1, h_1\rangle \geq 0$, d.h. P ist positiv nach der Folgerung in $\boxed{7.22}$.

($\boxed{4} \Rightarrow \boxed{5}$) und ($\boxed{5} \Rightarrow \boxed{6}$) sind trivial.

($\boxed{6} \Rightarrow \boxed{1}$) Wegen $\|Ph\| = \|P^*h\|$ für normales P nach $\boxed{7.7.2}$ ist $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker}(P^*) = (\operatorname{Bild} P)^\perp$ nach $\boxed{5.4.3}$. □

7.41 Theorem.

Für jede $*$-abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq L(H)$ sind äquivalent:

1. *Die Menge A ist irreduzibel;*
2. *Die* Kommutante $A^k := \{T \in L(H) : \forall a \in A : T \circ a = a \circ T\}$ *besteht nur aus den Vielfachen der Identität;*
3. *$P \in A^k$, $0 \leq P \leq 1 \Rightarrow \exists \lambda \in [0,1]$: $P = \lambda \cdot \mathrm{id}$;*
4. *Jede orthogonal-Projektion in A^k ist 0 oder 1.*

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$) Falls $b \in A^k$, so ist $\operatorname{Ker} b$ ein invarianter Teilraum nach $\boxed{7.39.4}$ und somit gleich $\{0\}$ oder H, i.e. b ist injektiv oder $b = 0$. Also besitzt die Teil-C^*-Algebra A^k von $L(H)$ keine Nullteiler, denn für $b_1, b_2 \in A^k$ mit $b_1 \neq 0$, also b_1 injektiv, folgt nun aus $b_1 b_2 = 0$, daß $b_2 = 0$. Es sei $0 \neq b \in A^k$ Hermite'sch, dann besitzt $C^*(b) \cong C(\sigma(b))$ (nach $\boxed{7.12}$) keine Nullteiler und somit ist $\sigma(b)$ einpunktig, also $C^*(b) = \mathbb{C} \cdot 1$. Da sich nach $\boxed{7.8.2}$ jedes Element a als $\mathfrak{Re}(a) + i\,\mathfrak{Im}(a)$ mit Hermite'schen Elementen $\mathfrak{Re}(a), \mathfrak{Im}(a) \in A^k$ (da A $*$-abgeschlossen ist) schreiben läßt, ist $A^k = \mathbb{C} \cdot 1$.

($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$) ist trivial, da aus $0 \leq P = \lambda \cdot 1 \leq 1$ folgt, daß $0 \leq \lambda \leq 1$ ist.

($\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$) Für orthogonal-Projektionen P gilt $0 \leq P \leq \|P\| \leq 1$ nach $\boxed{7.40.4}$, $\boxed{7.17}$ und $\boxed{7.40.3}$ gilt. Wegen $P^2 = P$, ist $\lambda^2 = \lambda$.

($\boxed{1} \Leftarrow \boxed{4}$) Es sei N ein abgeschlossener A-invarianter Teilraum von H und es sei P die orthonormal-Projektion auf N. Dann sind $\operatorname{Bild} P = N$ und $\operatorname{Ker} P = N^\perp$ beide A-invariant und nach $\boxed{7.39.4}$ somit $P \in A^k$, d.h. $P = \mathrm{id}$ oder $P = 0$ nach $\boxed{4}$, und damit $N = \{0\}$ oder $N = H$. □

7.42 Folgerung.

Ist $A \subseteq L(H)$ eine kommutative $*$-abgeschlossene irreduzible Teilmenge, so ist H 1-dimensional.

Beweis. Da A kommutativ ist, gilt $A \subseteq A^k = \mathbb{C}$ nach $\boxed{7.41}$, also ist $A \subseteq \mathbb{C}$ und damit $L(H) = A^k = \mathbb{C}$. Das ist nur für 1-dimensionales H möglich. □

Folgerung.

Die irreduziblen Darstellungen kommutativer C^*-Algebren A sind bis auf Äquivalenz genau durch die Algebra-Homomorphismen $A \to L(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ gegeben.

Beweis. Nach obiger Folgerung ist der Darstellungsraum H jeder irreduziblen Darstellung von A notwendig isomorph zu $\mathbb{C}$ und somit die Darstellung ρ gegeben durch den Algebra-Homomorphismus $f := \mathrm{ev}_1 \circ \rho : A \to L(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$. □

7.43 Proposition.

Es sei f ein positives Funktional auf einer C^*-Algebra A und $\rho : A \to L(H)$ die nach $\boxed{7.36}$ assoziierte Darstellung mit ausgezeichnetem zyklischem Vektor h. Dann existiert eine Bijektion

$$\{P \in \rho(A)^k \subseteq L(H) : 0 \leq P \leq 1\} \cong \{g \in A^* : 0 \leq g \leq f\}$$

die durch die Relation

$$g(a) = \langle P(\rho(a)h), h\rangle \text{ für alle } a \in A$$

festgelegt ist.

Beweis. Es sei $U : A \to H$ die stetig lineare Abbildung $a \mapsto \rho(a)h$ mit dichten Bild. Diese erfüllt $\langle Ua, Ub\rangle = \langle \rho(a)h, \rho(b)h\rangle = \langle \rho(b^*a)h, h\rangle = f(b^*a)$ nach 7.35.

($\mapsto$) Es sei $P \in \rho(A)^k$ mit $0 \le P \le 1$. Dann ist $g_P : a \mapsto \langle P(\rho(a)h), h\rangle$ ein positives lineares Funktional, denn

$$\begin{aligned} g_P(a^*a) &= \langle P(\rho(a^*a))h, h\rangle = \langle (P \circ \rho(a^*))(\rho(a)h), h\rangle \\ &= \langle (\rho(a^*) \circ P)(\rho(a)h), h\rangle = \langle \rho(a)^*(P(\rho(a)h)), h\rangle \\ &= \langle P(\rho(a)h), \rho(a)h\rangle = \langle P(Ua), Ua\rangle \ge 0, \text{ da } P \ge 0. \end{aligned}$$

Es gilt $g_P \le f$, denn nach der Proposition in 7.22 ist

$$g_P(a^*a) = \langle P(Ua), Ua\rangle \le \langle Ua, Ua\rangle = f(a^*a), \text{ da } P \le 1.$$

($\leftarrow$) Es sei $g \in A^*$ mit $0 \le g \le f$. Dann ist $(a, b) \mapsto g(b^*a)$ eine positive sesquilineare Form auf A, die wegen $g \le f$ über $\operatorname{Ker} U = \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$ (siehe 7.35) zu einer stetigen positiven sesquilinear-Form faktorisiert (vgl. mit 7.36). Und, da $\operatorname{Bild} U$ in H dicht liegt, sich zu einer eindeutig bestimmten positiven sesquilinearen Form $\tilde{g} : H \times H \to \mathbb{C}$ erweitert. Diese entspricht nach 7.5 einem positiven $P_g \in L(H)$.

Es gilt $P_g \le 1$, denn $\langle P_g Ua, Ua\rangle = \tilde{g}(Ua, Ua) = g(a^*a) \le f(a^*a) = \langle Ua, Ua\rangle$.

Schließlich ist $P_g \in \rho(A)^k$, denn für $a \in A$ gilt wegen $\rho(a)\, U(b) = U(a\, b)$:

$$\begin{aligned} \langle (P_g \circ \rho(a))(Ub), Uc\rangle &= \langle P_g(U(ab)), Uc\rangle = g(c^*ab) \\ &= g((a^*c)^*b) = \langle P_g(Ub), U(a^*c)\rangle = \langle P_g(Ub), \rho(a)^*\,(Uc)\rangle \\ &= \langle (\rho(a) \circ P_g)(Ub), (Uc)\rangle. \end{aligned}$$

($g \mapsto P \mapsto g$) Für $0 \le g \le f$ sei $P := P_g$. Dann ist

$$g_P(a) := \langle P_g(\rho(a)h), h\rangle = \langle P_g(Ua), U1\rangle = g(1^*a) = g(a).$$

($P \mapsto g \mapsto P$) Für $0 \le P \le 1$ in $\rho(A)^k$ und $g := g_P$ ist:

$$\langle P_g(Ua), Ub\rangle = g_P(b^*a) = \langle P(\rho(b^*a)h), h\rangle = \langle P(\rho(a)h), \rho(b)h\rangle = \langle P(Ua), Ub\rangle,$$

also ist $P_g = P$. □

7.44 Theorem.

Für jeden Zustand $f : A \to \mathbb{C}$ auf einer C^*-Algebra A ist äquivalent:

1. *Die zu f gehörende Darstellung ist irreduzibel;*
2. *Für jedes $0 \le g \le f$ ist $g = \lambda f$ für ein $0 \le \lambda \le 1$.*
3. *Das Funktional f ist ein extremal-Punkt (siehe 5.5.1) von* $\operatorname{Zust}(A)$*;*

Beweis. Es sei $\rho : A \to L(H)$ die zu f gehörende Darstellung mit zyklischem Vektor h.

(1 $\Leftrightarrow$ 2) Nach 7.41.3 ist ρ genau dann irreduzibel, wenn jedes $P \in \rho(A)^k$ mit $0 \le P \le 1$ ein Vielfaches der Identität ist. Nach 7.43 entsprechen diesen P in eindeutiger Weise die $g \in A^*$ mit $0 \le g \le f$ und $\lambda \cdot \mathrm{id}$ entspricht gerade $\lambda \cdot f$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Es sei $f = \lambda g + (1 - \lambda)h$ mit Zuständen h und g und $0 < \lambda < 1$. Dann ist $0 \le \lambda g \le f$ und somit $\lambda g = \mu f$ für ein $0 \le \mu \le 1$ nach (2). Wegen

$f(1) = 1 = g(1)$ gilt $\lambda = \mu$ und somit $g = f$ und damit auch $g = h$, i.e. f ist ein extremal-Punkt.

(3 $\Rightarrow$ 2) Es sei $0 \leq g \leq f$ und O.B.d.A. $g \neq 0$ und $g \neq f$. Dann ist $0 \leq f - g \neq 0$, also $0 < \|f - g\| = (f - g)(1) = f(1) - g(1)$ und somit gilt für $\lambda := \|g\|$, daß $0 < \lambda = \|g\| = g(1) < f(1) = 1$. Es sind $f_0 := \frac{1}{\lambda} g \geq 0$ und $f_1 := \frac{1}{1-\lambda}(f - g) \geq 0$ Zustände, da $f_0(1) = \frac{g(1)}{\lambda} = 1$ und $f_1(1) = \frac{f(1)-g(1)}{1-\lambda} = 1$, und klarerweise ist $f = \lambda\, f_0 + (1 - \lambda)\, f_1$, also $f = f_0 = f_1$ wegen (3), und damit $g = \lambda\, f_0 = \lambda\, f$. $\square$

7.45 Theorem.

Die irreduziblen Darstellungen einer C^*-Algebra sind Punkte-trennend.

Beweis. Es sei $a \neq 0$. Dann existiert ein extremaler Zustand f mit $f(a^*a) > 0$, denn andernfalls würde die stetige lineare Abbildung $\mathrm{ev}_{a^*a} : A^* \to \mathbb{C}$ auf $\mathrm{Ext}(\mathrm{Zust}(A))$ verschwinden, und damit auch auf der abgeschlossenen konvexen Hülle, welche nach Krein-Millman 5.5.1 mit der nach 7.37 kompakten konvexen Menge $\mathrm{Zust}(A)$ übereinstimmt. Wir haben aber in 7.37 gesehen, daß ein Zustand $f : A \to \mathbb{C}$ existiert mit $f(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2 \neq 0$, ein Widerspruch. Sei nun $\rho : A \to L(H)$ die nach 7.44 irreduzible Darstellung mit zyklischen Vektor h, die zu dem extremalen Zustand $f : A \to \mathbb{C}$ gehört. Dann ist $0 < f(a^*a) = \langle \rho(a^*a)h, h\rangle = \langle \rho(a)h, \rho(a)h\rangle = \|\rho(a)h\|^2$, i.e. $\rho(a) \neq 0$. $\square$

Gruppen-Darstellungen

7.46 Die Gruppen-Algebra.

Es sei G eine diskrete (oder insbesonders eine endliche Gruppe). Wir wollen folgendes universelle Problem lösen: Gesucht ist eine $\mathbb{K}$-Algebra $\mathbb{K}(G)$ und ein Homomorphismus $\delta : G \to \mathbb{K}(G)$ bezüglich der Multiplikation der Algebra, s.d. zu jedem Homomorphismus $\tau : G \to A$ in eine Algebra A ein eindeutiger Algebra-Homomorphismus $\tilde\tau : \mathbb{K}(G) \to A$ existiert mit $\tilde\tau \circ \delta = \tau$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\tau"'] & & \mathbb{K}(G) \arrow[dl, dotted, "\exists!"', "\tilde\tau"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Dazu lösen wir zuerst das universelle Problem, zur Menge G einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}(G)$ und eine Abbildung $\delta : G \to \mathbb{K}(G)$ zu finden, sodaß für jede Abbildung $\tau : G \to A$ mit Werten in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde\tau : \mathbb{K}(G) \to A$ mit $\tilde\tau \circ \delta = \tau$ existiert, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\tau"'] & & \mathbb{K}(G) \arrow[dl, dotted, "\exists!"', "\tilde\tau"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Die Lösung für $\mathbb{K}(G)$ ist der freie Vektorraum $\coprod_G \mathbb{K} = \bigoplus_G \mathbb{K}$ mit der injektiven Abbildung $\delta : G \to \coprod_G \mathbb{K}$, $\delta_t := \delta(t) := (\delta_t^s)_{s\in G}$, wobei $\delta_t^s := 1$ für $t = s$ und 0 sonst.

Die Elemente $f \in \mathbb{K}(G) := \coprod_G \mathbb{K}$ lassen sich eindeutig als endliche Summe $f = \sum_{t\in G} f(t)\delta_t$ schreiben, d.h. $\mathbb{K}(G)$ läßt sich mit dem Raum aller Funktionen f :

$G \to \mathbb{K}$ mit endlichem Träger identifizieren.
Die Abbildung $\tilde\tau$ ist durch

$$\tilde\tau(f) := \tilde\tau\Big(\sum_{t\in G} f(t)\,\delta_t\Big) = \sum_{t\in G} f(t)\,\tilde\tau(\delta_t) = \sum_{t\in G} f(t)\,\tau(t)$$

gegeben.
Man sieht leicht ein, daß dieser Vektorraum auch die universelle Eigenschaft für multi-lineare Abbildungen hat, d.h. jeder Abbildung $\tau : G\times\dots\times G \to A$ mit Werten in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum entspricht eine multi-lineare Abbildung $\tilde\tau : \mathbb{K}(G)\times\ldots\times\mathbb{K}(G) \to A$ mit $\tilde\tau\circ(\delta\times\ldots\times\delta) = \tau$, welche durch $\tilde\tau(f^1,\dots,f^n) := \sum_{t_1,\dots,t_n\in G} f^1(t_1)\cdot\dots\cdot f^n(t_n)\,\tau(t_1,\dots,t_n)$ gegeben ist. Wenden wir $\widetilde{(\_)}$ auf die Multiplikation $G\times G \to G \xrightarrow{\delta} \mathbb{K}(G)$ an, so erhalten wir eine bilineare Abbildung $\star : \mathbb{K}(G)\times\mathbb{K}(G) \to \mathbb{K}(G)$, welche durch

$$\begin{aligned} f\star g &= \Big(\sum_t f(t)\,\delta_t\Big)\star\Big(\sum_s g(s)\,\delta_s\Big) = \sum_{t,s} f(t)\,g(s)\;\delta_t\star\delta_s \\ &= \sum_{t,s} f(t)\,g(s)\;\delta_{ts} = \sum_r\sum_{ts=r} f(t)\,g(s)\;\delta_r, \end{aligned}$$

d.h. durch

$$(f\star g)(r) := \sum_{ts=r} f(t)\,g(s) = \sum_t f(t)\,g(t^{-1}r)$$

gegeben ist.
Wegen der universellen Eigenschaft ist diese Multiplikation $\star$ so wie die Multiplikation in G ebenfalls assoziativ, und δ_e ist eine 1, wobei $e\in G$ das neutrale Element der Gruppe ist. Also ist $\mathbb{K}(G)$ eine assoziative Algebra mit 1.
Falls nun $\tau : G \to A$ ein Gruppen-Homomorphismus ist, so ist leicht einzusehen, daß $\tilde\tau$ ein Algebra-Homomorphismus wird, und umgekehrt.

7.47 Darstellungen von G auf $\mathbb{K}(G)$.

Der Gruppen-Homomorphismus $\delta : G \to \mathbb{K}(G)$ liefert auch eine Darstellung λ von G auf dem Vektorraum $\mathbb{K}(G)$, d.h. einen Gruppen-Homomorphismus $\lambda : G \to L(\mathbb{K}(G))$, definiert durch $\lambda(t)(f) := \delta_t\star f$. Diese Darstellung läßt sich auch anders ausdrücken:

$$\begin{aligned} \lambda(t)(f) &= \delta_t\star f = \delta_t\star\sum_{s\in G} f(s)\,\delta_s = \sum_{s\in G} f(s)\;\delta_t\star\delta_s \\ &= \sum_{s\in G} f(s)\;\delta_{ts} = \sum_{r\in G} f(t^{-1}r)\;\delta_r = f\circ\ell_{t^{-1}} = (\ell_{t^{-1}})^*(f), \end{aligned}$$

wobei ℓ_t die sogenannte LINKS-TRANSLATION auf der Gruppe G bezeichnet, welche durch $\ell_t(s) := t\,s$ definiert ist. Es ist ℓ ein Gruppen-Homomorphismus von G in die Menge der Bijektionen von G.

Falls $\tilde\tau : \mathbb{K}(G) \to L(H)$ eine Darstellung ist, und $\tau := \tilde\tau\circ\delta : G \to \mathbb{K}(G) \to L(H)$ die zugehörige Darstellung von G, so ist nebenstehendes Diagramm kommutativ, denn

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(G) \arrow[r, "\tilde\tau"] \arrow[d, "(\ell_{t^{-1}})^*=\lambda_t"'] & L(H) \arrow[d, "\tau(t)_*"] \\ \mathbb{K}(G) \arrow[r, "\tilde\tau"'] & L(H), \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} (\tau(t)_*\circ\tilde\tau)(f) &= \tau(t)\circ\tilde\tau(f) = \tilde\tau(\delta(t))\circ\tilde\tau(f) \\ &= \tilde\tau(\delta(t)\star f) = \tilde\tau(f\circ\ell_{t^{-1}}) = \tilde\tau(\lambda_t(f)) = (\tilde\tau\circ\lambda_t)(f). \end{aligned}$$

7.48 Von $\mathbb{K}(G)$ zu $L^1(G)$.

Wir wollen nicht rein algebraisch bleiben, und statt dessen eine universelle Eigenschaft für stetige Banach-Algebra-Homomorphismen haben. Dazu müssen wir $\mathbb{K}(G)$ mit einer Norm versehen. Es drängen sich die p-Normen $\|f\|_p := \left(\sum_{t\in G} |f(t)|^p\right)^{1/p}$ auf. Für diese gilt:

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ falls } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Insbesonders ist die Vervollständigung von $\mathbb{K}(G)$ bezüglich der 1-Norm eine Banach-Algebra mit Eins

$$L^1(G) := \Big\{ f : G \to \mathbb{K} : \|f\|_1 := \sum_{t\in G} |f(t)| < \infty \Big\}.$$

Man beachte, daß das wirklich die integrierbaren Funktionen bezüglich des Zählmaßes $\mu : A \mapsto \sum_{g\in A} 1$ sind. Wie wir in 6.39 und in 7.9 zusammen mit 7.28 gesehen haben, sind Algebra-Homomorphismen oft automatisch stetig und sogar Kontraktionen. Der assoziierte Algebra-Homomorphismus $\tilde{\tau} : \mathbb{K}(G) \to A$ mit Werten in einer Banach-Algebra ist genau dann eine Kontraktion (und läßt sich somit zu einem solchen auf $L^1(G)$ fortsetzen), wenn $\|\tau(t)\| \leq 1$ für alle $t \in G$ ist. Wegen $1 = \|1\| = \|\tau(e)\| = \|\tau(t)\,\tau(t^{-1})\| \leq \|\tau(t)\|\,\|\tau(t^{-1})\|$ gilt dann aber auch $\|\tau(t)\| \geq \frac{1}{\|\tau(t^{-1})\|} \geq 1$, also hat τ Werte in $U(A) := \{a \in \mathrm{inv}(A) : \|a\| = 1 = \|a^{-1}\|\}$, der Menge der invertierbaren Elementen in der Einheitssphäre von A. Falls $A = L(H)$ für einen Banach-Raum H ist, dann ist $U(H) := U(L(H))$ die Menge der bijektiven Isometrien, bzw. der unitären Operatoren im Falle eines Hilbert-Raums H nach 7.4, denn aus $\|a\| = 1 = \|a^{-1}\|$ folgt

$$\|ax\| \leq \|a\|\,\|x\| = \|x\| = \|a^{-1}ax\| \leq \|a^{-1}\|\,\|ax\| = \|ax\|.$$

Wir haben also folgendes gezeigt:

Proposition.

Es sei G eine diskrete Gruppe. Dann ist $\delta : G \to L^1(G)$ ein Gruppen-Homomorphismus in eine Banach-Algebra der für jeden Banach-Raum H eine Bijektion

$$\delta_* : \mathrm{Hom}(L^1(G), L(H)) \cong \mathrm{Hom}(G, U(H))$$

induziert, wobei $\mathrm{Hom}(L^1(G), L(H))$ die Menge der kontraktiven Algebra-Homomorphismen und $\mathrm{Hom}(G, U(H))$ die der Gruppen-Homomorphismen in

$$U(H) := \{a \in L(H) : a \text{ ist invertierbare Isometrie}\}$$

bezeichnet. Die Elemente ρ der ersten Menge heißen DARSTELLUNGEN *der Banach-Algebra $L^1(G)$ auf H und die Elemente τ der zweiten Menge* UNITÄRE DARSTELLUNGEN *der Gruppe G auf H. Die Bijektion ist durch*

$$\tau(t) := \rho(\delta_t)$$
$$\rho(f) := \sum_{t\in G} f(t)\tau(t)$$

gegeben.

7.49 Die linksregulären Darstellungen von $L^1(G)$ und die Involution.

Die Darstellung von $\mathbb{K}(G)$ auf dem Vektorraum $\mathbb{K}(G)$, gegeben durch die Faltung, induziert wohldefinierte Darstellungen (die sogenannten linksregulären Darstellungen) $\tilde{\lambda}$ von $L^1(G)$ auf den Banach-Räumen $L^p(G)$, welche durch Vervollständigen von $\mathbb{K}(G)$ bezüglich der p-Norm erhalten werden. Denn die Gleichung $\|f \star g\|_p \leq$

$\|f\|_1 \|g\|_p$ besagt, daß die Darstellungen Kontraktionen sind. Durch Zusammensetzen mit $\delta : G \to L^1(G)$ enthalten wir folglich Darstellungen λ von G auf den Banach-Räumen $L^p(G)$.

Im Falle $p = 2$ ist $H := L^p(G)$ ein Hilbert-Raum und somit $L(H)$ eine C^*-Algebra. Wir wollen nun versuchen auch $L^1(G)$ so zu einer C^*-Algebra zu machen, daß die linksreguläre Darstellung $\tilde\lambda : L^1(G) \to L(L^2(G))$ ein $*$-Homomophismus ist, d.h.

$$\langle \tilde\lambda(f^*)h_1, h_2\rangle = \langle \tilde\lambda(f)^*h_1, h_2\rangle = \langle h_1, \tilde\lambda(f)h_2\rangle$$

für alle $f \in L^1(G)$ und $h_1, h_2 \in L^2(G)$ erfüllt. Wählen wir $h_1 := \delta_e$ und $h_2 := \delta_t$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \langle f^* \star \delta_e, \delta_t\rangle = \langle \tilde\lambda(f^*)h_1, h_2\rangle \\ &= \langle h_1, \tilde\lambda(f)h_2\rangle = \langle \delta_1, f \star \delta_t\rangle = \overline{(f \star \delta_t)(1)} = \overline{f(t^{-1})}. \end{aligned}$$

und eine entsprechende Rechnung mit allgemeinen h_1 und h_2 zeigt, daß $\tilde\lambda : L^1(G) \to L(L^2(G))$ mit dieser Definition von f^* ein $*$-Homomorphismus ist. Offensichtlich ist $(\_)^*$ eine isometrische Involution (d.h. konjugiert-linear, idempotent und ein anti-Homomorphismus). Allerdings ist $L^1(G)$ keine C^*-Algebra, wie das folgende Bespiel für $G := \mathbb{Z}$ zeigt.

Beispiel.

Für die diskrete Gruppe $G = \mathbb{Z}$ und $f^*(k) := \overline{f(-k)}$ ist

$$(f^* \star f)(k) = \sum_j f^*(j)\, f(k - j) = \sum_j \overline{f(j)}\, f(k + j).$$

Es sei nun f reell-wertig und konzentriert auf $\{-1, 0, 1\}$, dann ist $f^* \star f$ konzentriert auf $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und hat folgende Werte:

$$f^* \star f : \begin{cases} -2 & \mapsto \overline{f_{+1}}\, f_{-1} \\ -1 & \mapsto \overline{f_0}\, f_{-1} + \overline{f_{+1}}\, f_0 \\ 0 & \mapsto \overline{f_{-1}}\, f_{-1} + \overline{f_0}\, f_0 + \overline{f_{+1}}\, f_{+1} \\ +1 & \mapsto \overline{f_{-1}}\, f_0 + \overline{f_0}\, f_{+1} \\ +2 & \mapsto \overline{f_{-1}}\, f_{+1} \end{cases}$$

Folglich ist

$$\|f^* \star f\|_1 = 2\,|f_{+1}\, f_{-1}| + 2\,|f_0|\,|f_{+1} + f_{-1}| + {f_{-1}}^2 + {f_0}^2 + {f_{+1}}^2$$

und

$${\|f\|_1}^2 = {f_{-1}}^2 + {f_0}^2 + {f_{+1}}^2 + 2\,|f_{+1}\, f_{-1}| + 2\,|f_0\, f_{-1}| + 2\,|f_0\, f_{+1}|.$$

Falls $f_0 \neq 0$ und $f_{-1} \cdot f_{+1} < 0$ so ist $\|f^* \star f\|_1 < \|f\|_1^2$.

Zusammenfassend haben wir folgendes gezeigt:

Proposition.

Für jede diskrete Gruppe G ist $L^1(G)$ eine B^*-Algebra d.h. eine Banach-Algebra mit einer Involution $*$, welche eine Isometrie ist, aber nicht notwendig $\|f^*f\| = \|f\|^2$ erfüllt. Die Involution auf $L^1(G)$ ist dabei durch $f^*(t) := \overline{f(t^{-1})}$ gegeben. □

Lemma.

Es sei $\rho : B \to A$ ein $*$-Homomorphismus von einer B^*-Algebra in eine C^*-Algebra, dann ist ρ eine Kontraktion.

Beweis.

$$\begin{aligned}\|\rho(f)\|^2 &= \|\rho(f)^*\,\rho(f)\| = r(\rho(f)^*\,\rho(f)) = r(\rho(f^*\,f))\\ &\leq r(f^*\,f) \leq \|f^*\,f\| \leq \|f^*\|\,\|f\| \leq \|f\|^2 \quad \square\end{aligned}$$

7.50 Folgerung.

Für diskrete Gruppen G entsprechen den unitären Darstellungen von G auf einem Hilbert-Raum H genau die $*$-Homomorphismen der B^*-Algebra $L^1(G)$ nach $L(H)$.

$$\mathrm{Hom}(G, U(H)) \cong \mathrm{Hom}(L^1(G), L(H))$$

Beweis. Jeder $*$-Homomorphismus $\rho : L^1(G) \to L(H)$ ist nach obigen Lemma eine Kontraktion und induziert somit nach 7.48 eine unitäre Darstellung $\tau : G \to U(H)$. Umgekehrt sei $\tau : G \to U(H)$ eine unitäre Darstellung und $\rho : L^1(G) \to L(H)$ der nach 7.48 assozierte Algebra-Homomorphismus $\rho : f \mapsto \sum_{t\in G} f(t)\tau(t)$. Also ist

$$\begin{aligned}\rho(f^*) &= \sum_{t\in G} \overline{f(t^{-1})}\tau(t) = \sum_{s\in G} \overline{f(s)}\tau(s)^{-1}\\ &= \sum_{s\in G} \overline{f(s)}\tau(s)^* = \Big(\sum_{s\in G} f(s)\tau(s)\Big)^* = \rho(f)^*,\end{aligned}$$

d.h. ρ ein $*$-Homomorphismus. $\square$

7.51 Das Haarmaß lokalkompakter Gruppen.

Wir wollen das alles nun soweit wie möglich auf LOKALKOMPAKTE GRUPPEn übertragen, d.h. Gruppen G, die zusätzlich lokalkompakte Hausdorff-Räume sind, und für die die Multiplikation $G \times G \to G$ und die Inversion $G \to G$ stetig sind. Um $L^1(G)$ zu konstruieren benötigen wir ein ausgezeichnetes Maß μ auf G. Wir wollen, daß die links-reguläre Darstellung ℓ (mit $\ell_t \cdot s = ts$) noch immer eine Darstellung λ von G auf $L^p(G)$ (mit $\lambda_s(f)(t) := (f \circ \ell_{s^{-1}})(t) = f(s^{-1}t)$) induziert. Also müßte insbesonders für $p = 1$ und $f \geq 0$ folgendes gelten:

$$\int_G f(s^{-1}t)\,d\mu(t) = \|\lambda_s(f)\|_1 = \|f\|_1 = \int_G f(t)\,d\mu(t).$$

D.h. das Maß muß linksinvariant sein, i.e. $\mu(sA) = \mu(A)$ für alle meßbaren A. In der Tat läßt sich zeigen, daß so ein Maß μ (das sogenannte HAARMASS) auf G immer existiert, und daß es bis auf einen konstanten positiven Faktor eindeutig ist, falls man zusätzlich verlangt, daß $\mu(U) > 0$ für alle offenen $U \neq \emptyset$. Für einen Beweis dieser Aussage siehe [**13**, S.185]. Für $G = \mathbb{R}$ und $G = S^1$ ist es das übliche Lebesgue-Maß und für $G = \mathbb{Z}$ das Zählmaß. Wir schreiben allgemein $\int_G f(t)\,dt$ anstelle von $\int_G f(t)\,d\mu(t)$ für $f \in L^1(G) := L^1(G, \mu)$.

Definition (Faltung).

Mit $L^p(G) := L^p(G, \mu)$ bezeichnen wir den Banach-Raum der Äquivalenz-Klassen aller bezüglich des Haar-Maßes μ p-integrierbaren Funktionen.

Die Faltung von zwei Funktionen ist aus Analogie zum diskreten Fall durch

$$(f \star g)(s) := \int_G f(t)\,g(t^{-1}s)\,dt = \int_G f(st)\,g(t^{-1})\,dt$$

definiert. Sie liefert eine bilineare Abbildung $L^1(G)\times L^p(G) \to L^p(G)$ mit $\|f\star g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$ (siehe [**13**, 20.19]).

Die Faltung von Funktionen in $L^1(G)$ ist assoziativ und somit ist $L^1(G)$ eine Banach-Algebra und die Faltung induziert Darstellungen $\tilde\lambda$ von $L^1(G)$ auf $L^p(G)$, die sogenannten links-regulären Darstellungen, definiert durch $\tilde\lambda(f)(g) := f \star g$. Um die Assoziativität einzusehen verwendet man den Satz von Fubini in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
((f\star g)\star h)(r) &= \int_G (f\star g)(t)\,h(t^{-1}r)\,dt\\
&= \int_G\int_G f(s)\,g(s^{-1}t)\,h(t^{-1}r)\,ds\,dt\\
&= \int_G\int_G f(s)\,g(s^{-1}t)\,h(t^{-1}r)\,dt\,ds \qquad (t=su)\\
&= \int_G\int_G f(s)\,g(u)\,h(u^{-1}s^{-1}r)\,du\,ds\\
&= \int_G f(s)\,(g\star h)(s^{-1}r)\,ds\\
&= (f\star(g\star h))(r).
\end{aligned}$$

Da $L^1(G)$ keine 1 besitzt (siehe [**18**, 4.7.7]), gibt es den Gruppen-Homomorphismus $\delta : G \to L^1(G)$ aus dem diskreten Fall nicht mehr.

Trotzdem haben wir noch ein Pendant zur linksregulären Darstellung $\tilde\lambda$ von $L^1(G)$ auf $L^p(G)$, nämlich die unitäre Darstellung $\lambda : G \to L(L^p(G))$, $t \mapsto (f \mapsto f \circ \ell_{t^{-1}})$, welche von der Linkstranslation ℓ induziert wird. Es besteht also die Hoffnung Darstellungen von $L^1(G)$ mit unitären Darstellungen von G in bijektive Beziehung zu setzen. Da nun G nicht mehr diskret ist, sollten wir bei Darstellungen von G Stetigkeits-Voraussetzungen machen.

7.52 Proposition (Unitäre Darstellungen).

Es sei $\tau : G \to U(H)$ ein Gruppen-Homomorphismus in die Gruppe der bijektiven Isometrien eines Banach-Raums H, dann sind äquivalent:

1. *Die Abbildung $\tau^\wedge : G \times H \to H$ ist stetig;*
2. *Es konvergiert $\tau(t) \to 1$ punktweise für $t \to e$;*
3. *Die Abbildung $\tau : G \to U(H)$ ist stetig, bezüglich der punktweisen Konvergenz auf $U(H)$;*
4. *Die Abbildung $\tau^\wedge : G \times H \to H$ ist getrennt stetig.*

Eine Abbildung $\tau : G \to U(H)$ mit obigen äquivalenten Eigenschaften heißt UNITÄRE DARSTELLUNG der Gruppe G auf dem Banach-Raum H.

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$) ist trivial.

($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$) Wegen $\tau(t) = \tau(t\,t_0^{-1}\,t_0) = \tau(t\,t_0^{-1}) \circ \tau(t_0)$ konvergiert $\tau(t) \to \tau(t_0)$ punktweise für $t\,t_0^{-1} \to e$, d.h. für $t = t\,t_0^{-1}\,t_0 \to e\,t_0 = t_0$.

($\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$) Da vorausgesetzt ist, daß τ Werte in $U(H) \subset L(H)$ hat ist $\tau^\wedge(t, \_)$ immer stetig. Umgekehrt ist $\tau^\wedge(\_, h) = \mathrm{ev}_h \circ \tau$ genau dann für alle $h \in H$ stetig, wenn $\tau : G \to U(H)$ stetig ist bezüglich der punktweisen Konvergenz, denn diese ist gerade die initiale Topologie bezüglich $\mathrm{ev}_h : L(H) \to H$ für $h \in H$.

($\boxed{4} \Rightarrow \boxed{1}$) Es sei $t_0 \in G$, $h_0 \in H$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen der Stetigkeit von $\tau^\wedge(\_, h_0)$ eine Umgebung U von t_0 in G, s.d. $\|\tau(t)h_0 - \tau(t_0)h_0\| < \varepsilon$ für alle

$t \in U$. Folglich gilt für alle $\|h - h_0\| < \varepsilon$ und $t \in U$ auch

$$\begin{aligned}\|\tau(t)h - \tau(t_0)h_0\| &\le \|\tau(t)h - \tau(t)h_0\| + \|\tau(t)h_0 - \tau(t_0)h_0\| \\ &\le \|\tau(t)\|\,\|h - h_0\| + \|\tau(t)h_0 - \tau(t_0)h_0\| \\ &\le 1\,\varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon \quad \square\end{aligned}$$

Klarerweise ist eine Abbildung $\tau : G \to L(H)$, die bezüglich der Operator-Norm auf $L(H)$ stetig ist, auch bezüglich der gröberen Topologie der punktweisen Konvergenz stetig. Daß nicht die Umkehrung gilt, zeigt folgendes

Lemma (Stetigkeit der Linkstranslation).

Die von der Linkstranslation ℓ induzierte Abbildung

$$\lambda : G \to U(L^1(G)) \subseteq L(L^1(G)), \quad \lambda_s(f) := f \circ \ell_{s^{-1}}$$

ist eine unitäre Darstellung von G auf $L^1(G)$. Sie ist aber nicht stetig bezüglich der Operatornorm auf $L(L^1(G))$.

Die Rechtstranslation induziert ebenfalls einen Gruppen-Homomorphismus $G \to L(L^1(G))$ der aber nicht Werte in $U(L^1(G))$ hat, also keine unitäre Darstellung ist.

Beweis. Es sei $t \in G$, $f \in L^1(G)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $g \in C_c(G)$ mit $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Da $g \in C_c$ (es sei $K := \operatorname{Trg} g$), ist g gleichmäßig-stetig, d.h. es existiert eine 1-Umgebung U mit $|g(s) - g(r)| < \frac{\varepsilon}{6\mu(K)}$ für $rs^{-1} \in U$. Es sei $s \in V := tU$. Dann ist $s = tu$ für ein $u \in U$ und es gilt $(t^{-1}r)(s^{-1}r)^{-1} = t^{-1}s = u \in U$ und somit

$$\begin{aligned}\|\lambda_s g - \lambda_t g\|_1 &= \int_{\{r: s^{-1}r \in K \text{ oder } t^{-1}r \in K\}} |g(s^{-1}r) - g(t^{-1}r)|\, dr \\ &\le \frac{\varepsilon}{6\mu(K)}\, \mu(sK \cup tK) \le \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Da das Haar-Maß links-invariant ist und somit $\|\lambda_s f - \lambda_s g\|_1 = \|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ ist, gilt für $s \in V$:

$$\|\lambda_s f - \lambda_t f\|_1 \le \|\lambda_s(f - g)\|_1 + \|\lambda_s g - \lambda_t g\|_1 + \|\lambda_t(g - f)\|_1 < \varepsilon.$$

Daß die Abbildung $\lambda : G \to U(L^1(G))$ nicht stetig bezüglich der Operatornorm ist, zeigt folgendes Beispiel: Es sei $G = \mathbb{R}$. Angenommen es gäbe ein $\delta > 0$, so daß $\|\lambda(t) - \lambda(0)\| < 1$ für $|t| \le \delta$. Dann wäre für die charakteristische Funktion f von $(0, \delta]$ der Träger von $f = \lambda(0)f$ und $\lambda(\delta)f$ disjunkt und somit $\|\lambda(\delta)f - \lambda(0)f\|_1 = \|\lambda(\delta)f\|_1 + \|\lambda(0)f\|_1 = 2\,\|f\|_1 > \|f\|_1$, ein Widerspruch.

Für die Rechtstranslation beachte man, daß

$$f(st) = f((t^{-1}\, s^{-1})^{-1}) = Sf(t^{-1}\, s^{-1}) = S(\lambda_t(Sf))(s),$$

wobei $Sf(t) := f(t^{-1})$ die Spiegelung beschreibt, sowie 7.54. $\square$

Lemma.

Die Darstellung $G \to L(L^1(G))$, $s \mapsto (f \mapsto f_s)$ durch Rechtsmultiplikation ist ebenfalls bzgl. der Topologie der punktweisen Konvergenz stetig.

Beweis. Nach obigem Lemma Konvergiert $\lambda_s f \to f$ für $s \to e$ und jedes $f \in L^1(G)$, also auch $\Delta(s) \cdot \lambda_s f^* \to \Delta(e) \cdot f^* = f^*$, wobei Δ die in 7.53 zu definierende Modul-Funktion und * die Involution, welche in 7.55 definiert werden wird, bezeichnet.

Es ist

$$\begin{aligned}\big(\Delta(s)\cdot\lambda_s f^*\big)(t) &= \Delta(s)\cdot f^*(s^{-1}t) = \Delta(s)\cdot\Delta(s^{-1}t)\cdot\overline{f((s^{-1}t)^{-1})}\\ &= \Delta(t)\cdot\overline{f_s(t^{-1})} = (f_s)^*(t).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|f_s - f\|_1 = \|(f_s)^* - f^*\|_1 = \|\Delta(s)\cdot\lambda_s f^* - f^*\|_1 \to 0 \text{ für } s\to e. \quad \square$$

7.53 Die Modul-Funktion

Die nicht rechts-Invarianz das Haar-Maßes läßt sich wie folgt beschreiben:

Lemma.

Es sei der Modul $\Delta(t)$ durch

$$\int_G f(ts)\,d\mu(t) = \Delta(s)\int_G f(t)\,d\mu(t) \text{ für alle } f\in L^1(G)$$

definiert. Dann ist $\Delta : G\to(\mathbb{R}^+,\cdot)$ ein stetiger Gruppen-Homomorphismus.

Beweis. Siehe [13, p196]. Wegen der Dichtheit des von den positiven stetigen Funktionen mit kompaktem Träger erzeugten Teilraums, genügt es solche Funktionen zu betrachten. Es sei $\mu_s : C_c(G)\to\mathbb{C}$ definiert durch $\mu_s(f) := \int_G f(ts)\,d\mu(t)$. Dann ist μ_s ein links-invariantes Maß auf G. Folglich existiert eine positive Zahl $\Delta(s)$ mit $\mu_s(f) = \Delta(s)\,\mu(f)$. Weiters gilt, wobei f_t die rechtstranslatierte Funktion $s\mapsto f(st)$ bezeichnet:

$$(f_t)_s(r) = f_t(rs) = f((rs)t) = f(r(st)) = f_{st}(r)$$

und somit ist

$$\Delta(ts)\,\mu(f) = \mu(f_{ts}) = \mu((f_s)_t) = \Delta(t)\,\mu(f_s) = \Delta(t)\,\Delta(s)\,\mu(f).$$

Es sei U eine relativ-kompakte 1-Umgebung von G, weiters seien $f\neq 0$ und ω stetige positive Funktionen mit kompakten Träger auf G mit $\omega(\mathrm{Trg}(f)\cdot\overline{U}^{-1}) = \{1\}$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert zu jeden $\varepsilon>0$ eine 1-Umgebung $V\subseteq U$ mit $|f(st)-f(s)| < \frac{\varepsilon\,\mu(f)}{\mu(\omega)}$ für alle $t\in V$ und alle $s\in G$. Somit ist

$$\begin{aligned}|\Delta(t)-1|\,\mu(f) &= |\mu(f_t)-\mu(f)|\\ &\le \int_{st\in\mathrm{Trg}\,f \text{ oder } s\in\mathrm{Trg}\,f} |f(st)-f(s)|\,ds\\ &= \int_{s\in\omega^{-1}(1)} |f(st)-f(s)|\,ds \le \varepsilon\,\mu(f),\end{aligned}$$

d.h. $|\Delta(t)-1|\le\varepsilon$ für alle $t\in V$. $\square$

Jede diskrete, jede Abel'sche und jede kompakte Gruppe G ist UNIMODULAR, d.h. $\Delta = 1$, bzw. das Haar-Maß ist auch rechts-invariant: Für diskretes G ist das Zählmaß offensichtlich rechts-invariant, für Abel'sches G ist das trivial, und für kompaktes G ist das Bild unter Δ eine kompakte Untergruppe von $(\mathbb{R}_+,\cdot)$, also gleich $\{1\}$.

Bezüglich der Spiegelung $S : f\mapsto (t\mapsto f(t^{-1}))$ gilt:

7.54 Lemma.

Für $f\in L^1(G)$ gilt:

$$\int_G f(t)\,d\mu(t) = \int_G \Delta(t)\,f(t^{-1})\,d\mu(t).$$

Beweis. Es sei $\nu(f) := \int_G \Delta(t)\, f(t^{-1})\, d\mu(t) = \mu(\Delta \cdot Sf)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\nu(\lambda_s f) &= \int_G \Delta(t)\, f(s^{-1}t^{-1})\, d\mu(t) = \int_G \Delta(t)\, f((ts)^{-1})\, d\mu(t)\\ &= \int_G \Delta(ts)\, \Delta(s^{-1})\, f((ts)^{-1})\, d\mu(t) = \Delta(s^{-1})\, \mu((\Delta \cdot Sf)_s)\\ &= \Delta(s^{-1})\, \Delta(s)\, \mu(\Delta \cdot Sf) = \nu(f).\end{aligned}$$

Also ist ν links-invariant und offensichtlich gilt $\nu(U) > 0$ für $U \neq \emptyset$, also existiert ein $c > 0$ mit $\nu = c\,\mu$. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man eine Funktion $g \in C_c(G)$ mit $g = Sg$ und $\mathrm{Trg}(g) \subseteq \{t : |\Delta(t) - 1| < \varepsilon\}$ so gilt: $|g(t) - \Delta(t)g(t)| \leq \varepsilon\, g(t)$ und folglich

$$\Big|(1-c) \int_G g\Big| = \Big|\int_G g - \nu(g)\Big| = \Big|\int_G g - \int_G \Delta\, g\Big| \leq \varepsilon |\int_G g|$$

also $|1 - c| \leq \varepsilon$, d.h. $c = 1$. Also ist

$$\int_G f(t)\, d\mu(t) = \int_G \Delta(t)\, f(t^{-1})\, d\mu(t). \quad \square$$

Bemerkung.

Man könnte analog zum diskreten Fall die Faltung auch als

$$\begin{aligned}(f \star_2 g)(r) &:= \int_G f(rs^{-1})\, g(s)\, ds \qquad (s = tr)\\ &= \Delta(r)^{-1} \int_G f(t^{-1})\, g(tr)\, dt \quad \text{nach } \boxed{7.54}\\ &= \Delta(r)^{-1} \int_G \Delta(t)\, f(t)\, g(t^{-1}r)\, dt\\ &= \Delta(r)^{-1}\, ((\Delta\, f) \star g)(r)\end{aligned}$$

definieren, d.h. $\Delta \cdot (f \star_2 g) = (\Delta \cdot f) \star g$.

Für diese zweite Faltung können wir aber nicht Assoziativität erwarten, denn

$$\begin{aligned}\Delta \cdot ((f \star_2 g) \star_2 h) &= (\Delta \cdot (f \star_2 g)) \star h = ((\Delta \cdot f) \star g) \star h\\ &= (\Delta \cdot f) \star (g \star h) = \Delta \cdot (f \star_2 (g \star h)) \neq \Delta \cdot (f \star_2 (g \star_2 h)).\end{aligned}$$

7.55 Die Involution auf $L^1(G)$.

Wie im diskreten Fall versuchen wir $L^1(G)$ mit einer Involution $*$ versehen, sodaß die links-reguläre Darstellung auf $L^2(G)$ eine $*$-Darstellung ist, d.h. $\langle h_1, f \star h_2\rangle = \langle f^* \star h_1, h_2\rangle$. Es ist

$$\begin{aligned}\langle h_1, f \star h_2\rangle &= \int_G h_1(r) \int_G \overline{f(t)}\, \overline{h_2(t^{-1}r)}\, dt\, dr\\ &= \int_G \int_G h_1(ts)\, \overline{f(t)}\, \overline{h_2(s)}\, dt\, ds\\ &\overset{\boxed{7.54}}{=\!=} \int_G \int_G \Delta(t)\, h_1(t^{-1}s)\, \overline{f(t^{-1})}\, \overline{h_2(s)}\, dt\, ds\end{aligned}$$

und

$$\langle f^* \star h_1, h_2\rangle = \int_G \int_G f^*(t)\, h_1(t^{-1}s)\, \overline{h_2(s)}\, dt\, ds$$

folglich setzen wir $f^*(t) := \Delta(t)\, \overline{f(t^{-1})}$, vgl. mit $\boxed{7.49}$.

Lemma.

Es ist $L^1(G)$ eine B^*-ALGEBRA (ohne 1) vermöge der Involution, die durch $f^*(t) := \Delta(t)\overline{f(t^{-1})}$ gegeben ist.

Beweis. Wegen 7.54 ist $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$ und

$$(f^*)^*(t) = \Delta(t)\,\overline{f^*(t^{-1})} = \Delta(t)\,\overline{\Delta(t^{-1})}\,\overline{\overline{f((t^{-1})^{-1})}} = f(t).$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned}(g^* \star f^*)(s) &= \int_G g^*(t)\, f^*(t^{-1}\, s)\, dt = \int_G g^*(st)\, f^*(t^{-1})\, dt \\ &= \int_G \Delta(st)\,\overline{g(t^{-1}\, s^{-1})}\,\Delta(t^{-1})\,\overline{f(t)}\, dt \\ &= \Delta(s)\,\overline{\int_G f(t)\, g(t^{-1}\, s^{-1})\, dt} = (f \star g)^*(s) \qquad \square\end{aligned}$$

Als partieller Ersatz für eine 1 finden wir:

7.56 Proposition (approximierende Einheit).

Es sei $f \in L^1(G)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine (kompakte) Umgebung U von e, sodaß für alle $0 \le g \in L^1(G)$ mit $\int_G g = 1$ und $g|_{G\setminus U} = 0$ die Beziehung

$$\|f \star g - f\|_1 \le \varepsilon$$

gilt.

Insbesonders existiert eine approximierende Einheit für $L^1(G)$, d.h. ein Netz u_i mit $\|u_i\| = 1$ sowie $f \star u_i \to f$ und $u_i \star f \to f$ für alle $f \in L^1(G)$.

Beweis. Es sei g wie angegeben. Dann ist leicht einzusehen, daß $f \star g$ überall definiert ist und $f \star g \in L^1(G)$ liegt. Da $\int_G \Delta(t)\, g(t^{-1})\, dt = \int_G g(t)\, dt = 1$ nach 7.54 ist, gilt

$$\begin{aligned}(f \star g)(s) - f(s) &= \int_G f(st)\, g(t^{-1})\, dt - f(s) \int_G \Delta(t)\, g(t^{-1})\, dt \\ &= \int_G \underbrace{(f(st) - \Delta(t)\, f(s))\, g(t^{-1})}_{=:F(s,t)}\, dt.\end{aligned}$$

Es ist $F(s,t) = f(st)\,(1 - \Delta(t))\, g(t^{-1}) + (f(st) - f(s))\,\Delta(t)\, g(t^{-1})$. Folglich ist

$$\begin{aligned}k(t) := \int_G |F(s,t)|\, ds &\le \|f_t\|_1\, |1 - \Delta(t)|\, g(t^{-1}) + \|f_t - f\|_1\, \Delta(t)\, g(t^{-1}) \\ &= \Delta(t)\, \|f\|_1\, |1 - \Delta(t)|\, g(t^{-1}) + \|f_t - f\|_1\, \Delta(t)\, g(t^{-1}) \\ &= \Big(\|f\|_1\, |1 - \Delta(t)| + \|f_t - f\|_1\Big)\, \Delta(t)\, g(t^{-1}).\end{aligned}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine symmetrische Umgebung in U von e mit

$$\|f\|_1\, |1 - \Delta(t)| \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \|f_t - f\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } t \in U.$$

Sei nun g wie vorausgesetzt. Da $g = 0$ außerhalb $U^{-1} = U$ ist, folgt $0 \le k \le \varepsilon\, \Delta\, S(g)$. Somit ist $k \in L^1(G)$ und nach Fubini

$$\begin{aligned}\|f \star g - f\|_1 &= \int_G \Big| \int_G F(s,t)\, dt \Big|\, ds \le \int_G \int_G |F(s,t)|\, dt\, ds = \int_G \int_G |F(s,t)|\, ds\, dt \\ &= \int_G k(t)\, dt \le \varepsilon \int_G \Delta(t)\, g(t^{-1})\, dt = \varepsilon \int_G g(t)\, dt = \varepsilon.\end{aligned}$$

Um eine approximierende Einheit zu erhalten wähle man nun als Indexmenge die Umgebungsbasis von 1 (bestehend aus kompakten symmetrischen Umgebungen) und für jede solche Umgebung $i := U$, die entsprechend gewichtete charakteristische Funktion $\frac{1}{\mu(U)}\,\chi_U$ als u_i. Dann gilt nach obiger Rechnung $f \star u_i \to f$ für alle $f \in L^1(G)$. Wegen $\|u_i^*\| = \|u_i\| = 1$, $\operatorname{Trg}(u_i^*) = \operatorname{Trg}(u_i)^{-1} = U^{-1} = U$ und $u_i^*(t) = \Delta(t)\overline{u_i(t^{-1})} \geq 0$ gilt auch $g \star u_i^* \to g$ für alle $g \in L^1(G)$ und somit $u_i \star f = (f^* \star u_i^*)^* \to (f^*)^* = f$. $\square$

7.57 Theorem.

Die links reguläre Darstellung $\tilde\lambda$ von $L^1(G)$ auf $L^2(G)$ ist ein injektiver und kontraktiver $*$-Homomorphismus.

Beweis. Wir haben $*$ gerade so gewählt, daß $\tilde\lambda : L^1(G) \to L(L^2(G))$ ein $*$-Homomorphismus ist. Er ist injektiv, denn aus $0 = \tilde\lambda(f)(g) = f \star g$ für alle $g \in L^2(G)$ folgt insbesonders $f \star u_i = 0$ und da $0 = f \star u_i \to f$ ist $f = 0$. In 7.49 haben wir gezeigt, daß jeder $*$-Homomorphismus von einer B^*-Algebra (mit eins) B in eine C^*-Algebra A eine Kontraktion ist. Dies gilt auch für B^*-Algebren B ohne 1, denn sei $B_1 := B \oplus \mathbb{C}$ die nach 6.4 assoziierte Banach-Algebra mit 1. Vermöge $(x \oplus z)^* := x^* \oplus \overline{z}$ ist sie eine B^*-Algebra mit 1. Und jeder $*$-Homomorphismus $\rho : B \to A$ erweitert sich zu einen eindeutigen, die 1 erhaltenden $*$-Homomorphismus $\rho_1 : B_1 \to A$ vermöge $\rho_1(x \oplus z) := \rho(x) + z$. Also ist ρ_1 eine Kontraktion und damit auch $\rho := \rho_1|_B$. $\square$

7.58 Lemma.

Mit $A(G)$ bezeichnen wir die vom Bild der links-regulären Darstellung von $L^1(G)$ in $L^2(G)$ erzeugte C^*-Algebra. Jede Darstellung der C^*-Algebra $A(G)$ induziert eine $*$-Darstellung von $L^1(G)$. Die Kommutanten dieser beiden Darstellungen stimmen überein, und folglich ist Irreduzibilität gleichbedeutend für sie nach 7.41.

Beweis. Man beachte, daß $A(G)$ der Abschluß von $\{f \star (\_) + t : f \in L^1(G), t \in \mathbb{C}\}$ ist.

Es sei $\varphi : A(G) \to L(H)$ eine Darstellung und $\rho := \varphi \circ \tilde\lambda : L^1(G) \to A(G) \to L(H)$ die entsprechende Darstellung von $L^1(G)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & T \text{ kommutiert mit } \rho(f) = \varphi(f \star (\_)) \text{ für alle } f \in L^1(G) \\ \Leftrightarrow\ & T \text{ kommutiert mit } \rho(f) + t = \varphi(f \star (\_) + t) \text{ für alle } f \in L^1(G) \text{ und } t \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow\ & T \text{ kommutiert mit } \varphi(a) \text{ für alle } a \in A(G). \qquad \square \end{aligned}$$

7.59 Vergleich der Darstellungen von G und von $L^1(G)$

Für lokalkompakte Gruppen G versuchen wir nun unitäre Darstellungen $\tau : G \to U(H)$ und Darstellungen $\rho : L^1(G) \to L(H)$ miteinander in Beziehung zu setzen.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\tau"] & L^1(G) \arrow[d, "\rho"] \\ U(H) \arrow[r, hook] & L(H) \end{tikzcd}$$

($\mapsto$) Im diskreten Fall war $\rho(f) := \sum_{t \in G} f(t)\tau(t)$. Im allgemeinen Fall sollte also $\rho(f) = \int_G f(t)\,\tau(t)\,dt \in L(H)$ sein. Da unitäre Darstellungen τ nach 7.52 nicht stetig bezüglich der Operatornorm zu sein brauchen, existiert das Integral in $L(H)$ nicht, wohl aber $\int_G f(t)\,\tau(t)h\,dt \in H$ für alle $h \in H$, und somit definieren wir

$$\rho(f)h := \int_G f(t)\,\tau(t)h\,dt \in H \text{ für } f \in L^1(G) \text{ und } h \in H.$$

($\hookleftarrow$) Umgekehrt war im diskreten Fall $\tau = \rho \circ \delta$, d.h. $\tau(t) = \rho(\delta_t)$. Im allgemeinen haben wir keine Einheit $\delta_e \in L^1(G)$ sondern nur eine approximative Einheit $u_i \in L^1(G)$, die wir Anstelle von δ_e verwenden können. Statt $\delta_t = \delta_t \star \delta_e = \lambda_t(\delta_e)$ sollten wir also $\lambda_t(u_i)$ verwenden und folglich $\tau(t) := \lim_i \rho(\lambda_t(u_i))$ setzen, wozu wir die Existenz des Limes zeigen müssen.

Eine andere Möglichkeit ist die Identität $\tau(t)_* \circ \rho = \rho \circ \lambda_t$ für $t \in G$ des diskreten Falls zu verwenden, d.h. $\tau(t) \circ \rho(f) = \rho(\lambda_t f)$. Dadurch ist τ auf $\rho(L^1(G))H$ eindeutig festgelegt. Hätte $L^1(G)$ eine 1 und erhielte ρ diese, so wäre $\rho(L^1(G))H = H$ und τ somit festgelegt. Da aber $L^1(G)$ keine 1 hat, können Darstellungen $\rho : L^1(G) \to L(H)$ DEGENERIERT sein, dabei heißt ein Algebra-Homomorphismus $\rho : A \to L(H)$ NICHT-DEGENERIERT, falls $\rho(A)H$ einen dichten Teilraum von H erzeugt. Falls ρ ein $*$-Homomorphismus ist, so ist das mit $\rho(A)h = 0 \Rightarrow h = 0$ äquivalent, denn

$$\begin{aligned}\langle \rho(A)H \rangle \text{ ist dicht in } H &\Leftrightarrow \Big(\forall a \in A, \forall k \in H\ \overbrace{\langle \rho(a)k, h\rangle}^{=\langle k, \rho(a^*)h\rangle} = 0\Big) \Rightarrow h = 0\\ &\Leftrightarrow \Big(\rho(A)h = 0 \Rightarrow h = 0\Big).\end{aligned}$$

Der Raum $N := \{h \in H : \rho(A)h = 0\}$ ist klarerweise invariant, also auch $N^\perp$ und $\rho := \rho|_{N^\perp} + 0|_N$, wobei $\rho|_{N^\perp}$ nicht degeneriert ist. Es ist also keine wesentliche Einschränkung, wenn wir nur nicht-degenerierte Darstellungen von $L^1(G)$ betrachten.

Nun zur Existenz von $\lim_i \rho(\lambda_t(u_i))$. Für die Zusammensetzung mit $\rho(f)$ ergibt sich:

$$\rho(\lambda_t(u_i)) \circ \rho(f) = \rho(\lambda_t(u_i) \star f) = \rho(\lambda_t(u_i \star f)) \to \rho(\lambda_t(f)),$$

da $u_i \star f \to f$ in $L^1(G)$ und somit $(\rho \circ \lambda_t)(u_i \star f) \to (\rho \circ \lambda_t)(f)$. Da ρ eine Kontraktion ist, gilt $\|\rho(\lambda_t(u_i))\| \le \|\lambda_t(u_i)\| = \|u_i\| = 1$, und folglich existiert $\lim_i \rho(\lambda_t(u_i))$ punktweise nicht nur auf Bild von $\rho(f)$ sondern auf ganz H. Und somit ist $\tau(t) \in L(H)$ wohldefiniert durch

$$\tau(t) := \lim_i \rho(\lambda_t(u_i)) \text{ punktweise auf } H$$

und es gilt $\|\tau(t)\| \le 1$ sowie $\tau(t) \circ \rho(f) = \rho(\lambda_t f)$ für alle $f \in L^1(G)$. Wegen der letzten Gleichung sehen wir auch, daß $\tau(t)$ nicht von der Wahl der approximierenden Einheit u_i abhängt.

Theorem.

Für lokalkompakte Gruppen und Hilbert-Räume H haben wir eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(G, U(H)) \cong \mathrm{Hom}(L^1(G), L(H))$$

zwischen der Menge der unitären Darstellungen τ von G auf H und jener der nicht-degenerierten Darstellungen ρ von $L^1(G)$ auf H. Letztere sind genau die nicht-degenerierten Algebra-Homomorphismen die mit $*$ vertauschen oder äquivalent die Kontraktionen sind. Es entsprechen sich dabei auch die irreduziblen Darstellungen. Es ist

$$\begin{aligned}\langle \rho(f)h, k\rangle &= \int_G f(t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\,dt \quad \forall h, k \in H, f \in L^1(G),\\ \tau(t) &= \lim_j \rho(\lambda_t u_j) \quad \forall t \in G,\end{aligned}$$

wobei u_j eine approximierende Einheit von $L^1(G)$ ist. Weiters ist $\tau(t)$ durch die Identität $\tau(t)_* \circ \rho = \rho \circ \lambda_t$ eindeutig bestimmt.

Beweis. ($\mapsto$) Sei $\tau : G \to L(H)$ eine unitäre Darstellung. Wie in Einleitung bemerkt wollen wir ρ durch

$$\rho(f)h := \int_G f(t)\,\tau(t)h\,dt \in H \text{ für } f \in L^1(G) \text{ und } h \in H$$

definieren. Dazu betrachten wir die sesqui-lineare Form

$$b_f(h,k) := \int_G f(t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\,dt.$$

Klarerweise gilt $\|b_f(h,k)\| \le \|f\|_1\,\|h\|\,\|k\|$. Also existiert ein eindeutiger Operator $\rho(f) \in L(H)$ mit $\langle \rho(f)h, k\rangle = b_f(h,k)$ und $\|\rho(f)\| \le \|f\|_1$. Leicht zu sehen ist, daß $\rho : L^1(G) \to L(H)$ eine lineare Abbildung ist.

Weiters ist ρ multiplikativ, denn

$$\begin{aligned}
\langle \rho(f \star g)h, k\rangle &= \int_G \int_G f(s)\,g(s^{-1}t)\,ds\,\langle \tau(t)h, k\rangle\,dt \\
&= \int_G f(s) \int_G g(s^{-1}t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\,dt\,ds \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \int_G f(s) \int_G g(t)\,\langle \tau(st)h, k\rangle\,dt\,ds \qquad (s^{-1}t \mapsto t) \\
&= \int_G f(s) \int_G g(t)\,\langle \tau(t)h, \tau(s)^*k\rangle\,dt\,ds \\
&= \int_G f(s)\langle \rho(g)h, \tau(s)^*k\rangle\,ds = \int_G f(s)\langle \tau(s)\rho(g)h, k\rangle\,ds \\
&= \langle \rho(f)\rho(g)h, k\rangle.
\end{aligned}$$

Wir behaupten, daß ρ eine $*$-Darstellung (und damit eine Kontraktion) ist:

$$\begin{aligned}
\langle \rho(f)^*h, k\rangle &= \langle h, \rho(f)k\rangle = \overline{\langle \rho(f)k, h\rangle} = \overline{b_f(k,h)} \\
&= \int_G \overline{f(t)\,\langle \tau(t)k, h\rangle}\,dt = \int_G \overline{f(t)}\,\langle h, \tau(t)k\rangle\,dt \\
&= \int_G \Delta(t)\overline{f(t^{-1})}\,\langle h, \tau(t^{-1})k\rangle\,dt = \int_G f^*(t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\,dt \\
&= \langle \rho(f^*)h, k\rangle.
\end{aligned}$$

Die Darstellung ρ ist nicht degeneriert: Sei nämlich $h \in H$ mit $\|h\| = 1$. Wegen $\langle \tau(1)h, h\rangle = \|h\|^2 = 1$ und weil $t \mapsto \tau(t)h$ stetig ist, existiert eine Umgebung U in G der 1 mit $|\langle \tau(t)h, h\rangle - 1| \le \frac{1}{2}$ für alle $t \in U$. Es sei $f \in L^1(G)$ mit $f \ge 0$, $\int_G f = 1$ und $\operatorname{Trg}(f) \subseteq U$. Dann ist

$$\langle \rho(f)h, h\rangle - 1 = \int_G f(t)\,\langle \tau(t)h, h\rangle\,dt - \int_G f(t)\,dt = \int_U f(t)\,\big(\langle \tau(t)h, h\rangle - 1\big)\,dt$$

und somit $|\langle \rho(f)h, h\rangle - 1| \le \int_U f(t)\,\big|\langle \tau(t)h, h\rangle - 1\big|\,dt \le \frac{1}{2}\int_U f(t)\,dt = \frac{1}{2}$, d.h. $\langle \rho(f)h, h\rangle \ne 0$.

($\leftarrow\!\shortmid$) Sei $\rho : L^1(G) \to L(H)$ ein nicht-degenerierter kontraktiver Algebra-Homomorphismus. Wie in der Einleitung ausgeführt, existiert $\tau(t) \in L(H)$ als punktweiser Limes $\lim_i \rho(\lambda_t(u_i))$ und erfüllt $\|\tau(t)\| \le 1$ und $\tau(t)_* \circ \rho = \rho \circ \lambda_t$. Wegen der nicht-Degeneriertheit von ρ folgt aus der letzten Gleichung sofort, daß $\tau(1) = 1$ und $\tau(t_1 t_2) = \tau(t_1) \circ \tau(t_2)$ gilt. Folglich ist $\tau(t^{-1}) = \tau(t)^{-1}$ und damit $\tau : G \to U(H)$ ein Gruppen-Homomorphismus.

Wir zeigen als nächstes, daß τ eine unitäre Darstellung ist, d.h. für $t \to e$ konvergiert $\tau(t) \to 1$ punktweise. In der Tat $\lambda_t f \to f$ und somit ist $\rho(f)h = \lim_t \rho(\lambda_t f)h = \lim_t(\tau(t) \circ \rho(f))h$. Also konvergiert $\tau(t)(\rho(f)h) \to \rho(f)h$ und, da das Erzeugnis der Vektoren $\rho(f)h$ dicht liegt und $\|\tau(t)\| \le 1$ ist, konvergiert $\tau(t) \to 1$ punktweise.

Um zu zeigen, daß die Abbildungen invers zueinander sind, müssen wir einerseits die Gleichung

$$\langle \rho(f)h, k\rangle = \int_G f(t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\, dt \quad \forall h, k \in H, f \in L^1(G)$$

zeigen, wobei τ die zu ρ assoziierte unitäre Darstellung ist. Beide Seiten stellen stetig lineare Funktionale bezüglich f dar. Es genügt also für $\|h\| = 1 = \|k\|$, $\varepsilon > 0$ und charakeristische Funktionen $f = \chi_A$ von Baire-Mengen A mit endlichem Haar-Maß zu zeigen, daß

$$\Big|\langle \rho(f)h, k\rangle - \int_G f(t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\, dt\Big| \le \varepsilon \int_G f(t)\, dt.$$

Es existiert eine Umgebung U von $e \in G$ mit $\|\rho(g)h - h\| \le \varepsilon$ für alle $g \ge 0$ mit $\|g\| = 1$ und $\mathrm{Trg}(g) \subseteq U$, denn man approximiere h durch eine linear-Kombination von endlich vielen $\rho(f_i)h_i$ mit $\|h_i\| \le 1$ und wähle U nach 7.56, so daß $\|\rho(g) \circ \rho(f_i) - \rho(f_i)\| \le \|g \star f_i - f_i\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle i.

Sei vorerst $A^{-1}A \subseteq U$. Falls $\mu(A) = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\alpha := \mu(A) > 0$ und $g := \frac{1}{\alpha} f$. Dann ist g beschränkt und $g \ge 0$ und $\int_G g(t)\, dt = 1$. Für $t \in A$ hat $\lambda_{t^{-1}} g$ kompakten Träger in U, denn für $t' \notin U$ ist $t' \notin A^{-1}A$, also $At' \cap A = \emptyset$, und somit $\lambda_{t^{-1}} g(t') = g(tt') = \frac{1}{\alpha} f(tt') = \frac{1}{\alpha}\chi_A(tt') = 0$. Also ist $\|\tau(t^{-1})\rho(g)h - h\| = \|\rho(\lambda_{t^{-1}} g)h - h\| \le \varepsilon$. Da $\tau(t)$ unitär ist, gilt $\|\rho(g)h - \tau(t)h\| = \|\tau(t)\big(\tau(t)^{-1}\rho(g)h - h\big)\| \le \varepsilon$. Aus $f = \alpha\, g = \chi_A$ folgt, daß $\langle \rho(f)h, k\rangle - \int_G f(t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\, dt = \int_A \langle (\rho(g) - \tau(t))\, h, k\rangle\, dt$. Also ist der Spezialfall bewiesen.
Sei nun $f = \chi_A$ mit $\mu(A) < \infty$ und sei W eine Umgebung von e mit $W^{-1}W \subseteq U$. O.B.d.A. ist W eine Baire-Menge. Sei t_n eine Folge in G mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} t_n W$ (überdecke A mit einer Folge kompakter Mengen und jedes dieser mit endlich vielen Translaten von W). Es sei $A_n := A \cap t_n W$. Dann ist $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und A_n sind Baire-Mengen mit $A_n^{-1} A_n \subseteq (W^{-1} {t_n}^{-1})(t_n W) = W^{-1}W \subseteq U$. O.B.d.A. sind diese disjunkt (man ersetze A_n durch $A_n \setminus \bigcup_{j<n} A_j$). Es sei $f_n := \chi_{A_n}$ und $s_n := \sum_{j\le n} f_j$. Für jedes f_j gilt die gewünschte Gleichung, also ist wegen Linearität

$$\begin{aligned}\Big|\langle \rho(s_n)h, k\rangle - \int_G s_n(t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\, dt\Big| &= \Big|\sum_{j\le n}\Big(\langle \rho(f_j)h, k\rangle - \int_G f_j(t)\,\langle \tau(t)h, k\rangle\, dt\Big)\Big| \\ &\le \sum_{j\le n} \varepsilon \int_G f_j(t)\, dt = \varepsilon \int_G s_n(t)\, dt.\end{aligned}$$

Da $s_j \nearrow f$ punktweise, gilt $\|s_j - f\|_1 \to 0$ wegen dem Satz [18, 4.11.10] von Beppo Levi und somit folgt die gewünschte Gleichung auch für f.

Für die andere Zusammensetzung sei ρ die zu τ assoziierte Darstellung. Dann ist

$$\begin{aligned}\langle \rho(\lambda_t f)h, k\rangle &= \int_G \lambda_t f(s)\,\langle \tau(s)h, k\rangle\, ds = \int_G f(t^{-1}s)\,\langle \tau(s)h, k\rangle\, ds \\ &= \int_G f(s)\,\langle \tau(ts)h, k\rangle\, ds \qquad (t^{-1}s \mapsto s) \\ &= \int_G f(s)\,\langle \tau(s)h, \tau(t)^* k\rangle\, ds = \langle \rho(f)h, \tau(t)^* k\rangle = \langle \tau(t)\rho(f)h, k\rangle,\end{aligned}$$

also gilt

$$\rho \circ \lambda_t = \tau(t)_* \circ \rho,$$

und somit ist τ gerade die zu ρ assoziierte unitäre Darstellung.

Schließlich gilt $\rho(L^1(G))^k = \tau(G)^k$, woraus mittels 7.41 die Aussage über Irreduzibilität folgt:
Falls $T \in L(H)$ mit allen $\tau(t)$ kommutiert, dann gilt

$$\begin{aligned}\langle T\rho(f)h, k\rangle = \langle \rho(f)h, T^*k\rangle &= \int_G f(t)\,\langle \tau(t)h, T^*k\rangle\, dt \\ &= \int_G f(t)\,\langle T\tau(t)h, k\rangle\, dt = \int_G f(t)\,\langle \tau(t)Th, k\rangle\, dt = \langle \rho(f)Th, k\rangle,\end{aligned}$$

d.h. T kommutiert mit $\rho(f)$ für jedes $f \in L^1(G)$.
Umgekehrt, konvergiere $T \in L(H)$ mit $\rho(f)$ für jedes $f \in L^1(G)$. Es sei u_i eine approximierende Einheit von $L^1(G)$. Dann gilt

$$T\,\tau(t)\,\rho(u_i) = T\,\rho(\lambda_t(u_i)) = \rho(\lambda_t(u_i))T = \tau(t)\,\rho(u_i)\,T$$

und da $\rho(u_i) \to 1$ punktweise, folgt $T\,\tau(t) = \tau(t)\,T$. □

Folgerung (Gelfand-Raikov 1955).

Die irreduziblen unitären Darstellungen einer lokalkompakten Gruppe sind Punktetrennend, d.h. für jedes $e \neq s \in G$, existiert so eine Darstellung ρ auf einem Hilbert-Raum H mit $\rho(s) \neq 1$.

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
s & h \arrow[r] & a & \\
G \arrow[d, "\tau"] & L^1(G) \arrow[r, tail, "\tilde{\lambda}"] \arrow[d, "\rho"] & A(G) \arrow[r, hook] \arrow[dl, "\varphi"] & L(L^2(G)) \\
U(H) \arrow[r, hook] & L(H) & &
\end{tikzcd}$$

Es sei $s \neq 1$ in G. Dann existiert ein $f \in C_c(G) \subseteq L^1(G)$ mit $f(s^{-1}) \neq f(e)$ und somit $\lambda_s f \neq f$. Es sei $h := \lambda_s f - f \neq 0 \in L^1(G)$. Da die Darstellung von $L^1(G)$ auf $L^2(G)$ nach 7.57 injektiv ist, ist $0 \neq a := h \star (\_) \in A(G)$. Also existiert nach 7.45 eine irreduzible Darstellung $\varphi : A(G) \to L(H)$ mit $\varphi(a) \neq 0$. Die Darstellung $\rho : L^1(G) \to A(G) \to L(H)$ ist somit irreduzibel, also zyklisch und folglich nicht-degeneriert und $\rho(h) \neq 0$. Also ist auch die assoziierte Darstellung τ von G auf $L(H)$ irreduzibel und wegen $\rho(\lambda_s f) - \rho(f) = \rho(\lambda_s f - f) = \rho(h) = \varphi(a) \neq 0$, ist $\tau(s) \circ \rho(f) = \rho(\lambda_s f) \neq \rho(f)$, also $\tau(s) \neq 1$. □

7.60 Folgerung (Irreduzible Darstellungen im Abel'schen Fall).

Es sei G eine lokalkompakte Abelsche Gruppe. Dann sind die irreduziblen unitären Darstellungen genau die Charaktere, d.h. die stetigen Gruppen-Homomorphismen $\tau : G \to S^1$. Die irreduziblen nicht-degenerierten $*$-Darstellungen von $L^1(G)$ sind genau die $\mathbb{C}$-wertigen Algebra-Homomorphismen $0 \neq \rho : L^1(G) \to \mathbb{C}$. Und die Bijektion

$$\operatorname{Hom}(G, S^1) \cong \operatorname{Hom}(L^1(G), \mathbb{C}) \setminus \{0\}$$

von 7.59 ist für $f \in L^1(G)$ durch

$$\rho(f) = \int_G f(t)\,\tau(t)\,dt$$

gegeben.

Beweis. Falls G Abel'sch ist, so gilt gleiches auch für $L^1(G)$.

Die irreduziblen unitären Darstellungen τ von G entsprechen nach 7.59 genau den nicht-degenerierten irreduziblen Darstellungen ρ von $L^1(G)$, und diese sind nach 7.42 1-dimensional, d.h. $H = \mathbb{C}$.

Da die punktweise Konvergenz auf $L(\mathbb{C})$ mit der Norm-Konvergenz übereinstimmt, sind die irreduziblen unitären Darstellungen von G gerade die stetigen Gruppen-Homomorphismen $\tau : G \to U(\mathbb{C}) = S^1$.

Die nicht-degenerierten Darstellungen von $L^1(G)$ auf $\mathbb{C}$ sind nach 7.59 gerade die kontraktiven Algebra-Homomorphismen $\rho : L^1(G) \to \mathbb{C}$ die surjektiv sind. Nach 6.39 ist jeder $\mathbb{C}$-wertige Algebra-Homomorphismus auf einer Banach-Algebra mit 1 hat Norm 1. Also ist jeder $\mathbb{C}$-wertige Algebra-Homomorphismus ρ auf einer Banach-Algebra A (ohne 1) eine Kontraktion, denn $\rho_1 : A_1 \to \mathbb{C}$ ist ein Algebra-Homomorphismus auf $A_1 := A \oplus \mathbb{C}$ nach 6.4 und somit ist $\|\rho\| = \|\rho_1|_A\| \le \|\rho_1\| = 1$. Eine skalar-wertige lineare Abbildung ρ ist genau dann surjektiv, wenn $\rho \neq 0$ ist.

Die Bijektion aus 7.59 ist im Falle $H = \mathbb{C}$ klarerweise durch

$$\rho(f) = \int_G f(t)\,\tau(t)\,dt$$

gegeben. □

7.61 Charaktergruppe.

Wie in 6.43 zeigt man, daß $\mathrm{Hom}(L^1(G), \mathbb{C})$ ein kompakter Raum bezüglich punktweiser Konvergenz ist (dort haben wir 6.39 verwendet, jedoch hat $L^1(G)$ keine 1 aber $\|f\| \le 1$ haben wir für alle $f \in \mathrm{Hom}(L^1(G), \mathbb{C})$ vorausgesetzt). Folglich ist $\mathrm{Hom}(L^1(G), \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ ein lokalkompakter Raum und die Bijektion aus 7.60 macht auch $\mathrm{Hom}(G, S^1)$ zu einem lokalkompakten Raum. Man kann zeigen, daß diese Topologie auf $\mathrm{Hom}(G, S^1)$ gerade jene der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G ist. Offensichtlich ist $\mathrm{Hom}(G, S^1)$ eine Gruppe bzgl. der punktweisen Multiplikation, und man sieht leicht, daß $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, S^1)$ eine topologische Gruppe ist, die sogenannte CHARAKTERGRUPPE von G, aller stetigen Gruppen-Homomorphismen $G \to S^1$, den sogenannten CHARAKTEREn. Wir wollen nun die Variablen in dem Homöomorphismus

$$\tilde{\mathcal{F}} : \widehat{G} \to \mathrm{Hom}(L^1(G), \mathbb{C}) \setminus \{0\} \subseteq \mathrm{Hom}(L^1(G), \mathbb{C}), \quad \tau \mapsto \Big(f \mapsto \int_G f(t)\,\tau(t)\,dt\Big)$$

vertauschen, d.h. die assoziierte Abbildung

$$L^1(G) \to C(\widehat{G}, \mathbb{C}), \quad f \mapsto \Big(\tau \mapsto \int_G f(t)\,\tau(t)\,dt\Big)$$

betrachten. Dies ist ein $*$-Homomorphismus, da $\tilde{\mathcal{F}}(\tau)$ ein $*$-Homomorphismus ist für alle $\tau \in \widehat{G}$. Um eine bekanntere Form zu erhalten, setzen wir diesen noch mit dem $*$-Isomorphismus

$$\mathrm{inv}^* : C(\widehat{G}, \mathbb{C}) \cong C(\widehat{G}, \mathbb{C}), \quad g \mapsto (\tau \mapsto g(\overline{\tau}) = g(\frac{1}{\tau}))$$

zusammen und erhalten so folgenden $*$-Homomorphismus $\mathcal{F}$:

Theorem. Fourier-Transformation.

Es sei G eine lokalkompakte Abelsche Gruppe und $\widehat{G}$ ihre Charaktergruppe. Dann existiert ein $*$-Homomorphismus

$$\mathcal{F} : L^1(G) \to C(\widehat{G}, \mathbb{C}), \quad f \mapsto \Big(\tau \mapsto \int_G f(t)\,\overline{\tau(t)}\,dt\Big). \quad \square$$

Satz von Parseval.

Die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in L^1(G)$ liefert also eine Funktion $\mathcal{F}(f) : \hat{G} \to \mathbb{C}$. Diese muß aber nicht integrierbar sein, siehe [**18**, 5.4.7]. Schränkt man die Fouriertransformation aber auf $L^1(G) \cap L^2(G)$ ein, so hat sie Werte in $L^1(\widehat{G}) \cap C_0(\widehat{G}) \subseteq L^1(\widehat{G}) \cap L^2(\widehat{G})$ und bei geeigneter Normierung des Haar-Maßes auf G und $\widehat{G}$ ist sie eine Isometrie bezüglich der 2-Norm. Wegen der Dichtheit von $L^1(G) \cap L^2(G)$ läßt sie sich zu einer surjektiven Isometrie

$$\mathcal{F} : L^2(G) \xrightarrow{\cong} L^2(\widehat{G})$$

ausdehnen. Das ist der Satz von Parseval.

7.62 Pontryagin's Dualitäts Satz.

Die Abbildung $\delta : G \to G^{\wedge\wedge}$, $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ ist ein Gruppen-Homöomorphismus.

Für einen Beweis siehe [**13**, Vol.2].

7.63 Beispiel.

Es sei $G := \mathbb{R}$. Dann ist $t \mapsto (s \mapsto e^{its})$ ein Gruppen-Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ mit der Charaktergruppe $\hat{G} = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, S^1)$. Bezüglich dieses Isomorphismus sieht die Fourier-Transformation wie folgt aus

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-its}\, dt \text{ für } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ und } s \in \mathbb{R} \cong \widehat{\mathbb{R}}$$

Vergleiche dies mit der Fouriertransformation aus [**18**, 8.1.2].

Beweis. Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$ ein stetiger Gruppen-Homomorphismus. Dann existiert wegen $\varphi(0) = 1$ ein $\delta > 0$ mit $\int_0^\delta \varphi(x)\,dx =: a > 0$. Es ist

$$a \cdot \varphi(x) = \varphi(x) \int_0^\delta \varphi(y)\,dy = \int_0^\delta \varphi(x+y)\,dy = \int_x^{x+\delta} \varphi(z)\,dz.$$

Da $a \neq 0$ gilt $\varphi(x) = \frac{1}{a}\int_x^{x+\delta} \varphi(y)\,dy$, also ist φ differenzierbar und es gilt:

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi(x) \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \varphi(x)\,\varphi'(0).$$

Also ist $\varphi(x) = e^{\varphi'(0)x}$, weil $\varphi(0) = 1$. Wegen $1 = |\varphi(x)| = |e^{\varphi'(0)x}|$ ist $\varphi'(0) \in i\,\mathbb{R}$, d.h. $\varphi(x) = e^{isx}$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Folglich ist $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, S^1) \cong (\mathbb{R}, +)$, und bezüglich dieses Isomorphismuses ist $\mathcal{F}(f)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-isx}\, dx$. $\square$

Beispiel.

Es sei $G := S^1$. Dann ist $k \mapsto (z \mapsto z^k)$ ein Gruppen-Homöomorphismus von $\mathbb{Z}$ mit der Charaktergruppe $\hat{G} = \mathrm{Hom}(S^1, S^1)$. Bezüglich dieses Isomorphismus und der Identifizierung $L^1(S^1) \cong L^1[-\pi, \pi]$ sieht die Fourier-Transformation wie folgt aus

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, e^{-itk}\, dt \text{ für } f \in L^1([-\pi, \pi]) \text{ und } k \in \mathbb{Z} \cong \widehat{S^1}.$$

Vergleiche dies mit den Fourierkoeffizienten in [**18**, 5.4].

Beweis. Es ist $h : t \mapsto e^{it}$ ein stetiger surjektiver Gruppen-Homomorphismus von $\mathbb{R} \to S^1$. Also definiert $h^* : \operatorname{Hom}(S^1, S^1) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}, S^1) \cong \mathbb{R}$ einen injektiven Gruppen-Homomorphismus. Und zwar ist $s \in \mathbb{R}$ genau dann im Bild, wenn $x \mapsto e^{isx}$ 2π-periodisch ist, d.h. $s \in \mathbb{Z}$ ist. Somit ist also $\operatorname{Hom}(S^1, S^1) \cong \mathbb{Z}$ und bezüglich dieses Homomorphismuses und $h^* : L^1(S^1) \cong L^1[-\pi, \pi]$ sieht $\mathcal{F}$ wie folgt aus:

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-itk}\, dt. \quad \square$$

Beispiel.

Es sei $G := \mathbb{Z}$. Dann ist $a \mapsto (k \mapsto a^k)$ ein Gruppen-Homöomorphismus von S^1 mit der Charaktergruppe $\hat{G} = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, S^1)$. Bezüglich dieses Isomorphismuses sieht die Fourier-Transformation wie folgt aus

$$\mathcal{F}(f)(a) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\, a^{-k} \text{ für } f \in L^1(\mathbb{Z}) \text{ und } a \in S^1 \cong \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Vgl. dies mit der Fourierreihe in [**18**, 5.4].

Beweis. Jeder Gruppen-Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to S^1$ ist eindeutig durch seinen Wert $a := \varphi(1) \in S^1$ bestimmt, denn $\varphi(k) = \varphi(\sum_{j=1}^k 1) = \varphi(1)^k$. Folglich ist $\widehat{G} \cong S^1$. Bezüglich dieses Isomorphismuses sieht $\mathcal{F}$ nun wie folgt aus:

$$\mathcal{F}(f)(a) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\, a^{-k}. \quad \square$$

7.64 Satz von Wiener.

Es sei $f(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k\, e^{ikt}$ eine absolut konvergente Fourierreihe. Falls f nirgends verschwindet, so ist auch $\frac{1}{f}$ in eine absolut konvergente Fourierreihe entwickelbar.

Beweis nach Gelfand. Es ist $A := L^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ bezüglich der Faltung eine kommutative Banach-Algebra mit 1. Nach $\boxed{7.60}$ und dem letzten Beispiel in $\boxed{7.63}$ werden die Algebra-Homomorphismen $\rho \in \sigma(A) := \operatorname{Alg}(A, \mathbb{C})$ gerade durch die $a \in S^1 \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, S^1) =: \widehat{\mathbb{Z}}$ via $\rho : f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k\, a^{-k}$ beschrieben. Die Gelfand-Transformation

$$\mathcal{G} : A \to C(\sigma(A), \mathbb{C}), \qquad f \mapsto \operatorname{ev}_f(: \rho \mapsto \rho(f))$$

aus $\boxed{6.43}$ bildet also bis auf diesen Isomorphismus $f \in L^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ auf $a \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k\, a^{-k}$ ab, ist also gerade $\mathcal{F}$. Es ist $\mathcal{F}(f) \in C(S^1, \mathbb{C}) \cong C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Als Element von $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $\mathcal{F}(f)(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k\, e^{-ikt}$. Falls $\mathcal{F}(f)$ nirgends verschwindet, so ist $1/\mathcal{F}(f) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ebenfalls im Bild der Gelfand-Transformation (und somit eine absolut konvergente Fourier-Reihe), denn wenn $\mathcal{G}(f)$ nirgends verschwindet, so ist $\rho(f) = \mathcal{G}(f)(\rho) \neq 0$ für alle $\rho \in \operatorname{Alg}(A, \mathbb{C})$ und somit $0 \notin \sigma(\mathcal{G}(f)) = \sigma(f)$, d.h. f ist invertierbar in A und offensichtlich gilt $1 = \mathcal{G}(f^{-1} f) = \mathcal{G}(f^{-1})\, \mathcal{G}(f)$, also ist $\mathcal{G}(f^{-1}) = \frac{1}{\mathcal{G}(f)}$.

$$\begin{tikzcd}
L^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, equal] & C(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}) \arrow[r, "\boxed{7.63}", "\cong"'] \arrow[d, "\cong"', "\boxed{7.60}"] & C(S^1, \mathbb{C}) \arrow[r, "\cong"] & C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\
A \arrow[r, "\mathcal{G}"'] & C(\operatorname{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C}) & &
\end{tikzcd} \quad \square$$

8 Spektral-Theorie normaler Operatoren

Es sei $N \in L(H)$ ein normaler Operator, dann ist die von N erzeugte Teil-C^*-Algebra $C^*(N)$ kommutativ und somit nach 7.10 isomorph zu $C(X, \mathbb{C})$, wobei $X := \sigma(N) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt ist. Die Inverse des Gelfand Isomorphismuses $\mathcal{G}$ liefert also eine Darstellung

$$\rho : C(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} C^*(N) \subseteq L(H),$$

den Funktionen-Kalkül aus 7.14. Eine eingehende Untersuchung dieser Darstellung sollte uns auch wesentliche Informationen über normale Operatoren liefern. Wir nehmen also zunächst das Studium der Darstellungen Abelscher C^*-Algebren wieder auf.

Darstellungen Abelscher C^*-Algebren und Spektral-Maße

In diesem Abschnitt sei X ein kompakter Raum und H ein Hilbert-Raum. Die irreduziblen $*$-Darstellungen von $C(X, \mathbb{C})$ sind nach 7.42 1-dimensional, d.h. Algebra-Homomorphismen $\rho : C(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ nach 7.9. Nach 6.42 sind diese genau die Punktevaluationen ev_x mit $x \in X$. Allgemeiner entsprechen den stetig linearen Funktionalen in $C(X, \mathbb{C})^*$ nach dem Riesz'schen Darstellungssatz 5.3.4 genau die regulären komplexen Borel-Maße auf X. Die σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borel-Mengen wird per Definition von den kompakten (äquivalent, offenen oder abgeschlossenen Mengen) erzeugt, siehe 4.1.3. Ein reguläres komplexes Borel-Maß auf X ist eine σ-additive Abbildung $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ die

$$|\mu|(A) = \sup\{|\mu|(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$$

erfüllt. Dabei ist der Absolutbetrag $|\mu|$ eines komplexen Maßes μ jenes positive Maß, welches durch

$$|\mu|(B) := \sup\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(B_n)| : B_n \in \mathcal{B}, B = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} B_n, B_n \text{ paarweise disjunkt}\Big\}$$

definiert ist. Der isometrische Isomorphismus

$$C(X, \mathbb{C})^* \cong M(X) := \{\mu : \mu \text{ ist reguläres komplexes Borel-Maß auf } X\},$$

ist durch $(f \mapsto \int_X f(x)\, d\mu(x)) \leftarrow\!\shortmid \mu$ bzw. $\mu(B) := \int_X \chi_B(x)\, d\mu(x)$ gegeben, dazu muß man allerdings das Funktional erst auf die Funktionen χ_B erweitern. Die Variations-Norm auf $M(X)$ ist durch $\|\mu\| := |\mu|(X)$ definiert.

In Analogie zum Riesz'schen Darstellungssatz 5.3.4 sollte eine Darstellung $\rho : C(X, \mathbb{C}) \to L(H)$ sich als $\rho(f) = \int_X f(x)\, dP(x)$ für eine Art "Maß" P mit Werten in $L(H)$ sein.

8.1 Bemerkung.

Es sei $\rho : \mathrm{Borel}_b(X) \to L(H)$ eine $*$-Darstellung der Algebra $\mathrm{Borel}_b(X)$ der beschränkten Borel-meßbaren Funktionen $X \to \mathbb{C}$, weiters $\chi : \mathcal{B}(X) \to \mathrm{Borel}_b(X)$ die Abbildung, die jedem $B \in \mathcal{B}(X)$ die charakteristische Funktion χ_B zuordnet und $P := \rho \circ \chi : \mathcal{B}(X) \to \mathrm{Borel}_b(X) \to L(H)$. Es gilt $\chi_{B_1 \cap B_2} = \chi_{B_1} \cdot \chi_{B_2}$ und somit ist

$$P(B_1) \circ P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_2) \circ P(B_1).$$

Insbesonders ist $P(B) = P(B \cap B) = P(B)^2$, d.h. $P(B)$ ist idempotent, und $P(B)^* = \rho(\chi_B)^* = \rho(\overline{\chi_B}) = \rho(\chi_B) = P(B)$, d.h. $P(B)$ eine ortho-Projektion.

Orthogonal-Projektionen $P \in L(H)$ stehen in bijektiver Beziehung zu abgeschlossenen Teilräumen $E \subseteq H$, via $E = \mathrm{Bild}\, P = (\mathrm{Ker}\, P)^\perp$, denn die eindeutige orthogonal-Projektion $P \in L(H)$ mit Bild E ist durch $x \mapsto x_1$ gegeben, wobei $x = x_1 + x_2$ die eindeutige orthogonale Zerlegung von H in $E \oplus E^\perp$ ist.

Wir haben die Relation des Enthaltenseins für abgeschlossene Teilräume und auch eine partielle Ordnung für positive Operatoren aus 7.17. Wir setzen diese Ordnungen für orthogonal-Projektionen nun in Beziehung zueinander.

8.2 Lemma. Beschreibung der Ordnung.

Für zwei orthogonal-Projektion P_1 und P_2 sind äquivalent.

1. $P_1 \leq P_2$;
2. $\|P_1 x\|^2 \leq \|P_2 x\|^2$ *für alle x;*
3. $\mathrm{Ker}\, P_1 \supseteq \mathrm{Ker}\, P_2$;
4. $\mathrm{Bild}\, P_1 \subseteq \mathrm{Bild}\, P_2$;
5. $P_1 = P_1 \circ P_2$;

Beweis. (1 $\Leftrightarrow$ 2) Nach 7.22 ist $P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow \langle P_1 x, x\rangle \leq \langle P_2 x, x\rangle$ für alle x, und $\langle P_j x, x\rangle = \langle P_j^2 x, x\rangle = \langle P_j x, P_j^* x\rangle = \|P_j x\|^2$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Es folgt aus $P_2(x) = 0$, daß $0 \leq \|P_1(x)\| \leq \|P_2(x)\| = 0$, also $P_1(x) = 0$.

(3 $\Leftrightarrow$ 4) Gilt wegen $\mathrm{Bild}\, P_j = (\mathrm{Ker}\, P_j)^\perp$.

(3 $\Rightarrow$ 5) Es ist $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in \mathrm{Ker}\, P_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, P_1$ und $x_1 \in (\mathrm{Ker}\, P_2)^\perp = \mathrm{Bild}\, P_2$. Somit ist $(P_1 \circ P_2)x = P_1(P_2(x_0) + P_2(x_1)) = P_1(x_1) = P_1(x_0 + x_1) = P_1(x)$.

(5 $\Rightarrow$ 2) Es ist $\|P_1 x\| = \|P_1(P_2 x)\| \leq \|P_1\|\, \|P_2 x\| \leq 1\, \|P_2 x\|$. □

8.3 Lemma. Beschreibung von Orthogonalität.

Es seien P_1 und P_2 zwei orthogonal-Projektionen. Dann steht Bild P_1 *und* Bild P_2 *genau dann aufeinander normal, wenn $P_1 \circ P_2 = 0$ ist.*

Beweis. Es ist $\mathrm{Bild}\, P_1 \perp \mathrm{Bild}\, P_2$ genau dann, wenn $\mathrm{Bild}\, P_2 \subseteq (\mathrm{Bild}\, P_1)^\perp = \mathrm{Ker}\, P_1$, d.h. $P_1 \circ P_2 = 0$ ist. □

Wir wollen als nächstes untersuchen welche Operationen dem Bilden des Durchschnittes und der orthogonalen Summe von Teilräumen auf der Seite der orthogonal-Projektionen entsprechen.

8.4 Lemma. Beschreibung orthogonaler Summen.

Es seien P_i orthogonal-Projektionen mit paarweise orthogonalen Bildern. Dann ist die orthogonal-Projektion auf den von $\bigcup_i \mathrm{Bild}\, P_i$ erzeugten abgeschlossenen Teilraum $\bigoplus_i \mathrm{Bild}\, P_i$ durch $\sum_i P_i$ gegeben. Dabei konvergiert diese Summe zwar punktweise, aber nicht bezüglich der Operatornorm.

Beweis. Es sei $E_i := \operatorname{Bild} P_i = (\operatorname{Ker} P_i)^\perp$. Dann ist der von $\bigcup_i E_i$ erzeugte abgeschlossene Teilraum von H durch

$$\bigoplus_i E_i := \Big\{ \sum_i h_i : h_i \in E_i \text{ und } \sum_i \|h_i\|^2 < \infty \Big\}$$

gegeben. Denn wegen dem Satz [18, 6.2.3] von Pythagoras ($\|\sum_i h_i\|^2 = \sum_i \|h_i\|^2$) konvergiert einerseits $\sum_i h_i$ und ist andererseits diese Menge ein abgeschlossener Teilraum, welcher alle E_i enthält.

Jedes $h \in H$ läßt sich eindeutig, als $h = h_\perp + \sum_i h_i$ mit $h_\perp \in (\bigoplus_i E_i)^\perp$ und $\sum_i h_i \in \bigoplus_i E_i$ schreiben. Es ist $P_i(h_\perp) = 0$, $P_i(h_i) = h_i$ und $P_i(h_j) = 0$ für $i \neq j$. Folglich gilt für das Netz der endlichen Teilsummen $\big(\sum_{i\in F} P_i\big)h = \sum_{i \in F} h_i \to \sum_i h_i$. D.h. die endlichen Summen $\sum_{i\in F} P_i$ konvergieren punktweise gegen die orthogonal-Projektion $h = h_\perp + \sum_i h_i \mapsto \sum_i h_i$ mit Bild $\bigoplus_i E_i$. □

Für den Durchschnitt haben wir folgende Entsprechung.

8.5 Lemma. Beschreibung des Durchschnitts.

Es seien für $1 \le i \le n$ paarweise kommutierende orthogonal-Projektionen P_i gegeben. Dann ist die orthogonal-Projektion auf $\bigcap_i \operatorname{Bild} P_i$ durch $P_1 \circ P_2 \circ \ldots \circ P_n$ gegeben.

Beweis. Es genügt diese Aussage für $n = 2$ zu zeigen, denn der Rest folgt mittels Induktion. Wegen der Vertauschbarkeit ist $(P_1 \circ P_2)^2 = P_1 \circ P_2 \circ P_1 \circ P_2 = (P_1)^2 \circ (P_2)^2 = P_1 \circ P_2$ und $(P_1 \circ P_2)^* = (P_2)^* \circ (P_1)^* = P_2 \circ P_1 = P_1 \circ P_2$, d.h. $P_1 \circ P_2$ ist eine orthogonal-Projektion. Es gilt $\operatorname{Bild}(P_1 \circ P_2) \subseteq \operatorname{Bild} P_1$ und wegen der Vertauschbarkeit auch $\operatorname{Bild}(P_1 \circ P_2) = \operatorname{Bild}(P_2 \circ P_1) \subseteq \operatorname{Bild} P_2$. Also ist $\operatorname{Bild}(P_1 \circ P_2) \subseteq \operatorname{Bild} P_1 \cap \operatorname{Bild} P_2$. Sei nun umgekehrt $h \in \operatorname{Bild} P_1 \cap \operatorname{Bild} P_2$. Dann ist $(P_1 \circ P_2)h = P_1(P_2 h) = P_1(h) = h$, d.h. $h \in \operatorname{Bild}(P_1 \circ P_2)$. □

8.6 Beispiel. Darstellung durch Multiplikation.

Es sei μ ein Borel-Maß auf einem kompakten Raum X und $\rho : f \mapsto M_f$ die Darstellung von $L^\infty(\mu)$ auf $L^2(\mu)$ durch Multiplikations-Operatoren $M_f : g \mapsto f \cdot g$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(X) \arrow[r, dotted, "P"] \arrow[d, tail, "\chi"] & L(L^2(\mu)) \\
\operatorname{Borel}_b(X, \mathbb{C}) \arrow[r, two heads] & L^\infty(\mu) \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $B \mapsto P(B) := \rho(\chi_B)$ ist im folgenden Sinn σ-additiv:
$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}(X)$, abzählbar, paarweise disjunkt $\Rightarrow P(\bigsqcup_{B\in\mathcal{B}_0} B) = \sum_{B\in\mathcal{B}_0} P(B)$, wobei die Summe punktweise konvergiert.

Beweis. Wir haben bereits in 8.1 gesehen, daß alle $P(B)$ orthogonal-Projektionen sind und daß $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \circ P(B_2)$ ist. Folglich stehen für disjunkte B_1 und B_2 die Bilder von $P(B_1)$ und $P(B_2)$ nach 8.3 normal aufeinander. Nach 8.4 ist $\sum_{B\in\mathcal{B}_0} P(B)$ die ortho-Projektion auf $\bigoplus_{B\in\mathcal{B}_0} \operatorname{Bild} P(B)$. Das Bild von $P(B)$ ist offensichtlich $\{g \in L^2(\mu) : g|_{X\setminus B} = 0\}$. Und insbesonders jenes von $P(\bigsqcup_{B\in\mathcal{B}_0} B)$ gerade $\{g \in L^2(\mu) : g|_{X\setminus\bigcup\mathcal{B}_0} = 0\} = \{\sum_{B\in\mathcal{B}_0} g_B \in L^2(\mu) : g_B|_{X\setminus B} = 0\} = \bigoplus_{B\in\mathcal{B}_0} \operatorname{Bild} P(B)$ mit $g_B := \chi_B \cdot g \in L^2(\mu)$. □

8.7 Definition. Spektral-Maß.

Wir nennen eine Abbildung $P : \mathcal{B}(X) \to L(H)$ definiert auf der Borel-Algebra (oder irgendeiner σ-Algebra $\mathcal{B}$ eines Raums X) ein SPEKTRAL-MASS auf X bezüglich des Hilbert-Raums H, falls folgendes gilt:

1. $\forall B \in \mathcal{B}$: $P(B)$ ist orthogonal-Projektion.
2. $P(X) = 1$ und $P(\emptyset) = 0$.
3. $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, abzählbar, paarweise disjunkt $\Rightarrow$ $P(\bigsqcup_{B\in\mathcal{B}_0} B) = \sum_{B\in\mathcal{B}_0} P(B)$ punktweise.

Beachte, daß diese wegen ($\boxed{1}$) im Fall $H = \mathbb{C}$ den $\{0, 1\}$-wertigen Maßen entsprechen.

8.8 Lemma. Elementares über Spektralmaße.

Für Spektral-Maße P gelten folgende Aussagen:

1. *Falls $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, dann ist* $\operatorname{Bild} P(B_1) \perp \operatorname{Bild} P(B_2)$.
2. *Es ist $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \circ P(B_2)$.*
3. *Das Spektral-Maß P ist monoton.*
4. *Für $h, k \in H$ ist durch $P_{h,k}(B) := \langle P(B)h, k\rangle$ ein komplexes Borel-Maß auf X gegeben mit totaler Variation $\|P_{h,k}\| \le \|h\|\,\|k\|$. Insbesonders ist $P_{h,h}$ ein positives Borel-Maß.*

Beweis.

($\boxed{1}$) Es seien B_1 und B_2 disjunkt. Angenommen die Bilder von $P_1 := P(B_1)$ und $P_2 := P(B_2)$ stehen nicht aufeinander normal, d.h. $P_2 \circ P_1 \neq 0$ nach $\boxed{8.3}$. Sei $x \in \operatorname{Bild} P_1$ mit $P_2 x \neq 0$. Dann ist

$$\|(P_1 + P_2)x\|^2 = \langle x + P_2x, x + P_2x\rangle = \|x\|^2 + 3\|P_2x\|^2 > \|x\|^2,$$

also ist $P_1 + P_2 = P(B_1 \sqcup B_2)$ nach $\boxed{7.40.3}$ keine Orthogonal-Projektion, ein Widerspruch.

($\boxed{2}$) Sei nun B_1 und B_2 beliebig und $P_1 := P(B_1 \setminus B_2)$, $P_2 := P(B_2 \setminus B_1)$ und $P_0 := P(B_1 \cap B_2)$. Dann sind P_0, P_1 und P_2 nach ($\boxed{1}$) paarweise orthogonale Projektionen. Weiters ist

$$P(B_1) = P((B_1 \setminus B_2) \sqcup (B_1 \cap B_2)) = P_1 + P_0,$$
$$P(B_2) = P((B_2 \setminus B_1) \sqcup (B_1 \cap B_2)) = P_2 + P_0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} P(B_1) \circ P(B_2) &= (P_1 + P_0) \circ (P_2 + P_0) \\ &= P_1 \circ P_2 + P_0 \circ P_2 + P_1 \circ P_0 + P_0 \circ P_0 = 0 + 0 + 0 + P_0 \\ &= P(B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

($\boxed{3}$) Es sei $B_1 \subseteq B_2$, d.h. $B_1 = B_1 \cap B_2$ und somit $P(B_1) = P(B_1 \cap B_2) \overset{\boxed{2}}{=} P(B_1) \circ P(B_2)$, d.h. $P(B_1) \le P(B_2)$ nach $\boxed{8.2}$.

($\boxed{4}$) Es ist $\mu := P_{h,k}$ ein komplexes Borelmaß, denn aus $P(\bigsqcup_i B_i)h = \sum_i P(B_i)h$ für paarweise disjunkte Borel-Mengen B_n folgt die σ-Additivität von μ wie folgt

$$\mu\Big(\bigsqcup_i B_i\Big) = \Big\langle P\Big(\bigsqcup_i B_i\Big)h, k\Big\rangle = \Big\langle \sum_i P(B_i)h, k\Big\rangle = \sum_i \langle P(B_i)h, k\rangle = \sum_i \mu(B_i).$$

Es ist $|\mu(B_j)| = \alpha_j\, \mu(B_j)$ mit $\alpha_j \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$. Damit ist

$$\sum_j |\mu(B_j)| = \sum_j \alpha_j \langle P(B_j)h, k\rangle = \Big\langle \sum_j \alpha_j P(B_j)h, k\Big\rangle \le \Big\|\sum_j \alpha_j P(B_j)h\Big\|\,\|k\|.$$

Da die $P(B_j)h$ paarweise orthogonal stehen, ist

$$\Big\|\sum_j \alpha_j P(B_j)h\Big\|^2 = \sum_j \|\alpha_j P(B_j)h\|^2 = \Big\|\sum_j P(B_j)h\Big\|^2 = \Big\|P\Big(\bigsqcup_j B_j\Big)h\Big\|^2 \le \|h\|^2$$

und somit ist $\sum_j |\mu(B_j)| \le \|h\|\,\|k\|$, d.h. $\|\mu\| \le \|h\|\,\|k\|$. □

8.9 Definition. Operator-Topologien.

Wir werden folgende Topologien auf $L(H)$ verwenden:

1. Die Norm Topologie, das ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf der Einheitskugel (oder auf beschränkten Mengen) von H. Eine erzeugende Norm ist die Operatornorm $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \le 1\}$;
2. Die starke Operator Topologie (SOT), nämlich die punktweise Konvergenz auf $h \in H$. Sie hat als Subbasis der Seminormen $T \mapsto \|T(h)\|$ für alle $h \in H$;
3. Die schwache Operator Topologie (WOT), nämlich die punktweise Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(H, H')$ auf H. Sie hat als Subbasis der Seminormen $T \mapsto |\langle Th, k\rangle|$ für alle $h, k \in H$.

Lemma.

Die Involution $*$ ist stetig bezüglich der WOT. Die Komposition ist getrennt stetig bezüglich der WOT und auch bezüglich der SOT.

Beweis. Es ist $\langle T^*h, k\rangle = \langle h, Tk\rangle = \overline{\langle Tk, h\rangle}$ und folglich konvergiert $\langle T_i^*h, k\rangle \to \langle T^*h, k\rangle$ falls $\langle T_i k, h\rangle \to \langle Tk, h\rangle$ für alle $h, k \in H$.

Es ist $\langle (T \circ S)h, k\rangle = \langle T(Sh), k\rangle$ und folglich konvergiert mit $T_i \to T$ auch $T_i \circ S \to T \circ S$ bezüglich WOT.

Schließlich ist $\langle STh, k\rangle = \langle Th, S^*k\rangle$ und somit konvergiert $\langle ST_ih, k\rangle \to \langle STh, k\rangle$ für alle $h, k \in H$ falls $T_i \to T$ bezüglich der WOT.

Falls $T_i \to T$ in der SOT, dann ist $T_i(Sh) \to T(Sh)$ für $h \in H$, d.h. $T_i \circ S \to T \circ S$ in der SOT und weiters $T_ih \to Th$ und somit $S(T_ih) \to S(Th)$, d.h. $S \circ T_i \to S \circ T$ in der SOT. □

Wir wollen nun zu einem Spektral-Maß P auf X eine Darstellung ρ von $C(X, \mathbb{C})$ und allgemeiner von $\mathrm{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ konstruieren. Dabei soll für $f \in \mathrm{Borel}_b(X, \mathbb{C})$

$$\rho(f) := \int_X f(x)\, dP(x)$$

sein. Dazu müssen wir diesem Integral einen Sinn geben. Hierzu betrachten wir zuerst das Integral beschränkter Borel-meßbarer Funktionen bezüglich eines komplexen Borel-Maßes μ auf X.

8.10 Proposition. $\mathbb{C}$-wertige Integration.

1. **Dichtheit der elementaren Funktionen in** $\mathrm{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ **bzgl.** $\|\_\|_\infty$**:** *Für jede beschränkte Borel-meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung von X in endlich viele Borel-meßbare Mengen B_j mit*

$$\sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in B_j\} \le \varepsilon \text{ für alle } j.$$

2. **Approximation des Integrals durch Summen:**
Falls μ ein $\mathbb{C}$-wertiges Borel-Maß auf X ist, $f \in \operatorname{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ und für $\varepsilon > 0$ die B_j wie in (1) und $x_j \in B_j$ gewählt sind, so ist f bzgl. μ integrierbar und es gilt:
$$\Big| \int_X f\, d\mu - \sum_{j=1}^n f(x_j)\, \mu(B_j) \Big| \le \varepsilon\, \|\mu\|.$$

3. **Einbettung von $\operatorname{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ in $M(X, \mathbb{C})'$:**
Der Banach-Raum $\operatorname{Borel}_b(X) := \operatorname{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ der beschränkten Borel-meßbaren Funktionen auf X bzgl. der Supremumsnorm bettet sich vermöge der Abbildung $f \mapsto (\mu \mapsto \int_X f(x)\, d\mu(x))$ isometrisch in $M(X, \mathbb{C})' \cong C(X, \mathbb{C})''$ ein. Dabei ist $M(X) := M(X, \mathbb{C})$ der Banach-Raum der regulären $\mathbb{C}$-wertigen Borel-Maße bzgl. der Variationsnorm.

4. **Schwache Dichtheit von $C(X, \mathbb{C})$ in $\operatorname{Borel}_b(X, \mathbb{C})$:**
Für jedes $f \in \operatorname{Borel}_b(X)$ existiert ein Netz stetiger Funktionen $f_i \in C(X)$ mit $\|f_i\|_\infty \le \|f\|_\infty$ und $f_i \to f$ bezüglich $\sigma(M(X)', M(X))$, d.h. $\int_X f_i\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$ für alle $\mu \in M(X)$.

Beweis. (1) Es sei $f \in \operatorname{Borel}_b(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Überdeckung von $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|f\|_\infty\}$ mit endlich vielen offenen Bällen U_j mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ und Mittelpunkten z_j. Es sei $B_k := f^{-1}(U_k) \setminus \bigcup_{j<k} f^{-1}(U_j)$. Dann bilden die B_j eine Zerlegung von X in meßbare Mengen und für $x, x' \in B_j$ gilt: $|f(x) - f(x')| \le |f(x) - z_j| + |z_j - f(x')| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(2) Für beliebige fix gewählte $x_j \in B_j$ ist somit
$$\Big| \Big(f - \sum_j f(x_j) \chi_{B_j}\Big)(x) \Big| = |f(x) - f(x_i)| \le \varepsilon \text{ für } x \in B_i$$
$$\Rightarrow \Big\| f - \sum_j f(x_j) \chi_{B_j} \Big\|_\infty \le \varepsilon.$$

Sei nun μ ein $\mathbb{C}$-wertiges Borel-Maß und $x_j \in B_j$ beliebig. Dann ist
$$\Big| \int_X \sum_j f(x_j) \chi_{B_j}\, d\mu \Big| = \Big| \sum_j f(x_j)\, \mu(B_j) \Big|$$
$$\le \sum_j |f(x_j)|\, |\mu(B_j)| \le \|f\|_\infty \sum_j |\mu(B_j)| \le \|f\|_\infty\, \|\mu\|.$$

Somit ist wegen $\|f - \sum_j f(x_j) \chi_{B_j}\|_\infty \le \varepsilon$ nach dem Satz [**18**, 4.11.12] von Lebesgue über dominierte Konvergenz f bzgl. μ integrierbar und $\int_X f\, d\mu = \lim \int_X \sum_j f(x_j) \chi_{B_j}$. Insbesonders ist
$$\Big| \int f\, d\mu \Big| \le \|f\|_\infty\, \|\mu\|$$
und
$$\Big| \int f\, d\mu - \sum_j f(x_j)\, \mu(B_j) \Big| = \Big| \int \Big(f - \sum_j f(x_j) \chi_{B_j}\Big)\, d\mu \Big|$$
$$\le \Big\| f - \sum_j f(x_j) \chi_{B_j} \Big\|_\infty \|\mu\| \le \varepsilon\, \|\mu\|.$$

($\boxed{3}$) Wegen $\left|\int f\,d\mu\right| \le \|f\|_\infty \|\mu\|$ ist $f \mapsto (\mu \mapsto \int f\,d\mu)$ eine Kontraktion. Um zu zeigen, daß dies sogar eine Isometrie ist, sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $|f(x)| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$. Es sei μ_x das Punktmaß von x, d.h. $\mu_x(B) = 1$, falls $x \in B$ und 0 sonst. Dann ist $\|\mu_x\| = 1$ und somit $\|\mu \mapsto \int f\,d\mu\| \ge |\int f\,d\mu_x| = |f(x)| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$.

($\boxed{4}$) O.B.d.A. sei $\|f\| \le 1$. Dann ist dies eine Konsequenz des folgenden Lemmas für $E := C(X, \mathbb{C})$. □

8.11 Lemma.

Es sei E ein normierter Raum.
Dann ist der 1-Ball von E im 1-Ball von E'' bzgl. $\sigma(E'', E')$ dicht.

Beweis. Es sei B der $\sigma(E'', E')$ Abschluß der 1-Balls von E in E''. Wir wollen zeigen, daß der 1-Ball von E'' in B enthalten ist. Angenommen nicht, dann sei $x'' \in E'' \setminus B$ mit $\|x''\| \le 1$. Nach dem Trennungssatz $\boxed{5.2.1}$ existiert ein $x' \in (E'', \sigma(E'', E'))' = E'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\Re e(\langle x', x\rangle) < \alpha < \Re e(\langle x', x''\rangle) \text{ für alle } x \in B.$$

O.B.d.A. ist $\alpha = 1$, denn da 0 im 1-Ball von E liegt ist $0 < \alpha$ und wir können die Ungleichung durch α dividieren und x' durch $\frac{1}{\alpha}x'$ ersetzen.

Für $\|x\| \le 1$ sei ϑ so gewählt, daß $|\langle x', x\rangle| = e^{-i\vartheta} \langle x', x\rangle$. Dann ist $e^{i\vartheta}x \in B$ und somit

$$|\langle x', x\rangle| = \Re e(e^{-i\vartheta} \langle x', x\rangle) = \Re e(\langle x', e^{i\vartheta}\, x\rangle) < 1$$

für alle $\|x\| \le 1$, also ist $\|x'\| \le 1$ und

$$1 < \Re e(\langle x', x''\rangle) \le |\langle x', x''\rangle| \le \|x'\|\,\|x''\| \le 1$$

liefert einen Widerspruch. □

8.12 Folgerung. Operator-wertige Integration.

Es sei $P : \mathcal{B}(X) \to L(H)$ ein Spektral-Maß.

1. **Operator-wertiges Integral:**
   Für jedes $f \in \mathrm{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ existiert ein eindeutiger Operator
   $$\int_X f\,dP = \int_X f(x)\,dP(x) \in L(H) \quad \textit{mit}$$
   $$\left\langle \Big(\int_X f\,dP\Big) h, k \right\rangle = \int_X f\,dP_{h,k} \textit{ für alle } h, k \in H.$$
2. **Approximation des Integrals durch Summen:**
   Falls für $f \in \mathrm{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ die Familie $\{B_1, \dots, B_n\}$ eine Zerlegung von X wie in $\boxed{8.10.1}$ ist, dann gilt für beliebig gewählte $x_j \in B_j$ folgende Abschätzung:
   $$\left\| \int_X f\,dP - \sum_{j=1}^n f(x_j)\,P(B_j) \right\| \le \varepsilon.$$
3. **Darstellung von $\mathrm{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ auf H:**
   Die Zuordnung $f \mapsto \int_X f\,dP$ definiert eine $*$-Darstellung $\rho : \mathrm{Borel}_b(X, \mathbb{C}) \to L(H)$ der Abelschen C^*-Algebra $\mathrm{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ aller beschränkten meßbaren Funktionen auf X. Diese ist stetig bzgl. $\sigma(\mathrm{Borel}_b, M(X))$ und der WOT. Durch Einschränkung erhalten wir auch eine $*$-Darstellung von $C(X, \mathbb{C})$.

Beweis. (1) Nach 8.8.4 und 8.10.2 ist $b(h,k) := \int_X f\,dP_{h,k} \in \mathbb{C}$ für alle $h,k \in H$ wohldefiniert und b eine sesquilineare Form mit $\|b\| \le \|f\|_\infty$ nach 8.10.3. Also existiert nach 7.5 ein eindeutiger beschränkter Operator, den wir mit $\int_X f\,dP$ bezeichnen, sodaß

$$\Big\langle \Big(\int_X f\,dP\Big) h, k \Big\rangle = b(h,k) = \int_X f\,dP_{h,k} \in \mathbb{C} \text{ für alle } h,k \in H.$$

(2) Sei nun eine Zerlegung $\{B_1,\dots,B_n\}$ von X wie in 8.10.1 gegeben. Für $x_j \in B_j$ ist dann

$$\begin{aligned}\Big|\Big\langle \Big(\int_X f(x)\,dP(x)\Big) h, k \Big\rangle - \sum_{j=1}^n f(x_j)\,\langle P(B_j)h, k\rangle\Big| &= \\ &= \Big|\int_X f\,dP_{h,k} - \sum_{j=1}^n f(x_j)\,P_{h,k}(B_j)\Big| \\ &\le \varepsilon\,\|P_{h,k}\| \quad \text{nach } 8.10.2 \\ &\le \varepsilon \|h\|\,\|k\| \quad \text{nach } 8.8.4.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\Big\|\int_X f\,dP - \sum_j f(x_j)\,P(B_j)\Big\| \le \varepsilon$$

(3) Wir zeigen die Multiplikativität, die restlichen algebraischen Eigenschaften sind einfacher zu zeigen. Sei dazu f_1 und f_2 meßbar und $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Zerlegung $\{B_1,\dots,B_n\}$ von X in Borel-Mengen und $x_j \in B_j$, sodaß $\sup\{|f(x) - f(x')| : x,x' \in B_j\} < \varepsilon$ für alle $f \in \{f_1, f_2, f_1 f_2\}$ und alle $j \in \{1,\dots,n\}$. Nach 2 ist dann

$$\Big\|\int_X f\,dP - \sum_j f(x_j)\,P(B_j)\Big\| < \varepsilon \text{ für } f \in \{f_1, f_2, f_1 f_2\}.$$

Da die Bilder von $P(B_j)$ normal aufeinander stehen ist

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\sum_j f(x_j)\,P(B_j)\Big)h\Big\|^2 &= \sum_j \|f(x_j)\,P(B_j)h\|^2 = \sum_j |f(x_j)|^2\,\|P(B_j)h\|^2 \\ &\le \|f\|_\infty^2 \sum_j \|P(B_j)h\|^2 = \|f\|_\infty^2 \Big\|\sum_j P(B_j)h\Big\|^2 \\ &= \|f\|_\infty^2 \Big\|P\Big(\bigsqcup_j B_j\Big)h\Big\|^2 = \|f\|_\infty^2\,\|h\|^2\end{aligned}$$

und wegen (2) ist

$$\Big\|\int f\,dP\Big\| \le \|f\|_\infty.$$

Mittels der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\int f_1\, f_2\, dP - \Big(\int f_1\, dP\Big)\Big(\int f_2\, dP\Big)\Big\| \\
&\quad\le \Big\|\int_X f_1\, f_2\, dP - \sum_j f_1(x_j)\, f_2(x_j)\, P(B_j)\Big\| \\
&\qquad+ \Big\|\sum_j f_1(x_j)\, f_2(x_j)\, P(B_j) - \Big(\sum_j f_1(x_j)\, P(B_j)\Big)\Big(\sum_j f_2(x_j)\, P(B_j)\Big)\Big\| \\
&\qquad+ \Big\|\Big(\sum_j f_1(x_j)\, P(B_j)\Big)\Big(\sum_j f_2(x_j)\, P(B_j) - \int f_2\, dP\Big)\Big\| \\
&\qquad+ \Big\|\Big(\sum_j f_1(x_j)\, P(B_j) - \int f_1\, dP\Big)\Big(\int f_2\, dP\Big)\Big\|
\end{aligned}$$

Wegen $P(B_j)\, P(B_{j'}) = P(B_j \cap B_{j'}) = P(\emptyset) = 0$ für $j \neq j'$ ist der zweite Term 0. Und wegen $\|\sum_j f(x_j)\, P(B_j)\| \le \|f\|_\infty$ für $f \in \{f_1, f_2\}$ ist schließlich

$$\Big\|\int f_1\, f_2\, dP - \Big(\int f_1\, dP\Big)\Big(\int f_2\, dP\Big)\Big\| \le \varepsilon(1 + \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt $\int f_1\, f_2\, dP = \big(\int f_1\, dP\big)\big(\int f_2\, dP\big)$.

Die $*$-Homomorphie folgt aus

$$\int \overline{f}\, dP \approx \sum \overline{f(x_j)}\, P(B_j) = \Big(\sum f(x_j)\, P(B_j)\Big)^* \approx \Big(\int f\, dP\Big)^*.$$

Die schwache Stetigkeit gilt, da für $f_j \to f$ in $\sigma(\mathrm{Borel}_b, M(X))$, also $\int f_j\, d\mu \to \int f\, d\mu$ für alle $\mu \in M(X)$ und mit $\mu := P_{h,k}$ insbesonders

$$\Big\langle \Big(\int f_j\, dP\Big) h, k\Big\rangle = \int f_j\, dP_{h,k} \to \int f\, dP_{h,k} = \Big\langle \Big(\int f\, dP\Big) h, k\Big\rangle,$$

also $\int f_j\, dP \to \int f\, dP$ bzgl. WOT gilt. □

8.13 Theorem (Pendant zum Darstellungssatz von Riesz).

Es sei X ein kompakter Raum und H ein Hilbert-Raum.
Dann stehen die $*$-Darstellungen ρ von $C(X,\mathbb{C})$ auf H in bijektiver Beziehung zu den Spektral-Maßen P auf X bezüglich H via der Relation

$$\rho(f) = \int_X f(x)\, dP(x) \text{ für alle } f \in C(X,\mathbb{C}).$$

Kurz gesagt:

$$\mathrm{Hom}(C(X,\mathbb{C}), L(H)) \cong M(X, L(H)),$$

wobei $M(X, L(H))$ die Menge der Spektral-Maße auf X bzgl. H bezeichnet.

Beweis. ($\hookleftarrow$) Dies ist 8.12.

($\mapsto$) Wie beim Riesz'schen Darstellungssatz erweitern wir ρ zuerst zu einer Darstellung $\tilde\rho$ von $\mathrm{Borel}_b(X,\mathbb{C})$ um das Spektralmaß P danach als $P := \tilde\rho \circ \chi$ zu erhalten:

$(\rho \mapsto \tilde\rho)$
Da $\mathrm{Borel}_b(X)$ nach [8.10] als Teilraum von $C(X)''$ aufgefaßt werden kann, liegt es nahe dazu die biduale Abbildung

$$\rho^{**} : C(X)'' \to L(H)''$$

zu verwenden.

$$\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[rr, hook, "\rho"] \arrow[dd, hook, "\delta"'] \arrow[dr, hook] & & L(H) \arrow[dd, hook, "\delta"] \\
 & \mathrm{Borel}_b(X) \arrow[dl, hook] & \\
C(X)'' \arrow[rr, "\rho^{**}"] & & L(H)''
\end{tikzcd}$$

Leider ist aber der Raum $L(H)$ nicht reflexiv und wir können höchstens hoffen eine Retraktion (d.h. ein Linksinverses) τ zur kanonischen Einbettung $\delta : L(H) \to L(H)''$ zu finden.
Die kanonische Einbettung $\delta : E \to E''$ eines Banach-Raums E in seinen bidual-Raum hat folgende Eigenschaft: Für jedes stetig lineare Funktional $\ell \in E'$ gilt $\mathrm{ev}_\ell \circ \delta = \ell$, denn $(\mathrm{ev}_\ell \circ \delta)(x) = \mathrm{ev}_\ell(\delta(x)) = \delta(x)(\ell) = \ell(x)$.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "\ell"'] \arrow[dd, hook, "\delta"] \\
\mathbb{C} & \\
 & E'' \arrow[ul, "\mathrm{ev}_\ell"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
L(H) \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[ddr, "\ell_{h,k}"'] & & L(H) \arrow[ddl, "\ell_{h,k}"] \\
 & L(H)'' \arrow[ur, dotted, "\tau"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_\ell"] & \\
 & \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Für $h, k \in H$ sei das lineare Funktional $\ell_{h,k} : L(H) \to \mathbb{C}$ durch $\ell_{h,k}(T) := \langle Th, k\rangle$ definiert.
Es gilt $|\ell_{h,k}(T)| = |\langle Th, k\rangle| \le \|T\|\,\|h\|\,\|k\|$. Also ist $\ell_{h,k}$ stetig mit $\|\ell_{h,k}\| \le \|h\|\,\|k\|$. Das gesuchte τ müßte also $\ell_{h,k} \circ \tau = \mathrm{ev}_{\ell_{h,k}}$ erfüllen, und ist durch diese Eigenschaft auch schon eindeutig festgelegt, da die Funktionale $\ell_{h,k}$ Punkte trennen.
Diese Bedingung bedeutet, daß für $\Psi \in L(H)''$ folgendes gilt: $\langle \tau(\Psi)h, k\rangle = (\ell_{h,k} \circ \tau)(\Psi) = (\mathrm{ev}_{\ell_{h,k}})(\Psi) = \Psi(\ell_{h,k})$. In der Tat ist nach [7.5] ein stetig linearer Operator $\tau(\Psi)$ durch diese Gleichung definiert, denn $(h, k) \mapsto \Psi(\ell_{h,k})$ ist offensichtlich eine sesqui-lineare Form mit $|\Psi(\ell_{h,k})| \le \|\Psi\|\,\|\ell_{h,k}\| \le \|\Psi\|\,\|h\|\,\|k\|$. Also ist $\|\tau(\Psi)\| \le \|\Psi\|$, d.h. $\tau : L(H)'' \to L(H)$ ist eine Kontraktion und klarerweise linear.

Bemerkung: Für Banach-Räume E und F hat man allgemeiner ein $\tau : L(E, F)'' \to L(E, F'')$, welches zusammengesetzt mit $\delta : L(E, F) \hookrightarrow L(E, F)''$ die Inklusion $\delta_* : L(E, F) \to L(E, F'')$ liefert.
Dabei ist τ assoziiert zur 3-linearen Form

$$L(E, F)'' \times E \times F' \to L(E, F)'' \times L(E, F)' \to \mathbb{C},$$

welche durch die bilineare Abbildung $E \times F' \to L(E, F)'$, die seinerseits zu $E \times F' \times L(E, F) \to F' \times E \times L(E, F) \to F' \times F \to \mathbb{C}$ assoziiert ist, beschrieben wird.

Wir haben also folgendes kommutatives Diagramm erhalten:

$$\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[rrr, "\rho"] \arrow[dd, hook, "\delta"'] \arrow[dr, hook] \arrow[drr, dotted, "\mu_{h,k}"] & & & L(H) \arrow[dl, "\ell_{h,k}"] \\
 & \mathrm{Borel}_b(X) \arrow[dl, hook] \arrow[urr, dotted, "\tilde\rho"] & \mathbb{C} & \\
C(X)'' \arrow[rrr, "\rho^{**}"'] \arrow[urr, dotted, "\mathrm{ev}_{\mu_{h,k}}"'] & & & L(H)'' \arrow[ul, "\mathrm{ev}_{\ell_{h,k}}"] \arrow[uu, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist durch $\tilde\rho := (\tau \circ \rho^{**})|_{\mathrm{Borel_b(X)}}$ eine lineare Erweiterung von ρ definiert die $\|\tilde\rho\| \le \|\tau \circ \rho^{**}\| \le \|\tau\|\,\|\rho\| \le 1 \cdot 1 = 1$ erfüllt.
Weiters ist $\mu_{h,k} := \ell_{h,k} \circ \rho$ ein stetig lineares Funktional auf $C(X)$, und kann somit als reguläres Borel-Maß aufgefaßt werden. Das untere Dreieck kommutiert,

da für $\ell := \ell_{h,k} \in L(H)'$ folgendes gilt: $(\mathrm{ev}_\ell \circ \rho^{**})(\Phi) = \mathrm{ev}_\ell(\rho^{**}(\Phi)) = \rho^{**}(\Phi)(\ell) = \Phi(\rho^*(\ell)) = \Phi(\ell \circ \rho) = \mathrm{ev}_{\ell\circ\rho}(\Phi)$, und $\ell \circ \rho = \ell_{h,k} \circ \rho =: \mu_{h,k}$. Also gilt

$$\langle \tilde\rho(f)h, k\rangle = (\ell_{h,k} \circ \tilde\rho)(f) = \mathrm{ev}_{\mu_{h,k}}(f) \overset{\boxed{8.10.3}}{=\!=\!=} \int_X f(x)\, d\mu_{h,k},$$

und folglich ist $\tilde\rho$ auch stetig von $\mathrm{Borel}_b(X)$ mit der Topologie $\sigma(\mathrm{Borel}_b(X), M(X))$ nach $L(H)$ mit der WOT. Da $C(X)$ in $C(X)'' = M(X)'$ nach $\boxed{8.11}$ dicht liegt bezüglich der Topologie $\sigma(M(X)', M(X))$, liegt es auch in $\mathrm{Borel}_b(X)$ dicht bezüglich der Spurtopologie $\sigma(\mathrm{Borel}_b(X), M(X))$.

Dies benutzen wir nun um die Multiplikativität von $\tilde\rho$ zu zeigen:
Sei also $f \in \mathrm{Borel}_b(X)$. Nach $\boxed{8.10.4}$ existiert dazu ein Netz $f_i \in C(X)$, mit $\int f_i\, d\mu \to \int f\, d\mu$ für alle $\mu \in M(X)$. Da mit $g \in \mathrm{Borel}_b(X)$ und $\mu \in M(X)$ auch $g\,\mu$ definiert durch $(g\,\mu)(f) := \int_X f\,g\,d\mu$ in $M(X)$ liegt (denn $g\,\mu : C(X) \xrightarrow{g\cdot} \mathrm{Borel}_b(X) \hookrightarrow M(X)' \xrightarrow{\mathrm{ev}_\mu} \mathbb{C}$ ist stetig nach $\boxed{8.10.3}$), gilt $f_i\,g \to f\,g$ in der schwachen Topologie $\sigma(\mathrm{Borel}_b(X), M(X))$ und somit $\tilde\rho(f_i\,g) \to \tilde\rho(f\,g)$ bezüglich der WOT. Ist insbesonders $g \in C(X)$, dann gilt $\tilde\rho(f_i\,g) = \rho(f_i\,g) = \rho(f_i) \circ \rho(g) \to \tilde\rho(f) \circ \rho(g)$ bezüglich der WOT, da die Komposition in der ersten Variablen stetig ist bezüglich der WOT nach $\boxed{8.9}$. Folglich ist $\tilde\rho(f\,g) = \tilde\rho(f) \circ \rho(g)$. Ist nun $g \in \mathrm{Borel}_b(X)$ beliebig, so folgt $\tilde\rho(f_i\,g) = \tilde\rho(g\,f_i) = \tilde\rho(g) \circ \rho(f_i) \to \tilde\rho(g) \circ \tilde\rho(f)$ in der WOT, da die Komposition auch in der zweiten Variablen stetig ist bezüglich der WOT nach $\boxed{8.9}$. Also ist $\tilde\rho(g\,f) = \tilde\rho(g) \circ \tilde\rho(f)$.

Um zu zeigen, daß $\tilde\rho$ eine $*$-Darstellung ist, müssen wir nur noch die $*$-Homomorphie zeigen.
Sei wieder $f \in \mathrm{Borel}_b(X)$ und $f_i \in C(X)$ ein Netz wie zuvor. Für $\mu \in M(X)$ sei das Maß $\overline{\mu}$ definiert durch $\overline{\mu}(B) = \overline{\mu(B)}$. Dann gilt bezüglich der WOT, daß $\rho(f_i) \to \tilde\rho(f)$ und somit $\rho(f_i)^* \to \tilde\rho(f)^*$ nach $\boxed{8.9}$. Andererseits: Wegen $\int \overline{f_i}\, d\mu = \overline{\int f_i\, d\overline{\mu}} \to \overline{\int f\, d\overline{\mu}} = \int \overline{f}\, d\mu$ für jedes Maß μ, folgt $\rho(f_i)^* = \rho(\overline{f_i}) \to \tilde\rho(\overline{f})$, d.h. $\tilde\rho(f)^* = \tilde\rho(\overline{f})$.

($\tilde\rho \mapsto P$) Nun wollen wir ein Spektral-Maß P durch $P(B) := \tilde\rho(\chi_B)$ für alle Borel-Mengen B definieren.
Wir haben in $\boxed{8.1}$ gezeigt, daß $P(B)$ eine orthogonal-Projektion ist, $P(X) = 1$ ist, und es gilt: $P(B_1 \cap B_2) = \tilde\rho(\chi_{B_1} \cdot \chi_{B_2}) = P(B_1) \circ P(B_2)$ und $P(B_1 \sqcup B_2) = \tilde\rho(\chi_{B_1} + \chi_{B_2}) = P(B_1) + P(B_2)$. Es bleibt also nur noch die σ-Additivität nachzuweisen.
Seien dazu B_j paarweise disjunkte Borel-Mengen, $B_{>n} := \bigcup_{j>n} B_j$ und $h \in H$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Big\|P\Big(\bigsqcup_{k=1}^\infty B_k\Big)h - \sum_{k=1}^n P(B_k)h\Big\|^2 &= \Big\|P(B_{>n})h + P\Big(\bigsqcup_{k=1}^n B_k\Big)h - P\Big(\bigsqcup_{k=1}^n B_k\Big)h\Big\|^2 \\
&= \|P(B_{>n})h\|^2 = \langle P(B_{>n})h, h\rangle \\
&= \langle \tilde\rho(\chi_{B_{>n}})h, h\rangle = \ell_{h,h}(\tilde\rho(\chi_{B>n})) \\
&= \mu_{h,h}(B_{>n}) = \sum_{j>n} \mu_{h,h}(B_j) \to 0,
\end{aligned}$$

da $\mu_{h,k}$ als Maß klarerweise σ-additiv ist. Also ist P ein Spektral-Maß.

($P \mapsto \rho$ ist surjektiv, denn $\rho \mapsto \tilde\rho \mapsto P \mapsto \rho$) Wir müssen also für jede Darstellung ρ mit assoziiertem Spektralmaß $P := \tilde\rho \circ \chi$ zeigen, daß $\int f\,dP = \rho(f)$ für alle $f \in C(X)$ gilt.

Sei dazu $f \in \mathrm{Borel}_b(X)$ beliebig, $\varepsilon > 0$ und $B_j \ni x_j$ wie in $\boxed{8.10.1}$, also

$$\Big\| f - \sum_{j=1}^n f(x_j)\,\chi_{B_j}\Big\|_\infty < \varepsilon.$$

Wegen $\|\tilde\rho\| \le 1$ und $\boxed{8.12.2}$ folgt daraus

$$\Big\|\tilde\rho(f) - \int f\,dP\Big\| \le \Big\|\tilde\rho\big(f - \sum_{j=1}^n f(x_j)\,\chi_{B_j}\big)\Big\| + \Big\|\sum_{j=1}^n f(x_j)\,P(B_j) - \int f\,dP\Big\| \le 2\varepsilon,$$

also ist $\tilde\rho(f) = \int f\,dP$.

($P \mapsto \rho$ ist injektiv) Es seien P^1 und P^2 zwei Spektralmaße mit $\int f\,dP^1 = \int f\,dP^2$ für alle $f \in C(X)$, also sind für $h, k \in H$ die $\mathbb{C}$-wertigen Maße $\mu^i := P^i_{h,k}$ auf $f \in C(X)$ für $i \in \{1,2\}$ ident und somit für $B \in \mathcal{B}(X)$ auch $(\ell_{h,k} \circ P^i)(B) = \mu^i(B)$ für $i \in \{1,2\}$ ident. Da die $\ell_{h,k}$ Punkte-trennen ist schließlich $P^1 = P^2$. □

Spektral-Theorie normaler Operatoren

Bemerkung.

Es sei H ein endlich-dimensionaler Hilbert-Raum. Dann besagt der Spektral-Satz der linearen Algebra, daß jeder normale Operator N diagonalisiert werden kann. Genauer es gibt eine orthonormal-Basis bestehend aus Eigenvektoren u_i zu Eigenwerten λ_i. Also ist

$$N(x) = N\Big(\sum_i \langle x, u_i\rangle u_i\Big) = \sum_i \lambda_i\,\langle x, u_i\rangle\,u_i.$$

Im unendlich-Dimensionalen muß ein entsprechender Satz anders aussehen, da ein normaler Operator gar keine Eigenwerte besitzen muß, wie z.B. der Multiplikations-Operator $N = M_{\mathrm{id}}$ mit der Identität auf $L^2[0,1]$: Sei nämlich $\lambda\,f(t) = t\,f(t)$ f.ü. für ein $f \in L^2[0,1]$. Dann ist $(\lambda - t)\,f(t) = 0$ f.ü. und somit $f = 0$ f.ü., d.h. $f = 0$ in $L^2[0,1]$.

Man kann aber den endlich-dimensionalen Satz auch wie folgt umformulieren. Für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(N)$ sei P_λ die orthogonal-Projektion auf den Eigenraum $\mathrm{Ker}(N - \lambda)$. Dann ist

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_i \lambda_i\,\langle x, u_i\rangle\,u_i = \sum_\lambda \sum_{i:\lambda_i=\lambda} \lambda_i\,\langle x, u_i\rangle\,u_i \\ &= \sum_\lambda \lambda \sum_{i:\lambda_i=\lambda} \langle x, u_i\rangle\,u_i = \sum_{\lambda\in\sigma(N)} \lambda\,P_\lambda(x) \end{aligned}$$

Dies wollen wir nun auf allgemeine Hilbert-Räume verallgemeinern und dazu vereinfachen wir vorerst $\{N, N^*\}^k$:

8.14 Fugledge-Putnam-Theorem.

Es seien N_1 und N_2 normale Operatoren auf H_1 und H_2. Falls $T \in L(H_1, H_2)$ den Operator N_1 mit N_2 vertauscht (d.h. $T\,N_1 = N_2\,T$), so vertauscht er auch N_1^* mit N_2^*.

Beweis. $N_2\,T = T\,N_1 \Rightarrow p(N_2)\,T = T\,p(N_1)$ für jedes Polynom p und weiters für jede ganze Funktion $p \in H(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Insbesonders ist

$$T = \exp(-i\bar z N_2) T \exp(i\bar z N_1).$$

Da $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$, falls X und Y miteinander kommutieren, und weil die N_j normal sind, gilt somit

$$\begin{aligned} f(z) &:= \exp(-izN_2^*)T\exp(izN_1^*) \\ &= \exp(-izN_2^*)\exp(-i\bar{z}N_2)T\exp(i\bar{z}N_1)\exp(izN_1^*) \\ &= \exp(-i(zN_2^*+\bar{z}N_2))T\exp(i(\bar{z}N_1+zN_1^*)). \end{aligned}$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sind $zN_2^* + \bar{z}N_2$ und $\bar{z}N_1 + zN_1^*$ Hermite'sche Operatoren, also ist $\exp(-i(zN_2^*+\bar{z}N_2))$ und $\exp(i(\bar{z}N_1+zN_1^*))$ unitär (denn $(\exp(iA))^*\exp(iA) = \exp(-iA^*)\exp(iA) = \exp(i(A-A)) = 1$) und damit ist $\|f(z)\| \le \|T\|$. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to L(H_1, H_2)$ ist holomorph, also nach Liouville's Theorem 6.16 konstant, und insbesonders gilt $0 = f'(0) = -i\,N_2^*\exp(0)\,T\,\exp(0) + i\,\exp(0)\,T\,N_1^*\exp(0) = i\,(T\,N_1^* - N_2^*\,T)$. □

8.15 Spektral-Theorem (für normale beschränkte Operatoren).

Es sei N ein normaler Operator auf einem Hilbert-Raum H.
Dann existiert ein eindeutiges Spektral-Maß P auf $\sigma(N)$, sodaß N folgende “Spektral-Zerlegung” hat

$$N = \int_{\sigma(N)} z\,dP(z).$$

Falls $U \ne \emptyset$ relativ offen ist in $\sigma(N)$, so ist $P(U) \ne 0$.
Weiters ist $\int_{\sigma(N)} f\,dP \in \{N\}^{kk}$ für alle $f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N), \mathbb{C})$, bzw.

$$\{N, N^*\}^k = \{N\}^k = \{P(B) : B \in \mathcal{B}(\sigma(N))\}^k = \Big\{\int_{\sigma(N)} f\,dP : f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))\Big\}^k$$

Funktionenkalkül: *Es ist $f \mapsto f(N) := \int_{\sigma(N)} f(z)\,dP(z)$ die eindeutige Darstellung der C^*-Algebra $\mathrm{Borel}_b(\sigma(N), \mathbb{C})$ auf H, welche auch bezüglich der Topologie $\sigma(\mathrm{Borel}_b(\sigma(N)), M(\sigma(N)))$ auf $\mathrm{Borel}_b(\sigma(N))$ und der WOT auf $L(H)$ stetig ist, und id auf N abbildet.*

Beweis. (Existenz von P)

$$\begin{aligned} & N \in L(H), \text{ normal} \\ \overset{7.14}{\Longrightarrow} & \exists \rho : C(\sigma(N), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} C^*(N) \subseteq L(H), \text{ eine Darstellung} \\ \overset{8.13}{\Longrightarrow} & \exists P : \mathcal{B}(\sigma(N)) \to L(H), \text{ ein Spektralmaß} \\ \overset{8.12}{\Longrightarrow} & \exists \tilde{\rho} : \mathrm{Borel}_b(\sigma(N), \mathbb{C}) \to L(H), \text{ eine schwach stetige Darstellung.} \end{aligned}$$

Dabei ist $\int f\,dP = \rho(f)$ für alle stetigen f nach 8.13, also insbesonders $\int z\,dP(z) = \int \mathrm{id}\,dP = \rho(\mathrm{id}) = N$.

(Eindeutigkeit von P) Jedem Spektral-Maß P auf $\sigma(N)$ mit $N = \int_{\sigma(N)} z\,dP(z)$ entspricht nach 8.13 eine eindeutige $*$-Darstellung $\rho : f \mapsto \int_{\sigma(N)} f\,dP$ von $C(\sigma(N))$ mit $\rho(\mathrm{id}) = N$, also dem eindeutigen Funktionen-Kalkül aus 7.14.

(Stetigkeit des Funktionen-Kalküls) Dies folgt aus 8.12.3.

(Eindeutigkeit des Funktionen-Kalküls) Es sei ρ eine Darstellung wie behauptet. Wegen der Eindeutigkeit des Funktionen-Kalküls 6.28 und 7.14 stimmt diese mit $f \mapsto f(N)$ für alle $f \in C(\sigma(N))$ überein. Wegen der Stetigkeit bzgl. $\sigma(\mathrm{Borel}_b, M)$

und der Dichtheit von $C(X)$ nach 8.10.4 stimmt diese mit $\int f\,dP$ auch für alle $f \in \mathrm{Borel}_b$ überein.

(Nicht-Degeneriertheit von P) Es sei nun $U \neq \emptyset$ in $\sigma(N)$ offen. Dann existiert eine stetige Funktion $f \neq 0$ auf $\sigma(N)$ mit $0 \leq f \leq \chi_U$. Folglich ist $P(U) = \tilde\rho(\chi_U) \geq \rho(f) \neq 0$ nach 8.8.3, 8.12.2 und 7.14, also ist P nicht degeneriert.

(Kommutator-Identitäten)

$$\begin{tikzcd}
 & \{f(N) : f \in C\} \arrow[r, hook, "7.16"] \arrow[d, hook] & \{N, N^*\}^{kk} \\
\{P(B) : B \in \mathcal{B}\} \arrow[r, hook] & \{f(N) : f \in \mathrm{Borel}_b\} &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist die vertikale Inklusion nach 8.12.3 und 8.10.4 WOT-dicht, und die horizontale untere Inklusion nach 8.12.2 in der Operatornorm dicht. Da die Komposition nach 8.9 bzgl. dieser Topologien getrennt stetig ist, haben alle links von $\{N, N^*\}$ stehenden Mengen die gleiche Kommutante $\{N, N^*\}^k = \{N\}^k$ nach 7.16 und 8.14. □

Definition. Träger eines Maßes.

Es sei μ ein reguläres Borelmaß auf X und $U \subseteq X$ eine offene Menge. Man sagt, daß μ auf U verschwindet, falls für alle $f \in C_c(X)$ mit $f|_{X\setminus U} = 0$ schon $\int f\,d\mu = 0$ gilt. Äquivalent genügt es dies (wie bei Distributionen in [**18**, 4.13.3]) für alle $f \in C_c(X)$ mit Träger $\mathrm{Träg}(f) \subseteq U$ zu verlangen, denn wenn $f|_{X\setminus U} = 0$ ist, dann konvergiert $h_n f \to f$ glm. und $\mathrm{Träg}(h_n f) \subseteq U$ – wobei stetige Funktionen $h_n \in C(X, [0,1])$ nach Tietze-Urysohn so gewählt werden, daß $\mathrm{Träg}(h_n) \subseteq U$ und $h_n = 1$ auf $\{x : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$.

Die Vereinigung aller offener Mengen U mit dieser Eigenschaft hat dieselbe Eigenschaft (d.h. es gibt eine größte Menge unter ihnen), denn der Träger von f wird bereits durch endlich viele solche U überdeckt und somit läßt sich f mittels untergeordneter Partition $\{h_i\}_i$ der 1 als $f = \sum_i h_i f$ schreiben. Da $\int h_i f\,d\mu = 0$ ist, gilt gleiches für f.

Das Komplement der größten offenen Menge U mit obiger Eigenschaft heißt der Träger $\mathrm{Träg}(\mu)$ von μ.

Man beachte, daß für das Spektralmaß P eines normalen $N \in L(H)$

$$\langle f(N)h, k\rangle = \Big\langle \Big(\int_{\sigma(N)} f\,dP\Big)h, k\Big\rangle = \int_{\sigma(N)} f\,dP_{h,k}$$

für alle $h, k \in H$ und $f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))$ ist. Insbesonders gilt $\langle f(N)h, k\rangle = \int_{\mathbb{C}} f\,dP_{h,k}$ für alle $h, k \in H$ und $f \in \mathrm{Borel}_b(\mathbb{C})$, da der Träger von $P_{h,k}$ in $\sigma(N)$ enthalten ist.

8.16 Lemma.

Es sei E ein Banach-Raum und $A \in L(E)$. Falls $\sigma(A) = K_1 \sqcup K_0$ mit disjunkten abgeschlossenen K_1 und K_0 ist, dann existiert eine Zerlegung $E = E_1 \times E_0$ in invariante Teilräume E_j von A, so daß $\sigma(A|_{E_j}) = K_j$ ist.

Falls also $\sigma(A)$ diskret (und somit endlich) ist, so finden wir eine Zerlegung $E = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda$ in invariante Teilräume für welche $A|_{E_\lambda}$ als Spektrum $\{\lambda\}$ hat.

Beweis. Es sei $p \in H(\sigma(A), \mathbb{C})$ wie in 6.33 der holomorphe Keim mit $p = j$ lokal um K_j für $j \in \{0, 1\}$. Dann ist $P = p(A) \in \{A\}^{kk}$ (nach 6.32) idempotent. Folglich ist $E_1 := \operatorname{Bild}(P)$ und $E_0 := \operatorname{Bild}(1-P) = \operatorname{Kern}(P)$ invariant unter $\{A\}^k \supseteq \{A\}$ nach 7.39.4. Es sei $A_j := A|_{E_j}$. Dann ist $A - \lambda$ genau dann invertierbar in $L(E)$, wenn $A_j - \lambda$ invertierbar ist in $L(E_j)$ für $j = 0$ und $j = 1$, denn ein inverses B zu $A - \lambda$ und somit in $\{A\}^k$ muß wegen $P \in \{A\}^{kk} \subseteq \{B\}^k$ nach 7.39.4 auch die Teilräume E_j invariant lassen. Also ist $K_1 \sqcup K_0 = \sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_0)$.

($\sigma(A_i) \subseteq K_i$) Es sei $\lambda \notin K_i$ und o.B.d.A. $i = 1$. Dann definieren wir den holomorphen Keim f durch $f : z \mapsto \frac{1}{\lambda - z}$ lokal um K_1 und $f = 0$ lokal um K_0. Dann ist $(\lambda - z)f(z) = p(z)$ und somit $(\lambda - A)\,f(A) = p(A) = P$. Da E_1 invariant unter allen auftretenden Operatoren ist, gilt für die Einschränkung A_1 von A auf E_1, daß $\lambda \notin \sigma(A_1)$, d.h. $\sigma(A_1) \subseteq K_1$.

Wegen $K_1 \sqcup K_0 = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_0)$ gilt also $\sigma(A_1) = K_1$ und $\sigma(A_0) = K_0$. □

8.17 Proposition.

Es sei N ein normaler Operator auf einem Hilbert-Raum H mit Spektral-Maß P und $\lambda \in \sigma(N)$. Dann ist $\operatorname{Bild}(P(\{\lambda\})) = \operatorname{Ker}(N - \lambda)$. Folglich ist λ genau dann ein Eigenwert von N, wenn $P(\{\lambda\}) \neq 0$ und $P(\{\lambda\})$ ist dann die orthogonal-Projektion auf den Eigenraum zu λ.

Beweis. ($\subseteq$) Es ist $(z - \lambda)\cdot\chi_{\{\lambda\}} = 0$ und somit $(N - \lambda)\,P(\{\lambda\}) = 0$, d.h. $\operatorname{Bild}(P(\{\lambda\})) \subseteq \operatorname{Ker}(N - \lambda)$.

($\supseteq$) Für $h \in \operatorname{Ker}(N - \lambda)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = \|(N-\lambda)h\|^2 &= \langle (N-\lambda)h, (N-\lambda)h\rangle = \langle (N-\lambda)^*(N-\lambda)h, h\rangle \\ &= \int |z-\lambda|^2 \, d\langle P(z)h, h\rangle \end{aligned}$$

und da $\mu := P_{h,h} = \langle P(\_)h, h\rangle$ nach 8.8.4 ein positives Maß ist, muß folglich $\operatorname{Träg}(\mu) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda|^2 = 0\} = \{\lambda\}$ gelten $\bigl(\lambda \notin \operatorname{Träg}(f) \Rightarrow |f(z)| \leq C\,|z-\lambda|^2 \Rightarrow 0 \leq |\int f| \leq \int |f| \leq C\int |z-\lambda|^2 dP_{h,h}(z) = 0\bigr)$ und somit ist $\|P(\{\lambda\})h\|^2 = \langle P(\{\lambda\})h, h\rangle = \mu(\{\lambda\}) = \mu(\sigma(N)) = \langle (\int_{\sigma(N)} dP)h, h\rangle = \|h\|^2$, d.h. $h \in \operatorname{Bild} P(\{\lambda\})$. □

Spektral-Theorie kompakter Operatoren

8.18 Lemma.

Es seien E und F Banach-Räume. Ein Operator $T \in L(E, F)$ ist genau dann kompakt, wenn sein adjungierter Operator $T^* \in L(F^*, E^*)$ es ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Dies ist [**18**, 6.4.13]

($\Leftarrow$) Es sei T^* kompakt. Dann ist T^{**} nach dem ersten Teil kompakt, und somit auch seine Einschränkung T auf $E \subseteq E^{**}$ und $F \subseteq F^{**}$. □

8.19 Lemma.

Es sei T ein kompakter Operator, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist λ genau dann ein Eigenwert, falls $\inf\{\|(T-\lambda)h\| : \|h\| = 1\} = 0$.

Beweis. ($\Rightarrow$) ist klar, da dann ein $h \neq 0$ existiert mit $Th = \lambda h$.
($\Leftarrow$) Nach Voraussetzung existiert eine Folge $h_n \in E$ mit $\|h_n\| = 1$ und $\|(T - \lambda)h_n\| \to 0$. Da T kompakt ist, dürfen wir annehmen, daß $y := \lim_n Th_n$ existiert. Es gilt somit $h_n = \frac{1}{\lambda}\bigl((\lambda - T)h_n + Th_n\bigr) \to \frac{1}{\lambda}y$ und folglich ist $1 = \|\frac{1}{\lambda}y\| = \frac{1}{|\lambda|}\|y\|$,

also $y \neq 0$. Wegen $Th_n \to T(\frac{1}{\lambda}y) = \frac{1}{\lambda}Ty$ gilt $\frac{1}{\lambda}Ty = y$, d.h. λ ist Eigenwert von T zum Eigenvektor y. $\square$

8.20 Lemma.

Es sei T ein kompakter Operator auf einem Banach-Raum E, $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$. Dann ist λ ein Eigenwert von T oder von T^*.

Beweis. Indirekt. Angenommen λ ist weder Eigenwert von $T \in L(E)$ noch von $T^* \in L(E^*)$. Nach dem vorigen Lemma 8.19 existiert ein $c > 0$ mit $\|(T-\lambda)h\| \geq c\|h\|$ für alle $h \in E$. Also ist $T - \lambda$ ein Homöomorphismus auf sein Bild, und dieses somit vollständig und folglich abgeschlossen. Weil λ kein Eigenwert der Banach-Raum-Adjungierten T^* ist, gilt

$$\operatorname{Bild}(T-\lambda) = \overline{\operatorname{Bild}(T-\lambda)} \xlongequal{\boxed{5.4.3}} (\operatorname{Ker}(T-\lambda)^*)_o \overset{!}{=} (\operatorname{Ker}(T^*-\lambda))_o = \{0\}_o = E,$$

denn $T \mapsto T^*$ ist $\mathbb{C}$-linear! Somit ist $(T-\lambda): E \to E$ bijektiv und wegen $\|(T-\lambda)h\| \geq c\|h\|$ (oder auch den Open Mapping Theorem) ist die Umkehrabbildung $(T-\lambda)^{-1}$ ebenfalls stetig, d.h. $\lambda \notin \sigma(T)$. $\square$

8.21 Lemma.

Es sei $F \subset E$ ein echter abgeschlossener Teilraum eines Banach-Raums E und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis. Es sei $d(x) := \operatorname{dist}(x, F) := \inf\{\|x - y\| : y \in F\}$. Wir wählen $x_1 \in E \setminus F$. Dann existiert ein $y_1 \in F$ mit $0 < d(x_1) \leq \|x_1 - y_1\| \leq (1+\varepsilon)\,d(x_1)$. Es sei $x_2 := x_1 - y_1$, dann ist $d(x_2) = \inf\{\|x_2 - y\| : y \in F\} = \inf\{\|x_1 - y_1 - y\| : y \in F\} = d(x_1)$ und $(1+\varepsilon)\,d(x_2) = (1+\varepsilon)\,d(x_1) \geq \|x_1 - y_1\| = \|x_2\| > 0$. Sei schließlich $x := \frac{1}{\|x_2\|}x_2$. Dann ist $\|x\| = 1$ und für $y \in F$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \left\|\frac{1}{\|x_2\|}x_2 - y\right\| = \frac{1}{\|x_2\|}\left\|x_2 - \|x_2\|\,y\right\| \\
&\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)\,d(x_2)}\left\|x_2 - \|x_2\|\,y\right\| \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)\,d(x_2)}\,d(x_2) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \\
&> 1 - \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

8.22 Spektral-Satz kompakter Operatoren auf Banach-Räumen.

Es sei E ein unendlich-dimensionaler Banach-Raum und $T \in L(E)$ ein kompakter Operator. Dann ist $0 \in \sigma(T)$ und alle $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ sind isoliert in $\sigma(T)$ und Eigenwerte von T mit endlich-dimensionalen Eigenräumen $\operatorname{Ker}(T - \lambda)$. Falls es unendlich viele solche λ gibt, so lassen sich diese folglich in Form einer 0-Folge anordnen.

Beweis. Beh.: *Jede Folge verschiedener Eigenwerte λ_n von T konvergiert gegen 0:* Für jedes n wählen wir ein $0 \neq h_n \in \operatorname{Ker}(T - \lambda_n)$. Es sei E_n das lineare Erzeugnis von $\{h_1, \dots, h_n\}$. Dieser Raum ist n-dimensional, da die h_n linear unabhängig sind: Sei nämlich $\sum_k \mu_k h_k = 0$ eine linear-Kombination minimaler Länge, dann ist $0 = (T - \lambda_1)(\sum_k \mu_k h_k) = \sum_{k>1} \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)h_k$ ein Widerspruch zur Minimalität. Nach dem vorigen Lemma 8.21 existiert ein Vektor $y_n \in E_n$ mit $\|y_n\| = 1$ und

$d(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$. Es sei $y_n = \sum_{k\le n} \mu_k\, h_k$. Dann ist $(T-\lambda_n)y_n = \sum_{k<n} \mu_k\,(\lambda_k - \lambda_n)\, h_k \in E_{n-1}$. und somit gilt für $n > m$:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{\lambda_n} y_n\right) - T\left(\frac{1}{\lambda_m} y_m\right) &= \frac{1}{\lambda_n}(T-\lambda_n)y_n - \frac{1}{\lambda_m}(T-\lambda_m)y_m + y_n - y_m \\ &= y_n + \Big(\underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(T-\lambda_n)y_n}_{\in E_{n-1}} - \underbrace{\frac{1}{\lambda_m}(T-\lambda_m)y_m}_{\in E_{m-1}} - \underbrace{y_m}_{\in E_m}\Big) \in y_n + E_{n-1}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\left\| T\left(\frac{1}{\lambda_n} y_n\right) - T\left(\frac{1}{\lambda_m} y_m\right)\right\| \ge \operatorname{dist}(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

Es hat $(T(\frac{1}{\lambda_n} y_n))_n$ also keine konvergente Teilfolge. Da aber T kompakt ist, und somit das Bild beschränkter Mengen relativ-kompakt ist, kann $(\frac{1}{\lambda_n} y_n)_n$ keine beschränkte Teilfolge haben. Also muß $\|\frac{1}{\lambda_n} y_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|} \to \infty$ konvergieren, d.h. $\lambda_n \to 0$.

Beh.: *Alle $0 \ne \lambda \in \sigma(T)$ sind isolierte Punkte von $\sigma(T)$.*
Falls nämlich $\lambda_n \in \sigma(T)$ mit $\lambda_n \ne \lambda$ gegen $\lambda \ne 0$ konvergiert, so ist nach 8.20 λ_n ein Eigenwert von T oder von T^*. O.B.d.A. können wir also annehmen, daß alle λ_n Eigenwerte von T oder alle von T^* sind. Der vorige Punkt liefert – da nach 8.18 auch T^* kompakt ist – $\lambda_n \to 0$, einen Widerspruch.

Beh.: *Alle $0 \ne \lambda \in \sigma(T)$ sind Eigenwerte von T.*
Da λ isoliert ist, existiert nach 8.16 ein abgeschlossener invarianter Teilraum E_λ von E, s.d. $T_\lambda := T|_{E_\lambda}$ gerade als Spektrum $\{\lambda\}$ hat. Also ist T_λ ein invertierbarer ($0 \notin \sigma(T_\lambda)$) kompakter Operator und damit ist E_λ endlich-dimensional (denn das Bild der Einheitskugel ist dann eine relativ-kompakte 0-Umgebung). Folglich ist $\lambda \in \sigma(T_\lambda)$ ein Eigenwert von T_λ und somit auch von T.

Beh.: *Der Eigenraum* $\operatorname{Ker}(T-\lambda)$ *ist endlich-dimensional.*
Es ist $\operatorname{Ker}(T-\lambda)$ ein T-invarianter abgeschlossener Teilraum und $\lambda\, \mathrm{id}_{\operatorname{Ker}(T-\lambda)} = T|_{\operatorname{Ker}(T-\lambda)}$ ist kompakt. Also ist $\operatorname{Ker}(T-\lambda)$ endlich-dimensional. □

8.23 Lemma.

Es sei N ein normaler Operator auf einem Hilbert-Raum mit Spektral-Maß P. Dann ist N genau dann kompakt, wenn $P(\{z \in \sigma(N) : |z| > \varepsilon\})$ endlich-dimensionales Bild hat für alle $\varepsilon > 0$.

Beweis. ($\Leftarrow$) Es sei $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon := \{z \in \sigma(N) : |z| \le \varepsilon\}$ und $P_\varepsilon := P(\sigma(N) \setminus B_\varepsilon)$. Dann gilt für $f : z \mapsto z\, \chi_{B_\varepsilon}(z)$

$$\begin{aligned} N - N\, P_\varepsilon &= N\,(1 - P_\varepsilon) = N\, P(B_\varepsilon) \\ &= \int z\, \chi_{B_\varepsilon}(z)\, dP(z) = f(N). \end{aligned}$$

Also ist $\|N - N\, P_\varepsilon\| \le \|f\|_\infty = \sup\{|z| : z \in B_\varepsilon\} \le \varepsilon$. Falls P_ε endlich-dimensionales Bild hat für jedes ε, so gilt dies auch für $N\, P_\varepsilon$ und damit ist N kompakt nach [18, 6.4.8].

($\Rightarrow$) Es sei N kompakt und $\varepsilon > 0$. Es ist $g : z \mapsto \frac{1}{z} \chi_{\sigma(N)\setminus B_\varepsilon}(z)$ in $\operatorname{Borel}_b(\mathbb{C})$. Da N kompakt ist, ist es auch

$$N\, g(N) = \int z\, \frac{1}{z}\, \chi_{\sigma(N)\setminus B_\varepsilon}(z)\, dP(z) = P_\varepsilon.$$

Da aber P_ε eine Projektion ist, muß somit ihr Bild endlich-dimensional sein. □

8.24 Spektral-Satz für kompakte normale Operatoren.

Es sei N ein kompakter und normaler Operator auf einem Hilbert-Raum. Dann bilden die Eigenwerte ungleich 0 von N eine endliche oder eine gegen 0 konvergente Folge λ_j. Die Eigenräume $\operatorname{Ker}(N-\lambda_j)$ sind endlich-dimensional und paarweise orthogonal und bezüglich der orthogonal-Projektionen P_j auf $\operatorname{Ker}(N-\lambda_j)$ gilt:

$$N = \sum_j \lambda_j P_j.$$

Umgekehrt ist jeder Operator N kompakt und normal, welcher eine Darstellung $N = \sum_j \lambda_j P_j$ besitzt mit endlich-dimensionalen orthogonal-Projektionen $P_j \neq 0$ mit paarweise orthogonalen Bildern und paarweise verschiedenen $0 \neq \lambda_j \to 0$. Es sind dann die λ_j die von 0 verschiedenen Eigenwerte und die Bilder von P_j die zugehörigen Eigenräume.

Beweis. ($\Rightarrow$) Nach dem Spektral-Theorem 8.15 existiert ein eindeutiges Spektral-Maß P auf $\sigma(N)$ mit $N = \int_{\sigma(N)} z\, dP(z)$. Nach dem Spektral-Satz 8.22 ist $\sigma(N) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ und jedes λ_k ist isoliert und ein Eigenwert. Also ist nach 8.17 $P_k := P(\{\lambda_k\})$ die orthogonal-Projektion auf den Eigenraum $\operatorname{Ker}(N-\lambda_k)$. Sei nun $\varepsilon > 0$, und n so groß, daß $|\lambda_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k > n$. Dann bilden die Mengen $\{\lambda_1\}, \dots, \{\lambda_n\}, \{0, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots\}$ eine Borel-Zerlegung von $\sigma(N)$ in Mengen mit $|z - z'| \leq \varepsilon$ für z, z' in der gleichen Menge. Also ist $\| \int_{\sigma(N)} z\, dP(z) - \sum_{j \leq n} \lambda_j P_j - 0\, P(\{0, \lambda_{n+1}, \dots\})\| < \varepsilon$. D.h. die Summe $\sum_j \lambda_j P_j$ konvergiert gegen $N = \int_{\sigma(N)} z\, dP(z)$. Da die λ_j paarweise verschieden sind, sind die Bilder von P_j paarweise orthogonal nach 8.8.1.

($\Leftarrow$) Da $\|P_j\| \leq 1$ für orthogonal-Projektionen P_j, weiters $\lambda_j \to 0$ und die Bilder der P_j paarweise orthogonal sind folgt, daß die Summe in der Operatornorm konvergiert, denn

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j\geq n} \lambda_j P_j h\Big\|^2 = \sum_{j \geq n} |\lambda_j|^2 \, \|P_j h\|^2 &\leq \max\{|\lambda_j|^2 : j \geq n\} \cdot \Big\|\big(\sum_{j\geq n} P_j\big) h\Big\|^2 \\ &\leq \max\{|\lambda_j|^2 : j \geq n\} \cdot \|h\|^2.\end{aligned}$$

Ihre Teilsummen sind nach Voraussetzung endlich-dimensionale Operatoren also ist N kompakt. Es ist $N^* = \sum_j \overline{\lambda_j} P_j$ und somit ist N normal.

Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von N und h ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $0 \neq \lambda\, h = N(h) = \sum_j \lambda_j P_j(h)$ also mindestens ein $P_k(h) \neq 0$ und somit $\lambda\, P_k(h) = \lambda_k\, P_k(h)$ also $\lambda = \lambda_k$, d.h. dieses k ist eindeutig. Somit ist $h = P_k(h)$, also $\operatorname{Ker}(N - \lambda_k) \subseteq \operatorname{Bild} P_k$.

Die umgekehrte Inklusion folgt aus der paarweisen Orthogonalität der Bilder der P_j, denn $h \in \operatorname{Bild} P_k \Rightarrow P_k h = h \Rightarrow P_j h = P_j P_k h = 0$ für $j \neq k$ nach 8.3, also $N h = \lambda_k h$. □

8.25 Spektral-Darstellung Hermite'scher Operatoren.

Es sei N ein Hermite'scher Operator, P sein Spektral-Maß und $p(t) := P(\{s \in \sigma(N) : s < t\})$. Dann ist $p : \mathbb{R} \to L(H)$ eine monotone, bezüglich der SOT linksstetig Abbildung mit $p(t) = 0$ für $t \leq -\|N\|$ und $p(t) = 1$ für $t \geq \|N\|$. Für $f \in C(\sigma(N))$ ist $f(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dp(t)$ ein Operator-wertiges Riemann-Stieltjes Integral.

Beweis. Da $t \mapsto \{s \in \sigma(N) : s < t\}$ monoton wachsend ist, ist $p : t \mapsto P(\{s \in \sigma(N) : s < t\})$ monoton wachsend nach 8.8.3 und wegen $\sigma(N) \subseteq \{s \in \mathbb{R} : -\|N\| \leq s \leq \|N\|\}$ ist $p(t) = 0$ nach 8.8.1 für $t < -\|N\|$ und $p(t) = 1$ für $t \geq \|N\|$. Wegen der σ-Additivität von P ist p links-stetig bezüglich der SOT, denn sei $t_n \nearrow t_\infty$, dann ist $(-\infty, t_\infty) = (-\infty, t_0) \sqcup \bigsqcup_i [t_{i-1}, t_i)$ eine Zerlegung und somit in der SOT

$$\begin{aligned} p(t_\infty) = P[(-\infty, t_\infty)] &= P[(-\infty, t_0)] + \sum_{i=1}^\infty P([t_{i-1}, t_i)) \\ &= p(t_0) + \sum_{i=1}^\infty (p(t_i) - p(t_{i-1})) = \lim_{i\to\infty} p(t_i). \end{aligned}$$

Sei nun $f \in C(\sigma(N))$, so existiert eine monoton wachsende Folge von $t_j \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon$ für $t_{j-1} \le x, x' \le t_j$. Dann ist

$$\int f(z)\, dP(z) \approx \sum_j f(x_j)\, P([t_{j-1}, t_j)) = \sum_j f(x_j)\, (p(t_j) - p(t_{j-1})),$$

eine Riemann-Stieltjes-Summe von $\int f(z)\, dp(z)$. □

8.26 Folgerung.

Es sei H ein separabler Hilbert-Raum. Dann ist das einzige nicht-triviale abgeschlossene Ideal das der kompakten Operatoren.

Beweis. Wegen der Proposition nach 7.30 enthält jedes abgeschlossene Ideal $I \neq \{0\}$ alle kompakten Operatoren. Angenommen es enthält einen nicht-kompakten Operator A. Es ist $N := A^*A$ positiv. Angenommen N wäre kompakt. Dann wäre nach 8.24 $N = \sum_j \lambda_j P_j$ mit $0 < \lambda_j \to 0$ und orthogonal-Projektionen P_j mit paarweise orthogonalen Bildern. Folglich wäre $|A| := \sqrt{A^*A} = \sqrt{N} = \sum_j \sqrt{\lambda_j} P_j$ und somit nach 8.24 ebenfalls kompakt. Damit wäre aber nach 7.24 auch $A = U\,|A|$ kompakt, ein Widerspruch.

Nach 8.23 existiert ein $\varepsilon > 0$ so, daß $P_\varepsilon := P(\sigma(N) \setminus B_\varepsilon) = N\, g(N) \in I$ unendlich-dimensionales Bild hat, wobei P das Spektralmaß für N ist, $B_\varepsilon := \{z \in \sigma(N) : |z| \le \varepsilon\} = [0, \varepsilon] \cap \sigma(N)$ und $g(z) := \frac{1}{z}\,\chi_{\sigma(N)\setminus B_\varepsilon}$ ist. Da H separabel ist, existiert eine surjektive Isometrie $U : H \to \mathrm{Bild}(P_\varepsilon)$. Dann ist $1 = U^*U = U^* P_\varepsilon U \in I$, d.h. $I = L(H)$. □

Normale Operatoren als Multiplikations-Operatoren

Eine Analogie zu einem diagonal-Operator wäre ein Multiplikations-Operator $M_f : g \mapsto f \cdot g$, die wir nun studieren.

8.27 Diagonal-Operator.

Es sei (X, Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Es sei $f \mapsto M_f$ die treue und daher isometrische Darstellung von $L^\infty(\mu)$ auf $L^2(\mu)$, welche durch die Multiplikations-Operatoren $M_f : g \mapsto f \cdot g$ gegeben ist. Für sie gilt:

1. *Der Operator M_f ist normal und $(M_f)^* = M_{\overline{f}}$.*
2. *Es ist $\sigma(M_f) = \text{ess-Bild}(f) := \bigcap\{f(A)^- : A \in \Omega, \mu(X \setminus A) = 0\}$, wobei $f(A)^-$ den Abschluß von $f(A)$ bezeichnet.*
3. *Das Spektral-Maß P für M_f auf $\text{ess-Bild}(f)$ ist durch $P(B) = M_{\chi_{f^{-1}(B)}}$ gegeben.*

Beweis. (1) Es ist $\langle h, M_f^* k\rangle = \langle M_f h, k\rangle = \int f\, h\, \overline{k}\, d\mu = \int h\, \overline{\overline{f}\, k}\, d\mu = \langle h, M_{\overline{f}} k\rangle$, d.h. $(M_f)^* = M_{\overline{f}}$ und folglich $M_f \circ (M_f)^* = M_f \circ M_{\overline{f}} = M_{|f|^2} = (M_f)^* \circ M_f$.

(2) Es sei vorerst $\lambda \notin$ ess-Bild(f). Dann existiert ein $A \in \Omega$ mit $\mu(X \setminus A) = 0$ und $\lambda \notin f(A)^-$, d.h. es existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - \lambda| \geq \delta$ für alle $x \in A$. Es ist $g := \frac{1}{f-\lambda} \in L^\infty(\mu)$ und $M_g = (M_f - \lambda)^{-1}$, damit ist $\lambda \notin \sigma(M_f)$.
Umgekehrt sei $\lambda \in$ ess-Bild(f). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x : |f(x) - \lambda| > \frac{1}{n}\}$. Dann ist $\lambda \notin \overline{f(A_n)}$, und da $A_n \in \Omega$ ist, gilt $0 < \mu(X \setminus A_n) \leq \infty$. Da (X, Ω, μ) σ-endlich ist, existiert ein meßbares $A'_n \subseteq X \setminus A_n$ mit $0 < \mu(A'_n) < \infty$. Wir setzen $f_n := \frac{1}{\sqrt{\mu(A'_n)}} \chi_{A'_n}$. Dann ist $f_n \in L^2(\mu)$ und $\|f_n\|_2 = 1$. Andererseits ist $\|(M_f - \lambda) f_n\|^2 = \frac{1}{\mu(A'_n)} \int_{A'_n} |f - \lambda|^2\, d\mu \leq \frac{1}{n^2}$. Also ist $M_f - \lambda$ keine offene Abbildung und somit $\lambda \in \sigma(M_f)$.

(3) Wir wählen eine endliche Zerlegung der beschränkten Menge $\overline{f(X)}$ in Borel-Mengen B_j mit $z, z' \in B_j \Rightarrow |z - z'| \leq \varepsilon$ und weiters wählen wir $z_j \in B_j$. Die Mengen $f^{-1}(B_j)$ bilden dann eine Zerlegung von X in meßbare Mengen. Und für alle $x \in f^{-1}(B_j)$ gilt $|(f - \sum_j z_j \chi_{f^{-1}(B_j)})(x)| = |f(x) - z_j| \leq \varepsilon$. Wegen $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$ für alle $g \in L^\infty$, ist folglich

$$\Big\| M_f - \sum_j z_j M_{\chi_{f^{-1}(B_j)}} \Big\| \leq \Big\| f - \sum_j z_j \chi_{f^{-1}(B_j)} \Big\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert $\sum_j z_j M_{\chi_{f^{-1}(B_j)}}$ gegen M_f und auch gegen $\int z\, dP(z)$, wobei P das Spektral-Maß definiert durch $P(B) := M_{\chi_{f^{-1}(B)}}$ ist. □

8.28 Beispiel.

Ist insbesonders $X = \mathbb{C}$ und $\mu \geq 0$ ein reguläres Borelmaß mit kompaktem Träger $K :=$ Träg$(\mu) \subseteq \mathbb{C}$, dann bezeichnen wir mit N_μ den Multiplikations-Operator M_{id} auf $L^2(\mu)$ mit der Identität $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Es gilt:

1. *N_μ ist normal, und $\sigma(N_\mu) =$ Träg(μ).*
2. *Für jedes $f \in \mathrm{Borel}_b(\mathbb{C})$ ist $f(N_\mu)$ der Multiplikations-Operator M_f mit f.*
3. *Für das Spektral-Maß P von N_μ gilt $P(B) = M_{\chi_B}$.*

Beweis. (1) Dies folgt aus 8.27.1 und 8.27.2 , da $N_\mu = M_{\mathrm{id}}$ und ess-Bild$(f) = f($Träg$\mu)$, falls f stetig ist, denn:
($\subseteq$) Wir setzen $A :=$ Träg(μ). Da die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{C}\setminus A}$ der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus A$ sich als punktweiser Grenzwert einer monotonen Folge stetiger Funktionen $g_n \in C_c(\mathbb{C})$ mit $g_n|_A = 0$ schreiben läßt, ist $\int g_n\, d\mu = 0$ und somit $\mu(\mathbb{C} \setminus A) = \int \chi_{\mathbb{C}\setminus A}\, d\mu = \lim_n \int g_n\, d\mu = 0$. Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt also abgeschlossen und damit ess-Bild$(f) \subseteq f(A) = f($Träg$(\mu))$.
($\supseteq$) Es sei A eine Borelmenge mit $\mu(\mathbb{C} \setminus A) = 0$. Dann ist für $0 \leq g \in C_c(\mathbb{C})$ mit $g|_A = 0$ folgendes erfüllt $0 \leq \int g\, d\mu \leq \|g\|_\infty\, \mu(\mathbb{C} \setminus A) = 0$. Also liegt der Träger von μ innerhalb von $\overline{A}$, und somit gilt $f($Träg$(\mu)) \subseteq f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ da f stetig ist, und damit $f($Träg$(\mu)) \subseteq$ ess-Bild(f).

(2) Wir müssen wegen 8.15 nur zeigen, daß $f \mapsto M_f$ die charakterisierenden Stetigkeits-Eigenschaften besitzt:
Sei also $f_j \to 0$ in $\mathrm{Borel}_b(K)$ bezüglich der Topologie $\sigma(\mathrm{Borel}_b(K), M(K))$. Z.z. ist, daß $M_{f_j} \to 0$ in der WOT. Sei also $h, k \in L^2(\mu)$. Nach Cauchy-Schwarz ist dann $h\, \overline{k} \in L^1(\mu)$ und somit $h\, \overline{k}\, \mu \in M(K)$, folglich gilt:

$$\langle M_{f_j} h, k\rangle = \int_K f_j\, h\, \overline{k}\, d\mu \to 0.$$

(3) Dies folgt sofort aus 8.27.3 oder auch aus (2), da $P(B) = \chi_B(N_\mu) = M_{\chi_B}$. □

Wir wollen nun zeigen, daß jeder normale Operator unitär äquivalent zu einem Multiplikations-Operator ist. Dazu folgende

8.29 Definition.

Wir übertragen einige Begriffe der Darstellungstheorie Abelscher C^*-Algebren auf normale Operatoren $N \in L(H)$, indem wir die von N erzeugte Teil-C^*-Algebra $C^*(N) \subseteq L(H)$ und die zugehörige Darstellung $\rho_N : C(\sigma(N)) \cong C^*(N) \subseteq L(H)$ betrachten – den Funktionen-Kalkül aus 7.14.

Es heißt also $h \in H$ ZYKLISCHER VEKTOR für N, falls er ein solcher für die Darstellung ρ_N ist, d.h. $\{p(N, N^*)h : p \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}$ dicht ist in H.

Der normale Operator N heißt ZYKLISCH , falls er einen zyklischen Vektor besitzt.

Zwei normale Operatoren $N_1 \in L(H_1)$ und $N_2 \in L(H_2)$ heißen UNITÄR ÄQUIVALENT, falls eine surjektive Isometrie $U : H_1 \to H_2$ existiert mit $N_2 \circ U = U \circ N_1$, d.h. $N_2 = U \circ N_1 \circ U^{-1}$.

Lemma.

Zwei normale Operatoren $N_1 \in L(H_1)$ und $N_2 \in L(H_2)$ sind genau dann unitär äquivalent, wenn $\sigma(N_1) = \sigma(N_2)$ und die zugehörigen Darstellungen ρ_{N_1} und ρ_{N_2} unitär äquivalent sind:

Beweis. ($\Rightarrow$) Ist nämlich $N_1 - \lambda$ invertierbar, so auch $N_2 - \lambda = U \circ (N_1 - \lambda) \circ U^{-1}$, und umgekehrt. Also stimmen die beiden Spektren überein. Weiters sind ρ_{N_2} und $f \mapsto U \circ f(N_1) \circ U^{-1}$ zwei $*$-Darstellungen von $C(\sigma(N_2))$, die auf der Identität beide N_2 liefern. Also stimmen sie überein, d.h. ρ_{N_1} und ρ_{N_2} sind via U äquivalent.
($\Leftarrow$) Es sei $U : H_1 \to H_2$ eine surjektive Isometrie mit $\rho_{N_2}(f) \circ U = U \circ \rho_{N_1}(f)$ für alle $f \in C(X)$ mit $X := \sigma(N_1) = \sigma(N_2)$. Dann ist insbesonders $N_2 \circ U = U \circ N_1$ für $f = \mathrm{id}$. □

8.30 Folgerung.

Jeder normale Operator ist unitär äquivalent zu einer orthogonalen Summe zyklischer Operatoren.

Beweis. Es sei N ein normaler Operator auf H. Nach 7.32 ist H eine orthogonale Summe von abgeschlossenen invarianten Teilräumen H_j der Darstellung $\rho_N : C(\sigma(N)) \to L(H)$, sodaß die Spurdarstellung $\rho_j : f \mapsto \rho_N(f)|_{H_j}$ zyklisch ist und ρ_N vermöge der natürlichen Isometrie $U : \bigoplus_j H_j \to H$ unitär äquivalent zu $\bigoplus_j \rho_j$ ist. Insbesonders ist also N wegen 8.29 via U unitär äquivalent zu $\bigoplus N_i$, wobei $N_i := N|_{H_i}$ ein zyklischer Operator ist. □

Wie bei der Darstellungstheorie sollten wir also zuerst zyklische Operatoren studieren.

8.31 Proposition.

Ein normaler Operator ist genau dann zyklisch, falls ein positives Maß μ auf $\sigma(N)$ existiert, s.d. er unitär äquivalent ist zu dem Multiplikations-Operator N_μ auf $L^2(\mu)$ mit der Identität. Durch die Bedingung $U(h_0) = 1$, wobei h_0 einen fixen zyklischen

Vektor bezeichnet ist die Äquivalenz U eindeutig bestimmt. Es ist dabei $\mu = P_{h_0,h_0}$, wobei P das Spektral-Maß von N ist.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Borel}_b(\sigma(N),\mathbb{C}) \arrow[d, "\pi"] & C(\sigma(N),\mathbb{C}) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\rho_N"] & L(H) \arrow[d, "\mathrm{konj}_U", "\cong"'] & H \arrow[d, "U"] \\ L^\infty(\mu) \arrow[rr, "M"'] & & L(L^2(\mu)) & L^2(\mu) \end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Definition ist ein normaler Operator $N \in L(H)$ genau dann zyklisch, wenn die Darstellung $\rho_N : C(\sigma(N)) \to L(H)$ es ist. Nach 7.35 ist eine Darstellung der Abelschen C^*-Algebra $C(\sigma(N))$ genau dann zyklisch, wenn sie äquivalent zur Darstellung M auf $L^2(\mu)$ für ein positives Borel-Maß μ auf $\sigma(N)$ ist. Dabei ist die unitäre Äquivalenz $U : L^2(\mu) \to H$ durch $U(1) = h_0$ bei vorgegebem zyklischen Vektor $h_0 \in H$ eindeutig bestimmt. Nach 8.29 ist das gleichbedeutend mit der unitären Äquivalenz von N mit $N_\mu = M_{\mathrm{id}}$. Es ist $P_{h_0,h_0} = \mu$, denn

$$\int f\, dP_{h_0,h_0} \overset{\boxed{8.12}}{=\!=} \langle \rho_N(f)h_0, h_0\rangle = \langle \rho_N(f)U1, U1\rangle = \langle U^*\rho_N(f)U1, 1\rangle$$
$$= \langle U^{-1}\rho_N(f)U1, 1\rangle \overset{\boxed{7.35}}{=\!=} \langle M_f 1, 1\rangle = \int f\, d\mu. \quad \square$$

8.32 Bemerkung. Unitär äquivalente N_μ's.

Um die unitären Äquivalenz-Klassen aller zyklischen Operatoren zu bestimmen, müssen wir entscheiden, für welche positiven Borel-Maße μ_j auf $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger die Operatoren N_{μ_1} und N_{μ_2} unitär äquivalent sind.

Nehmen wir also an es gäbe eine surjektive Isometrie $U : L^2(\mu_1) \to L^2(\mu_2)$ mit $U\, N_{\mu_1}\, U^{-1} = N_{\mu_2}$:
Aus der Äquivalenz von N_{μ_1} und N_{μ_2} folgt nach 8.29, daß die beiden Spektren $\sigma(N_{\mu_j})$ gleich sind (somit sei $K := \sigma(N_{\mu_j}) = \mathrm{Träg}(\mu_j)$ nach 8.28) und ρ_{N_1} zu ρ_{N_2} unitär äquivalent ist vermöge U. Es sei $f := U(1) \in L^2(\mu_2)$, also $|f|^2 \in L^1(\mu_2)$. Dann ist $U\, g = U\, M_g\, 1 = M_g\, U\, 1 = g\, f$ für alle $g \in C(K)$ und da U eine Isometrie ist gilt $\int |g|^2\, d\mu_1 = \int |g|^2|f|^2\, d\mu_2$. Wegen der Eindeutigkeit der Riesz-Darstellung 5.3.4 ist also $\mu_1 = |f|^2\, \mu_2$ mit $|f|^2 \in L^1(\mu_2)$.

Es stellt sich also die Frage, welche Maße μ_1 sich als $f\, \mu_2$ mit $f \in L^1(\mu_2)$ schreiben lassen.

8.33 Theorem von Radon-Nikodym.

Es sei (X, Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum und ν ein $\mathbb{C}$-wertiges Maß auf (X, Ω). Dann sind äquivalent:

1. *$\forall B \in \Omega : (\mu(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0)$;*
2. *$\exists! f \in L^1(X, \Omega, \mu)$: $\nu(B) = \int_B f\, d\mu$ für alle $B \in \Omega$.*

Unter diesen äquivalenten Voraussetzungen heißt ν absolut-stetig bezüglich μ, die Funktion f heißt die Radon-Nikodym-Ableitung, und wird auch mit $\frac{d\nu}{d\mu}$ bezeichnet. Weiters ist $f\, g \in L^1(\mu)$ für alle $g \in L^1(|\nu|)$ und es gilt:

$$\int g\, d\nu = \int g\, \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

Für einen Beweis siehe [10, S505].

Als Spezialfall lernt man z.B. in der Analysis, daß - falls die Ableitung g' von g Riemann-integrierbar ist - für Riemann-Stieltjes Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

ist.

8.34 Proposition.

Zwei positive Maße auf $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger sind genau dann wechselseitig absolut-stetig (wir schreiben dann $\mu_1 \sim \mu_2$), falls die Multiplikations-Operatoren N_{μ_1} auf $L^2(\mu_1)$ und N_{μ_2} auf $L^2(\mu_2)$ unitär äquivalent sind.

Beweis. ($\Leftarrow$) Wir haben in 8.32 gezeigt, daß die unitäre Äquivalenz von N_{μ_1} und N_{μ_2} die wechselseitige absolut-Stetigkeit der Maße μ_1 und μ_2 impliziert.

($\Rightarrow$) Es seien die Maße μ_1 und μ_2 wechselseitig absolut-stetig und $0 \le f := \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \in L^1(\mu_2)$ die Radon-Nikodym Ableitung. Falls $g \in L^1(\mu_1)$, so ist $f\,g \in L^1(\mu_2)$ und $\int f\,g\,d\mu_2 = \int g\,d\mu_1$. Ist also $g \in L^2(\mu_1)$, also $|g|^2 \in L^1(\mu_1)$, so ist $f\,|g|^2 \in L^1(\mu_2)$ und schließlich $\sqrt{f}\,|g| \in L^2(\mu_2)$ und $\|\sqrt{f}g\|_2 = \|g\|_2$, d.h. die Abbildung $U : L^2(\mu_1) \to L^2(\mu_2)$, $g \mapsto \sqrt{f}\,g$ ist eine Isometrie. Da $\frac{d\mu_1}{d\mu_2} \cdot \frac{d\mu_2}{d\mu_1} = 1$ ist, ist Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{f}}$ die Inverse zu U. Für $g \in L^2(\mu_2)$ ist

$$U\,N_{\mu_1}\,U^{-1}\,g = \sqrt{f}\cdot \mathrm{id}\cdot\frac{1}{\sqrt{f}}\cdot g = \mathrm{id}\cdot g = N_{\mu_2}g$$

und somit gilt $U\,N_{\mu_1}\,U^{-1} = N_{\mu_2}$. □

8.35 Theorem. Diagonalisierung normaler Operatoren.

Es sei N ein normaler Operator auf H. Dann existiert ein Maßraum (X,Ω,μ) und eine Funktion $f \in L^\infty(X,\Omega,\mu)$, so daß N unitär äquivalent zu dem Multiplikations-Operator mit f auf $L^2(X,\Omega,\mu)$ ist. Ist H separabel, so ist das Maß μ σ-endlich.

Beweis.

8.30 $\Rightarrow \exists H_i < H,$ abgeschlossen, invariant :

$$H \cong \bigoplus_i H_i \text{ und } N \sim \bigoplus_i N_i \text{ mit } N_i := N|_{H_i} \text{ zyklisch}$$

8.31 $\Rightarrow \exists \mu_i$ Maß auf $X_i := \sigma(N_i) \subseteq \sigma(N) : N_i \sim N_{\mu_i}$.

$$\text{Sei } X := \bigsqcup X_i,\ \mathcal{B} := \{B \subseteq X : B \cap X_i \in \mathcal{B}(X_i)\},\ \mu(B) := \sum_i \mu_i(B \cap X_i)$$

$$U : L^2(X,\mathcal{B},\mu) \to \bigoplus_i L^2(\mu_i),\ g \mapsto \bigsqcup g|_{X_i} \text{ ist ein isometr. Iso.}$$

$$f := \bigsqcup_i \mathrm{id}_{X_i},\ \text{d.h.} f|_{X_i} := \mathrm{id}\,.$$

$$\Rightarrow f^{-1}(W) \cap X_i = W \cap X_i \in \mathcal{B}(X_i) \text{ für alle offenen } W \subseteq X \Rightarrow f \text{ ist meßbar}$$

$$f(X) = \bigcup_i X_i \subseteq \sigma(N),\ \text{d.h. } f \text{ ist beschränkt, also } f \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$$

$$\text{und } N \sim \bigoplus_i N_i \sim \bigoplus_i N_{\mu_i} = U M_f U^{-1} \sim M_f.$$

Falls H separabel ist, so haben wir nur abzählbar viele H_i und, wegen $\mu(X_i) \le \|h_i\| = 1$ für einen normierten zyklischen Vektor h_i, ist X somit σ-endlich. □

8.36 Proposition.

Es seien $N_j \in L(H_j)$ normale Operatoren, und $B \in L(H_1, H_2)$ so, daß $B\,N_1 = N_2\,B$. Dann ist der Abschluß von $\operatorname{Bild} B$ N_2-invariant, $(\operatorname{Ker} B)^\perp$ ist N_1-invariant und $N_1|_{(\operatorname{Ker} B)^\perp}$ und $N_2|_{\overline{\operatorname{Bild} B}}$ sind unitär äquivalent.

Beweis. Wie in 7.39.4 zeigen wir die folgenden Punkte:

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rrr, "B"] \arrow[ddd, "N_1"'] & & & H_2 \arrow[ddd, "N_2"] \\
& (\operatorname{Ker} B)^\perp \arrow[ul, hook'] \arrow[r, tail, two heads, "B"] \arrow[d, "N_1|_{(\operatorname{Ker} B)^\perp}"'] & \overline{\operatorname{Bild} B} \arrow[ur, hook] \arrow[d, "N_2|_{\overline{\operatorname{Bild} B}}"] & \\
& (\operatorname{Ker} B)^\perp \arrow[dl, hook] \arrow[r, tail, two heads, "B"'] & \overline{\operatorname{Bild} B} \arrow[dr, hook'] & \\
H_1 \arrow[rrr, "B"] & & & H_2
\end{tikzcd}$$

1. Für $h_1 \in H_1$ ist $N_2 B h_1 = B N_1 h_1 \in \operatorname{Bild} B$. Also ist auch der Abschluß von $\operatorname{Bild} B$ N_2-invariant.

2. Für $h_1 \in \operatorname{Ker} B$ ist $B N_1 h_1 = N_2 B h_1 = N_2 0 = 0$, also ist $\operatorname{Ker} B$ N_1-invariant und nach dem Fugledge-Putnam Theorem 8.14 auch N_1^*-invariant, damit ist aber $(\operatorname{Ker} B)^\perp$ ebenfalls N_1-invariant.

3. Da $B((\operatorname{Ker} B)^\perp) \subseteq \overline{\operatorname{Bild} B}$ können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß $\operatorname{Ker} B = \{0\}$ und daß $\operatorname{Bild} B$ dicht liegt. Es sei $B = U\,|B|$ die Polarzerlegung 7.24 von B mit dem positiven Operator $|B| = \sqrt{B^* B}$. Es gilt $\operatorname{Bild} U = \overline{\operatorname{Bild} B} = H_2$ sowie $(\operatorname{Bild} |B|)^\perp = \operatorname{Ker} |B| = \operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} B = \{0\}$ und somit ist $\operatorname{Bild} |B|$ dicht in H_1 und $U : H_1 \to H_2$ eine surjektive Isometrie.
Weiters gilt:

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, tail, two heads, "B"] \arrow[dr, "|B|"'] \arrow[ddd, "N_1"'] & & H_2 \arrow[ddd, "N_2"] \\
& H_1 \arrow[ur, "U"'] \arrow[d, "N_1"] & \\
& H_1 \arrow[dr, "U"] & \\
H_1 \arrow[ur, "|B|"] \arrow[rr, tail, two heads, "B"'] & & H_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
N_2\,B = B\,N_1 &\Rightarrow B^*\,N_2^* = N_1^*\,B^* \overset{8.14}{\Longrightarrow} B^*\,N_2 = N_1\,B^* \\
&\Rightarrow N_1\,B^*\,B = B^*\,N_2\,B = B^*\,B\,N_1
\end{aligned}$$

Also ist $|B|^2 = B^* B \in \{N_1\}^k$ und nach 8.15 somit $|B| = \sqrt{|B|^2} \in \{B^* B\}^{kk} \subseteq (\{N_1\}^k)^{kk} = \{N_1\}^k$. Folglich gilt

$$N_2\,U\,|B| = N_2\,B = B\,N_1 = U\,|B|\,N_1 = U\,N_1\,|B|,$$

d.h. $N_2\,U = U\,N_1$ auf dem dichten Bild von $|B|$, also überall. □

8.37 Folgerung.

Ähnliche normale Operatoren sind unitär äquivalent. □

Dabei heißen zwei Operatoren N_1 und N_2 ähnlich, falls es eine invertierbare beschränkte lineare Abbildung B gibt mit $N_2\,B = B\,N_1$.

8.38 Folgerung.

Es sei A eine Teil-C^*-Algebra von $L(H)$ die zusätzlich abgeschlossen ist bezüglich der SOT. Dann ist A der Norm-Abschluß des Teilraums der von den orthogonal-Projektionen in A erzeugt wird.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß sich jedes $a \in A$ in der Operatornorm durch linear-Kombinationen von orthogonal-Projektionen P aus A approximieren läßt. Da A eine C^*-Algebra ist, sind mit $a \in A$ auch die Hermite'schen Operatoren $\mathfrak{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + a^*)$ und $\mathfrak{Im}(a) = \frac{1}{2i}(a - a^*)$ in A. Also genügt es Hermite'sche Elemente

$a \in A$ zu approximieren. Nach 8.25 konvergieren die Riemann-Stieltjes-Summen $\sum_j t_{j-1}(p_{t_j} - p_{t_{j-1}})$ gegen a, wobei $p_t := P((-\infty, t))$ ist. Wir müssen also nur zeigen, daß die orthogonal-Projektion $p_t \in A$ ist. Es ist die charakteristische Funktion $\chi_{(-\infty,t)}$ ein punktweiser Grenzwert einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen $f_n \in C(\mathbb{R})$. Also konvergiert $A \supseteq C^*(N) \ni f_n(N) \to \chi_{(-\infty,t)}(N) = p_t$ nach dem Satz über dominierte Konvergenz in der SOT, und somit ist $p_t \in A$. □

Kommutanten und von Neumann Algebren

Unser Ziel ist es für normale Operator $N \in L(H)$ auf Hilbert-Räumen H mit Spektral-Maß P, den Kern und das Bild des Funktionenkalküls

$$\rho_N : \mathrm{Borel}_b(\sigma(N), \mathbb{C}) \to \{N\}^{kk} \subseteq L(H), \quad f \mapsto f(N) := \int_{\sigma(N)} f\, dP$$

zu bestimmen um nach Herausfaktorisieren des Kernes eine treue Darstellung (Funktionenkalkül) zu erhalten. Da der Funktionalkalkül auch bezüglich der WOT stetig ist, sollten wir diese Topologie genauer untersuchen.

8.39 Lemma. Bzgl. Operatortopologien stetige Funktionale.

Es sei $\ell : L(H) \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Dann sind äquivalent:

1. *Das Funktional ℓ ist SOT-stetig;*
2. *Das Funktional ℓ ist WOT-stetig;*
3. *Es gibt endlich viele h_j und k_j in H mit $\ell(T) = \sum_j \langle T h_j, k_j \rangle$.*

Beweis. (1 $\Leftarrow$ 2 $\Leftarrow$ 3) ist trivial.

(1 $\Rightarrow$ 3) Sei also ℓ bezüglich SOT stetig. Dann existieren endlich viele h_j mit $|\ell(T)| \leq \sum_{j=1}^n \|T h_j\|$ für alle $T \in L(H)$. Wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung [18, 6.2.1] ist

$$\sum_{j=1}^n \|T h_j\| = \sum_{j=1}^n 1 \cdot \|T h_j\| \leq \sqrt{n} \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \|T h_j\|^2 \Big)^{1/2} = \Big(\sum_{j=1}^n \|T(\sqrt{n}\, h_j)\|^2 \Big)^{1/2}.$$

Ersetzt man h_j durch $\sqrt{n}\, h_j$, dann gilt für die Seminorm

$$p(T) := \Big(\sum_{j=1}^n \|T h_j\|^2 \Big)^{1/2},$$

daß $|\ell(T)| \leq p(T)$.

$$\begin{tikzcd}
L(H) \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "\ell"'] & H_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, "\ell_0"] & \bigoplus^n H \arrow[dl, dotted, "\tilde{\ell}_0"] \\
 & \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Es sei die lineare Abbildung $\pi : L(H) \to \bigoplus^n H$ gegeben durch $\pi(T) := \bigoplus_j T h_j$ und H_0 ihr Bild, dann ist $p(T) = \|\pi(T)\|$. Wegen der Implikationen $\pi(T) = 0 \Rightarrow 0 = p(T) \geq |\ell(T)| \Rightarrow \ell(T) = 0$ faktorisiert ℓ über π zu einen linearen Funktional $\ell_0 : H_0 \to \mathbb{C}$ und es gilt $|\ell_0(\pi(T))| = |\ell(T)| \leq p(T) = \|\pi(T)\|$, also ist ℓ_0 nach 5.1.5 zu einem stetigen linearen Funktional auf $\bigoplus^n H$ erweiterbar und es gibt einen Vektor $\oplus_j k_j$ im Hilbert-Raum $\bigoplus^n H$ mit

$$\ell(T) = \ell_0(\pi(T)) = \tilde{\ell}_0(\pi(T)) = \langle \oplus_j T h_j, \oplus_j k_j \rangle = \sum_j \langle T h_j, k_j \rangle. \quad \square$$

8.40 Folgerung. Abschluß bzgl. Operatortopologien.

Es sei A eine konvexe Teilmenge von $L(H)$, dann stimmt der WOT-Abschluß mit dem SOT-Abschluß von A überein.

Beweis. 8.39 und 5.4.8. $\square$

8.41 Definition.

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\Delta^n : L(H) \to L(\bigoplus^n H)$ den C^*-Algebra-Homomorphismus

$$\Delta^n : T \mapsto \bigoplus^n T(: \oplus_{j=1}^n h_j \mapsto \oplus_{j=1}^n T h_j).$$

Lemma.

Es sei A eine Teilalgebra mit 1 von $L(H)$. Dann ist der SOT-Abschluß von A gegeben durch all jene $T \in L(H)$, so daß für jedes endliche n jeder abgeschlossene $\Delta^n(A)$-invariante Teilraum von $\bigoplus_{j=1}^n H$ auch $\Delta^n T$-invariant ist.

Beweis. ($\subseteq$) Sei $T \in L(H)$ ein Operator im SOT-Abschluß von A. Dann existiert ein Netz $T_i \in A$, welches punktweise gegen T konvergiert. Sei nun E ein abgeschlossener $\Delta^n(A)$-invarianter Teilraum von $\bigoplus_{j=1}^n H$. Dieser ist dann insbesondere $\Delta^n T_i$-invariant und damit auch $\Delta^n T$-invariant.

($\supseteq$) Es erfülle $T \in L(H)$ die Bedingung über die invarianten Teilräume. Es seien $h_j \in H$ und $\varepsilon > 0$. Wir müssen die Existenz eines $S \in A$ zeigen, mit $\|(T - S)h_j\| < \varepsilon$ für $j = 1, \dots, n$. Sei dazu E der Abschluß des Teilraums $\Delta^n(A)(\oplus_j h_j) \subseteq \bigoplus_{j=1}^n H$. Da A eine Algebra ist, ist E ein $\Delta^n(A)$-invarianter Teilraum, also nach Voraussetzung auch $\Delta^n T$-invariant. Wegen $1 \in A$ ist $\oplus_j h_j \in E$ und somit $\oplus_j T h_j = (\Delta^n T)(\oplus_j h_j) \in E$ und, da $\Delta^n(A)(\oplus_j h_j)$ dicht liegt in E, existiert ein $S \in A$ mit $\sum_j \|(T - S)h_j\|^2 < \varepsilon^2$. $\square$

8.42 Bemerkung.

Für $A \subseteq L(H)$ ist die Kommutante A^k SOT-abgeschlossen wegen dem Lemma in 8.9, siehe 6.31.

Falls A bezüglich $*$ abgeschlossen ist, so ist A^k eine C^*-Algebra:
Wir müssen dafür nur die $*$-Abgeschlossenheit von A^k beweisen. Sei $b \in A^k$ und $a \in A$. Wegen $a^* \in A$ ist $b^* a = (a^* b)^* = (b a^*)^* = a b^*$, also ist $b^* \in A^k$.

Weiters ist eine $*$-geschlossene Teilmenge A genau dann eine maximal Abel'sch Teilmenge (oder auch C^*-Algebra), wenn $A = A^k$ gilt:
($\Leftarrow$) Sei $A \subseteq B$ mit Abel'schen B. Dann ist $B \subseteq B^k \subseteq A^k = A$, also A maximal.
($\Rightarrow$) Es sei A Abel'sch, also $A \subseteq A^k$. Da A bzgl. $*$ abgeschlossen ist, ist A^k eine C^*-Algebra und es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{Re}(A^k) \subseteq A$. Sei dazu $x \in A^k$ Hermite'sch und A_x die von A und x erzeugte C^*-Algebra. Wegen $x \in A^k$ ist diese Abelsch, und wegen wegen der Maximalität somit $x \in A_x = A$.

8.43 Lemma.

Es sei $A \subseteq L(H)$. Dann gilt

$$A^{kk} = (\Delta^n)^{-1}((\Delta^n A)^{kk})$$

Beweis. Es gilt:

$$t = (t_{i,j})_{i,j} \in (\Delta^n A)^k \Leftrightarrow \forall a \in A \forall i, j : t_{i,j}\, a = a\, t_{i,j} \Leftrightarrow \forall i, j : t_{i,j} \in A^k,$$

denn

$$\begin{pmatrix} t_{1,1} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{1,1}\,a & \dots & t_{1,n}\,a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1}\,a & \dots & t_{n,n}\,a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{1,1} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,t_{1,1} & \dots & a\,t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a\,t_{n,1} & \dots & a\,t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \Delta^n a \in (\Delta^n A)^{kk} &\Leftrightarrow \forall t \in (\Delta^n A)^k : t\,\Delta^n(a) = \Delta^n(a)\,t \Leftrightarrow \forall t_{i,j} \in A^k : t_{i,j}\,a = a\,t_{i,j} \\ &\Leftrightarrow a \in A^{kk}. \quad \square \end{aligned}$$

8.44 Doppel-Kommutanten Theorem, von Neumann 1929.

Es sei A eine Teil-C^*-Algebra von $L(H)$, dann ist A^{kk} der Abschluß von A bezüglich der SOT oder auch der WOT, d.h.

$$A^{kk} = \overline{A}^{SOT} = \overline{A}^{WOT}.$$

Beweis.

$(\subseteq)$

$$\begin{aligned} T \in A^{kk} &\overset{\boxed{8.43}}{\Leftrightarrow} \Delta^n T \in (\Delta^n A)^{kk} \\ &:\Leftrightarrow \Delta^n T\,P = P\,\Delta^n T \text{ für alle } P \in (\Delta^n A)^k \\ &\Rightarrow \Delta^n T\,P = P\,\Delta^n T \text{ für alle ortho-Projektionen } P \in (\Delta^n A)^k \\ &\overset{\boxed{7.39.4}}{\Leftrightarrow} \text{Jeder abgeschlossene } \Delta^n A\text{-invariante Teilraum ist } \Delta^n T\text{-invariant} \\ &\overset{\boxed{8.41}}{\Leftrightarrow} T \in \overline{A}^{SOT} \overset{\boxed{8.40}}{=} \overline{A}^{WOT} \end{aligned}$$

$(\supseteq)$ Als Kommutante ist $A^{kk} \supseteq A$ abgeschlossen bezüglich SOT und nach $\boxed{8.40}$ auch bezüglich WOT, also ist $\overline{A}^{WOT} = \overline{A}^{SOT} \subseteq A^{kk}$. $\square$

8.45 Definition.

Unter einer VON NEUMANN ALGEBRA A in $L(H)$ versteht man eine Teil-C^*-Algebra, mit $A^{kk} = A$, d.h. sie ist abgeschlossen bezüglich der SOT (oder auch der WOT).

Es ist folglich $\{N\}^{kk}$ die kleinste (Abel'sche) von Neumann Algebra, die den normalen Operator N enthält. Dies ist nach $\boxed{8.44}$ der WOT-Abschluß von $C^*(N)$ oder auch jener von $\{p(N, N^*) : p \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}$, da dies dicht in $C^*(N)$ liegt.

8.46 Proposition.

Es sei (X, Ω, μ) ein σ-endliches Maß und

$$A_\mu := \{M_f : f \in L^\infty(\mu)\} \subseteq L(L^2(\mu)),$$

die von den Multiplikations-Operatoren erzeugte Teilalgebra. Dann ist $A_\mu = {A_\mu}^k$, also eine Abelsche von-Neumann-Algebra in $L(L^2(\mu))$.

Falls μ ein endliches Maß ist, so ist die Darstellung $f \mapsto M_f$, $L^\infty(\mu) \to A_\mu$ ein Homöomorphismus bzgl. der schwachen Topologie $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ und der WOT auf A_μ.

Es sei μ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{C}$ mit kompakten Träger. Dann ist $\{N_\mu\}^k = {A_\mu}^k$ und somit $\{N_\mu\}^{kk} = A_\mu$.

$$L^\infty(\mu) \xrightarrow[\cong]{M} A_\mu = \{N_\mu\}^{kk} \hookrightarrow L(L^2(\mu))$$

Beweis. ($A_\mu = A_\mu^k$) Da A_μ Abelsch ist, ist $A_\mu \subseteq A_\mu^k$. Sei umgekehrt $a \in A_\mu^k$. Wir müssen zeigen, daß $a = M_f$ ist für ein $f \in L^\infty(\mu)$. O.B.d.A. sei $a \neq 0$.

Sei vorerst $\mu(X) < \infty$. Dann ist $1 \in L^2(\mu)$. Es ist $f := a(1) \in L^2(\mu)$. Für $g \in L^\infty(\mu) \subseteq L^2(\mu)$ gilt $a(g) = a(M_g 1) = M_g(a1) = M_g f = g\,f$. Also ist $\|f\,g\|_2 = \|a(g)\|_2 \leq \|a\|\,\|g\|_2$. Es sei $X_0 := \{x \in X : |f(x)| \geq 2\|a\|\}$. Das vorige Argument für $g := \chi_{X_0}$ liefert

$$\|a\|^2\mu(X_0) = \|a\|^2\,\|g\|^2 \geq \|a(g)\|^2 = \|f\,g\|^2 = \int_{X_0} |f|^2\,d\mu \geq 4\,\|a\|^2\,\mu(X_0).$$

Also ist $\mu(X_0) = 0$, d.h. $[f] \in L^\infty(\mu)$. Da $a = M_f$ auf dem dichten Teilraum $L^\infty(\mu)$ von $L^2(\mu)$ gilt, ist $a = M_f$ auf ganz $L^2(\mu)$.

Sei nun $X = \bigsqcup_n X_n$ mit $\mu(X_n) < \infty$. Für B mit $\mu(B) < \infty$ ist $L^2(\mu|_B) \cong \{f \in L^2(\mu) : f = 0$ außerhalb $B\}$ a-invariant, denn für $f \in L^2(\mu|_B)$ ist $a(f) = a(\chi_B f) = \chi_B \cdot a(f) \in L^2(\mu|_B)$ wegen $a \in A_\mu^k$. Es sei a_B die Einschränkung von a auf $L^2(\mu|_B)$. Nach dem ersten Teil existiert ein $f_B \in L^\infty(\mu|_B)$ mit $a_B = M_{f_B}$. Wir schreiben f_n für f_{X_n} und definieren $f := \bigsqcup_n f_n$, d.h. $f|_{X_n} := f_{X_n}$. Dann ist f eine wohldefinierte meßbare Funktion auf X und $\|f_n\|_\infty = \|M_{f_n}\| = \|a_{X_n}\| \leq \|a\|$. Also ist $\|f\|_\infty \leq \|a\|$ und offensichtlich ist $a = M_f$.

Sei nun μ wieder ein endliches Maß.

(Injektivität) Es ist $f \mapsto M_f$ injektiv, da $1 \in L^2(\mu)$.

(Homömorphie) Es sei $f_i \in L^\infty(\mu)$ ein Netz. Dann konvergiert dieses genau dann gegen 0 in der schwachen Topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$, falls für alle $g \in L^1(\mu)$ gilt: $\int f_i\,g\,d\mu \to 0$. Diese g sind genau die Produkte $h_1 \cdot \overline{h_2}$ mit $h_1, h_2 \in L^2(\mu)$, denn nach der Hölderungleichung ist $h_1 \cdot \overline{h_2} \in L^1(\mu)$ und umgekehrt sind $h_2 := \sqrt{|g|}$ und $h_1 := \operatorname{sign}(g)\,h_2$ beide in $L^2(\mu)$. Also ist die Konvergenzaussage äquivalent zu $\langle M_{f_i} h_1, h_2\rangle = \int f_i\,h_1\,\overline{h_2}\,d\mu \to 0$, d.h. zu $M_{f_i} \to 0$ in der WOT auf $L(L^2(\mu))$.

($\{N_\mu\}^k = A_\mu = {A_\mu}^k$) Nach 8.14 ist $\{N_\mu\}^k = \{N_\mu, N_\mu^*\}^k = \{M_p : p \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]\}^k = \{M_f : f \in C(X)\}^k$, da die Menge der Polynome $p \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]$ dicht in $C(X)$ ist. Es ist $f \mapsto f_i\,d\mu(: g \mapsto \int g\,f\,d\mu)$ eine isometrische Einbettung $L^1(\mu) \hookrightarrow C(X)'$ ($|\int g\,f\,d\mu| \leq \|g\|_\infty\,\|f\|_1$ und $\int 1\,f\,d\mu = \|f\|_1$). Somit existiert nach Hahn-Banach zu $f \in L^\infty = (L^1)'$ ein $\Phi \in C(X)''$ mit $\Phi|_{L^1} = f$. Nach 8.11 hat $\delta : C(X) \to \sigma(C(X)'', C(X)')$ dichtes Bild und folglich existiert für $f_1, \dots, f_n \in L^1(\mu)$ und $\varepsilon > 0$ ein $g \in C(X)$ mit $\varepsilon > |(\Phi - \delta(g))(f_i\,d\mu)| = |\int f\,f_i\,d\mu - \int g\,f_i\,d\mu|$, also ist $C(X)$ dicht in $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$. Und da $f \mapsto M_f$ ein Homöomorphismus $\sigma(L^\infty, L^1) \cong (A_\mu, \text{WOT})$ ist, ist $A_\mu^k = \{M_f : f \in L^\infty(\mu)\}^k = \{M_f : f \in C(X)\}^k = \{N_\mu\}^k$. □

Bemerkung.

Wir wollen nun den Funktionen-Kalkül

$$\rho : \operatorname{Borel}_b(\sigma(N)) \to L(H), \quad f \mapsto \int_{\sigma(N)} f\,dP$$

aus 8.15 so modifizieren, daß er eine Bijektion wird. Dazu versuchen wir zuerst ein Borel-Maß μ auf $\sigma(N)$ finden, so daß ρ_N über die Quotientenabbildung π :

$\mathrm{Borel}_b(\sigma(N),\mathbb{C}) \to L^\infty(\mu)$ wie folgt zu einer injektiven Abbildung faktorisiert

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \arrow[rr, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & L^\infty(\mu) \arrow[dl, dotted, hook'] \\ & L(H) & \end{tikzcd}$$

d.h. es müßte $\mathrm{Ker}\,\rho = \mathrm{Ker}\,\pi = \{f : f = 0\ \mu\text{-f.ü.}\}$ sein, und wegen $P = \rho \circ \chi : \mathcal{B}(\sigma(N)) \to \mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \to L(H)$ müßte zumindest

$$\begin{aligned} \{B \in \mathcal{B}(\sigma(N)) : P(B) = 0\} &= \mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Ker}(\rho \circ \chi) = \chi^{-1}(\mathrm{Ker}(\rho)) \\ &= \chi^{-1}(\{f : f = 0\ \mu\text{-f.ü.}\}) \\ &= \{B \in \mathcal{B}(\sigma(N)) : \mu(B) = 0\} \end{aligned}$$

sein. Wir definieren folglich:

8.47 Definition.

Ein SKALAR-WERTIGES SPEKTRAL-MASS für einen normalen Operator N ist ein Maß $\mu \geq 0$ auf $\sigma(N)$, welches auf genau jenen Borel-Mengen verschwindet wo das Spektral-Maß von N es tut.

Eine Möglichkeit skalar-wertige Borel-Maße zu finden ist einen Vektor $h \in H$ zu nehmen und $\mu_h := P_{h,h}$ zu betrachten. Für diese gilt

$$\mu_h(B) := P_{h,h}(B) = \langle P(B)h, h\rangle = \|P(B)h\|^2.$$

Folglich ist μ_h skalar-wertiges Spektral-Maß genau dann, wenn $P(B) = 0$ aus $P(B)h = 0$ für alle $B \in \mathcal{B}(\sigma(N))$ folgt. Dies führt zur Definition:

Es sei $A \subseteq L(H)$. Dann heißt ein $h \in H$ SEPARIERENDER VEKTOR für A, falls $\forall a \in A : ah = 0 \Rightarrow a = 0$ gilt, d.h. falls die Darstellung $A \subseteq L(H)$ auf h injektiv wirkt ($a_1 h = a_2 h \Rightarrow a_1 = a_2$).

Es heißt h SEPARIERENDER VEKTOR für den normalen Operator N, falls h separierend ist für die von N erzeugte von Neumann-Algebra $\{N\}^{kk}$.

8.48 Lemma.

Es sei $h \in H$ ein separierender Vektor für einen normalen Operator N und P dessen Spektral-Maß. Dann ist das Maß $\mu_h := P_{h,h}$ ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N.

Beweis. h separierend für $N :\Leftrightarrow h$ separierend für $\{N\}^{kk} \supseteq \{P(B) : B\}$ (wegen 8.15), also $\forall B \in \mathcal{B}(\sigma(N))$: $(\mu_h(B) = \|P(B)h\|^2 = 0 \Rightarrow P(B) = 0)$, d.h. μ_h ist ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N. □

Zyklische versus separierende Vektoren.

1. Für $A = L(H)$ sind alle $h \neq 0$ zyklische Vektoren, aber kein h ist separierend.
2. Falls $A = \mathbb{C}$ und $\dim H > 1$ dann besitzt A keine zyklische Vektoren, aber jeder $h \neq 0$ ist separierend.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin die Existenz separierender Vektoren zu beweisen.

8.49 Lemma.

Es sei h ein zyklischer Vektor für A. Dann ist h ein separierender Vektor für A^k.

Beweis. $b \in A^k \Rightarrow \operatorname{Ker} b$ ist A-invariant ($ba(\operatorname{Ker} b) = ab(\operatorname{Ker} b) = \{0\}$); $h \in \operatorname{Ker} b \Rightarrow Ah \subseteq \operatorname{Ker} b \Rightarrow \operatorname{Ker} b = H$, da Ah dicht liegt $\Rightarrow b = 0$, d.h. h ist separierend. □

8.50 Folgerung.

Es sei $A \subseteq L(H)$ Abel'sch. Dann ist jeder zyklische Vektor von A auch separierend.

Beweis. Da A Abelsch ist, gilt $A \subseteq A^k$ und weil h separierend für A^k ist nach 8.49, so ist er es auch für die Teilmenge A. □

8.51 Folgerung.

Es sei H separabel. Dann besitzt jede Abelsche Teil-C^*-Algebra von $L(H)$ einen separierenden Vektor.

Beweis. Nach dem Zorn'schen Lemma ist A in einer maximalen Abelschen C^*-Algebra enthalten. Da ein separierender Vektor auch separierend für jede Teilmenge ist, können wir also o.B.d.A. annehmen, daß A maximal Abelsch und somit $A = A^k$ ist nach 8.42.

Nach 7.32 existiert eine orthogonale Zerlegung $H = \bigoplus_n H_n$ in A-invariante Teilräume H_n mit zyklischen Einheits-Vektoren $h_n \in H_n$. Da H separabel ist, ist dabei die Index-Menge abzählbar (also o.B.d.A. $\mathbb{N}$). Es sei $h_\infty := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2^n}} h_n$. Dann ist $\|h_\infty\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = 1$. Es sei P_n die orthogonal-Projektion auf H_n. Da A jedes H_n invariant läßt, ist $P_n \in A^k = A$ nach 7.39.4 und $\overline{Ah_\infty} \supseteq \overline{P_n A h_\infty} = \overline{AP_n h_\infty} = \overline{Ah_n} = H_n$. Also ist $\overline{Ah_\infty} = H$, d.h. h_∞ ein zyklischer Vektor von A und nach 8.50 auch separierend. □

8.52 Folgerung.

Es sei $N \in L(H)$ normal und H separabel, dann existiert ein separierender Vektor für N.

Beweis. Da die Menge $\{N\}^{kk}$ nach 6.31 Abelsch ist, besitzt sie nach 8.51 einen separierenden Vektor h. □

Diese Folgerung ist der Grund, daß wir von nun an voraussetzen werden, daß **alle vorkommenden Hilbert-Räume separabel sind**.

8.53 Lokalisierung des Funktionen-Kalküls.

Es sei also H separabel und $N \in L(H)$ normal. Für $h \in H$ sei $\mu_h := P_{h,h}$ und H_h der Abschluß von $\{N\}^{kk}h$ in H. Dieser ist offensichtlich N-invariant ($T \in \{N\}^{kk}$: $NTS = NST = SNT$ für alle $S \in \{N\}^k$) und somit ist die Einschränkung von N ein Operator $N_h := N|_{H_h} \in L(H_h)$.

$$\begin{tikzcd}
\{N\}^{kk}h \arrow[r, hook, two heads] \arrow[d, dotted] & H_h \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, "N_h"] & H \arrow[d, "N"] \\
\{N\}^{kk}h \arrow[r, hook, two heads] & H_h \arrow[r, hook] & H
\end{tikzcd}$$

Lemma.

Wir haben folgendes kommutatives Diagramm von $*$-Homomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Borel}_b(\sigma(N_h)) \arrow[r, two heads, "\rho_{N_h}"] \arrow[d, "\pi_h"] & \{N_h\}^{kk} \arrow[r, hook] \arrow[d, tail, "\mathrm{konj}_{U_h}"', "\cong"] & L(H_h) \arrow[d, tail, "\mathrm{konj}_{U_h}", "8.31{,}\cong"'] \\
L^\infty(\mu_h) \arrow[r, tail, two heads, "M", "\cong{,}\ 8.46"'] & \{N_{\mu_h}\}^{kk} \arrow[r, hook] & L(L^2(\mu_h))
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $U_h : H_h \to L^2(\mu_h)$ die eindeutige bijektive Isometrie, die N_h und N_{μ_h} miteinander vertauscht und h auf 1 abbildet. Weiters ist $\mathrm{konj}_{U_h} : a \mapsto U_h\, a\, U_h^{-1}$. Die mit $\twoheadrightarrow$ bezeichneten Abbildungen sind surjektiv und stetig und jene mit $\cong$ sogar Homömorphismen bzgl. $\sigma(\mathrm{Borel}_b, M)$, $\sigma(L^\infty, L^1)$ und den WOT'en.

Beweis. (h ist zyklischer Vektor für N_h) Da $\{N\}^{kk}$ nach 8.44 der Abschluß von $C^*(N)$ in der SOT ist, ist $H_h := \overline{\{N\}^{kk}h} \subseteq \overline{C^*(N)h}$. Offensichtlich ist $C^*(N)h \subseteq \overline{C^*(N_h)h}$, denn für $a \in C^*(N)$ existieren Polynome $p_i \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$ mit $p_i(N, N^*) \to a$ und somit ist $ah = \lim_i p_i(N, N^*)h = \lim p_i(N_h, N_h^*)h \in \overline{C^*(N_h)h}$, also ist $C^*(N_h)h$ dicht in H_h, d.h. h ist ein zyklischer Vektor der Einschränkung N_h.

(Rechte Pfeil ist Homöomorphismus) Nach 8.31 ist μ_h ein Maß auf $\sigma(N_h)$, sodaß N_h unitär äquivalent zu N_{μ_h} auf $L^2(\mu_h)$ ist, wobei die bijektive Isometrie $U = U_h : H_h \to L^2(\mu_h)$ durch $U_h(h) := 1$ eindeutig bestimmt ist. Konjugation $a \mapsto U \circ a \circ U^{-1}$ liefert einen $*$-Ismorphismus $L(H_h) \to L(L^2(\mu_h))$, welcher also N_h auf N_{μ_h} und damit $\{N_h\}^{kk}$ auf $\{N_{\mu_h}\}^{kk}$-abbildet. Dieser ist offensichtlich auch ein Homömorphismus bzgl. der WOT'en.

(Untere Pfeil ist Homömorphismus) Nach 8.46 ist $f \mapsto M_f$ eine surjektive Isometrie $L^\infty \to A_\mu = \{N_{\mu_h}\}^{kk}$ und ein Homömomorphismus bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$ und der WOT.

(Kommutativität) Es ist $\pi_h : f \mapsto [f]$ stetig bzgl. $\sigma(\mathrm{Borel}_b, M(\sigma(N_h)))$ und $\sigma(L^\infty, L^1)$, denn jedes $g \in L^1$ definiert ein Maß $f \mapsto \int f\, g\, d\mu_h$. Somit besitzen ρ_{N_h} und $\mathrm{konj}_{U_h}^{-1} \circ M \circ \pi_h$ beide die charakterisierenden Eigenschaften des Funktionen-Kalküls 8.15, stimmen also überein. $\square$

8.54 Lemma.

Es sei $e \in H$ so, daß μ_e ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N ist. Die bezüglich μ_e absolut-stetigen Maße μ sind genau die Maße μ_h für $h \in H$.

Beweis. ($\Leftarrow$) Aus $\mu_e(B) = 0$ folgt $P(B) = 0$, da μ_e ein skalar-wertiges Spektralmaß ist, und somit ist auch $\mu_h(B) = \langle P(B)h, h\rangle = \|P(B)h\|^2 = 0$.

($\Rightarrow$) Nach dem Satz 8.33 von Radon-Nikodym existiert $f := \sqrt{\frac{d\mu}{d\mu_e}} \in L^2(\mu_e)$. Es sei $h := U_e^{-1} f \in H_e$. Für jede Borel-Menge B gilt:

$$\mu(B) = \int \chi_B\, d\mu \overset{8.33}{=\!=} \int \chi_B\, f^2\, d\mu_e = \langle M_{\chi_B} f, f\rangle \overset{8.31}{=\!=} \langle U_e^{-1} M_{\chi_B} f, U_e^{-1} f\rangle$$
$$\overset{8.53}{=\!=} \langle \rho(\chi_B) U_e^{-1} f, U_e^{-1} f\rangle = \langle P(B)h, h\rangle = \mu_h(B). \quad \square$$

8.55 Lemma.

Wir haben folgendes kommutatives Diagram bestehend aus $*$-Homomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \arrow[r, two heads, "\rho_N"] \arrow[d, "\mathrm{inkl}^*"'] & \{N\}^{kk} \arrow[d, dotted, "\rho_h"'] \\
\mathrm{Borel}_b(\sigma(N_h)) \arrow[r, two heads, "8.53", "\rho_{N_h}"'] & \{N_h\}^{kk}
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $a \mapsto \rho_h(a) := a|_{H_h}$ WOT-stetig und alle Abbildungen sind surjektiv.

Beweis. ($\rho_h : \{N\}^{kk} \to L(H_h)$ ist wohldefiniert) Dies ist offensichtlich, da $H_h = \overline{\{N\}^{kk}h}$ offensichtlich $\{N\}^{kk}$-invariant ist.

(ρ_h ist WOT-stetig) Falls $a_i \to a_\infty$ in $\{N\}^{kk}$ bezüglich der WOT, dann gilt $\langle a_i v, w\rangle \to \langle a_\infty v, w\rangle$ für alle $v, w \in H$ also insbesonders für jene in $H_h \subseteq H$, d.h. $\rho_h(a_i) = a_i|_{H_h} \to a_\infty|_{H_h} = \rho_h(a_\infty)$ in $L(H_h)$ bzgl. der WOT.

($\rho_h(\{N\}^{kk}) \subseteq \{N_h\}^{kk}$) Nach 8.45 ist $\{N\}^{kk} = \overline{\{p(N,N^*) : p \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]\}}^{WOT}$, d.h. zu $a \in \{N\}^{kk}$ existiert ein Netz solcher Polynome p_i mit $p_i(N,N^*) \to a$ bzgl. WOT. Nach dem vorigen Punkt gilt $\{N_h\}^{kk} \ni p_i(N_h, N_h^*) = \rho_h(p_i(N,N^*)) \to \rho_h(a)$ bzgl. WOT, also ist $\rho_h(a) \in \{N_h\}^{kk}$ nach dem Doppel-Kommutanten Theorem 8.44.

(Diagramm kommutiert) Es sei $f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))$. Nach 8.11 (vgl. mit dem Beweis von 8.13) existiert ein Netz von Polynomen $p_i \in \mathbb{C}[z,\overline{z}]$ mit $\int p_i\, d\mu \to \int f\, d\mu$ für alle $\mu \in M(\sigma(N))$. Da $\sigma(N_h) \subseteq \sigma(N)$ gilt das auch für alle $\mu \in M(\sigma(N_h))$. Nach 8.15 konvergiert sowohl $p_i(N,N^*) \to f(N)$ als auch $p_i(N_h,N_h^*) \to f(N_h)$ bezüglich der WOT. Wegen $p_i(N_h,N_h^*) = \rho_h(p_i(N,N^*)) \to \rho_h(f(N))$ bzgl. der WOT gilt somit $\rho_h(f(N)) = f(N_h)$.

(Surjektivität unten) Gilt nach 8.53.

(Surjektivität rechts) Wegen der Kommutativität des Diagramms und weil der Weg über die linke untere Ecke surjektiv ist, ist auch ρ_h surjektiv.

(Surjektivität oben) Es sei $A := \{f(N) : f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))\}$ das Bild. Dann ist A nach 8.15 und 7.28 eine C^*-Algebra mit $C^*(N) \subseteq A \subseteq \{N\}^{kk}$. Wegen 8.45 genügt es zu zeigen, daß A WOT-abgeschlossen ist. Sei dazu $f_i \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))$ ein Netz mit $f_i(N) \to a$ in der WOT. Wegen 8.45 ist $a \in \{N\}^{kk}$. Sei $h \in H$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von ρ_h gilt $f_i(N_h) \to a|_{H_h} \in \{N_h\}^{kk}$ in der WOT. Wegen der Surjektivität von ρ_{N_h} existiert ein $f_h \in \mathrm{Borel}_b(\mathbb{C})$ mit $a|_{H_h} = f_h(N_h)$. Aus $f_i(N_h) \to a|_{H_h} = f_h(N_h)$ in der WOT, folgt nach 8.46 daß $f_i \to f_h$ bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ auf $L^\infty(\mu_h)$.
Wegen der Folgerung 8.52 existiert ein separierender Vektor e für $\{N\}^{kk}$ und nach 8.48 ist μ_e ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N. Da μ_h absolut-stetig ist bezüglich μ_e nach 8.54 folgt $\exists \frac{d\mu_h}{d\mu_e} \in L^1(\mu_e)$. Für jede Borelmenge B gilt somit $\int_B f_i\, d\mu_h = \int_B f_i \frac{d\mu_h}{d\mu_e}\, d\mu_e \to \int_B f_e \frac{d\mu_h}{d\mu_e}\, d\mu_e = \int_B f_e\, d\mu_h$ und andererseits $\int_B f_i\, d\mu_h \to \int_B f_h\, d\mu_h$. Somit ist $0 = \int_B (f_e - f_h)\, d\mu_h$, d.h. $f_e = f_h$ μ_h-f.ü.. Da nach 8.54 für $g \in H_h$ das Maß μ_g absolut-stetig bezüglich μ_h ist, gilt $\langle f_h(N_h)g, g\rangle = \langle f_h(N)g, g\rangle = \int f_h\, d\mu_g = \int f_e\, d\mu_g = \langle f_e(N_h)g, g\rangle$, d.h. $f_h(N_h) = f_e(N_h)$ nach 7.6.3 und insbesonders ist $ah = a|_{H_h} h = f_h(N_h)h = f_e(N_h)h = f_e(N)h$. Da h beliebig war gilt $a = f_e(N)$. □

8.56 Lemma.

Es ist $\rho_N(f) \in \mathrm{Ker}(\rho_h) \Leftrightarrow f = 0$ μ_h-f.ü., d.h. $\rho_N|_{\mathrm{Ker}(\pi)} : \mathrm{Ker}(\pi) \to \mathrm{Ker}(\rho_h)$ ist wohldefiniert und surjektiv.

Beweis. Sei $a \in \{N\}^{kk}$, d.h. $a = f(N) = \rho_N(f)$ für ein $f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))$ nach $\boxed{8.55}$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
& a = \rho_N(f) \in \mathrm{Ker}(\rho_h) \\
\Leftrightarrow\ & 0 = \rho_h(\rho_N(f)) \overset{\boxed{8.55}}{=\!=} \rho_{N_h}(f|_{\sigma(N_h)}) \\
\overset{\boxed{8.53}}{\Longleftrightarrow}\ & f|_{\sigma(N_h)} = 0 \ \mu_h\text{-f.ü.} \\
\overset{\boxed{8.28}}{\Longleftrightarrow}\ & f = 0 \ \mu_h\text{-f.ü., da } \mathrm{Träg}(\mu_h) = \sigma(N_h).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\ker(\pi) \arrow[r, dotted, two heads] \arrow[d, hook] & \ker(\rho_h) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \arrow[r, two heads, "\rho_N", "\boxed{8.55}"'] \arrow[d, "\pi=\pi_h\circ\mathrm{inkl}^*"'] \arrow[ur, phantom, "\text{pullback}"] & \{N\}^{kk} \arrow[d, "\rho_h"] \\
L^\infty(\mu_h) \arrow[r, tail, two heads, "\cong", "\boxed{8.53}"'] & \{N_h\}^{kk}
\end{tikzcd}
$$

□

8.57 Proposition.

Es sei N normal und $e \in H$. Dann sind äquivalent:

1. *Die Abbildung $\rho_e : \{N\}^{kk} \to \{N_e\}^{kk}$ ist ein $*$-Isomorphismus (oder zumindest injektiv);*
2. *Für $f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))$ gilt: $f(N) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ_e-f.ü..*
3. *e ist separierend für $\{f(N) : f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))\} = \{N\}^{kk}$;*
4. *$\mu_e := P_{e,e}$ ist ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N;*

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$) $f(N) = 0 \overset{(\boxed{1})}{\Longleftrightarrow} \rho_e(f(N)) = 0 \overset{\boxed{8.56}}{\Longleftrightarrow} f = 0$ μ_e-f.ü..

($\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$) Es sei $a \in \{N\}^{kk}$ und $ae = 0$. Nach $\boxed{8.55}$ existiert $f \in \mathrm{Borel}_b(\sigma(N))$ mit $f(N) = a$. Also ist $0 = \|ae\|^2 = \langle a^*ae, e\rangle = \langle \rho_N(|f|^2)\, e, e\rangle = \langle \int |f|^2 dP\, e, e\rangle = \int |f|^2\, d\mu_e$. Und somit $f = 0$ μ_e-f.ü. und damit $0 = f(N) = a$ nach ($\boxed{2}$).

($\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$) ist $\boxed{8.48}$.

($\boxed{4} \Rightarrow \boxed{1}$) Nach $\boxed{8.55}$ ist ρ_e ein surjektiver $*$-Morphismus. Nach $\boxed{8.56}$ ist $\mathrm{Ker}\,\rho_e = \{f(N) : f = 0\ \mu_e\text{-f.ü.}\}$, also ist ρ_e auch injektiv, denn falls $f = 0$ außerhalb einer Borel-Menge B mit $\mu_e(B) = 0$, also $P(B) = 0$ nach ($\boxed{4}$), so ist $f(N) = \int_B f\, dP = 0$. □

Zusammenfassung.

$$
\begin{tikzcd}
\ker(\pi) \arrow[r, two heads, "\boxed{8.56}"'] \arrow[d, hook] & \ker(\rho_e) \arrow[d, hook] & \\
\mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \arrow[r, two heads, "\rho_N", "\boxed{8.55}"'] \arrow[d, "\mathrm{inkl}^*"'] & \{N\}^{kk} \arrow[r, hook] \arrow[d, tail, two heads, dotted, "\rho_e"', "{\cong, \boxed{8.57}}"] & L(H) \\
\mathrm{Borel}_b(\sigma(N_e)) \arrow[r, two heads, "\rho_{N_e}", "\boxed{8.53}"'] \arrow[d, "\pi_e"'] & \{N_e\}^{kk} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{konj}_{U_e}"] & L(H_e) \arrow[d, "{\boxed{8.31}, \cong}"', "\mathrm{konj}_{U_e}"] \\
L^\infty(\mu_e) \arrow[r, tail, two heads, "M", "{\cong, \boxed{8.46}}"'] & \{N_{\mu_e}\}^{kk} \arrow[r, hook] & L(L^2(\mu_e))
\end{tikzcd}
$$

8.58 Theorem. Funktionen-Kalkül.

Es sei N ein normaler Operator auf einem separablen Hilbert-Raum H. Dann existiert ein bis auf Äquivalenz eindeutiges skalar-wertiges Spektral-Maß μ für N.

Der Funktionen-Kalkül ρ_N aus 8.15 faktorisiert über $\pi : \mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \twoheadrightarrow L^\infty(\mu)$ zu einen wohldefinierten (isometrischen) $*$-Isomorphismus $\rho : L^\infty(\mu) \to \{N\}^{kk}$, der auch ein Homöomorphismus von der Topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ auf die WOT ist.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \arrow[r, "\rho_N"'] \arrow[d, "\pi"'] & L(H) \\
L^\infty(\mu) \arrow[r, dotted, "\rho", "\cong"'] & \{N\}^{kk} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Beweis. Offensichtlich sind alle skalar-wertigen Spektralmaße äquivalent, d.h. wechselseitig absolut stetig, denn sie haben die nach Definition die selben 0-Mengen.

Der Funktionenkalkül $\mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \to \{N\}^{kk}$ kann nach obigem wegen 8.57 ($1 \Leftarrow 3$) als Zusammensetzung

$$\mathrm{Borel}_b(\sigma(N)) \xrightarrow{\pi} L^\infty(\mu_e) \overset{\boxed{8.46}}{\cong} \{N_{\mu_e}\}^{kk} \overset{\boxed{8.53}}{\cong} \{N_e\}^{kk} \overset{\boxed{8.57}}{\cong} \{N\}^{kk} \subseteq L(H)$$

geschrieben werden. Die Abbildung ρ definieren wir als die Zusammensetzung $L^\infty(\mu_e) \cong \{N_{\mu_e}\}^{kk} \cong \{N_e\}^{kk} \cong \{N\}^{kk}$. Somit ist sie ein bijektiver $*$-Homomorphismus und ein Homöomorphismus bezüglich $\sigma(L^\infty, L^1)$ und der WOT nach 8.46 und 8.55, denn aus $f_i \to 0$ bezüglich $\sigma(L^\infty, L^1)$ folgt auch umgekehrt, daß für $h \in H$

$$\langle f_i(N)h, h\rangle = \langle f_i(N_h)h, h\rangle = \int f_i\, d\mu_h = \int f_i \frac{d\mu_h}{d\mu_e} d\mu_e \to 0,$$

da nach 8.54 für $h \in H$ das Maß μ_h absolut-stetig ist bezüglich μ_e, und somit nach 8.33 die Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{d\mu_h}{d\mu_e} \in L^1(\mu_e)$ existiert. □

8.59 Spektral-Abbildungs-Theorem.

Es sei H ein separabler Hilbert-Raum, $N \in L(H)$ ein normaler Operator, μ ein skalar-wertiges Spektralmaß und P das Spektralmaß von N und schließlich $f \in L^\infty(\mu)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(f(N))$ von $f(N)$ das μ-essentielle Bild von $f \in L^\infty(\mu)$. Weiters ist $\mu \circ f^{-1}$ ein skalar-wertiges und $P \circ f^{-1}$ das Spektralmaß von $f(N)$.

Beweis. Zuerst die Aussage über das Spektrum:

$$\begin{aligned}\sigma_{L(H)}(f(N)) &\overset{\boxed{7.13}}{=} \sigma_{\{N\}^{kk}}(f(N)) \overset{\boxed{8.58}}{=} \sigma_{\{N_\mu\}^{kk}}(M_f) \\ &\overset{\boxed{7.13}}{=} \sigma_{L(L^2(\mu))}(M_f) \overset{\boxed{8.27}}{=} \mu\text{-ess-Bild}(f).\end{aligned}$$

Da f meßbar ist, ist $f^*P := P \circ f^{-1}$ ein Spektralmaß auf $X := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|f\|_\infty\} \supseteq f(\sigma(N)) \supseteq \sigma(f(N))$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Partition von X und somit von $\sigma(f(N))$ in Borelmengen B_j mit $|z - z'| < \varepsilon$ für $z, z' \in B_j$. Für $f^{-1}(B_j) \ne \emptyset$ sei $x_j \in f^{-1}(B_j)$ fix gewählt und $y_j := f(x_j)$. Falls $f^{-1}(B_j) = \emptyset$ so sei $y_j \in B_j$ beliebig. Dann bilden die $f^{-1}(B_j) \ne 0$ eine Partition von $\sigma(N)$ und somit ist nach

8.12.2

$$\begin{aligned}\Big\|f(N) - \int_X z\, d\, f^*P\,(z)\Big\| &= \Big\|\int_{\sigma(N)} f(z)\, dP(z) - \int_X z\, d\, f^*P\,(z)\Big\| \\ &\le \Big\|\int_{\sigma(N)} f(z)\, dP(z) - \sum_j f(x_j)\, P(f^{-1}(B_j))\Big\| \\ &\quad + \Big\|\sum_j y_j\, f^*P\,(B_j) - \int_X z\, d\, f^*P\,(z)\Big\| \\ &\le 2\varepsilon,\end{aligned}$$

also gilt Gleichheit und f^*P ist das Spektralmaß von $f(N)$ nach 8.15.

Es ist $f^*\mu := \mu \circ f^{-1}$ ein skalar-wertiges Spektralmaß von $f(N)$, denn $0 = P_{f(N)}(B) = f^*P\,(B) = P(f^{-1}(B))$ genau dann, wenn $0 = \mu(f^{-1}(B)) = f^*\mu\,(B)$ gilt. □

Multiplizitäts-Theorie für normale Operatoren

8.60 Theorem (Hellinger 1907).

Es sei N ein normaler Operator auf einem separablen Hilbert-Raum. Dann existiert eine Folge von Maßen μ_n auf $\mathbb{C}$ mit kompakten Trägern und mit μ_{n+1} absolut-stetig bezüglich μ_n und

$$N \cong N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2} \oplus \dots .$$

Bis auf unitäre Äquivalenz ist N durch die Äquivalenzklassen dieser Maße eindeutig bestimmt.

Bemerkung.

Das Maß μ_1 muß ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N sein: Denn $\oplus_j N_{\mu_j} - \lambda$ ist genau dann invertierbar, wenn alle $N_{\mu_j} - \lambda$ es sind, d.h. $\sigma(N) = \bigcup_j \sigma(N_{\mu_j}) = \bigcup_j \operatorname{Träg}(\mu_j)$. Weiters ist $P(B) = 0$ genau dann, wenn $P_j(B) = 0$ ist für alle j, d.h. B eine μ_j-Null-Menge ist. Da aber μ_{j+1} absolut-stetig bezüglich μ_j ist, ist das genau dann der Fall, wenn $\mu_1(B) = 0$ ist.

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, wollen wir noch einige Varianten daraus folgern. Für die Erste benötigen wir folgendes

8.61 Lemma.

Es sei ν ein absolut-stetiges Maß bezüglich eines anderen Maßes μ. Dann existiert eine meßbare Menge B, so daß $\mu|_B$ und ν äquivalent (d.h. wechselseitig absolut-stetig) sind.

Beweis. Es sei $0 \le f := \frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ die Radon-Nikodym Ableitung. Weiters sei $B := \{x : f(x) \ne 0\}$. Diese meßbare Menge ist bis auf eine μ-Nullmenge eindeutig bestimmt. Für alle meßbaren A gilt: $0 = \nu(A) = \int \chi_A\, d\nu = \int \chi_A\, f\, d\mu = \int_B \chi_A\, f\, d\mu \Leftrightarrow \mu|_B(A) = 0$, d.h. ν und $\mu|_B$ sind äquivalent. □

8.62 Folgerung.

Es sei N ein normaler Operator auf einem separablen Hilbertraum und μ ein skalares Spektral-Maß für N. Dann existiert eine bezüglich der Inklusion fallende Folge von Borel-Mengen $B_n \subseteq \sigma(N)$ mit $B_1 := \sigma(N)$ und

$$N \cong N_\mu \oplus N_{\mu|_{B_2}} \oplus \dots .$$

Bis auf unitäre Äquivalenz ist N durch die Äquivalenzklasse von μ und die Borel-Mengen bis auf μ-Null-Mengen eindeutig bestimmt. □

Bemerkung.

Falls H endlich-dimensional ist, so ist $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ endlich. Nach 8.60 ist $N = \bigoplus_k N_k$ wobei die $N_k \cong N_{\mu|_{B_k}}$ zyklische Diagonal-Operatoren auf invarianten Teilräumen $H_k \subseteq H$ sind. Die Eintragungen auf der Diagonale von N_k müssen also paarweise verschieden sein, d.h. alle Eigenwerte von N_k Vielfachheit 1 haben. Da μ_1 ein skalares Spektral-Maß für N ist, muß der Träger von μ_1 das gesamte Spektrum sein, d.h. der erste Summand $\sigma(N_1) = \sigma(N)$. Die absolut-Stetigkeit bedeutet, daß das jeweilige Spektrum kleiner wird, d.h. die Diagonal-Elemente von N_{k+1} eine Teilmenge von jenen von N_k sein müssen. Also sind die N_k die diagonal-Operatoren mit paarweise verschiedenen Eintragungen und zwar genau den Eigenwerte von N mit Vielfachheit mindestens k.

Bemerkung.

Es gibt aber noch eine andere Darstellung. Es sei Λ_k die Menge der Eigenwerte mit Vielfachheit k, d.h. für $\lambda \in \Lambda_k$ gilt $\dim \operatorname{Ker}(N - \lambda) = k$. Es sei N_k der diagonal-Operator welcher Λ_k als diagonal-Elemente hat und zwar jedes mit Vielfachheit k. Dann ist ist $N_k \cong {A_k}^{(k)} := \bigoplus^k A_k$, wobei A_k ein diagonal-Operator mit Λ_k als diagonal-Elementen mit Vielfachheit 1 ist, also $\sigma(A_k) = \Lambda_k$. Somit ist

$$N \cong A_1 \oplus {A_2}^{(2)} \oplus {A_3}^{(3)} \dots$$

mit $\sigma(A_j) \cap \sigma(A_k) = \emptyset$ für $j \neq k$. Das folgende Theorem liefert eine unendlich-dimensionale Verallgemeinerung.

8.63 Theorem.

Es sei N normaler Operator auf einem separablen Hilbert-Raum H. Dann existieren paarweise singuläre Maße $\mu_\infty, \mu_1, \dots$ und ein Isomorphismus

$$U : H \to L^2(\mu_\infty)^{(\infty)} \oplus L^2(\mu_1) \oplus L^2(\mu_2)^{(2)} \oplus \dots$$

welcher N in die Summe der Multiplikations-Operatoren mit z übersetzt. Zwei Operatoren sind genau dann unitär äquivalent, wenn die entsprechenden Maße es sind.

Es heißen zwei Maße μ_1 und μ_2 SINGULÄR, falls eine Zerlegung $X = B_1 \sqcup B_2$ existiert mit $\mu_1(B_1) = 0$ und $\mu_2(B_2) = 0$.

Beweis. Es sei μ ein Spektral-Maß für N und B_n die aus 8.62 erhaltenen Borel-Teilmengen von $\sigma(N)$. Es sei $\Delta_\infty := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$ und $\Delta_n := B_n \setminus B_{n+1}$ für $1 \le n < \infty$. Es sei $\mu_n := \mu|_{\Delta_n}$ und $\nu_n := \mu|_{B_n}$ für $1 \le n < \infty$. Da $B_n = \bigcap_{k=1}^\infty B_k \sqcup (B_n \setminus B_{n+1}) \sqcup (B_{n+1} \setminus B_{n+2}) \sqcup \dots = \Delta_\infty \sqcup \Delta_n \sqcup \Delta_{n+1} \sqcup \dots$, also ist $\nu_n = \mu_\infty + \mu_n + \mu_{n+1} + \dots$ und die Maße μ_∞, μ_n, $\mu_{n+1}, \dots$ sind paarweise singulär. Also ist $N_{\nu_n} \cong N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_n} \oplus N_{\mu_{n+1}} \oplus \dots$. Unter Verwendung von 8.62 folgt somit

$$\begin{aligned} N &\cong N_{\nu_1} \oplus N_{\nu_2} \oplus \dots \\ &\cong (N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2} \oplus \dots) \oplus (N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_2} \oplus N_{\mu_3} \oplus \dots) \oplus \dots \\ &\cong N_{\mu_\infty}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1}^{(1)} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus \dots . \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit bleibt dem Leser überlassen. □

Beweis der Existenz-Aussage des Theorems 8.60. Die Idee des Beweises von 8.60 ist, durch Auswahl einer Folge von h_n eine Zerlegung von H in die orthogonale Summe $\bigoplus H_{h_n}$ der von h_n erzeugten zyklischen Teilräume zu konstruieren. Mittels Zorn geht das nicht, da die absolut-Stetigkeit der zugehörigen

Maße nicht erzwungen werden kann. Induktiv könnte man wie folgt vorgehen: Es sei $e_1 \in H$ ein separierender Vektor für $\{N\}^{kk}$ sowie H_1 der Abschluß von $\{N\}^{kk}e_1$ und $\mu_1(B) := \|P(B)e_1\|^2$. Im nächsten Schritt betrachten wir $N_2 := N|_{H_1^\perp}$. Wieder existiert nach 8.52 ein separierender Vektor $e_2 \in H_1^\perp \subseteq H$ für $\{N_2\}^{kk}$. Es sei H_2 der Abschluß von $\{N_2\}^{kk}e_2$. Dann ist $\mu_2 := P_{e_2,e_2}$ absolut stetig bzgl. μ_1 nach 8.54. Wenn wir nun mit Induktion fortfahren, so können wir nicht garantieren, daß $\bigoplus H_k$ schon ganz H ausfüllt.

Um das Abbrechen nach abzählbar vielen Schritten zu gewährleisten, wählen wir eine orthonormal-Basis $\{f_j\}$ von H mit $f_1 = e_1$: Wir wollen den separierenden Vektor e_2 für $\{N_2\}^{kk}$ so wählen, daß die orthogonal-Projektion f_2' von f_2 auf $H_1^\perp$ im Abschluß H_2 von $\{N_2\}^{kk}e_2$ liegt. Dann wäre $f_2 \in H_1 \oplus \{f_2'\} \subseteq H_1 \oplus H_2$. Und induktiv erhielten wir $f_n \in H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$, also gilt $H = \bigoplus_n H_n$. Um diese spezielle Wahl zu rechtfertigen, brauchen wir folgendes Lemma. □

8.64 Lemma.

Es sei N ein normaler Operator und $e \in H$. Dann existiert ein separierender Vektor e_0 für $\{N\}^{kk}$ mit e im Abschluß von $\{N\}^{kk}e_0$.

Beweis. Es sei f_0 ein separierender Vektor für $\{N\}^{kk}$ und sei P das Spektral-Maß von N. Wir definieren $\mu(B) := \|P(B)f_0\|^2$ und bezeichnen den Abschluß von $\{N\}^{kk}f_0$ mit H_0. Es ist $e =: h_0 + h_1$ mit $h_0 \in H_0$ und $h_1 \in (H_0)^\perp$. Es sei $\eta(B) := \|P(B)h_1\|^2$ und H_1 der Abschluß von $\{N\}^{kk}h_1$. Dann ist sowohl H_0 als auch H_1 bezüglich N invariant. Weiters ist $H_0 \perp H_1$ und $N|_{H_0} \cong N_\mu$ und $N|_{H_1} \cong N_\eta$. Da η nach 8.54 absolut-stetig ist bezüglich μ, folgt, daß eine Borel-Menge B existiert, so daß η und $\nu := \mu|_B$ wechselseitig absolut-stetig sind nach 8.61. Also ist $N|_{H_1} \cong N_\nu$ nach 8.34. Es sei $U : H_0 \oplus H_1 \to L^2(\mu) \oplus L^2(\nu)$ der kanonische Isomorphismus mit $U(N|_{H_0} \oplus N|_{H_1})U^{-1} = N_\mu \oplus N_\nu$. Wegen $e = h_0 \oplus h_1 \in H_0 \oplus H_1$ ist $Ue = e_0 \oplus e_1$. Da h_1 ein zyklischer Vektor für $N|_{H_1}$ ist, ist auch e_1 ein solcher von N_ν und folglich gilt $e_1 \neq 0$ ν-f.ü..

Wir wollen nun zeigen, daß ein $f \in L^2(\mu)$ existiert, so daß $f \oplus e_1$ ein separierender Vektor von $\{N_\mu \oplus N_\nu\}^{kk}$ ist und $e_0 \oplus e_1$ im Abschluß von $\{N_\mu \oplus N_\nu\}^{kk}(f \oplus e_1)$ liegt:
Wir definieren $f(z) := e_0(z)$ für $z \in B$ und $f(z) := 1$ sonst. Es sei H der Abschluß von $\{N_\mu \oplus N_\nu\}^{kk}(f \oplus e_1) = \{g\,(f \oplus e_1) : g \in L^\infty(\mu)\}$ (wobei die Gleichheit nach 8.58 gilt, weil μ ein skalar-wertiges Spektral-Maß für $N_\mu \oplus N_\nu$ ist). Es sei B^c das Komplement von B, dann gilt: $g\,\chi_{B^c} \oplus 0 = g\,\chi_{B^c}(f \oplus e_1)$ für alle $g \in L^\infty(\mu)$. Also ist $L^2(\mu|_{B^c}) \oplus 0 \subseteq H$ und somit $(1 - e_0)\,\chi_{B^c} \oplus 0 \in H$ und schließlich $e_0 \oplus e_1 = f \oplus e_1 - (1 - e_0)\,\chi_{B^c} \oplus 0 \in H$.

Andererseits folgt aus $g \in L^\infty(\mu)$ und $0 = g\,(f \oplus e_1)$, daß $g\,f = g\,e_1 = 0$ μ-f.ü.. Da $e_1 \neq 0$ ν-f.ü., ist $g = 0$ μ-f.ü. auf B. Da $f = 1$ auf B^c ist folgt, daß auch $g = 0$ ist μ-f.ü. auf B^c. Also ist $f \oplus e_1$ ein separierender Vektor von $\{N_\mu \oplus N_\nu\}^{kk}$. □

Beweis der Eindeutigkeitsaussage des Theorems 8.60. Da aus $\nu \sim \mu$ folgt, daß $N_\nu \cong N_\mu$ brauchen wir nur die Umkehrung zeigen. Sei also $N \cong M$, genauer: es sei U eine surjektive Isometrie mit $UNU^{-1} = M$. Falls e_1 ein separierender Vektor für $\{N\}^{kk}$ ist, so ist $f_1 := U(e_1)$ ein solcher für $\{M\}^{kk}$. Da μ_1 und ν_1 skalar-wertige Spektral-Maße für N bzw. M sind, folgt $\nu_1 \sim \mu_1$ und damit $N_{\mu_1} \cong N_{\nu_1}$, d.h. falls $H = \oplus_n H_n$ und $K = \oplus_n K_n$ mit $N|_{H_n} = N_{\mu_n}$ und $M|_{K_n} = N_{\nu_n}$ so ist $N|_{H_1} \cong M|_{K_1}$. Allerdings muß dieser Isomorphismus nicht eine Einschränkung von U sein, d.h. wir wissen nicht ob $U(H_1) \subseteq K_1$ ist. Wir müssen also zeigen, daß

$N|_{H_1^\perp} \cong M|_{K_1^\perp}$. Dies geschieht in der folgenden Proposition 8.65. Das Resultat folgt dann mittels Induktion. $\square$

8.65 Proposition.

Es seien N, A und B normale Operatoren, N zyklisch und $N \oplus A \cong N \oplus B$. Dann ist $A \cong B$.

Beweis. Es sei $N \in L(H)$, $A \in L(H_A)$ und $B \in L(H_B)$. Und sei $U : H \oplus H_A \to H \oplus H_B$ ein Isomorphismus mit $U(N \oplus A)U^{-1} = N \oplus B$. Wir schreiben U als Matrix

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{pmatrix}$$

mit $U_{1,1} \in L(H,H)$, $U_{1,2} \in L(H_A,H)$, $U_{2,1} \in L(H,H_B)$ und $U_{2,2} \in L(H_A,H_B)$. Dann ist

$$U^* = \begin{pmatrix} U_{1,1}^* & U_{2,1}^* \\ U_{1,2}^* & U_{2,2}^* \end{pmatrix}$$

und weiters

$$N \oplus A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \text{ und } N \oplus B = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $U\,(N \oplus A) = (N \oplus B)\,U$ lautet:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}N & U_{1,2}A \\ U_{2,1}N & U_{2,2}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} NU_{1,1} & NU_{1,2} \\ BU_{2,1} & BU_{2,2} \end{pmatrix}.$$

und $U\,(N \oplus A)^* = (N \oplus B)^*\,U$ lautet:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}N^* & U_{1,2}A^* \\ U_{2,1}N^* & U_{2,2}A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^*U_{1,1} & N^*U_{1,2} \\ B^*U_{2,1} & B^*U_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen $U^*U = 1$ und $UU^* = 1$ lauten:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}^*U_{1,1} + U_{2,1}^*U_{2,1} & U_{1,1}^*U_{1,2} + U_{2,1}^*U_{2,2} \\ U_{1,2}^*U_{1,1} + U_{2,2}^*U_{2,1} & U_{1,2}^*U_{1,2} + U_{2,2}^*U_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}U_{1,1}^* + U_{1,2}U_{1,2}^* & U_{1,1}U_{2,1}^* + U_{1,2}U_{2,2}^* \\ U_{2,1}U_{1,1}^* + U_{2,2}U_{1,2}^* & U_{2,1}U_{2,1}^* + U_{2,2}U_{2,2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichung $(2,2)$ für N und für N^* und 8.36 folgt, daß $(\operatorname{Ker} U_{2,2})^\perp$ A-invariant, $(\operatorname{Ker} U_{2,2}^*)^\perp$ B-invariant und $A|_{(\operatorname{Ker} U_{2,2})^\perp} \cong B|_{(\operatorname{Ker} U_{2,2}^*)^\perp}$ ist. Es genügt also zu zeigen, daß $A|_{\operatorname{Ker} U_{2,2}} \cong B|_{\operatorname{Ker} U_{2,2}^*}$, denn dann ist $A \cong B$. Falls $h \in \operatorname{Ker} U_{2,2} \subseteq H_A$, dann ist

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,2}h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da U eine Isometrie ist folgt, daß $U_{1,2}$ den Kern von $U_{2,2}$ isometrisch auf einen abgeschlossenen Teilraum E von H abbildet. Aus den Gleichungen $(1,2)$ für N und $(1,2)$ für N^* und der Tatsache, daß $\operatorname{Ker} U_{2,2}$ A-invariant ist, folgt, daß E N-invariant ist. Folglich ist die Einschränkung von $U_{1,2}$ auf $\operatorname{Ker} U_{2,2}$ eine Äquivalenz für $A|_{\operatorname{Ker} U_{2,2}} \cong N|_E$.

Auf ähnliche Weise erhalten wir, daß $U_{2,1}^*$ den Kern von $U_{2,2}^*$ isometrisch auf einen abgeschlossenen Teilraum E_* von H abbildet, welcher N-invariant ist, und eine Äquivalenz $B|_{\operatorname{Ker} U_{2,2}^*} \cong N|_{E_*}$ liefert.

Es bleibt zu zeigen, daß $E = E_*$. Falls $h \in \operatorname{Ker} U_{2,2}$, so ist $U_{1,1}^*U_{1,2}h = -U_{2,1}^*U_{2,2}h = 0$ nach Gleichung $(1,2)$ für U^*U und somit $E = U_{1,2}(\operatorname{Ker} U_{2,2}) \subseteq \operatorname{Ker} U_{1,1}^*$. Andererseits ist wegen $(1,1)$ für UU^* für $f \in \operatorname{Ker} U_{1,1}^*$ die Gleichung $f = (U_{1,1}U_{1,1}^* + U_{1,2}U_{1,2}^*)f = U_{1,2}U_{1,2}^*f$ gültig. Wegen $(2,1)$ für UU^* ist $U_{2,2}U_{1,2}^*f = -U_{2,1}U_{1,1}^*f =$

0, und damit $U_{1,2}^* f \in \operatorname{Ker} U_{2,2}$. Folglich ist $f \in U_{1,2}(\operatorname{Ker} U_{2,2})$ und damit $E = \operatorname{Ker} U_{1,1}^*$. Analog erhalten wir $E_* := \operatorname{Ker} U_{1,1}$. Aus Gleichung $(1,1)$ für N folgt daß $U_{1,1} \in \{N\}^k$, und da N zyklisch ist folgt aus 8.46, daß $U_{1,1}$ normal ist (denn $\{N_\mu\}^k = A_\mu$) und damit ist $E = \operatorname{Ker} U_{1,1}^* = \operatorname{Ker} U_{1,1} = E_*$. □

9 Spektral-Theorie unbeschränkter Operatoren

Unbeschränkte Operatoren

Quanten-Mechanik.

In der QUANTEN-MECHANIK will man physikalische Größen als selbst-adjungierte Operatoren auf einem separablen Hilbert-Raum darstellen. Für den POSITIONS-OPERATOR Q und den IMPULS-OPERATOR P muß folgende Version der HEISENBERG'SCHEN UNSCHÄRFE-RELATION $[P,Q] := PQ - QP = \frac{\hbar}{i}$ gelten, wobei $\hbar \neq 0$ das PLANK'SCHE WIRKUNGSQUANT bezeichnet.

Seien also P und Q Elemente einer Banach-Algebra ($A = L(H)$), welche diese Kommutations-Relation erfüllen. Mittels Induktion zeigt man sofort, daß $P^k\, Q = Q\, P^k + k\, \frac{\hbar}{i}\, P^{k-1}$ gilt, denn

$$\begin{aligned}P^{k+1}\, Q = P\, P^k\, Q = P\, &\left(Q\, P^k + k\, \frac{\hbar}{i}\, P^{k-1}\right) \\ &= \left(Q\, P + \frac{\hbar}{i}\right)\, P^k + k\, \frac{\hbar}{i}\, P^k = Q\, P^{k+1} + (k+1)\, \frac{\hbar}{i}\, P^k.\end{aligned}$$

Für $t \in \mathbb{C}$ gilt also

$$\begin{aligned}e^{i\,t\,P}\, Q &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} P^k\, Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \left(Q\, P^k + k\, \frac{\hbar}{i}\, P^{k-1}\right) \\ &= Q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\, P^k + \frac{\hbar}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k}{(k-1)!}\, P^{k-1} = (Q + t\,\hbar)\, e^{i\,t\,P}.\end{aligned}$$

Da $e^{i\,t\,P}$ invertierbar ist, mit inverser Abbildung $e^{-i\,t\,P}$, sind Q und $Q + t\,\hbar$ ähnlich, und haben somit dasselbe Spektrum. Da aber das Spektrum von $Q + t\,\hbar$ jenes von Q um $t\,\hbar$ verschoben ist, wäre das Spektrum von Q ganz $\mathbb{C}$, und somit kann Q kein Element einer Banach-Algebra sein nach 6.24, und damit inbesondere kein beschränkter linearer Operator. Eine ähnliche Rechnung zeigt, daß auch P kein beschränkter Operator sein kann.

Definieren wir den Impuls-Operator P durch $(Pf)(x) := \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\, f(x)$ und den Positions-Operator Q durch $(Qf)(x) := x\, f(x)$, so gilt

$$\begin{aligned}[P,Q]f(x) &= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}(x\, f(x)) - x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\, f(x) \\ &= \frac{\hbar}{i} \Big(f(x) + x\, f'(x) - x\, f'(x)\Big) \\ &= \frac{\hbar}{i} f(x).\end{aligned}$$

Diese Operatoren sind aber nicht für alle f im Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R})$ definiert, also benötigen wir eine Erweiterung des Begriffs "beschränkter linearer Operator" auf Hilbert-Räumen.

9.1 Definition.

Unter einem LINEAREN OPERATOR $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ zwischen Hilbert-Räumen H_1 und H_2 verstehen wir eine lineare Abbildung T, welche auf einem linearen Teilraum $\operatorname{Dom} T$ von H_1, der DOMÄNE von T, definiert ist. Besonders wichtig ist der Fall, wo $\operatorname{Dom} T$ in H_1 dicht liegt, was wir o.B.d.A. annehmen können indem wir H_1 durch den Hilbert-Raum $\overline{\operatorname{Dom} T}$ ersetzen. Die SUMME $T_1 + T_2$ zweier solcher Operatoren T_1 und T_2 ist auf $\operatorname{Dom} T_1 \cap \operatorname{Dom} T_2$ definiert, und die ZUSAMMENSETZUNG $T \circ S$ auf $S^{-1}(\operatorname{Dom} T)$.

Ein Operator $\tilde{T} : H_1 \rightsquigarrow H_2$ heißt ERWEITERUNG von $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ falls $\tilde{T} \supseteq T$, d.h. $\operatorname{Dom} \tilde{T} \supseteq \operatorname{Dom} T$ und $\tilde{T}|_{\operatorname{Dom} T} = T$ ist.

Falls T beschränkt ist, so existiert eine beschränkt lineare Erweiterung auf den Abschluß von $\operatorname{Dom} T$, und falls wir $T = 0$ auf dem orthogonalen Komplement von $\operatorname{Dom} T$ setzen, so haben wir eine beschränkt lineare Erweiterung auf H_1 erhalten. Die interessanten nicht global definierten Operatoren sind folglich alle unbeschränkt.

Irgendwelche Stetigkeits-Eigenschaften sollten die Operatoren aber schon haben, sonst würden wir ja nur lineare Algebra treiben. Folglich nennen wir so einen Operator $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ABGESCHLOSSEN, falls sein GRAPH $\operatorname{Graph}(T) := \{(x, Tx) : x \in \operatorname{Dom} T\}$ in $H_1 \oplus H_2$ abgeschlossen ist. Ein Operator heißt ABSCHLIESSBAR, falls er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt.

9.2 Proposition.

Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

1. *Er ist abschließbar;*
2. *Der Abschluß seines Graphen ist Graph einer Abbildung;*
3. *Aus $(0, h) \in \overline{\operatorname{Graph} T}$ folgt $h = 0$.*

In dieser Situation heißt der Operator mit dem Abschluß von $\operatorname{Graph} T$ als Graphen der ABSCHLUSS von T.

Es ist nicht jeder Operator abschließbar. Sei z.B. $T : \ell^2 \rightsquigarrow \mathbb{C}$ definiert durch $T((x_n)_n) := \sum_n n\, x_n$ auf $\operatorname{Dom} T := \{(x_n)_n : \sum_n n\, |x_n| < \infty\}$. Dann ist $(0, 1) = \lim_n(\frac{1}{n} e_n, 1) \in \overline{\operatorname{Graph} T}$, also kann dies kein Graph einer Funktion sein.

Beweis. ($\boxed{1} \Rightarrow \boxed{3}$) Sei $\tilde{T} \supseteq T$ ein abgeschlossenen Operator. Folglich ist der Abschluß $\overline{\operatorname{Graph} T}$ des Graphen von T eine Teilmenge von $\operatorname{Graph} \tilde{T}$. Es sei $(0, h) \in \overline{\operatorname{Graph} T} \subseteq \operatorname{Graph} \tilde{T}$, also ist $h = \tilde{T}(0) = 0$.

($\boxed{2} \Leftarrow \boxed{3}$) Es sei $H_0 := \operatorname{pr}_1(\overline{\operatorname{Graph} T}) = \{h \in H_1 : \exists k \in H_2 \text{ mit } (h, k) \in \overline{\operatorname{Graph} T}\}$. Dann ist zu zeigen, daß zu jedem $h \in H_0$ genau ein $k \in H_2$ existiert mit $(h, k) \in \overline{\operatorname{Graph} T}$. Es seien k_1 und k_2 zwei solche k. Dann ist $(0, k_1 - k_2) = (h, k_1) - (h, k_2) \in \overline{\operatorname{Graph} T}$ und somit $k_1 - k_2 = 0$, d.h. $k_1 = k_2$.

($\boxed{1} \Leftarrow \boxed{2}$) Es sei also $\overline{\operatorname{Graph} T}$ der Graph einer Abbildung $\tilde{T}$. Es ist $\tilde{T}$ linear, denn der Abschluß des linearen Teilraums $\operatorname{Graph} T$ ist selbst ein linearer Teilraum. Weiters ist $\tilde{T}$ nach Konstruktion abgeschlossen und $T \subseteq \tilde{T}$. □

Adjungierter Operator

9.3 Definition des adjungierten Operators.

Um einen Vektor $T^* k$ durch die Gleichung $\langle Th, k \rangle = \langle h, T^* k \rangle$ (eindeutig) zu definieren, benötigen wir einerseits, daß sie für h in einer dichten Teilmenge gilt, also muß

$\operatorname{Dom} T$ dicht sein, und andererseits muß $h \mapsto \langle Th, k\rangle$ ein beschränktes lineares Funktional (auf $\operatorname{Dom} T$) sein. Wir definieren also:
Für einen dicht-definierten Operator $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ sei der ADJUNGIERTE OPERATOR $T^* : H_2 \rightsquigarrow H_1$ jener Operator mit Domäne

$$\operatorname{Dom}(T^*) := \big\{k \in H_2 : \langle T(\_), k\rangle \text{ ist beschränkt linear auf } \operatorname{Dom} T\big\},$$

welcher durch $\langle Th, k\rangle = \langle h, T^* k\rangle$ für alle $h \in \operatorname{Dom} T$ definiert ist.

9.4 Multiplikations-Operator als Beispiel.

Es sei (X, Ω, μ) ein σ-endlicher Maß-Raum und $\lambda : X \to \mathbb{C}$ eine Ω-meßbare Funktion. Es sei $D := \{g \in L^2(\mu) : \lambda\, g \in L^2(\mu)\}$ und $T(g) := \lambda\, g$ für alle $g \in D$. Dann ist $T = M_\lambda$ ein abgeschlossener dicht-definierter Operator. Sein Adjungierter hat dieselbe Domäne D und ist durch $T^* := M_{\overline{\lambda}}$ gegeben:

Es sei $\Delta_n \subseteq \{x : |\lambda(x)| \le n\}$ mit $\mu(\Delta_n) < \infty$ und $\bigcup_n \Delta_n = X$. Dann ist $L^2(\Delta_n) \subseteq D$, denn für $\lambda \in L^\infty$ und $g \in L^2$ ist nach der Hölder-Ungleichung auch $\lambda\, g \in L^2$. Also ist D dicht.

Sei nun $g_k \to g$ und $Tg_k \to h$ in L^2. Dann konvergiert $\lambda\, g_k \to \lambda\, g$ auf Δ_n und andererseits auch gegen h, also ist $\lambda\, g = h$ f.ü. und damit $g \in D$ und $(g, h) = (g, Tg) \in \operatorname{Graph} T$. D.h. der Graph von T ist abgeschlossen.

Es ist $g \mapsto \langle \lambda g, h\rangle = \int g\, \lambda\, \overline{h}$ nach dem Darstellungssatz [18, 6.2.9] von Riesz genau dann beschränkt, wenn $\lambda\, \overline{h} \in L^2$, d.h. $h \in D$ liegt. Also ist $\operatorname{Dom} T^* = D$ und

$$\langle \lambda g, h\rangle = \int \lambda\, g\, \overline{h} = \int g\, \overline{\overline{\lambda}\, h} = \langle g, \overline{\lambda}\, h\rangle,$$

d.h. $T^* h = \overline{\lambda} h$.

Diagonal-Operator.

Sei speziell $X = \mathbb{N}$ und μ das Zähl-Maß. Dann ist $L^2(X) = \ell^2$ und $\lambda : X \to \mathbb{C}$ eine Folge $(\lambda_n)_n$. Der Operator T hat dann $D := \{h \in \ell^2 : \sum_k |\lambda_k\, h_k|^2 = \sum_k |\lambda_k \langle h, e_k\rangle|^2 < \infty\}$ als Domäne und ist durch $Th := (\lambda_k h_k)_k = \sum_k \lambda_k \langle h, e_k\rangle e_k$ für alle $h \in D$ gegeben.

Positions-Operator.

Es sei speziell μ daß Lebesgue-Maß auf $X := \mathbb{R}$ und $\lambda := \mathrm{id}_\mathbb{R}$. Dann ist T der Positions-Operator der (1-dim.) Quantenmechanik.

Wir zeigen nun, daß T *der Abschluß von $T|_{C_c^\infty}$ ist*:
Da T abgeschlossen ist, müssen wir für jedes $f \in \operatorname{Dom} T = \{f \in L^2 : \lambda\, f \in L^2\}$ eine Folge $f_n \in C_c^\infty$ finden, mit $(f_n, Tf_n) \to (f, Tf)$.
Sei dazu $\rho \in C_c^\infty$ mit $\rho = 1$ auf einer Umgebung U_0 um 0. Da C_c^∞ dicht liegt in L^2 existieren $g_n, h_n \in C_c^\infty$ mit $h_n \to f$ und $g_n \to Tf$. Folglich konvergiert $\rho\, h_n \to \rho\, f$ und beide Seiten verschwinden außerhalb $\operatorname{Träg}(\rho)$, also konvergiert $T(\rho\, h_n) = \lambda\, \rho\, h_n \to T(\rho\, f) = \rho\, Tf$. Andererseits konvergiert $(1-\rho) g_n \to (1-\rho) Tf$ und beide Seiten verschwinden auf U_0, also bilden die Funktionen $\frac{1-\rho}{\lambda} g_n$ eine Folge von C_c^∞-Funktionen, welche in L^2 gegen $\frac{1-\rho}{\lambda} Tf = (1-\rho)\, f$ konvergiert. Schließlich konvergiert $f_n := \frac{1-\rho}{\lambda} g_n + \rho\, h_n \in C_c^\infty$ gegen $(1-\rho)\, f + \rho \cdot f = f$ in L^2 und $Tf_n = (1-\rho)\, g_n + \rho\, Th_n \to (1-\rho)\, Tf + \rho\, Tf = Tf$.

9.5 Differentiations-Operator als Beispiel.

Es sei

$$D_0 := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{C} : f \text{ ist absolut-stetig, } f' \in L^2 \text{ und } f(-1) = 0 = f(1)\}.$$

und T_0 sei definiert durch $T_0(f) := i\, f'$ für alle $f \in D_0$. Beachte, daß die absolut-stetigen Funktionen f genau die Stammfunktionen der L^1-Funktion sind.

Da die Polynome p mit $p(-1) = 0 = p(1)$ in D_0 liegen, ist D_0 *dicht in* $L^2[-1,1]$.

Es ist T_0 *abgeschlossen*: Sei nämlich $f_n \in D_0$ mit $(f_n, i f_n') \to (f, g)$ in $L^2 \oplus L^2$. Sei $h(x) := -i \int_{-1}^x g(t)\, dt$. Wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung ($\|\_\|_1 \leq \|1\|_2\, \|\_\|_2 = \sqrt{2}\, \|\_\|_2$) ist h absolut-stetig und

$$|f_n(x) - h(x)| = \Big| \int_{-1}^x (f_n'(t) + i\, g(t))\, dt \Big| \leq \sqrt{2} \|f_n' + i\, g\|_2 = \sqrt{2} \|i f_n' - g\|_2 \to 0.$$

Also konvergiert $f_n \to h$ gleichmäßig auf $[-1,1]$. Da $f_n \to f$ in $L^2[-1,1]$ ist $f = h$ f.ü.. Wir können somit annehmen, daß $f(x) = h(x)$ für alle x ist, und damit absolut-stetig ist und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[-1,1]$. Insbesonders ist $f(-1) = \lim_n f_n(-1) = \lim_n 0 = 0$ und analog ist $f(1) = 0$. Weiters ist $f' = h' = -i\, g \in L^2[-1,1]$. Damit ist $f \in D_0$ und $(f, g) = (f, i f') \in \operatorname{Graph} T_0$.

Es ist $\operatorname{Bild} T_0 = \{f' : f \in D_0\} = \{h \in L^2[-1,1] : 0 = \int_{-1}^1 h(x)\, dx = \langle h, 1\rangle\} = \{1\}^\perp$.

Schließlich gilt: $\operatorname{Dom} T_0^* = D := \{g$ *: g ist absolut-stetig auf* $[-1,1]$, *und* $g' \in L^2[-1,1]\}$ *und* $T_0^* g = i\, g'$, *d.h.* $T_0 \subset T_0^*$.
($\subseteq$) Sei $g \in \operatorname{Dom} T_0^*$ und $h := T_0^* g$. Wir setzen $H(x) := \int_{-1}^x h(t)\, dt$. Mittels partieller Integration erhalten wir für jedes $f \in D_0$ wegen $f(-1) = 0 = f(1)$ folgendes:

$$\begin{aligned} \langle T_0 f, g\rangle &= \langle f, T_0^* g\rangle = \langle f, h\rangle = \int_{-1}^1 f\, \overline{h} = \int_{-1}^1 f(x)\, \overline{H}'(x)\, dx \\ &= f(x)\, \overline{H(x)}\Big|_{x=-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(x) \overline{H(x)}\, dx = - \int_{-1}^1 i f'(x) \overline{i H(x)}\, dx \\ &= -\langle T_0 f, i\, H\rangle. \end{aligned}$$

Also ist $\langle T_0 f, g + i\, H\rangle = 0$ für alle $f \in \operatorname{Dom} T$, d.h. $g + i\, H \in (\operatorname{Bild} T_0)^\perp = \{1\}^{\perp\perp} = \mathbb{C}$. D.h. $c := g + i\, H$ ist konstant und somit ist $g = c - i\, H$ absolut-stetig, $g' = -i\, H' = -i\, h \in L^2$ und $T_0^* g = h = i\, g'$.
($\supseteq$) Es sei g absolut-stetig mit $g' \in L^2$. Mittels partieller Integration folgt für alle $h \in D_0$ wegen $h(-1) = 0 = h(1)$, daß $\langle i\, h', g\rangle = -i \int h\, \bar{g}'$ ist und somit in h stetig ist. D.h. $g \in \operatorname{Dom} T^*$.

Man beachte, daß der Faktor i notwendig war, um für T_0^* die gleiche Formel wie für T_0 zu erhalten.

Beispiel einer Erweiterung.

Wir erweitern nun die Domäne D_0 zu

$$D_1 := \{f : [-1,1] \to \mathbb{C} : f \text{ ist absolut-stetig, } f' \in L^2[-1,1] \text{ und } f(-1) = f(1)\}$$

Es sei T_1 durch die gleiche Formel wie zuvor, nämlich $T_1(f) = i\, f'$ für alle $f \in D_1$ gegeben.

Natürlich ist auch T_1 dicht-definiert, da $D_0 \subseteq D_1$. Wie zuvor zeigt man, daß T_1 abgeschlossen ist (das folgt auch aus 9.8) und daß $\operatorname{Bild} T_1 = \{1\}^\perp$.

Diesmal gilt allerdings $\operatorname{Dom} T_1^* = D_1 = \operatorname{Dom} T_1$ und $T_1^* g = i\, g'$, d.h. $T_1 = T_1^*$.
($\subseteq$) Es sei wieder $g \in \operatorname{Dom} T_1^*$ und $h := T_1^* g$ und $H(x) := \int_{-1}^x h(t)\, dt$. Dann ist $H(-1) = 0$. Und wegen $1 \in D_1$ ist nun auch $H(1) = \int_{-1}^1 h = \langle T_1^* g, 1\rangle = \langle g, T_1 1\rangle = 0$. Mittels partieller Integration und $H(-1) = 0 = H(1)$ erhalten wir wieder $\langle T_1 f, g + i\, H\rangle = 0$ für alle $f \in D_1$. Also gilt wie zuvor, daß $g = c - i\, H$ absolut-stetig, $g' = -i\, H' = -i\, h \in L^2$ und $T_1^* g = h = i\, g'$ ist.

($\supseteq$) Mittels partieller Integration folgt für $g \in D_1$ wegen $h(-1) = h(1)$ und $g(-1) = g(1)$, daß $\langle i\, h', g\rangle = -i \int h\, \overline{g}'$ ist und somit in $h \in D_1$ stetig ist. D.h. $g \in \operatorname{Dom} T^*$.

Der Impuls-Operator auf $L^2(\mathbb{R})$.

Es sei nun

$$D := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ ist lokal absolut-stetig und } f' \in L^2\},$$
$$T(f) := i\, f' \text{ für alle } f \in D.$$

Dieser Operator ist ebenfalls dicht-definiert, denn für jedes Intervall $[a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Trapez-Funktion, welche 1 ist auf $[a, b]$ und außerhalb einer $1/n$-Umgebung verschwindet. Diese Funktionen liegen in D und deren lineares Erzeugnis ist dicht in L^2.

Beh.: $T = T^*$. Daraus folgt mittels 9.8, daß T abgeschlossen ist.
($\subseteq$) Sei $g \in \operatorname{Dom} T^*$ und $T^* g = h$. Dann gilt für alle $f \in D$, daß $\int_{\mathbb{R}} i\, f'\, \overline{g} = \langle T\, f, g\rangle = \langle f, h\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\, \overline{h}$. Wählen wir für f insbesonders eine Trapez-Funktion f_n wie oben, so gilt:

$$n \int_{a-\frac{1}{n}}^{a} i\, \overline{g} - n \int_{b}^{b+\frac{1}{n}} i\, \overline{g} = \int_{\mathbb{R}} f_n\, \overline{h}.$$

Multiplikation mit i, Konjugieren, und Grenzübergang für $n \to \infty$ liefert $g(b) - g(a) = -i \int_a^b h$ für fast alle a und b, da die Stammfunktion $t \mapsto G(t) = \int_0^t g(s)\, ds$ einer $L^2[0, b] \subseteq L^1[0, b]$ Funktion fast überall differenzierbar ist und g als Ableitung besitzt und somit $\lim_{n\to\infty} n \int_t^{t\pm\frac{1}{n}} g = \lim_{n\to\infty} \frac{G(t\pm\frac{1}{n})-G(t)}{\pm\frac{1}{n}} = G'(t) = g(t)$ gilt. Da $L^2 \subseteq L^1_{loc}$ ist somit g lokal absolut-stetig und $g' = -i\, h$ fast überall. Also ist g in D und $T^* g = h = i\, g'$.

($\supseteq$) Sei dazu $g \in D$. Partielle Integration liefert $\int_a^b i\, f' \overline{g} = i\, f\, \overline{g}|_a^b + \int_a^b f\, \overline{i\, g'}$ und da $f\, \overline{g}$ integrierbar ist, ist $\liminf_{a\to-\infty, b\to\infty} |(f\, \overline{g})(b) - (f\, \overline{g})(a)| = 0$ und somit $\int_{-\infty}^{+\infty} i\, f' \overline{g} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\, \overline{i\, g'}$. D.h. $g \in \operatorname{Dom} T^*$ und $T^* g = i\, g'$.

Beh.: *T ist der Abschluß von $T|_{C_c^\infty}$.* Dazu müssen wir zeigen, daß für jedes $f \in D$ Funktionen $f_n \in C_c^\infty$ existieren mit $f_n \to f$ und $T f_n \to T f$ in L^2.
Wir zeigen zuerst, daß wir $f_n \in C^\infty \cap L^2$ finden. Dazu wählen wir ein $\rho \in C_c^\infty$ mit $\rho \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ und setzen $\rho_n : x \mapsto n\, \rho(nx)$ und $f_n := \rho_n \star f$. Wie in [**18**, 4.13.9] zeigt man, daß $\|f_n - f\|_2 = \|\rho_n \star f - f\|_2 \to 0$ (siehe auch [**2**, 55]) und $\rho_n \star f \in C^\infty \cap L^2$, da $\rho_n \in C^\infty \cap L^1$ und $f \in L^2$. Weiters ist $(\rho_n \star f)' = \rho_n \star f'$. Da $f' \in L^2$ gilt auch $T f_n = f_n' \in L^2$ und $\|T f_n - T f\|_2 = \|\rho_n \star f' - f'\|_2 \to 0$.
Sei nun $f \in C^\infty \cap L^2$ und wählen wir ein $\rho \in C_c^\infty$ mit $\rho(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\rho_n(x) := \frac{1}{n} \rho(\frac{x}{n})$. Es sei $f_n := \rho_n \cdot f$. Dann ist $f_n \in C_c^\infty$ und $f_n(x) = f(x)$ für $|x| \leq n$. Also konvergiert $f_n \to f$ punktweise und da $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ wegen dem Satz über dominierte Konvergenz auch bezüglich der 2-Norm. Weiters gilt $\|T f_n - T f\|_2 \leq \|\rho_n' \cdot f\|_2 + \|\rho_n \cdot f' - f'\|_2 \leq \|\rho_n'\|_\infty \cdot \|f\|_2 + \|\rho_n \cdot f' - f'\|_2 \leq \frac{1}{n} \|\rho'\|_\infty \cdot \|f\|_2 + \|\rho_n \cdot f' - f'\|_2 \to 0$.
Wir werden in 9.46 einen zweiten Beweis dieser Tatsache geben.

9.6 Bemerkung.

Es sei $T := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\, \partial^\alpha$ ein linearer partieller Differentialoperator der Ordnung $\leq m$ am $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$(Tu)(x) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x).$$

mit C^m-Funktionen a_α. Der transponierte Operator sei gegeben durch $T^t : v \mapsto \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha \cdot v)$. Für $u, v \in C^m$ gilt dann:

$$T(u)\cdot v - u \cdot T^t(v) = \operatorname{Div} J(u,v),$$

wobei $J = (J_1, \dots, J_n)$ ein n-Tupel von bilinearen partiellen Differentialoperatoren J_n der Ordnung $< m$ ist.

Beweis. Wir führen den Beweis für $m = 2$ (der allgemeine Fall geht analog). Sei also

$$T := \sum_{j,k} a_{j,k}\,\partial_j\partial_k + \sum_j b_j\,\partial_j + c.$$

Wir wollen die partiellen Ableitungen im Produkt $T(u)\cdot v$ von u auf v hinüberbekommen. Beginnen wir zuerst mit einen Term 1-ter Ordnung

$$b_j\,\partial_j u \cdot v = \partial_j(b_j\,u\,v) - u\cdot\partial_j(b_j\,v).$$

Für die Terme 2-ter Ordnung erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{j,k}\,\partial_j\partial_k u\cdot v &= \partial_j(a_{j,k}\,\partial_k u\cdot v) - \partial_j(a_{j,k}\,v)\cdot\partial_k u \\ &= \partial_j(a_{j,k}\,\partial_k u\cdot v) - \partial_k\left(\partial_j(a_{j,k}\,v)\cdot u\right) + \partial_k\partial_j(a_{j,k}\,v)\cdot u. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} T(u)\cdot v &= u\cdot\Big(\sum_{j,k}\partial_k\partial_j(a_{j,k}\,v) - \sum_j \partial_j(b_j\,v) + c\,v\Big) \\ &\qquad + \sum_j \partial_j \underbrace{\Big(\sum_k a_{j,k}\,\partial_k u\cdot v - \sum_k u\cdot\partial_k(a_{k,j}\,v) + b_j\,u\cdot v\Big)}_{=:J_j(u,v)} \\ &= u\cdot T^t(v) + \operatorname{Div} J(u,v), \end{aligned}$$

wobei $J := (J_1, \dots, J_n)$ und J_j folgender bilinearer partieller Differential-Operator der Ordnung 1 ist:

$$\begin{aligned} J_j(u,v) &= \sum_k a_{j,k}\,\partial_k u\cdot v - \sum_k u\cdot\partial_k(a_{k,j}\,v) + b_j\,u\cdot v \\ &= \sum_k\Big(a_{j,k}\,\partial_k u\cdot v - a_{k,j} u\cdot\partial_k v\Big) - \left(\sum_k \partial_k(a_{k,j}) - b_j\right) u\cdot v. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Divergenz-Satzes liefert somit

$$\int_B T(u)\cdot v - u\cdot T^t(v) = \int_B \operatorname{Div} J(u,v) = \int_{\partial B}\langle J(u,v), n_{\partial B}\rangle\ \mathrm{vol}_{\partial\mathrm{B}},$$

wobei $n_{\partial B} = (n_j)_j$ die nach außen weisende Einheits-Normale an die Fläche ∂B bezeichnet und $\mathrm{vol}_{\partial B}$ daß Oberflächen-Element ist.

Sei insbesonders $T(u) := \sum_{j,k}\partial_j(a_{j,k}\,\partial_k) + c\,u$ mit $\mathbb{R}$-wertigen C^2-Funktionen $a_{j,k} = a_{k,j}$ und c. Dann ist $a_{j,k}$ genau der Koeffizient in der allgemeinen Formel am Anfang des Beweises und $b_k = \sum_j \partial_j(a_{j,k})$. Der transponierte Operator ist in dieser Situation $T^t = T$, denn

$$\begin{aligned}
T^t(v) &:= \sum_{j,k} \partial_j\partial_k(v\, a_{j,k}) - \sum_j \partial_j\Big(v \sum_k \partial_k a_{k,j}\Big) + c\, v \\
&= \sum_{j,k}\Bigg(\partial_j\partial_k v\, a_{j,k} + \partial_k v\, \partial_j a_{j,k} + \partial_j v\, \partial_k a_{j,k} + \partial_j\partial_k a_{j,k}\, v\Bigg) \\
&\quad - \sum_{j,k} (\partial_j v\, \partial_k a_{k,j} + v\, \partial_j\partial_k a_{k,j}) + c\, v \\
&= \sum_{j,k} (a_{j,k}\, \partial_j\partial_k v + \partial_j v\, \partial_k a_{j,k}) + c\, v \\
&= T(v).
\end{aligned}$$

Es sei die Ableitung $\frac{\partial}{\partial n}$ in die "ko-normalen"-Richtung definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial n} := \sum_{j,k} a_{j,k}\, n_j\, \partial_k.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_B T(u)\cdot v - u \cdot T^t(v) &= \int_B \operatorname{Div} J(u,v) = \int_{\partial B} \langle J(u,v), n_{\partial B}\rangle \operatorname{vol}_{\partial B} \\
&= \int_{\partial B} \sum_j \Bigg(\sum_k \Big(a_{j,k}\, \partial_k u \cdot v - a_{k,j} u \cdot \partial_k v\Big) \\
&\quad - \Big(\sum_k \partial_k(a_{k,j}) - \sum_k \partial_k(a_{k,j})\Big)\, u\cdot v\Bigg)\, n_j \operatorname{vol}_{\partial B} \\
&= \int_{\partial B} \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\cdot v - u \cdot \frac{\partial v}{\partial n}\Big) \operatorname{vol}_{\partial B},
\end{aligned}$$

Diese Integral verschwindet genau dann, wenn der normal-Anteil von $J(u,v)|_{\partial B}$ verschwindet, und insbesonders dann, wenn $u|_{\partial B} = 0$ und entweder $v|_{\partial B} = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial B} = 0$. □

Wir benötigen folgende Beschreibung (des Graphen) von T^*:

9.7 Proposition.

Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ dicht-definiert und $J : H_1 \oplus H_2 \to H_2 \oplus H_1$ gegeben durch $J(f,g) = (-g,f)$. Dann ist J eine bijektive Isometrie und

$$\operatorname{Graph} T^* = (J(\operatorname{Graph} T))^\perp.$$

Beweis. Offensichtlich ist J eine bijektive Isometrie.

($\subseteq$) Es sei also $g \in \operatorname{Dom} T^*$ und $f \in \operatorname{Dom} T$, dann ist

$$\langle (g, T^* g), J(f, T\, f)\rangle = -\langle g, T\, f\rangle + \langle T^* g, f\rangle = 0.$$

($\supseteq$) Es sei $(g,h) \in (J(\operatorname{Graph} T))^\perp$. Für alle $f \in \operatorname{Dom} T$ gilt dann $0 = \langle (g,h), (-Tf, f)\rangle = -\langle g, Tf\rangle + \langle h, f\rangle$. Also ist $g \in \operatorname{Dom} T^*$ und $h = T^* g$. □

9.8 Proposition.

Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein dicht-definierter Operator. Dann gilt:

1. *T^* ist ein abgeschlossener Operator.*
2. *T^* ist dicht-definiert genau dann, wenn T abschließbar ist.*
3. *Falls T abschließbar ist, so ist sein Abschluß T^{**}.*

Beweis. (1) Nach 9.7 ist $\operatorname{Graph} T^*$ also orthogonales Komplement abgeschlossen, d.h. T^* ein abgeschlossener Operator.

Für den Rest beachte man, daß die Abbildung J ein bijektive Isometrie ist mit Inverser $J^{-1} : H_2 \oplus H_1 \to H_1 \oplus H_2$, $(g, f) \mapsto (f, -g)$.

(2) ($\Leftarrow$) Wir müssen zeigen, daß $(\operatorname{Dom} T^*)^\perp = \{0\}$ ist: Für $k \in (\operatorname{Dom} T^*)^\perp$ ist $(k, 0) \in (\operatorname{Graph} T^*)^\perp \overset{9.7}{=\!=} (J(\operatorname{Graph} T))^{\perp\perp} = \overline{J(\operatorname{Graph} T)} = J(\overline{\operatorname{Graph} T})$, d.h. $(0, -k) = J^{-1}(k, 0) \in J^{-1}J(\overline{\operatorname{Graph} T}) = \overline{\operatorname{Graph} T}$. Da T abschließbar ist, ist $k = 0$ nach 9.2.

($\Rightarrow$) Es sei $\operatorname{Dom} T^*$ dicht. Dann ist $T^{**} = (T^*)^*$ definiert und nach (1) ein abgeschlossener Operator. Es gilt $T \subseteq T^{**}$ (also ist T^{**} eine abgeschlossene Erweiterung), denn für alle $f \in \operatorname{Dom} T$ ist $g \mapsto \langle g, Tf\rangle = \langle T^*g, f\rangle$ ein wohldefiniertes beschränktes Funktional auf $\operatorname{Dom} T^*$, also $f \in \operatorname{Dom} T^{**}$ und $T^{**}f = Tf$.

(3) Es gilt nach 9.7 angewendet auf T^*, daß $\operatorname{Graph} T^{**} = (J' \operatorname{Graph} T^*)^\perp$ wobei $J' : H_2 \oplus H_1 \to H_1 \oplus H_2$ gegeben ist durch $J'(g, f) := (-f, g) = -(f, -g) = -J^{-1}(g, f)$. Also ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Graph} T^{**} = (-J^{-1} \operatorname{Graph} T^*)^\perp &\overset{9.7}{=\!=} (-J^{-1}(J \operatorname{Graph} T)^\perp)^\perp \\ &\overset{J^{-1}\text{ Isometr.}}{=\!=\!=\!=} (-J^{-1}J \operatorname{Graph} T)^{\perp\perp} = \overline{-\operatorname{Graph} T} = \overline{\operatorname{Graph} T}. \quad \square\end{aligned}$$

9.9 Folgerung.

Es sei T abgeschlossen und dicht-definiert. Dann ist auch T^* abgeschlossen und dicht-definiert und es gilt $T^{**} = T$. $\square$

9.10 Proposition.

Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ dicht-definiert. Dann ist

$$(\operatorname{Bild} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^*.$$

Falls T zusätzlich abgeschlossen ist, so ist

$$(\operatorname{Bild} T^*)^\perp = \operatorname{Ker} T.$$

Beweis. ($\subseteq$) Falls $g \perp \operatorname{Bild} T$, dann gilt $\langle Tf, g\rangle = 0 = \langle f, 0\rangle$ für alle $f \in \operatorname{Dom} T$. Also ist $g \in \operatorname{Dom} T^*$ und $T^*g = 0$.
($\supseteq$) Es sei $g \in \operatorname{Ker} T^*$. Für alle $f \in \operatorname{Dom} T$ gilt dann $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle = \langle f, 0\rangle = 0$.

Nach Folgerung 9.9 ist $T^{**} = T$ für abgeschlossenes, dicht-definiertes T und somit folgt die zweite Gleichung von der ersten. $\square$

9.11 Satz vom abgeschlossenen Bild.

Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein dicht-definierter, abgeschlossener Operator. Dann ist $\operatorname{Bild} T$ *genau dann abgeschlossen, wenn* $\operatorname{Bild} T^*$ *es ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß wir im Beweis T durch einen beschränkten Operator S ersetzen können. Sei dazu $S : H_1 \times H_2 \supseteq \operatorname{Graph} T \to H_2$ die Projektion auf den

2.ten Faktor. Wir haben folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
H_1 & \supseteq & \operatorname{Dom} T \arrow[rr, two heads, "T"] & & \operatorname{Bild} T & \subseteq & H_2 \\
& & & \operatorname{Graph} T \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[ur, "S"] \arrow[d, hook, "\iota"', "\cap"] & & & \\
& & & H_1 \oplus H_2 \arrow[uulll, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[uurrr, "\mathrm{pr}_2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen nun, daß für das Bild des adjungierten Operators

$$S^* : H_2^* \to (\operatorname{Graph} T)^* = (H_1^* \oplus H_2^*)/(\operatorname{Graph} T)^o$$

folgendes gilt:

$$(\iota^*)^{-1}(\operatorname{Bild} S^*) = \operatorname{Bild} T^* \oplus H_2^* \subseteq H_1^* \oplus H_2^*.$$

$$\begin{aligned}
&(f^*, g^*) \in (\iota^*)^{-1}(\operatorname{Bild} S^*)\\
\Leftrightarrow\ &(f^*, g^*)|_{\operatorname{Graph} T} =: \iota^*(f^*, g^*) \in \operatorname{Bild} S^*\\
\Leftrightarrow\ &\exists h^* \in H_2^* : (f^*, g^*)|_{\operatorname{Graph} T} = S^*(h^*)\\
\Leftrightarrow\ &\exists h^* \in H_2^* \forall f \in \operatorname{Dom} T : \underbrace{(f^*, g^*)(f, Tf)}_{f^*(f)+g^*(Tf)} = \underbrace{S^*(h^*)(f, Tf)}_{h^*(Tf)}\\
\Leftrightarrow\ &\exists h^* \in H_2^* \forall f \in \operatorname{Dom} T : f^*(f) = (h^* - g^*)(Tf)\\
&\quad \text{d.h. } h^* - g^* \in \operatorname{Dom} T^*,\ T^*(h^* - g^*) = f^*\\
\Leftrightarrow\ &\exists h^* \in g^* + \operatorname{Dom} T^* : T^*(h^* - g^*) = f^*\\
\Leftrightarrow\ &f^*, g^* \in \operatorname{Bild} T^* \oplus H_2^*,
\end{aligned}$$

Wobei das letzte ($\Leftarrow$) so folgt: $\exists k^* \in \operatorname{Dom} T^* : f^* = T^* k^*$. Nun wähle $h^* = g^* + k^*$.

Da ι eine abgeschlossene Einbettung ist, ist ι^* eine Quotientenabbildung nach 5.2.4, und somit ist $\operatorname{Bild} S^*$ genau dann abgeschlossen, wenn $(\iota^*)^{-1}(\operatorname{Bild} S^*) = \operatorname{Bild} T^* \oplus H_2^*$, oder äquivalent $\operatorname{Bild} T^*$, es ist. Wegen $\operatorname{Bild} T = \operatorname{Bild} S$ genügt es den Satz für den beschränkten Operator S zu zeigen.

($\Rightarrow$) Sei also $T : H_1 \to H_2$ ein beschränkter linearer Operator mit abgeschlossenem Bild. Da die Adjungierte der Inklusion $\operatorname{Bild} T \to H_2$ nach Hahn-Banach surjektiv ist, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß T surjektiv ist. Nach dem offenen Abbildungssatz existiert ein $\delta > 0$ mit $\{g : \|g\| \le \delta\} \subseteq \{Tf : \|f\| \le 1\}$. Also existiert zu $g \in H_2$ ein $f \in T^{-1}(g)$ mit $\|f\| \le \frac{\|g\|}{\delta}$. Für alle $g^* \in H_2^*$ erhalten wir somit

$$|g^*(g)| = |g^*(Tf)| = |T^* g^*(f)| \le \|f\| \, \|T^* g^*\| \le \frac{\|g\|}{\delta} \|T^* g^*\|.$$

Folglich ist $\|g^*\| =\le \frac{1}{\delta} \|T^* g^*\|$. Also ist $T^* : H_2^* \to H_1^*$ injektiv und ein Homöomorphismus auf sein Bild und damit ist $\operatorname{Bild} T^*$ abgeschlossen.

Da $T^{**} = T$ nach 9.9 ist, gilt auch die Umkehrung. □

Dieser Satz gilt auch für Banach-Räume.

Beweis für Banach-Räume. ($\Rightarrow$) Im obigen Beweis haben wir nirgends verwendet, daß die Räume Hilbert-Räume sind.

($\Leftarrow$) Sei also $T : H_1 \to H_2$ ein beschränkter linearer Operator und $T^* : H_2^* \to H_1^*$ habe abgeschlossenes Bild. Wir ersetzen T durch Operator $T_1 : H_1 \to \overline{\operatorname{Bild} T}$. Da $T = \iota \circ T_1$ wobei ι die abgeschlossene Inklusion von $\overline{\operatorname{Bild} T}$ nach H_2 bedeutet, ist $T^* = T_1^* \circ \iota^*$ und ι^* ist surjektiv. Also hat T_1^* das gleiche abgeschlossenes Bild wie

T^* und wir müssen nur zeigen, daß T_1 surjektiv ist. Sei also o.B.d.A. $T = T_1$, d.h. T habe dichtes Bild.

Es ist $T^* : H_2^* \to H_1^*$ injektiv, denn $T^* g^* = 0$ hat zur Folge, daß $\langle Tf, g^* \rangle = \langle f, T^* g^* \rangle = 0$. Da das Bild von T dicht liegt in H_2 ist $g^* = 0$. Nach dem offenen Abbildungssatz ist $T^* : H^* \to \operatorname{Bild} T^*$ ein Homöomorphismus auf sein abgeschlossenes Bild. Um zu zeigen, daß T surjektiv ist, wenden wir wie im Beweis des Satzes von der offenen Abbildung den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die Inverse $S := \tilde{T}^{-1}$ der injektiven Abbildung $\tilde{T} : H_1/_{\mathrm{KernT}} \to H_2$ an.

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[r, two heads, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & \operatorname{Bild} T \arrow[r, hook] & H_2 \\
& H_1/\operatorname{Ker} T \arrow[u, two heads, "\tilde{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

Im Beweis des Satzes vom abgeschlossenen Graphen haben wir die nicht-Magerheit von $G := \operatorname{Bild} T$ nur dazu benutzt, um zu zeigen, daß S fast stetig ist, d.h. für alle $\delta > 0$ der Abschluß von $S^{-1}(\{z : \|z\| \leq \delta\}) = T(\{x : \|x\| \leq \delta\})$ eine Null-Umgebung enthält. Es genügt also dies zu zeigen.

Angenommen es gäbe ein $\delta > 0$, so daß der Abschluß des Bildes des Balles $\{Tx : \|x\| \leq \delta\}$ keine 0-Umgebung enthält. D.h. $\exists y_n \notin \overline{\{Tx : \|x\| \leq \delta\}}$ mit $y_n \to 0$. Da dieser Abschluß absolut-konvex ist, existiert nach Mazur's Lemma 5.2.4 ein stetig lineares Funktional f_n mit $f_n(y_n) > \sup_{\|x\| \leq \delta} |f_n(Tx)| = \sup_{\|x\| \leq \delta} |T^*(f_n)(x)|$. Folglich ist $\|T^* f_n\| < \frac{1}{\delta} \|f_n\| \, \|y_n\|$ und wegen $y_n \to 0$ folgt, daß T^* kein Homömorphismus auf sein Bild sein kann, ein Widerspruch. □

Invertierbarkeit und Spektrum

9.12 Definition.

Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein linearer Operator. Dann heißt T BESCHRÄNKT INVERTIERBAR, falls ein beschränkter linearer Operator $S : H_2 \to H_1$ existiert mit $T\,S = 1$ und $S\,T \subseteq 1$, d.h. $S\,T = 1$ auf $\operatorname{Dom} T$ (denn $\operatorname{Dom}(ST) = T^{-1}(\operatorname{Dom}(S)) = \operatorname{Dom} T$). Achtung: diese Definition ist recht unsymmetrisch!

9.13 Proposition.

Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein linearer Operator. Dann ist T genau dann beschränkt invertierbar, wenn T abgeschlossen ist und $T : \operatorname{Dom} T \to H_2$ bijektiv ist. Unter diesen Voraussetzungen ist sein Inverses eindeutig.

Wir werden die eindeutig bestimmte Inverse eines beschränkt invertierbaren Operators T mit T^{-1} bezeichnen.

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei S ein beschränktes Inverses. Da $S\,T \subseteq 1$ ist $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Wegen $T\,S = 1$ ist $\operatorname{Bild} T = H_2$, d.h. $T : \operatorname{Dom} T \to H_2$ ist bijektiv und $S : H_2 \to \operatorname{Dom} T$ sein Inverses, denn $T\,S = 1$ und $S\,T = 1$ auf $\operatorname{Dom} T$. Also ist S eindeutig. Schließlich ist $\operatorname{Graph} T = \{(h, Th) : h \in \operatorname{Dom} T\} = \{(Sk, k) : k \in H_2\}$. Da S beschränkt ist, ist folglich dieser Graph abgeschlossen.

($\Leftarrow$) Falls T die angegebenen Eigenschaften besitzt, so ist die Inverse $S : \operatorname{Bild} T = H_2 \to \operatorname{Dom} T$ eine wohldefinierte lineare Abbildung mit $\operatorname{Graph} S = \{(k, Sk) : k \in H_2\} = \{(Th, h) : h \in \operatorname{Dom} T\}$. Also ist dieser Graph abgeschlossen. Und nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist S beschränkt. □

Lemma.

Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein dicht-definierter, abgeschlossener Operator. Dann ist T genau dann beschränkt invertierbar, wenn T^* es ist. Unter dieser Bedingung ist $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei also T beschränkt invertierbar, und $S : H_2 \to \operatorname{Dom} T \subseteq H_1$ die beschränkte Inverse. Dann ist $S^* \in L(H_1^*, H_2^*)$ wohldefiniert.

($S^* T^* \subseteq 1$) Sei $k \in \operatorname{Dom}(S^* T^*) = \operatorname{Dom}(T^*)$. Für $g \in \operatorname{Dom} S = H_2$ gilt

$$\langle g, S^* T^* k\rangle = \langle S\, g, T^* k\rangle \overset{S\, g \,\in\, \operatorname{Dom} T}{=\!=\!=\!=} \langle T\, S\, g, k\rangle = \langle g, k\rangle.$$

($T^* S^* = 1$) Es sei $h \in H_1$. Dann ist $S^* h \in \operatorname{Dom} T^*$, denn $f \mapsto \langle T\, f, S^* h\rangle = \langle S\, T\, f, h\rangle = \langle f, h\rangle$ ist beschränkt. Für alle $f \in \operatorname{Dom} T$ gilt weiters $\langle f, T^* S^* h\rangle = \langle T f, S^* h\rangle = \langle S\, T\, f, h\rangle = \langle f, h\rangle$, also ist $T^* S^* = 1$.

($\Leftarrow$) Mit T^* ist wegen ($\Rightarrow$) auch T^{**} beschränkt invertierbar, und dies ist T nach 9.9. □

9.14 Definition.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein linearer Operator. Unter der Resolventen-Menge $\rho(T)$ versteht man die Menge

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ ist beschränkt invertierbar}\}.$$

Das Spektrum von T ist die Menge $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Wir werden gleich begründen, warum im Unterschied zu beschränkten Operatoren nun $\rho(T)$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ und nicht $\mathbb{C}_\infty$ definiert ist.

9.15 Proposition.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein linearer Operator, so ist $\sigma(T)$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$ und die Resolventen-Funktion $z \mapsto (z - T)^{-1}$ ist holomorph $\rho(T) \to L(H)$.

Beweis. Es sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $(\lambda_0 - T)^{-1}$ das beschränkte Inverse. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned}(\lambda - T)^{-1} := \frac{1}{(\lambda_0 - T) - (\lambda_0 - \lambda)} &:= (\lambda_0 - T)^{-1} \frac{1}{1 - (\lambda_0 - \lambda)\,(\lambda_0 - T)^{-1}} \\ &:= (\lambda_0 - T)^{-1} \sum_{k \ge 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \left((\lambda_0 - T)^{-1}\right)^k \\ &= \sum_{k \ge 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \left((\lambda_0 - T)^{-1}\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert absolut für $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - T)^{-1}\|}$ und $(\lambda - T)^{-1}$ hat Werte in $\operatorname{Bild}(\lambda_0 - T)^{-1} = \operatorname{Dom}(\lambda_0 - T) = \operatorname{Dom} T$. Es ist

$$\begin{aligned}&(\lambda_0 - T)^{-1} \sum_{k \ge 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \left((\lambda_0 - T)^{-1}\right)^k (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - T) \\ &\quad = -\sum_{k \ge 0} (\lambda_0 - \lambda)^{k+1} \left((\lambda_0 - T)^{-1}\right)^{k+1} + \sum_{k \ge 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \left((\lambda_0 - T)^{-1}\right)^k = 1\end{aligned}$$

auf $\operatorname{Dom} T$. Analog zeigt man, daß auf ganz H auch die umgekehrte Zusammensetzung 1 ergibt. Also ist $\rho(T)$ offen und die Resolventen-Funktion lokal in eine Potenzreihe mit Koeffizienten in $L(H)$ entwickelbar. □

Bemerkung.

Wenn $T : H \rightsquigarrow H$ ein linearer Operator ist und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\operatorname{Graph} T$ genau dann abgeschlossen, wenn die durch Scherung mit $(x, y) \mapsto (x, y - \lambda x)$ erhaltene Menge $\operatorname{Graph}(T - \lambda)$ abgeschlossen ist. Also ist für nicht abgeschlossene Operatoren das Spektrum ganz $\mathbb{C}$.

Falls T definiert ist wie in Beispiel 9.4, so ist $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$, denn jedes λ_n ist Eigenwert und nach 9.15 ist $\sigma(T)$ abgeschlossen. Umgekehrt ist für μ mit $\delta := d(\mu, \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}) > 0$ die Abbildung $T - \mu$ gegeben durch $(x_n)_n \mapsto ((\lambda_n - \mu)x_n)_n$ offensichtlich injektiv und abgeschlossen. Sie ist aber auch surjektiv, denn für $(y_n)_n \in \ell^2$ ist wegen $(\frac{1}{\lambda_n - \mu_n})_n \in \ell^\infty$ ein Urbild durch $x_n := \frac{1}{\lambda_n - \mu_n} y_n$ gegeben.

Also kann jede abgeschlossene Menge $A \neq \emptyset$ als Spektrum eines abgeschlossenen dicht-definierten linearen Operators T auftreten, denn wählt man Zerlegungen von $\mathbb{C}$ in Quadrate mit Seitenlänge $\frac{1}{2^n}$ und für jedes Quadrat welches A trifft einen Schnittpunkt, so enthält eine abzählbare in A dichte Teilmenge $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ und kann als T den entsprechenden Multiplikations-Operator wählen.

Es kann aber auch $\sigma(T) = \emptyset$ sein. Sei dazu ein $S \in L(H)$ mit dichten Bild und $\sigma(S) = \{0\}$ gegeben (siehe Beispiel 9.16). Wir setzen $\operatorname{Dom} T := \operatorname{Bild} S$ und $T := S^{-1} : \operatorname{Bild} S \twoheadrightarrow H$. Dann ist T abgeschlossen, dicht definiert und beschränkt invertierbar mit $T^{-1} = S$. Wir zeigen nun, daß auch alle $\lambda \neq 0$ in $\rho(T)$ liegen. Dazu machen wir wie in 9.15 den Ansatz

$$(\lambda - T)^{-1} := -T^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda T^{-1})^k = -S \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k S^k.$$

Diese Reihe konvergiert absolut in $L(H)$ für alle λ nach dem Wurzelkriterium, denn $\sqrt[k]{\|\lambda^k S^k\|} = |\lambda| \, \|S^k\|^{1/k} \to \|\lambda\| \, r(S) = 0$ nach 6.25. Daß sie ein Inverses zu $\lambda - T$ ist, folgt wie in 9.15.

9.16 Beispiel.

Es sei $T \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ gegeben durch $(Tx)_n := e^{-n^2} x_{n-1}$, d.h. als Zusammensetzung des Shift-Operators mit dem Multiplikations-Operator mit $n \mapsto e^{-n^2}$.

Da alle $e_n \in \operatorname{Bild} T$, ist $\operatorname{Bild} T$ dicht in ℓ^2.

Wir zeigen nun $\sigma(T) = \{0\}$, d.h. $0 = r(T) = \lim_k \|T^k\|^{1/k}$ nach 6.25. Offensichtlich ist

$$(T^k x)_n = e^{-n^2} e^{-(n-1)^2} \cdots e^{-(n-k+1)^2} x_{n-k}$$

und somit

$$\begin{aligned}\|T^k x\|_2^2 &= \sum_n |(T^k x)_n|^2 = \sum_n \Big| e^{-n^2} e^{-(n-1)^2} \cdots e^{-(n-k+1)^2} x_{n-k} \Big|^2 \qquad (m := n - k)\\ &= \sum_m e^{-2((m+k)^2 + \cdots + (m+1)^2)} |x_m|^2 \leq e^{-(k-1)^2} |x_m|^2 \quad \text{für } k \geq 2,\end{aligned}$$

denn $(m+k)^2 + \cdots + (m+1)^2 \geq (m+k)^2 + (m+1)^2 = 2(m+k)(m+1) + (k-1)^2 \geq (k-1)^2$. Also ist $\|T^k\| \leq e^{-(k-1)^2}$ und $r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} e^{-\frac{(k-1)^2}{k}} = 0$.

9.17 Proposition.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener, dicht-definierter linearer Operator. Dann gilt:

1. *$\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn $(T - \lambda) : \operatorname{Dom} T \to H$ bijektiv ist.*
2. *Es ist $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$ und für $\lambda \in \rho(T)$ gilt $(T^* - \overline{\lambda})^{-1} = ((T - \lambda)^{-1})^*$.*

Beweis. Nach $\boxed{9.13}$ ist $T-\lambda$ genau dann beschränkt invertierbar, wenn $T-\lambda$ bijektiv ist von $\operatorname{Dom}(T-\lambda) = \operatorname{Dom} T$ nach H und der Graph abgeschlossen ist. Das zeigt ($\boxed{1}$).

($\boxed{2}$) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lambda \notin \sigma(T) &\Leftrightarrow T-\lambda \text{ ist beschränkt invertierbar}\\ &\xLeftrightarrow{\boxed{9.13}} T^* - \overline{\lambda} = (T-\lambda)^* \text{ ist beschränkt invertierbar}\\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)\end{aligned}$$

und für solche λ ist $(T^*-\overline{\lambda})^{-1} = ((T-\lambda)^*)^{-1} \overset{\boxed{9.13}}{=\!=} ((T-\lambda)^{-1})^*$. □

Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

9.18 Definition.

Ein Operator $T : H \rightsquigarrow H$ heißt SYMMETRISCH, falls er dicht-definiert ist und $\langle Th, k\rangle = \langle h, Tk\rangle$ für alle $h,k \in \operatorname{Dom} T$ erfüllt.

Lemma.

Es sei

$$T(u)(x) := \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(a_{j,k}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k} u(x)\right) + c(x)\,u(x)$$

ein partieller Differential-Operator der Ordnung 2 mit reellen C^2-Funktionen c und $a_{j,k} = a_{k,j}$ als Koeffizienten. Dann ist T symmetrisch als Operator mit $\operatorname{Dom} T := C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ oder falls $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂G ist auch als Operator T mit $\operatorname{Dom} T := \{f \in C^\infty(\overline{G}) : f|_{\partial G} = 0\} \subseteq L^2(\overline{G})$.

Beweis. Nach $\boxed{9.6}$ ist der transponierte Operator $T^t = T$ und erfüllt

$$\int_G T(u)\cdot v = \int_G u \cdot T^t(v),$$

also ist für $v = \overline{w}$ auch

$$\langle T(u), w\rangle = \int_G T(u)\cdot v = \int_G u\cdot Tv = \langle u, \overline{T(v)}\rangle = \langle u, T(w)\rangle,$$

da T reelle Koeffizienten hat. D.h. T ist symmetrisch. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{j,k}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k}u(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}a_{j,k}(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}u(x) + a_{j,k}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}u(x)$$

und somit der formal adjungierte Differential-Operator T^* auf $v \in C^2$ gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
T^*(v)(x) &:= \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\Big(v(x)\, a_{j,k}(x)\Big) \\
&\qquad - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(v(x) \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} a_{k,j}(x)\Big) + c(x)\, v(x) \\
&= \sum_{j,k}\Bigg(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_k \partial x_j}\, a_{j,k}(x) + \frac{\partial v(x)}{\partial x_k}\,\frac{\partial a_{j,k}(x)}{\partial x_j} \\
&\qquad + \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,\frac{\partial a_{j,k}(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 a_{j,k}(x)}{\partial x_k \partial x_j}\, v(x)\Bigg) \\
&\qquad - \sum_{j,k}\left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,\frac{\partial a_{k,j}(x)}{\partial x_k} + v(x)\,\frac{\partial^2 a_{k,j}(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right) + c(x)\, v(x) \\
&= \sum_{j,k}\left(a_{j,k}(x)\,\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,\frac{\partial a_{j,k}(x)}{\partial x_k}\right) + c(x)\, v(x) \\
&= T(v)(x). \quad \square
\end{aligned}
$$

9.19 Lemma.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ dicht-definiert. Dann sind äquivalent:

1. *T ist symmetrisch;*
2. *$T \subseteq T^*$.*
3. *$\langle Th, h\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $h \in \operatorname{Dom} T$;*

Beweis. ($\boxed{1} \Leftrightarrow \boxed{2}$), denn

$$
\begin{aligned}
(\boxed{2}) &\Leftrightarrow \forall g \in \operatorname{Dom} T : g \in \operatorname{Dom} T^* \text{ und } T^* g = Tg \\
&\Leftrightarrow \forall g \in \operatorname{Dom} T : f \mapsto \langle Tf, g\rangle \text{ ist beschränkt auf } \operatorname{Dom} T \\
&\qquad\qquad \text{und } \forall f \in \operatorname{Dom} T : \langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle \\
&\Leftrightarrow (\boxed{1}),
\end{aligned}
$$

denn die zweite Bedingung der vorletzen Zeile impliziert offensichtlich die erste.

($\boxed{1} \Leftrightarrow \boxed{3}$)

$$
\begin{aligned}
(\boxed{1}) &\Leftrightarrow \forall f, g \in \operatorname{Dom} T : p(f,g) := \langle Tf, g\rangle - \langle f, Tg\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall f \in \operatorname{Dom} T : 0 = p(f,f) = \langle Tf, f\rangle - \overline{\langle Tf, f\rangle} \\
&\Leftrightarrow \forall f \in \operatorname{Dom} T : \langle Tf, f\rangle \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

wegen der Polarisierungs-Gleichung $\boxed{7.6}$ für die sesqui-lineare Form $p : \operatorname{Dom} T \times \operatorname{Dom} T \to \mathbb{C}$. $\square$

9.20 Definition.

Es muß für einen symmetrischen Operator T nicht $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom} T^*$ gelten, siehe Beispiel $\boxed{9.5}$. Also nennen wir einen Operator $T : H \rightsquigarrow H$ SELBST-ADJUNGIERT, falls er dicht definiert ist und $T = T^*$ erfüllt. Insbesonders ist jeder selbst-adjungierte Operator symmetrisch. Folgerung $\boxed{9.8.1}$ zeigt, daß jeder selbst-adjungierte Operator abgeschlossen ist.

Auch muß der Adjungierte eines symmetrischen Operators nicht symmetrisch sein: In Beispiel 9.5 haben wir gesehen, daß $T_0^* \supset T_1^* = T_1 \supset T_0 = T_0^{**}$ nach 9.9. Also nennen wir einen dicht-definierten Operator $T : H \rightsquigarrow H$ ESSENTIELL SELBST-ADJUNGIERT, falls T und T^* symmetrisch sind.

Lemma.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein dicht-definierter Operator. Dann gilt:

1. *Es ist T genau dann essentiell selbstadjungiert, wenn T^* selbst-adjungiert ist.*
2. *Falls T symmetrisch ist, so ist T abschließbar und sein Abschluß T^{**} ebenfalls symmetrisch.*

Beweis. (1) ($\Rightarrow$) Da T symmetrisch ist gilt $T \subseteq T^*$. Daraus folgt leicht $T^* \supseteq (T^*)^* = T^{**}$. Da T^* symmetrisch ist, gilt auch die umgekehrte Inklusion.
($\Leftarrow$) Wenn T^* selbst-adjungiert ist, so ist er dicht definiert und damit $T^* = T^{**}$ der Abschluß von T nach 9.8.2 und 9.8.3, also ist T als Einschränkung von T^* ebenfalls symmetrisch.

(2) Da T dicht-definiert ist, macht T^* Sinn. Und weil T symmetrisch ist gilt $\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom} T^*$. Also ist auch T^* dicht-definiert und somit ist T^{**} der Abschluß von T wieder nach 9.8.2 und 9.8.3.

Da $\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom} T^{**}$ ist auch T^{**} dicht-definiert. Somit macht T^{***} Sinn. Aus $T \subseteq T^*$ folgt $T^* \supseteq T^{**}$ und schließlich $T^{**} \subseteq T^{***}$, also ist T^{**} symmetrisch. $\square$

9.21 Proposition.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein symmetrischer Operator.

1. *Falls* $\operatorname{Bild} T$ *dicht ist, so ist T injektiv.*
2. *Falls T selbst-adjungiert und injektiv ist, so ist* $\operatorname{Bild} T$ *dicht und T^{-1} ebenfalls selbst-adjungiert.*
3. *Ist* $\operatorname{Dom} T = H$, *so ist T selbst-adjungiert und T beschränkt.*
4. *Ist* $\operatorname{Bild} T = H$, *so ist T selbst-adjungiert und T^{-1} beschränkt.*

Beweis. (1) Es sei $Th = 0$, dann ist $0 = \langle Th, k\rangle = \langle h, Tk\rangle$ für alle $k \in \operatorname{Dom} T$ und da $\operatorname{Bild} T = T(\operatorname{Dom} T)$ dicht ist, ist $h = 0$.

(2) Wegen 9.10 ist $(\operatorname{Bild} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Ker} T = \{0\}$, d.h. $\operatorname{Bild} T$ ist dicht Es ist ein Operator S genau dann selbst-adjungiert, wenn $\operatorname{Graph} S = \operatorname{Graph} S^* = (J \operatorname{Graph} S)^\perp$ nach 9.7. Weiters ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Graph}(T^{-1}) &= \{(g, T^{-1}g) : g \in \operatorname{Dom}(T^{-1}) = \operatorname{Bild} T\} = \{(Tf, f) : f \in \operatorname{Dom} T\}\\ &= J \operatorname{Graph}(-T).\end{aligned}$$

Wegen $(-T)^* = -T^* = -T$ folgt schließlich

$$\begin{aligned}(J \operatorname{Graph} T^{-1})^\perp &= (J\,J \operatorname{Graph}(-T))^\perp\\ &= J\left((J \operatorname{Graph}(-T))^\perp\right)\\ &= J(\operatorname{Graph}(-T))\\ &= \operatorname{Graph}(T^{-1}),\end{aligned}$$

und somit ist T^{-1} selbst-adjungiert.

(3) Nach 9.19 ist $T \subseteq T^*$ und falls $\operatorname{Dom} T = H$, so ist $T = T^*$ und damit somit nach 9.8 abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist dann aber T beschränkt.

(4) Falls $\operatorname{Bild} T = H$ so ist T injektiv nach (1). Sei $S := T^{-1}$ mit $\operatorname{Dom} S = \operatorname{Bild} T = H$. Es ist S symmetrisch, denn für $f, g \in \operatorname{Dom} S$, d.h. $f = Th$ und $g = Tk$ mit $h, k \in \operatorname{Dom} T$, ist $\langle Sf, g\rangle = \langle h, Tk\rangle = \langle Th, k\rangle = \langle f, Sg\rangle$. Nach (3) ist S ein beschränkter selbst-adjungierter injektiver Operator und nach (2) ist $T = S^{-1}$ selbst-adjungiert. □

Spektrum symmetrischer Operatoren

Wir müssen die $\lambda \in \rho(T)$ für symmetrisches T untersuchen. Nach 9.17 ist das für abgeschlossenes T zur Bijektivität von $T - \lambda : \operatorname{Dom} T \to H$ äquivalent, also sollten wir $\operatorname{Ker}(T - \lambda)$ und $\operatorname{Bild}(T - \lambda)$ bestimmen. Dazu

9.22 Proposition.

Es sei T symmetrisch und $\lambda = \alpha + i\,\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. *Für alle $f \in \operatorname{Dom} T$ ist $\|(T - \lambda)f\|^2 = \|(T - \alpha)f\|^2 + \beta^2\|f\|^2$.*
2. *Für $\beta \neq 0$ ist $\operatorname{Ker}(T - \lambda) = \{0\}$.*
3. *Falls T abgeschlossen ist und $\beta \neq 0$ ist, so ist $\operatorname{Bild}(T - \lambda)$ abgeschlossen.*

Beweis. (1) Es gilt:

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda)f\|^2 &= \|(T-\alpha)f - i\,\beta\, f\|^2\\ &= \|(T-\alpha)f\|^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle (T-\alpha)f, i\,\beta f\rangle) + \|\beta\, f\|^2\\ &= \|(T-\alpha)f\|^2 + 2\beta\,\mathfrak{Im}(\langle (T-\alpha)f, f\rangle) + \beta^2\|f\|^2.\end{aligned}$$

Wegen $\langle (T-\alpha)f, f\rangle = \langle Tf, f\rangle - \alpha\|f\|^2 \in \mathbb{R}$ folgt (1).

(2) folgt direkt aus (1).

(3) Es ist $\|(T-\lambda)f\|^2 \geq \beta^2\|f\|^2$. Sei nun $f_n \in \operatorname{Dom} T$ mit $(T-\lambda)f_n \to g$. Wegen der Ungleichung ist f_n eine Cauchy-Folge. Sei $f := \lim_n f_n$. Da $(f_n, (T-\lambda)f_n) \in \operatorname{Graph}(T-\lambda)$ und $(f_n, (T-\lambda)f_n) \to (f, g)$, folgt $(f, g) \in \operatorname{Graph}(T-\lambda)$, da der Graph von $(T-\lambda)$ abgeschlossen ist, also ist $g = (T-\lambda)f \in \operatorname{Bild}(T-\lambda)$. □

9.23 Proposition.

Es sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator.
Dann ist $\lambda \mapsto \dim \operatorname{Ker}(T^* - \lambda)$ lokal konstant auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Dabei bezeichne dim die Vektorraum-Dimension, d.h. die Kardinalität einer Hamel-Basis. Beachte, daß nach 9.10 $\operatorname{Ker}(T^* - \lambda) = (\operatorname{Bild}(T - \bar\lambda))^\perp$ und somit $T - \lambda$ genau dann surjektiv ist, wenn $\dim \operatorname{Ker}(T^* - \bar\lambda) = 0$ ist.

Sublemma.

Es seien H_1 und H_2 abgeschlossene Teilräume von H mit $H_1 \cap H_2^\perp = \{0\}$. Dann ist $\dim H_1 \leq \dim H_2$.

Beweis. Es sei P die orthogonal-Projektion von H auf H_2. Wegen $H_1 \cap H_2^\perp = \{0\}$ ist die Einschränkung $P|_{H_1} : H_1 \to H_2$ injektiv. Folglich ist $\dim H_2 \geq \dim P(H_1) = \dim H_1$. □

Beweis von 9.23. Es sei $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$. Wir behaupten, daß $\operatorname{Ker}(T^* - \mu) \cap \operatorname{Ker}(T^* - \lambda)^\perp = \{0\}$ für $|\lambda - \mu| < |\beta|$:
Angenommen nicht. Dann existiert ein $f \in \operatorname{Ker}(T^* - \mu) \cap (\operatorname{Ker}(T^* - \lambda))^\perp$ mit $\|f\| = 1$. Nach 9.10 ist $f \in (\operatorname{Ker}(T^* - \lambda))^\perp = \overline{\operatorname{Bild}(T - \overline{\lambda})}$ und nach 9.22.3 ist $\operatorname{Bild}(T - \overline{\lambda})$ abgeschlossen. Es existiert also ein $g \in \operatorname{Dom} T$ mit $f = (T - \overline{\lambda})g$. Da $f \in \operatorname{Ker}(T^* - \mu)$ ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (T^* - \mu)f, g \rangle = \langle f, (T - \overline{\mu})g \rangle = \langle f, (T - \overline{\lambda} + \overline{\lambda} - \overline{\mu})g \rangle \\ &= \|f\|^2 + (\lambda - \mu)\langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $1 = \|f\|^2 = |\lambda - \mu|\,|\langle f, g \rangle| \leq |\lambda - \mu|\,\|g\|$. Aus 9.22.1 folgt $1 = \|f\| = \|(T - \overline{\lambda})g\| \geq |\beta|\,\|g\| > |\lambda - \mu|\,\|g\| \geq 1$, ein Widerspruch.
Aus der Behauptung folgt mittels des Sublemmas, daß $\dim \operatorname{Ker}(T^* - \mu) \leq \dim \operatorname{Ker}(T^* - \lambda)$ falls $|\lambda - \mu| < |\beta| = |\mathfrak{Im}(\lambda)|$. Falls $|\lambda - \mu| < \frac{1}{2}|\beta|$, so ist $|\mathfrak{Im}(\lambda) - \mathfrak{Im}(\mu)| \leq |\lambda - \mu| < \frac{1}{2}|\beta| = \frac{1}{2}|\mathfrak{Im}(\lambda)|$, also $|\mathfrak{Im}(\mu)| \geq \frac{1}{2}|\mathfrak{Im}(\lambda)|$ und somit gilt wegen $|\mu - \lambda| < \frac{1}{2}|\mathfrak{Im}(\lambda)| \leq |\mathfrak{Im}(\mu)|$ auch die andere Ungleichung. Das zeigt, daß $\lambda \mapsto \dim \operatorname{Ker}(T^* - \lambda)$ lokal konstant ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. □

9.24 Theorem.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

1. $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$;
2. $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(\lambda) \geq 0\}$;
3. $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(\lambda) \leq 0\}$;
4. $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

Beweis. Es sei $\mathbb{C}_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \pm\mathfrak{Im}(\lambda) > 0\}$ die obere und untere offene Halbebene. Nach 9.22.2 ist $T - \lambda$ injektiv und hat nach 9.22.3 abgeschlossenes Bild für alle $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$. Nach 9.17.1 ist somit $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn $T - \lambda$ surjektiv ist. Weil $(\operatorname{Bild}(T - \lambda))^\perp = \operatorname{Ker}(T^* - \overline{\lambda})$ ist nach 9.10, ist nach dem vorigen Satz 9.23 entweder $\mathbb{C}_\pm \cap \sigma(T) = \emptyset$ oder $\mathbb{C}_\pm \subseteq \sigma(T)$ (und damit auch $\overline{\mathbb{C}_\pm} \subseteq \sigma(T)$, da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist). Also entweder gilt (1), d.h. $\sigma(T) \cap (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-) = \emptyset$, oder einer der 3 anderen Fälle, nämlich $\sigma(T) \in \{\overline{\mathbb{C}_\pm}, \mathbb{C}\}$. □

9.25 Folgerung.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *T ist selbst-adjungiert;*
2. $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$;
3. $\operatorname{Ker}(T^* - i) = \{0\} = \operatorname{Ker}(T^* + i)$.

Beweis. (1 ⇒ 2) Aus $T = T^*$ und $\mathfrak{Im}(\lambda) \neq 0$ folgt $\operatorname{Bild}(T - \lambda)^\perp = \operatorname{Ker}(T^* - \overline{\lambda}) = \operatorname{Ker}(T - \overline{\lambda}) = \{0\}$ nach 9.22.2. Da $\operatorname{Bild}(T - \lambda)$ abgeschlossen ist nach 9.22.3, ist $T - \lambda : \operatorname{Dom} T \to H$ bijektiv und folglich $\lambda \in \rho(T)$ nach 9.17.1. Also ist $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

(2 ⇒ 3) Falls $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, so ist $\pm i \in \rho(T)$, also $\operatorname{Bild}(T \pm i) = H$ und somit $\operatorname{Ker}(T^* \pm i) = \operatorname{Bild}(T \mp i)^\perp = \{0\}$.

(3 ⇒ 1) Nach 9.22.2 ist $T \pm i$ injektiv, und wegen $\operatorname{Bild}(T \pm i)^\perp = \operatorname{Ker}(T^* \mp i) = \{0\}$ nach (3) und, weil $\operatorname{Bild}(T - \lambda)$ abgeschlossen ist nach 9.22.3, ist $T \pm i$

auch surjektiv. Wegen 9.13 ist also $T \pm i$ beschränkt invertierbar und nach dem Lemma in 9.13 ebenso $T^* \mp i$. Sei $h \in \operatorname{Dom} T^*$. Da $T + i$ invertierbar ist, existiert ein $f \in \operatorname{Dom} T$ mit $(T + i)f = (T^* + i)h$. Aber $T^* + i \supseteq T + i$ und somit ist $(T^* + i)f = (T + i)f = (T^* + i)h$. Da $T^* + i$ injektiv ist, ist $h = f \in \operatorname{Dom} T$, also ist $T = T^*$. □

9.26 Folgerung.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Falls $\sigma(T)$ nicht $\mathbb{R}$ enthält, so ist T selbst-adjungiert.

Beweis. Es kann keiner der Fälle 9.24.2–9.24.4 eintreten, also ist $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ und nach 9.25 T selbstadjungiert. □

Symmetrische Erweiterungen

Ein symmetrischer Operator T ist nicht selbstadjungiert, wenn sein Definitionsbereich im Vergleich zu jenem von T^* zu klein ist. Also sollten wir symmetrische Erweiterungen $\tilde{T}$ von T untersuchen. Insbesonders interessiert uns die Frage ob eine selbstadjungierte Erweiterung existiert. Für jede symmetrische Erweiterung $\tilde{T}$ von T ist $T \subseteq \tilde{T}$ und somit $\tilde{T}^* \subseteq T^*$, also $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \tilde{T}^* \subseteq T^*$. Jede symmetrische Erweiterung von T ist also eine Einschränkung von T^*.

Die Folgerung 9.25 legt nahe für symmetrische Operatoren die Eigenräume von T^* zum Eigenwert $\pm i$ näher zu studieren. Dazu folgende Definition.

9.27 Definition.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Die DEFIZIENZ-TEILRÄUME von T sind die Eigenräume von T^* zu Eigenwert $\pm i$:

$$D_+ := (\operatorname{Bild}(T + i))^\perp = \operatorname{Ker}(T^* - i) = \{f \in \operatorname{Dom} T^* : T^*(f) = +i\, f\},$$

$$D_- := (\operatorname{Bild}(T - i))^\perp = \operatorname{Ker}(T^* + i) = \{f \in \operatorname{Dom} T^* : T^*(f) = -i\, f\}.$$

Weiters seien $G_\pm$ folgende abgeschlossene Teilräume von $H \oplus H$:

$$G_+ := \{(f, +i\, f) : f \in D_+\} = \operatorname{Graph}(+i) \cap \operatorname{Graph}(T^*)$$

$$G_- := \{(g, -i\, g) : g \in D_-\} = \operatorname{Graph}(-i) \cap \operatorname{Graph}(T^*).$$

Die Defizienz-Räume sind folglich auch abgeschlossen, denn $\operatorname{pr}_1 : G_\pm \to D_\pm$ ist ein linearer Isomorphismus mit Inverser $f \mapsto (f, \pm i\, f)$. Die DIMENSIONEN von $D_\pm$ als Hilbert-Raum, d.h. die Kardinalität einer vollständigen Orthonormal-Basis, wird als DEFIZIENZ-INDIZES $d_\pm$ bezeichnet.

Wir wollen nun für einen symmetrischen Operator T den Teil von T^* bestimmen, der über T hinausragt.

9.28 Lemma.

Es sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator, dann ist

$$\operatorname{Graph} T^* = \operatorname{Graph} T \oplus G_+ \oplus G_- = \operatorname{Graph}\Big(T \oplus (+i)|_{D_+} \oplus (-i)|_{D_-}\Big).$$

Insbesonders ist $\operatorname{Dom} T^* = \operatorname{Dom} T \oplus D_+ \oplus D_-$ *eine direkte-Summen Zerlegung in nicht notwendig orthogonale Teilräume.*

Beweis. Es ist $G_\pm \perp \operatorname{Graph} T$, denn für $f \in D_\pm$ und $h \in \operatorname{Dom} T$ ist

$$\langle h \oplus Th, f \oplus (\pm i\, f)\rangle = \langle h, f\rangle \mp i\langle Th, f\rangle = \mp i\langle (T \pm i)h, f\rangle = 0,$$

da $D_\pm = \mathrm{Bild}(T \pm i)^\perp$.

Es ist auch $G_+ \perp G_-$, denn für $f \in D_+$ und $g \in D_-$ gilt $\langle f \oplus i\,f, g \oplus (-i\,g)\rangle = \langle f, g\rangle - \langle i\,f, i\,g\rangle = 0$.

Da klarerweise $\mathrm{Graph}\, T \oplus G_+ \oplus G_- \subseteq \mathrm{Graph}\, T^*$ abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß diese Summe in $\mathrm{Graph}\, T^*$ triviales orthogonales Komplement hat: Sei $h \in \mathrm{Dom}\, T^*$ mit $h \oplus T^*h \perp \mathrm{Graph}\, T \oplus G_+ \oplus G_-$. Wegen $h \oplus T^*h \perp \mathrm{Graph}\, T$ gilt $0 = \langle h \oplus T^*h, f \oplus Tf\rangle = \langle h, f\rangle + \langle T^*h, Tf\rangle$ für alle $f \in \mathrm{Dom}\, T$. Folglich ist $T^*h \in \mathrm{Dom}\, T^*$ und $(T^*)^2 h = -h$. Also ist $(T^* - i)(T^* + i)h = ((T^*)^2 + 1)h = 0$ und damit $g := (T^* + i)h \in D_+ = \mathrm{Ker}(T^* - i)$. Folglich gilt $0 = \langle h \oplus T^*h, g \oplus ig\rangle = \langle h, g\rangle - i\langle T^*h, g\rangle = -i\langle (T^* + i)h, g\rangle = -i\|(T^* + i)h\|^2$, also $(T^* + i)h = 0$, d.h. $h \in D_-$. Aus Symmetrie-Gründen gilt auch $h \in D_+$. Also ist $h \in D_+ \cap D_- = \{0\}$.

Da $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{Graph}\, T^* \to \mathrm{Dom}\, T^*$ eine lineare Bijektion ist, folgt die direkte-Summen-Zerlegung von $\mathrm{Dom}\, T^*$ sofort aus jener von $\mathrm{Graph}\, T^*$. □

9.29 Lemma.

Jeder symmetrische Operator T besitzt maximale symmetrische Erweiterungen. Jede solche Erweiterung $\tilde T$ ist abgeschlossen. Jeder selbst-adjungierte Operator ist ein maximal symmetrischer Operator.

Beweis. Daß jeder selbst-adjungierte Operator T maximal symmetrisch ist, folgt sofort daraus, daß jede symmetrische Erweiterung von T eine Einschränkung von $T^* = T$ ist.

Die Existenz maximal symmetrischer Erweiterungen folgt direkt aus dem Zorn'-schen Lemma.

Sei nun $\tilde T$ ein maximaler symmetrischer Operator. Da nach Lemma in 9.20 der Operator $\tilde T^{**}$ eine abgeschlossene symmetrische Erweiterung von $\tilde T$ ist, ist $\tilde T = \tilde T^{**}$ und somit $\tilde T$ auch abgeschlossen. □

9.30 Lemma.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Dann existiert eine Bijektion

$$\{\tilde T \supseteq T : \tilde T \text{ abg., symm.}\} \cong \{F < D_+ \oplus D_- : T^*|_F \text{ abg., symm.}\},$$

d.h. die abgeschlossenen symmetrischen Erweiterungen $\tilde T$ von T stehen in bijektiver Beziehung zu den Teilräumen F von $D_+ \oplus D_-$ für welche $T^*|_F$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator ist. Diese Relation zwischen $\tilde T$ und F ist gegeben durch:

$$\mathrm{Graph}\, \tilde T = \mathrm{Graph}\, T \oplus \mathrm{Graph}(T^*|_F).$$

Beweis. ($\leftarrow$) Es sei F so ein Teilraum. Wir setzen $D := \mathrm{Dom}\, T \oplus F \subseteq \mathrm{Dom}\, T^*$ und $\tilde T := T^*|_D \supseteq T$. Dann ist $\tilde T$ symmetrisch, denn für $f = f_0 + f_1$ und $g = g_0 + g_1$ mit $f_0, g_0 \in \mathrm{Dom}\, T$ und $f_1, g_1 \in F$ ist

$$\begin{aligned}\langle \tilde T f, g\rangle &= \langle T^* f_0 + T^* f_1, g_0 + g_1\rangle \\ &= \langle T f_0, g_0\rangle + \langle T f_0, g_1\rangle + \langle T^* f_1, g_0\rangle + \langle T^* f_1, g_1\rangle.\end{aligned}$$

Aus der Symmetrie von T und $T^*|_F$ und der Adjungiertheit von T^* zu T erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}&= \langle f_0, T g_0\rangle + \langle f_0, T^* g_1\rangle + \langle f_1, T g_0\rangle + \langle f_1, T^* g_1\rangle \\ &= \langle f, \tilde T g\rangle.\end{aligned}$$

Nach 9.28 ist $\operatorname{Graph}\tilde{T} = \operatorname{Graph} T \oplus \operatorname{Graph}(T^*|_F)$ eine orthogonale Zerlegung, und da beide Summanden abgeschlossen sind, ist T abgeschlossen.

($\rightarrow$) Sei $\tilde{T} \supseteq T$ abgeschlossen und symmetrisch. Dann ist $T \subseteq \tilde{T} \subseteq T^*$ und somit $\operatorname{Graph} T \subseteq \operatorname{Graph}\tilde{T} \subseteq \operatorname{Graph} T^* = \operatorname{Graph} T \oplus G_+ \oplus G_-$. Es sei $G := \operatorname{Graph}\tilde{T} \cap (G_+ \oplus G_-)$ und $F := \operatorname{pr}_1(G) \subseteq (D_+ \oplus D_-) \cap \operatorname{Dom}\tilde{T}$. Dann ist $T^*|_F = \tilde{T}|_F$ ebenfalls symmetrisch und wegen $\operatorname{Graph}(T^*|_F) = G$ ist $T^*|_F$ auch abgeschlossen.

Für $h \oplus \tilde{T}h \in \operatorname{Graph}\tilde{T} \subseteq \operatorname{Graph} T^*$ ist $h \oplus \tilde{T}h = (f \oplus Tf) + k$ mit $f \in \operatorname{Dom} T$ und $k \in G_+ \oplus G_-$ nach 9.28. Und wegen $T \subseteq \tilde{T}$ ist $k \in \operatorname{Graph}\tilde{T}$ und somit $k \in G$, also gilt $\operatorname{Graph}\tilde{T} = \operatorname{Graph} T \oplus \operatorname{Graph}(T^*|_F)$.

Die beiden Zuordnungen sind invers zueinander, denn wenn $F := \operatorname{pr}_1(\operatorname{Graph}\tilde{T} \cap (G_+ \oplus G_1)) < D_+ \oplus D_-$ der zur Erweiterung $\tilde{T}$ gehörende Teilraum ist, dann ist wegen der letzten Gleichung offensichtlich $\tilde{T} = T \cup T^*|_F = T^*|_{\operatorname{Dom} T \oplus F}$. Und andererseits, wenn $\tilde{T} = T^*|_{\operatorname{Dom} T \oplus F}$ die zum Teilraum F gehörende Erweiterung ist, so ist $G := \operatorname{Graph}\tilde{T} \cap (G_+ \oplus G_-) = \operatorname{Graph}(T^*|_F)$ und somit $F = \operatorname{pr}_1(G)$. $\square$

9.31 Theorem.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Dann existiert eine Bijektion

$$\begin{aligned}&\{\tilde{T} \supseteq T : \tilde{T} \text{ abg.,symm.}\} \cong\\ &\cong \{U : U \text{ ist part. Iso. mit initial-Raum } I_+ \subseteq D_+ \text{ und final-Raum } I_- \subseteq D_-\},\end{aligned}$$

d.h. die abgeschlossenen symmetrischen Erweiterungen $\tilde{T}$ von T und stehen in Bijektion zu den partiellen Isometrien U mit initial-Raum $I_+ \subseteq D_+$ und final-Raum $I_- \subseteq D_-$. Diese Relation zwischen $\tilde{T}$ und U ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom}\tilde{T} &= \{h + k + Uk : h \in \operatorname{Dom} T, k \in I_+\}\\ \tilde{T}(h + k + Uk) &= Th + i\,k - i\,Uk.\end{aligned}$$

Für die Defizienz-Indizes gilt $d_\pm(\tilde{T}) + \dim I_\pm = d_\pm(T)$.

Beweis. Wegen 9.30 genügt es eine Bijektion zwischen Teilräumen $F < D_+ \oplus D_-$ mit $T^*|_F$ symmetrisch und abgeschlossen und den angebenen partiellen Isometrien U zu beschreiben.

($\rightarrow$) Es sei F ein Teilraum von $D_+ \oplus D_-$ mit $T^*|_F$ abgeschlossen und symmetrisch. Wir wollen zeigen, daß F der Graph einer (eindeutigen) Isometrie $U : I_+ \to I_-$ mit $I_\pm \subseteq D_\pm$ ist. Für $f \in F$ sei $f = f^+ \oplus f^-$ die direkte-Summen-Zerlegung mit $f^\pm \in D_\pm$. Weiters sei $I_\pm := \{f^\pm : f \in F\}$. Da $T^*|_F$ symmetrisch ist, gilt $0 = \langle T^*f, f\rangle - \langle f, T^*f\rangle = \langle if^+ - if^-, f^+ + f^-\rangle - \langle f^+ + f^-, if^+ - if^-\rangle = 2i\langle f^+, f^+\rangle - 2i\langle f^-, f^-\rangle$, also ist $\|f^+\| = \|f^-\|$. Wenn $f^+ \oplus f^{1-}$ und $f^+ \oplus f^{2-}$ zwei Vektoren aus $F < D_+ \oplus D_-$ sind, dann ist $0 \oplus (f^{1-} - f^{2-}) \in F$ und somit nach dem gerade gezeigten $\|f^{1-} - f^{2-}\| = \|0\| = 0$, d.h. $f^{1-} = f^{2-}$. Also ist F der Graph der bijektiven Isometrie $U : I_+ \to I_-$ definiert durch $U(f^+) := f^-$.

Es ist I_+ abgeschlossen: Sei nämlich $f_n \in F$ mit $f_n^+ \to g^+$. Da $\|f_n^+ - f_m^+\| = \|f_n^- - f_m^-\|$ existiert ein g^- mit $f_n^- \to g^-$. Offensichtlich konvergiert $f_n = f_n^+ + f_n^-$ gegen $g^+ + g^- =: g$. Außerdem gilt $T^* f_n^\pm = \pm i\, f_n^\pm \to \pm i g^\pm$. Und es folgt $(g^+ + g^-) \oplus (ig^+ - ig^-) \in \overline{\operatorname{Graph}(T^*|_F)} = \operatorname{Graph}(T^*|_F)$, d.h. $g^+ \in I^+$.

($\leftarrow$) Es sei U eine partielle Isometrie mit initial-Raum $I_+ \subseteq D_+$ und final-Raum $I_- \subseteq D_-$. Wir definieren $F := \operatorname{Graph} U|_{\operatorname{Init} U} := \{g \oplus Ug : g \in I_+\} \subseteq I_+ \oplus I_- \subseteq D_+ \oplus D_-$.

Dann ist $T^*|_F$ symmetrisch, denn für $g, h \in I_+ \subseteq D_+ = \operatorname{Ker}(T^* - i)$ ist $Ug, Uh \in I_- \subseteq D_- = \operatorname{Ker}(T^* + i)$ und somit

$$\begin{aligned}\langle T^*(g + Ug), h + Uh\rangle &= \langle T^* g, h\rangle + \langle T^* g, Uh\rangle + \langle T^* Ug, h\rangle + \langle T^* Ug, Uh\rangle \\ &= i\langle g, h\rangle + i\langle g, Uh\rangle - i\langle Ug, h\rangle - i\langle Ug, Uh\rangle \\ &= i\langle g, Uh\rangle - i\langle Ug, h\rangle.\end{aligned}$$

und ähnlich zeigt man $\langle g + Ug, T^*(h + Uh)\rangle = i\langle g, Uh\rangle - i\langle Ug, h\rangle$.

Weiters ist $T^*|_F$ abgeschlossen: Für $g_n \in I_+$ mit $(g_n + Ug_n) \oplus (ig_n - i\,U\,g_n) \to f \oplus h$ gilt $2ig_n = i(g_n + Ug_n) + (ig_n - i\,U\,g_n) \to if + h$ und $2i\,U\,g_n = i(g_n + Ug_n) - (ig_n - i\,U\,g_n) \to if - h$. Somit ist $U(i\,f + h) = i\,f - h$ und für $g := \frac{1}{2i}(if + h)$, gilt $f = g + Ug$ und $h = i\,g - i\,U\,g$.

Offensichtlich sind die beiden Zuordnungen $U \leftrightarrow \operatorname{Graph} U|_{\operatorname{Init} U} = F$ invers zueinander.

Nach 9.30 erhalten wir somit die gewünschte Bijektion mit

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom}\tilde{T} &:= \operatorname{Dom} T \oplus F = \operatorname{Dom} T \oplus \operatorname{Graph} U|_{\operatorname{Init} U} \\ &= \{h \oplus k \oplus U(k) : h \in \operatorname{Dom} T, k \in \operatorname{Init} U\} \\ \tilde{T} &:= T^*|_{\operatorname{Dom}\tilde{T}} = (h \oplus k \oplus Uk \mapsto Th + i\,k - i\,Uk).\end{aligned}$$

Wir zeigen schließlich $d_+(\tilde{T}) + \dim I_+ = d_+(T)$. Sei dafür $f \in \operatorname{Dom} T$ und $g \in I_+$. Dann ist

$$(\tilde{T} + i)(f + g + Ug) = (T + i)f + ig - i\,U\,g + ig + i\,U\,g = (T + i)f + 2ig.$$

Also haben wir die orthogonale Zerlegung $\operatorname{Bild}(\tilde{T} + i) = \operatorname{Bild}(T + i) \oplus I_+$ und somit $\operatorname{Bild}(T + i)^\perp = \operatorname{Bild}(\tilde{T} + i)^\perp \oplus I_+$. Also ist $d_+(T) = \dim(\operatorname{Bild}(T + i)^\perp) = \dim(\operatorname{Bild}(\tilde{T}+i)^\perp) + \dim(I_+) = d_+(\tilde{T}) + \dim I_+$. Ähnlich zeigt man $d_-(\tilde{T}) = d_-(T) - \dim I_-$. □

9.32 Theorem.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator mit Defizienz-Indizes $d_\pm < \infty$. Dann gilt:

1. *T ist genau dann ein maximaler symmetrischer Operator, wenn $d_+ = 0$ oder $d_- = 0$.*
2. *T ist selbst-adjungiert genau dann, wenn $d_+ = 0 = d_-$ ist.*
3. *T hat eine selbst-adjungierte Erweiterung genau dann, wenn $d_+ = d_-$ ist. In diesem Fall stehen die selbst-adjungierten Erweiterungen in bijektiver Beziehung zu den Isometrien von D_+ auf D_-.*

Beweis. (1) ist eine direkte Folgerung aus 9.31, da genau dann nur die triviale partielle Isometrie $U = 0$ existiert, wenn D_+ oder D_- gleich $\{0\}$ ist.

(2) ist eine Umformulierung von 9.25.

(3) Wenn T eine selbst-adjungierte Erweiterung $\tilde{T}$ besitzt, so ist $d_\pm(\tilde{T}) = d_\pm(T) - \dim(I_\pm)$, wobei $U : I_+ \to I_-$ die zugehörige bijektive Isometrie ist. Also ist $\dim(I_+) = \dim(I_-)$ sowie $d_+(\tilde{T}) = d_-(\tilde{T})$ nach (2), und damit $d_+(T) = d_-(T)$. Umgekehrt folgt aus $d_+ = d_-$, daß eine bijektive Isometrie $U : D_+ \to U_-$ existiert, und die zugehörige Erweiterung $\tilde{T}$ somit $d_+(\tilde{T}) = d_+(T) - \dim(I_+) = d_-(T) - \dim(I_-) = d_-(\tilde{T})$ erfüllt, d.h. selbst-adjungiert ist nach (2). □

9.33 Beispiel.

Es sei $T_0 : f \mapsto if'$ der symmetrische Operator aus Beispiel 9.5. Um alle abgeschlossenen symmetrischen Erweiterungen von T_0 zu bestimmen müssen wir D_+ und D_- bestimmen. Es ist $f \in D_\pm$ genau dann, wenn $f \in \operatorname{Dom} T_0^*$ und $\pm if = T_0^* f = if'$ ist. Also ist $D_\pm = \{x \mapsto \alpha e^{\pm x} : \alpha \in \mathbb{C}\}$ und $d_\pm = 1$. Alle partiellen Isometrien $U \neq 0$ von D_+ auf D_- sind von der Form $U_\lambda(x \mapsto e^x)(x) = \lambda e^{-x}$ mit $|\lambda| = 1$. Es sei

$$\begin{aligned} D_\lambda &:= \{x \mapsto f(x) + \alpha e^x + \lambda\alpha e^{-x} : \alpha \in \mathbb{C}, f \in \operatorname{Dom} T_0\} \\ T_\lambda(x \mapsto f(x) + \alpha e^x + \lambda\alpha e^{-x})(x) &:= if'(x) + \alpha i e^x - i\,\lambda\alpha e^{-x}, \end{aligned}$$

für $f \in \operatorname{Dom} T_1$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach 9.31 sind das alle echten symmetrischen abgeschlossenen (selbst-adjungierten) Erweiterungen von T_0. Insbesonders ist die Domäne

$$\begin{aligned} D_1 &= \{f + 2\,\alpha \cosh : f \in \operatorname{Dom} T_0, \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{g \in L^2 : g \text{ ist absolut-stetig}, g' \in L^2, g(-1) = g(1)\} \\ T_1(g) &= \tilde{T}_1(f + 2\,\alpha, \cos h) = i\,f' + i\,\alpha\,2\,\sinh = i\,g', \end{aligned}$$

das ist genau die selbst-adjungierte Erweiterung von T_0 in Beispiel 9.5.

Es sei T ein linearer Differential-Operator mit reellen Koeffizienten-Funktionen. Dann ist $\operatorname{Dom} T$ invariant unter der Konjugation und $\overline{Tf} = T\overline{f}$. Wir wollen nun zeigen, daß symmetrische Operatoren mit solch einer Eigenschaft selbst-adjungierte Erweiterungen besitzen.

9.34 Folgerung.

Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein symmetrischer Operator und $J : H \to H$ ein konjugiert linearer beschränkter Operator (wie z.B. die Konjugation) mit $J^2 = 1$ und $T \circ J \subseteq J \circ T$. Dann besitzt T eine selbst-adjungierte Erweiterung.

Beweis. Aus $TJ \subseteq JT$ folgt $JT = JTJ^2 \subseteq J^2TJ = TJ$ und somit $TJ = JT$. Folglich ist $\operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}(J \circ T) = \operatorname{Dom}(T \circ J) = J^{-1}(\operatorname{Dom} T) = J(\mathrm{DomT})$. Da J nicht linear ist, müssen wir den Adjungierten J^* extra definieren: Für $h \in H$ ist $f \mapsto \langle h, Jf\rangle$ ein beschränktes lineares Funktional, also existiert ein eindeutiges $J^*h \in H$ mit $\langle h, Jf\rangle = \langle f, J^*h\rangle$. Offensichtlich ist J^* additiv und konjugiert linear, da $\langle f, J^*(\lambda\,h)\rangle = \langle \lambda\,h, Jf\rangle = \lambda\langle h, Jf\rangle = \lambda\langle f, J^*h\rangle = \langle f, \overline{\lambda} J^*h\rangle$. Wegen $J^2 = 1$ ist auch $(J^*)^2 = 1$.

Wir behaupten als nächstes, daß $J^*T^* = T^*J^*$.
Sei dazu $h^* \in \operatorname{Dom} T^*$ und $h \in \operatorname{Dom} T$. Dann ist $\langle TJh, h^*\rangle = \langle Jh, T^*h^*\rangle = \langle J^*T^*h^*, h\rangle$ und andererseits $\langle TJh, h^*\rangle = \langle JTh, h^*\rangle = \langle J^*h^*, Th\rangle$. Folglich ist $\langle J^*T^*h^*, h\rangle = \langle J^*h^*, Th\rangle$, d.h. $J^*h^* \in \operatorname{Dom} T^*$ und $T^*J^*h^* = J^*T^*h^*$ und somit $T^*J^* \subseteq J^*T^*$. Wegen $(J^*)^2 = 1$ folgt Gleichheit wie zuvor.

Sei nun $h^* \in \operatorname{Ker}(T^* \pm i)$. Dann ist $T^*J^*h^* = J^*T^*h^* = J^*(\mp i\,h^*) = \pm iJ^*h^*$. Also ist $J^*(\operatorname{Ker}(T^* \pm i)) \subseteq \operatorname{Ker}(T^* \mp i)$. Wegen $(J^*)^2 = 1$ gilt auch die andere Inklusion, also sind die beiden Defizienz-Räume vermöge J^* isomorph als reelle SNR'e und somit auch als komplexe Hilbert-Räume (Wähle Orthonormalbasen und erweitere die Bijektion zu einer linearen Isometrie) und damit besitzt T eine selbstadjungierte Erweiterung nach 9.31, vgl. 9.32. □

Cayley-Transformation

Für die Möbius-Transformation $\mu : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ gilt: $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto -i$, $\infty \mapsto 1$, $i \mapsto 0$. Da Möbius-Transformationen Geraden auf Geraden oder Kreise abbilden, bildet diese $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf $\partial\mathbb{D}$ und folglich die obere halb-Ebene auf die Einheitsscheibe $\mathbb{D}$ ab. Die Umkehrabbildung ist durch $w \mapsto i\frac{1+w}{1-w}$ gegeben, denn aus $\frac{z-i}{z+i} = w$ folgt $z(1-w) = i\,(1+w)$. Da das Spektrum selbst-adjungierter Operatoren in $\mathbb{R}$ enthalten ist und jenes unitärer Operatoren in $\mu(\mathbb{R}) = \partial\mathbb{D}$, sollte μ einen Zusammenhang zwischen diesen Klassen von Operatoren bilden. Dies zeigen wir nun:

9.35 Theorem (Cayley-Transformation).

Die abgeschlossenen symmetrischen Operatoren $T : H \rightsquigarrow H$ stehen in bijektiver Beziehung zu den partiellen Isometrien U, für welche $(1-U)\operatorname{Init} U$ dicht liegt, d.h.

$$\{T : H \rightsquigarrow H,\ \textit{abg., symm.}\} \cong \{U \in L(H) : U \textit{ part. Iso.},\ (1-U)\operatorname{Init} U \textit{ dicht }\},$$

bezüglich der Relationen:

$$\begin{aligned} U &= (T-i)\,(T+i)^{-1} \\ T &= i\,(1+U)\,(1-U)^{-1} \\ D_+(T) &= \operatorname{Init} U^{\perp} \\ D_-(T) &= \operatorname{Fini} U^{\perp}. \end{aligned}$$

Diese Zuordnung heißt Cayley-Transformation, und das zu T gehörende U heißt Cayley-Transformierte von T.

Beweis.

$(\to)$ Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Nach 9.22.3 ist $\operatorname{Bild}(T \pm i)$ abgeschlossen, also ist $D_\pm^\perp = \operatorname{Bild}(T \pm i)$. Nach 9.22.2 ist $\operatorname{Ker}(T+i) = \{0\}$, also ist $(T+i)^{-1}$ wohldefiniert auf $D_+^\perp$ und $(T+i)^{-1} D_+^\perp = \operatorname{Dom} T = \operatorname{Dom}(T-i)$ und somit ist das wie angegeben definierte U ein wohldefinierter Operator.

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Dom} T \arrow[dl, "T+i"'] \arrow[dr, "T-i"] & & \\
D_+^\perp \arrow[r, phantom, "="] & \operatorname{Bild}(T+i) \arrow[ur, dotted, bend right, "\frac{1}{2i}(1-U)"'] \arrow[rr, dotted, tail, two heads, "U", "\cong"'] & & \operatorname{Bild}(T-i) \arrow[r, phantom, "="] & D_-^\perp
\end{tikzcd}$$

Falls $h \in D_+^\perp$, dann ist $h = (T+i)f$ mit einem eindeutigen $f \in \operatorname{Dom} T$. Also ist $\|Uh\|^2 = \|(T-i)f\|^2 = \|Tf\|^2 + \|f\|^2 = \|(T+i)f\|^2 = \|h\|^2$ nach 9.22.1. Folglich läßt sich U eindeutig zu einer partiellen Isometrie mit $\operatorname{Init} U := (\operatorname{Ker} U)^\perp = D_+^\perp$ und $\operatorname{Fini} U := \operatorname{Bild} U = D_-^\perp$ ausdehnen.

Es ist $(T+i)^{-1} = \frac{1}{2i}(1-U) : D_+^\perp \to \operatorname{Dom} T$, denn für $f \in \operatorname{Dom} T$ und $h = (T+i)f$ ist $(1-U)h = h - (T-i)f = (T+i)f - (T-i)f = 2if$.
Folglich ist $(1-U)\operatorname{Init} U = \operatorname{Dom} T$ und somit dicht.

Weiters ist $(1+U)(T+i) = 2T$, denn $(1+U)(T+i)f = (T+i)f + Uh = (T+i)f + (T-i)f = 2Tf$, und folglich $i(1+U)(1-U)^{-1} = i(1+U)\frac{1}{2i}(T+i) = \frac{1}{2}\,2T = T$.

$(\leftarrow)$ Sei nun U eine partielle Isometrie wie angegeben. Dann ist $\operatorname{Ker}(1-U) = \{0\}$, denn für $f \in \operatorname{Ker}(1-U)$ gilt $Uf = f$ und somit $\|f\| = \|Uf\|$, d.h. $f \in \operatorname{Init} U$. Da U^*U die orthogonal-Projektion auf $\operatorname{Init} U$ ist (siehe 7.24), ist $f = U^*Uf = U^*f$, also ist $f \in \operatorname{Ker}(1-U^*) = \operatorname{Bild}(1-U)^\perp = \{0\}$, d.h. $f = 0$, da $\operatorname{Bild}(1-U) \supseteq (1-U)\operatorname{Init} U$ dicht liegt.

Sei $D := (1-U)\operatorname{Init} U$. Dann ist $(1-U)^{-1} : D \to \operatorname{Init} U$ wohldefiniert. Also ist $T := i(1+U)(1-U)^{-1}$ ein wohldefinierter Operator mit dichtem Definitionsbereich

D.

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Init} U \arrow[dl, "1-U"'] \arrow[dr, "i(1+U)"] & \\ D=(1-U)\operatorname{Init} U \arrow[rr, dotted, two heads, "T"] & & (1+U)\operatorname{Init} U \end{tikzcd}$$

Wieder ist $(1-U)^{-1}=\frac{1}{2i}(T+i):D\to\operatorname{Init}U$, denn für $h\in\operatorname{Init}U$ und $f=(1-U)h$ ist $(T+i)f=Tf+if=i(1+U)h+i(1-U)h=2ih$.
Folglich ist $\operatorname{Init}U=\operatorname{Bild}(T+i)=D_+(T)^\perp$.

Weiters ist $(T-i)(1-U)=2iU$, denn $(T-i)(1-U)h=i(1+U)h-i(1-U)h=2iU$, und folglich ist $(T-i)(T+i)^{-1}=(T-i)\frac{1}{2i}(1-U)=\frac{1}{2i}2iU=U$ sowie $\operatorname{Fini}U=\operatorname{Bild}(T-i)=D_-(T)^\perp$.

Es ist T abgeschlossen, denn sei $f_n\in(1-U)\operatorname{Init}U$ mit $f_n\to f$ und $Tf_n\to g$. Es sei $h_n\in\operatorname{Init}U$ so, daß $(1-U)h_n=f_n$. Dann ist $Tf_n=i(1+U)h_n$ und somit konvergiert $2\,i\,h_n=i(1-U)h_n+i(1+U)h_n=if_n+Tf_n\to if+g=:2ih\in\operatorname{Init}U$. Also konvergiert $f_n=(1-U)h_n\to(1-U)h$ und $Tf_n=i(1+U)h_n\to i(1+U)h$, und somit ist $g=i(1+U)h=T(1-U)h=Tf$.
Weiters ist T symmetrisch: Für $f,g\in D$ sei $f=(1-U)h$ und $g=(1-U)k$ mit $h,k\in\operatorname{Init}U$. Dann gilt

$$\langle Tf,g\rangle=i\langle(1+U)h,(1-U)k\rangle=i(\langle h,k\rangle+\langle Uh,k\rangle-\langle h,Uk\rangle-\langle Uh,Uk\rangle).$$

Da $h,k\in\operatorname{Init}U$ ist $\langle Uh,Uk\rangle=\langle h,k\rangle$, also ist $\langle Tf,g\rangle=i(\langle Uh,k\rangle-\langle h,Uk\rangle)$ und analog zeigt man $\langle f,Tg\rangle=-i\langle(1-U)h,(1+U)k\rangle=-i(\langle h,Uk\rangle-\langle Uh,k\rangle)=\langle Tf,g\rangle$. □

9.36 Folgerung.

Die selbst-adjungierten Operatoren stehen vermöge der Cayley-Transformation in bijektiver Beziehung zu den unitären Operatoren, die 1 nicht als Eigenwert besitzen.

Beweis. Ein symmetrischer abgeschlossener Operator ist nach 9.32 genau dann selbst-adjungiert, wenn $\{0\}=D_\pm$, also nach 9.35 genau dann wenn für zugehörige partielle Isometrie $I_\pm=H$ gilt, sie also unitär ist. Schließlich haben wir im Beweis von 9.35 gesehen, daß die Dichtheit von $\operatorname{Bild}(1-U)$ die Gleichung $\operatorname{Ker}(1-U)=\{0\}$ – d.h. 1 ist kein Eigenwert von U – impliziert. Umgekehrt sei 1 kein Eigenwert von U und $f\perp\operatorname{Bild}(1-U)$, d.h. $f\in\operatorname{Bild}(1-U)^\perp=\operatorname{Ker}(1-U^*)$. Also ist $U^*f=f$ und somit $Uf=UU^*f=f$, d.h. $f\in\operatorname{Ker}(1-U)=\{0\}$ also $\operatorname{Bild}(1-U)=(1-U)(\operatorname{Init}U)$ dicht. □

Man kann nun die Cayley-Transformation verwenden um aus der Spektral-Zerlegung für beschränkte unitäre Operatoren auch eine solche für unbeschränkte selbst-adjungierte Operatoren zu gewinnen. Wir werden aber im nächsten Abschnitt allgemeiner die Spektral-Theorie normaler unbeschränkter Operatoren entwickeln.

Unbeschränkte normale Operatoren

9.37 Definition.

Ein linearer Operator $T:H\rightsquigarrow H$ heißt NORMAL, falls er dicht-definiert, abgeschlossen ist und $T^*T=TT^*$ erfüllt. Klarerweise ist jeder selbst-adjungierte Operator normal. Der Multiplikations-Operator T im Beispiel 9.4 ist normal, aber man beachte, daß $\operatorname{Dom}T^*T\subset\operatorname{Dom}T$ gilt.

9.38 Lemma.

Für dicht-definiertes abgeschlossenes T gilt:

1. *Der Graph von $T|_{\mathrm{Dom}(T^*T)}$ ist dicht im Graphen von T.*
2. *T^*T ist selbst-adjungiert (und insbesonders dicht-definiert).*
3. *$1+T^*T$ ist beschränkt invertierbar, und für das Inverse gilt: $0 \le (1+T^*T)^{-1} \le 1$.*
4. *Der Operator $T(1+T^*T)^{-1}$ ist eine globale Kontraktion.*

Beweis. (3) $1+T^*T$ ist surjektiv: Es sei $J : H \oplus H \to H \oplus H$ wieder definiert durch $J(h,k) = (-k,h)$. Nach 9.7 ist $H \oplus H = J\,\mathrm{Graph}\,T + \mathrm{Graph}\,T^*$. Zu $h \in H$ existieren also $f \in \mathrm{Dom}\,T$ und $g \in \mathrm{Dom}\,T^*$ mit $(0,h) = J(f,Tf) + (g,T^*g) = (-Tf,f) + (g,T^*g)$, d.h. $0 = -Tf + g$ und $h = f + T^*g = f + T^*Tf = (1+T^*T)f$. Also ist $\mathrm{Bild}(1+T^*T) = H$.
$1+T^*T$ ist injektiv: Für $f \in \mathrm{Dom}\,T^*T$ ist $Tf \in \mathrm{Dom}\,T^*$ und $\|f + T^*Tf\|^2 = \|f\|^2 + 2\|Tf\|^2 + \|T^*Tf\|^2 \ge \|f\|^2$. Also ist $\mathrm{Ker}(1+T^*T) = \{0\}$.
Es ist $0 \le S := (1+T^*T)^{-1} \le 1$: Aus $\|(1+T^*T)f\| \ge \|f\|$ für alle $f \in \mathrm{Dom}\,T^*T$ folgt für $h = (1+T^*T)f$ und $S := (1+T^*T)^{-1}$ die Ungleichung $\|Sh\| \le \|h\|$, d.h. $\|S\| \le 1$. Weiters ist $\langle Sh,h\rangle = \langle f,(1+T^*T)f\rangle = \|f\|^2 + \|Tf\|^2 \ge 0$, d.h. $S \ge 0$.

(1) Da T abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß für keinen Vektor $g \ne 0$ der Vektor $(g,Tg) \in \mathrm{Graph}\,T$ orthogonal ist zu $\{(h,Th) : h \in \mathrm{Dom}\,T^*T\}$. Sei also $h \in \mathrm{Dom}\,T^*T$. Dann ist

$$0 = \langle (g,Tg),(h,Th)\rangle = \langle g,h\rangle + \langle Tg,Th\rangle = \langle g,h\rangle + \langle g,T^*Th\rangle = \langle g,(1+T^*T)h\rangle.$$

Also ist $g \perp \mathrm{Bild}(1+T^*T) \overset{(3)}{=\!=} H$ und somit $g = 0$.

(2) Aus (1) folgt, daß $\mathrm{Dom}\,T^*T$ dicht ist in $\mathrm{Dom}\,T$ und somit in H. Seien $f,g \in \mathrm{Dom}\,T^*T$, d.h. $f,g \in \mathrm{Dom}\,T$ und $Tf,Tg \in \mathrm{Dom}\,T^*$. Folglich gilt $\langle T^*Tf,g\rangle = \langle Tf,Tg\rangle = \langle f,T^*Tg\rangle$. Also ist T^*T symmetrisch. Weiters hat $1+T^*T$ ein beschränktes Inverses nach (3), also ist $-1 \notin \sigma(T^*T)$ und $1+T^*T$ ist abgeschlossen nach 9.13 und folglich ebenso T^*T. Wegen 9.26 ist T^*T selbst-adjungiert.

(4) Wir setzen $R := T(1+T^*T)^{-1} = TS : H \to \mathrm{Dom}(T^*T) \subseteq \mathrm{Dom}\,T \to H$. Falls $h = (1+T^*T)f$ mit $f \in \mathrm{Dom}\,T^*T \subseteq \mathrm{Dom}\,T$, so ist $\|Rh\|^2 = \|Tf\|^2 \le \|(1+T^*T)f\|^2 = \|h\|^2$ nach dem Beweis von (3). Also ist $\|R\| \le 1$. □

9.39 Folgerung.

Für jeden normalen Operator $T : H \rightsquigarrow H$ gilt: $\mathrm{Dom}\,T = \mathrm{Dom}\,T^*$ *und* $\|Th\| = \|T^*h\|$ *für alle* $h \in \mathrm{Dom}\,T$. *Normale Operatoren haben keine echte normale Erweiterungen.*

Beweis. Falls $h \in \mathrm{Dom}\,T^*T = \mathrm{Dom}\,TT^*$, so ist $Th \in \mathrm{Dom}\,T^*$ und $T^*h \in \mathrm{Dom}\,T$. Also ist $\|Th\|^2 = \langle T^*Th,h\rangle = \langle TT^*h,h\rangle = \|T^*h\|^2$.

Falls $f \in \mathrm{Dom}\,T$ so folgt aus 9.38.1, daß eine Folge $h_n \in \mathrm{Dom}\,T^*T$ existiert mit $(h_n,Th_n) \to (f,Tf)$, also gilt $\|Th_n - Tf\| \to 0$. Nach dem ersten Teil gilt $\|T^*h_n - T^*h_m\| = \|Th_n - Th_m\|$ und somit existiert ein $g \in H$ mit $T^*h_n \to g$. Also gilt $(h_n,T^*h_n) \to (f,g)$. Da T^* abgeschlossen nach 9.8.1 ist, ist $f \in \mathrm{Dom}\,T^*$ und $g = T^*f$. Also ist $\mathrm{Dom}\,T \subseteq \mathrm{Dom}\,T^*$ und $\|Tf\| = \lim_n \|Th_n\| = \lim_n \|T^*h_n\| = \|g\| = \|T^*f\|$.

Nach 9.9 ist $T^{**} = T$ und nach 9.8.1 und 9.8.2 somit auch T^* normal, also nach dem vorigen Teil $\mathrm{Dom}\,T^* \subseteq \mathrm{Dom}(T^*)^* = \mathrm{Dom}\,T \subseteq \mathrm{Dom}\,T^*$, also $\mathrm{Dom}\,T = \mathrm{Dom}\,T^*$.

Sei nun $\tilde{T} \supseteq T$ eine normale Erweiterung. Dann ist $\tilde{T}^* \subseteq T^*$ und folglich $\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom} \tilde{T} = \operatorname{Dom} \tilde{T}^* \subseteq \operatorname{Dom} T^* = \operatorname{Dom} T$. Also ist $T = \tilde{T}$. □

9.40 Bemerkung.

Es seien $S, S_1, S_2 : H_1 \rightsquigarrow H_2$ und $T, T_1, T_2 : H_2 \rightsquigarrow H_3$, dann ist

$$
\begin{aligned}
&T_1 \circ S + T_2 \circ S = (T_1 + T_2) \circ S;\\
&T \circ S_1 + T \circ S_2 \subseteq T \circ (S_1 + S_2);\\
&T \circ S_1 + T \circ S_2 = T \circ (S_1 + S_2) \text{ falls } T \text{ global definiert ist.}
\end{aligned}
$$

Die erste Zeile folgt aus

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Dom}((T_1 + T_2) \circ S) &= S^{-1}(\operatorname{Dom}(T_1 + T_2)) = S^{-1}(\operatorname{Dom}(T_1) \cap \operatorname{Dom}(T_2))\\
&= S^{-1}(\operatorname{Dom}(T_1)) \cap S^{-1}(\operatorname{Dom}(T_2))\\
&= \operatorname{Dom}(T_1 \circ S) \cap \operatorname{Dom}(T_2 \circ S) = \operatorname{Dom}(T_1 \circ S + T_2 \circ S).
\end{aligned}
$$

Die zweite Zeile folgt aus

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Dom}(T \circ S_1 + T \circ S_2) &= \operatorname{Dom}(T \circ S_1) \cap \operatorname{Dom}(T \circ S_2)\\
&= S_1^{-1}(\operatorname{Dom} T) \cap S_2^{-1}(\operatorname{Dom} T)\\
&\subseteq (S_1 + S_2)^{-1}(\operatorname{Dom} T) = \operatorname{Dom}(T \circ (S_1 + S_2)).
\end{aligned}
$$

Falls T global definiert ist, so gilt Gleichheit, denn dann ist $S^{-1}(\operatorname{Dom} T) = \operatorname{Dom} S$ für $S \in \{S_1, S_2, S_1 + S_2\}$. Andernfalls kann auch eine echte Inklusion vorliegen, wie das Beispiel $S_1 = \mathrm{id} = -S_2$ zeigt, denn dann ist $T \circ (S_1 + S_2) = 0$ global definiert und $\operatorname{Dom}(T \circ S_1 + T \circ S_2) = \operatorname{Dom}(T \circ S_1) \cap \operatorname{Dom}(T \circ S_2) = \operatorname{Dom} T$.

9.41 Lemma.

Es seien H_n Hilbert-Räume und $T_n \in L(H_n)$. Es sei $H := \bigoplus_n H_n$ und $\bigoplus_n T_n : H \rightsquigarrow H$ definiert auf $D := \{(h_n) \in \bigoplus_n H_n : \sum_n \|T_n h_n\|^2 < \infty\}$ durch $(h_n)_n \mapsto (T_n h_n)_n$.
Dann ist $\bigoplus_n T_n$ ein abgeschlossener dicht-definierter Operator. Sein Adjungierter ist $(\bigoplus_n T_n)^* = \bigoplus_n T_n^*$ und $\bigoplus_n T_n$ ist genau dann normal, wenn alle T_n es sind.

Für eine zweite Folge von Operatoren $S_n \in L(H_n)$ gilt: $(\bigoplus_n T_n) \circ (\bigoplus_n S_n) \subseteq \bigoplus_n (T_n \circ S_n)$. Ist zusätzlich $(\|S_n\|)_n$ beschränkt, so gilt Gleichheit.

Beweis. Offensichtlich ist D ein linearer Teilraum und $T := \bigoplus_n T_n$ linear auf D. Da $H_n \subseteq D$ für alle n, ist D dicht in H.

Beh.: *T ist abgeschlossen.*
Sei dazu $h^{(j)}$ eine Folge in $\operatorname{Dom} T$ mit $(h^{(j)}, Th^{(j)}) \to (h, g)$ in $H \oplus H$. Dann gilt für die Komponenten $(h_n^{(j)}, T_n h_n^{(j)}) \to (h_n, g_n)$. Da T_n beschränkt ist, ist $T_n h_n = g_n$ und somit ist $\sum_n \|T_n h_n\|^2 = \sum_n \|g_n\|^2 = \|g\|^2 < \infty$, d.h. $h \in \operatorname{Dom} T$ und klarerweise gilt $Th = g$, also ist T abgeschlossen.

Beh.: $T^*((k_n)_n) = (T_n^* k_n)_n$ für $(k_n)_n \in \operatorname{Dom} T^* = \{(k_n) : \sum_n \|T_n^* k_n\|^2 < \infty\}$.
($\supseteq$) Es ist $k \in \operatorname{Dom} T^*$ genau dann, wenn

$$
h \mapsto \langle h, T^* k\rangle := \langle Th, k\rangle = \sum_n \langle T_n h_n, k_n\rangle = \sum_n \langle h_n, T_n^* k_n\rangle
$$

auf $\operatorname{Dom} T$ ein beschränkt lineares Funktional ist. Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist das für k mit $\sum_n \|T_n^* k_n\|^2 < \infty$ der Fall. Daß $T^* k$ für solche k durch $T^* k = (T_n^* k_n)_n$ gegeben ist, ist offensichtlich.
($\subseteq$) Für $k \in \operatorname{Dom} T^*$ existiert ein $C > 0$ mit $|\langle Th, k\rangle| \leq C\,\|h\|$ und somit ist mit

$h_n := T_n^* k_n$ für jede endliche Teilsumme $\sum \|T_n^* k_n\|^2 = \sum \langle h_n, T_n^* k_n\rangle \le C\sqrt{\sum \|h_n\|^2} = C\sqrt{\sum \|T_n^* k_n\|^2}$ also $\sum \|T_n^* k_n\|^2 \le C^2$. Damit ist auch $\sum_{n=1}^\infty \|T_n^* k_n\|^2 \le C^2$.

Sei nun $S_n \in L(H_n)$ eine zweite Folge von Operatoren, und sei $T := \bigoplus_n T_n$ und $S := \bigoplus_n S_n$. Für

$$h \in \operatorname{Dom}(T \circ S) = \left\{ h = (h_n)_n : \begin{array}{c} \sum_n \|h_n\|^2 < \infty, \\ \sum_n \|S_n h_n\|^2 < \infty, \\ \sum_n \|T_n(S_n h_n)\|^2 < \infty \end{array} \right\}$$

ist offensichtlich $h \in \operatorname{Dom}(\bigoplus_n (T_n \circ S_n))$ und es gilt

$$\begin{aligned} \Big(\bigoplus_n (T_n \circ S_n)\Big)(h) &= \Big((T_n \circ S_n)(h_n)\Big)_n = \Big(\bigoplus_n T_n\Big)\Big(S_n(h_n)\Big)_n \\ &= \Big(\bigoplus_n T_n\Big)\Big(\Big(\bigoplus_n S_n\Big)h\Big) = \Big(\Big(\bigoplus_n T_n\Big)\circ\Big(\bigoplus_n S_n\Big)\Big)h, \end{aligned}$$

d.h. $(\bigoplus_n T_n) \circ (\bigoplus_n S_n) \subseteq \bigoplus_n (T_n \circ S_n)$.

Falls $\|S_n\|$ beschränkt ist, so ist wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung der Definitionsbereich von $S = \bigoplus_n S_n$ ganz H und $\|S\| = \sup_n \|S_n\|$. Für $h = (h_n)_n \in \operatorname{Dom}(\bigoplus_n (T_n \circ S_n))$ folgt aus $\sum_n \|h_n\|^2 < \infty$ die Abschätzung $\sum_n \|S_n h_n\|^2 \le \|S\|^2 \sum_n \|h_n\|^2 < \infty$, also ist $h \in \operatorname{Dom}(T \circ S)$ und somit gilt Gleichheit.

Wenn $\bigoplus_n T_n$ normal ist, so offensichtlich auch die Einschränkungen T_n.
Umgekehrt ist nach 9.39

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom}(T^* \circ T) &= \{h \in \operatorname{Dom} T : Th \in \operatorname{Dom} T^*\} \\ &= \left\{ h = (h_n)_n : \begin{array}{c} \sum_n \|h_n\|^2 < \infty, \\ \sum_n \|T_n^* h_n\|^2 = \sum_n \|T_n h_n\|^2 < \infty, \\ \sum_n \|T_n T_n^* h_n\|^2 = \sum_n \|T_n^* T_n h_n\|^2 < \infty \end{array} \right\} \\ &= \{h \in \operatorname{Dom} T^* : T^* h \in \operatorname{Dom} T\} \\ &= \operatorname{Dom}(T \circ T^*), \end{aligned}$$

und sowohl $T^* \circ T$ also auch $T \circ T^*$ sind Einschränkungen von $\bigoplus T_n^* \circ T_n = \bigoplus T_n \circ T_n^*$. Also ist T normal. □

9.42 Theorem.

Es sei $P : \mathcal{B}(X) \to L(H)$ ein Spektral-Maß wie in 8.7. Für eine meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ betrachten wir eine Partition von X in meßbare Mengen Δ_n, auf welchen f beschränkt ist (z.B. $\Delta_n := \{x \in X : n-1 \le |f(x)| < n\}$). Weiters setzen wir $H_n := P(\Delta_n)H$ und $P_n : \mathcal{B}(\Delta_n) \to L(H_n)$ sei das Spektral-Maß $P_n(\Delta) := P(\Delta)|_{H_n}$. Dann ist $H = \bigoplus_{n=1}^\infty H_n$ und bezüglich dieser Zerlegung ist

$$\int_X f\, dP := \bigoplus_{n=1}^\infty \int_{\Delta_n} f|_{\Delta_n}\, dP_n,$$

der normale Operator

$$\int_X f\, dP : h = (h_n)_n \mapsto \bigoplus_{n=1}^\infty \Big(\int_{\Delta_n} f\, dP_n\Big) h_n$$

mit Definitions-Bereich

$$D_f := \Big\{ h \in H : \sum_{n=1}^\infty \Big\| \Big(\int_{\Delta_n} f\, dP_n\Big) h_n \Big\|^2 < \infty \Big\} = \Big\{ h : \int_X |f|^2\, dP_{h,h} < \infty \Big\}$$

und für $h \in D_f$ und $k \in H$ ist $f \in L^1(|P_{h,k}|)$ mit

$$\int_X |f|\,d|P_{h,k}| \le \Big(\int_X |f|^2\,dP_{h,h}\Big)^{1/2}\,\|k\| \quad \textit{und} \quad \Big\langle\Big(\int_X f\,dP\Big)\,h,k\Big\rangle = \int_X f\,dP_{h,k}.$$

Insbesonders hängt also der Operator $\int_X f\,dP$ und sein Definitionsbereich nicht von der Auswahl der Δ_n ab.

Beweis. Da $P(\Lambda)\circ P(\Delta_n) = P(\Lambda\cap\Delta_n) = P(\Delta_n)\circ P(\Lambda)$ ist $H_n := P(\Delta_n)H$ ein $P(\Lambda)$-invarianter Teilraum, und somit ist P_n ein wohldefiniertes Spektral-Maß für H_n. Wegen $1 = P(X) = P(\bigsqcup_n \Delta_n) = \sum_n P(\Delta_n)$ ist $H = \bigoplus_n H_n$ und die orthogonal-Projektion auf H_n ist durch $h\mapsto h_n := P(\Delta_n)h$ gegeben.

Da $f|_{\Delta_n}$ beschränkt ist, ist $\int_{\Delta_n} f\,dP_n$ ein wohl-definierter beschränkter normaler Operator auf H_n nach 8.12. Nach 9.41 ist folglich $\int_X f\,dP := \bigoplus_n \int_{\Delta_n} f\,dP_n$ ein normaler unbeschränkter Operator mit Definitionsbereich D_f.

Als nächstes zeigen wir die behauptete Gleichung für D_f:
Nach der Spektral-Theorie 8.12 für beschränkte Operatoren gilt:

$$\begin{aligned}
\Big\|\Big(\int f_{\Delta_n}\,dP_n\Big)\,h_n\Big\|^2 &= \Big\langle\Big(\int_{\Delta_n} f\,dP_n\Big)^*\Big(\int_{\Delta_n} f\,dP_n\Big)h_n,h_n\Big\rangle\\
&= \Big\langle\Big(\int_{\Delta_n} \overline{f}\,f\,dP_n\Big)\,h_n,h_n\Big\rangle = \Big\langle\Big(\int_{\Delta_n} |f|^2\,dP_n\Big)h_n,h_n\Big\rangle\\
&= \int_{\Delta_n} |f|^2\,d(P_n)_{h_n,h_n} = \int_{\Delta_n} |f|^2\,dP_{h,h}, \quad \text{denn}\\
\text{für } \Lambda\subseteq\Delta_n \text{ ist } P_{h,h}(\Lambda) &= \langle P(\Lambda)h,h\rangle\\
&= \langle P(\Delta_n\cap\Lambda\cap\Delta_n)h,h\rangle = \langle P(\Delta_n)P(\Lambda)P(\Delta_n)\,h,h\rangle\\
&= \langle P(\Lambda)\,P(\Delta_n)h, P(\Delta_n)h\rangle = \langle P(\Lambda)\,h_n,h_n\rangle\\
&= \langle P_n(\Lambda)\,h_n,h_n\rangle = (P_n)_{h_n,h_n}(\Lambda).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die behauptete Gleichung über D_f. Und somit ist der Definitionsbereich von $\int_X f\,dP$ unabhängig der Wahl der Partition in Mengen Δ_n.

Sei nun $h\in D_f$ und $k\in H$. Nach dem Radon-Nikodym Theorem 8.33 existiert eine meßbare Funktion u mit $|u|=1$ und $|P_{h,k}| = u\,P_{h,k}$, wobei $|P_{h,k}|$ die Variation von $P_{h,k}$ ist. Es sei $f_{\le n} := f|_{\bigsqcup_{k\le n}\Delta_k} = \sum_{k=1}^n \chi_{\Delta_k} f$. Es ist sowohl $f_{\le n}$ als auch $u\,f_{\le n}$ beschränkt und folglich gilt:

$$\begin{aligned}
\int |f_{\le n}|\,d|P_{h,k}| = \int |f_{\le n}|\,u\,dP_{h,k} &= \Big\langle\Big(\int |f_{\le n}|\,u\,dP\Big)h,k\Big\rangle\\
&\le \Big\|\Big(\int |f_{\le n}|\,u\,dP\Big)h\Big\|\cdot\|k\|.
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\Big\|\Big(\int |f_{\le n}|\,u\,dP\Big)h\Big\|^2 &= \Big\langle\Big(\int |f_{\le n}|\,u\,dP\Big)h,\Big(\int |f_{\le n}|\,u\,dP\Big)h\Big\rangle\\
&= \Big\langle\Big(\int |f_{\le n}|^2\,dP\Big)h,h\Big\rangle = \int |f_{\le n}|^2\,dP_{h,h} \le \int |f|^2\,dP_{h,h}.
\end{aligned}$$

Also ist $\int |f_{\le n}|\,d|P_{h,k}| \le \Big(\int |f|^2\,dP_{h,h}\Big)^{1/2}\|k\|$ für alle n. Da $|f_{\le n}|$ monoton punktweise gegen $|f|$ konvergieren, folgt daraus mittels des Satzes von B. Levi über monotone Konvergenz, daß $f\in L^1(|P_{h,k}|)$ und die gewünschte Ungleichung

$$\int |f|\,d|P_{h,k}| \le \Big(\int_X |f|^2\,dP_{h,h}\Big)^{1/2}\|k\|.$$

Da $f_{\le n}$ beschränkt ist, gilt nach 8.12.1 auch

$$\Big\langle\Big(\int f_{\le n}\,dP\Big)h,k\Big\rangle = \int f_{\le n}\,dP_{h,k}.$$

Falls $h \in D_f$ und $k \in H$, so folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, daß

$$\int f_{\le n}\,dP_{h,k} \to \int f\,dP_{h,k} \text{ für } n\to\infty.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\Big(\int f_{\le n}\,dP\Big)\,h &= \left(\bigoplus_{j\le n}\int_{\Delta_j} f|_{\Delta_j}\,dP_j\right)(\dots,h_n,0,\dots)\\ &= \Big(\int f\,dP\Big)\,P\Big(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j\Big)\,h \overset{\boxed{9.41}}{=\!=\!=} P\Big(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j\Big)\,\Big(\int f\,dP\Big)\,h,\end{aligned}$$

und da $P\Big(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j\Big) \to P(X) = 1$ in der SOT, folgt schließlich

$$\Big\langle\Big(\int f_{\le n}\,dP\Big)\,h,k\Big\rangle \to \Big\langle\Big(\int f\,dP\Big)\,h,k\Big\rangle.$$

Also ist

$$\Big\langle\Big(\int_X f\,dP\Big)\,h,k\Big\rangle = \int_X f\,dP_{h,k}.$$

Das zeigt auch, daß der Operator $\int_X f\,dP$ unabhängig von der Auswahl der Partition in Mengen Δ_n ist. □

9.43 Proposition.

Es sei $P : \mathcal{B}(X) \to L(H)$ ein Spektral-Maß. Für jede meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ sei $\rho(f) : H \rightsquigarrow H$ durch $\rho(f) := \int_X f\,dP$ definiert. Dann gilt für meßbare Funktionen $f,g : X \to \mathbb{C}$:

1. $\rho(f)^* = \rho(\overline{f})$.
2. $\rho(f\,g) \supseteq \rho(f)\,\rho(g)$ *und* $\operatorname{Dom}(\rho(f)\,\rho(g)) = D_g \cap D_{f\,g}$.
3. *Falls g beschränkt ist, so ist $\rho(f)\,\rho(g) = \rho(f\,g)$.*
4. $\rho(f)^*\,\rho(f) = \rho(|f|^2)$.

Beweis. Zu gegebenen meßbaren Funktionen $f,g : X \to \mathbb{C}$ wählen wir eine Partition von X in meßbare Mengen Δ_n und definieren ein Spektral-Maß P_n auf Δ_n für $H_n := P(\Delta_n)H$ wie in 9.42. Es sei ρ_n die zugehörige C^*-Darstellung der beschränkten Funktionen auf Δ_n auf H_n. Dann ist $\rho(h) := \bigoplus_n \rho_n(h)$ für $h \in \{f,\overline{f},g,f\cdot g\}$. Für die C^*-Darstellung ρ_n gilt natürlich (1)-(4) mit Gleichheit überall. Unter Verwendung von 9.41 folgt nun:

(1), da

$$\rho(f)^* = \Big(\bigoplus_n \rho_n(f)\Big)^* = \bigoplus_n \rho_n(f)^* = \bigoplus_n \rho_n(\overline{f}) = \rho(\overline{f}).$$

(2) Die Inklusion gilt, da

$$\begin{aligned}\rho(f)\circ\rho(g) &= \Big(\bigoplus_n \rho_n(f)\Big)\circ\Big(\bigoplus_n \rho_n(g)\Big) \subseteq \bigoplus_n(\rho_n(f)\circ\rho_n(g)) = \bigoplus_n(\rho_n(f\,g))\\ &= \rho(f\,g).\end{aligned}$$

Weiters ist $h \in \mathrm{Dom}(\rho(f) \circ \rho(g))$ genau dann, wenn $h \in \mathrm{Dom}(\rho(g)) =: D_g$ und $\rho(g)\, h \in \mathrm{Dom}(\rho(f)) =: D_f$. Letzteres bedeutet, daß $\infty > \sum_n \|\rho_n(f)(\rho_n(g)h)\|^2 = \sum_n \|\rho_n(f\,g)h\|^2$ ist, d.h. $h \in D_{f\,g}$ liegt.

(3) Falls g beschränkt ist, so ist $D_g = H$ und somit $\mathrm{Dom}(\rho(f)\rho(g)) = H \cap \mathrm{Dom}(\rho(fg)) = \mathrm{Dom}(\rho(fg))$.

Man beachte, daß unter dieser Voraussetzung nicht $\rho(g\,f) = \rho(g)\,\rho(f)$ gilt, wie in [5, X.4.10] behauptet wird. Sei nämlich z.B. $g = 0$, dann ist $g\,f = 0$ und $D_{g\,f} = H$ aber $\mathrm{Dom}(\rho(g)\,\rho(f)) = D_f \cap D_{gf} = \mathrm{Dom}(\rho(f)) \subset H$.

(4) Nach (1) und (2) ist $\rho(f)^* \circ \rho(f) = \rho(\overline{f}) \circ \rho(f) \subseteq \rho(|f|^2)$ und $\mathrm{Dom}(\rho(f)^* \circ \rho(f)) = \mathrm{Dom}(\rho(\overline{f}) \circ \rho(f)) = D_f \cap D_{|f|^2}$. Bleibt also nur zu zeigen, daß $D_{|f|^2} \subseteq D_f$. Sei dazu $h = (h_n)_n \in D_{|f|^2}$, d.h. $\sum_n \|\rho_n(|f|^2)h_n\|^2 < \infty$. Zweimalige Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}\sum \|\rho_n(f)h_n\|^2 &= \sum\langle \rho_n(f)^*\rho_n(f)h_n, h_n\rangle \leq \sum \|\rho_n(f)^*\rho_n(f)h_n\|\,\|h_n\| \\ &\leq \Big(\sum \|\rho_n(|f|^2)h_n\|^2\Big)^{1/2}\, \|h\| < \infty,\end{aligned}$$

d.h. $h \in D_f$. $\square$

9.44 Theorem.

Es sei $N : H \rightsquigarrow H$ ein normaler Operator auf H. Dann existiert ein eindeutiges Spektral-Maß P definiert auf den Borel-Mengen von $\mathbb{C}$, sodaß

1. $N = \int_{\mathbb{C}} z\, dP(z)$.
2. $P(\Lambda) = 0$ *falls* $\Lambda \cap \sigma(N) = \emptyset$.
3. *Falls* $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen ist und* $U \cap \sigma(N) \neq \emptyset$, *so ist* $P(U) \neq 0$.
4. *Ist* $A \in L(H)$ *mit* $AN \subseteq NA$ *und* $AN^* \subseteq N^*A$, *so ist* $A\left(\int_{\mathbb{C}} f\, dP\right) \subseteq \left(\int_{\mathbb{C}} f\, dP\right) A$ *für alle Borel-Funktionen* f *auf* $\mathbb{C}$.

Das Fugledge-Putnam Theorem gilt auch für unbeschränkte normale Operatoren, und somit kann die Hypothese in (4) auf $AN \subseteq NA$ abgeschwächt werden.

Zur Idee des Beweises: Falls $N = \int z\, dP(z)$, so könnten wir $\mathbb{C}$ in Kreisringe Δ_n zerlegen. Es wären dann wohl $H_n := P(\Delta_n)H$ invariante Teilräume mit $H = \bigoplus_n H_n$ und wir können N mit der unbeschränkten Summe $\bigoplus_n N|_{H_n}$ vergleichen. Umgekehrt sollten wir also eine Zerlegung $H = \bigoplus_n H_n$ in $\{N, N^*\}$-invariante Teilräume H_n finden, so daß $N_n := N|_{H_n}$ ein beschränkter normaler Operator ist. Nach dem Spektral-Satz für beschränkte Operatoren existieren dann Spektral-Maße P_n mit $N_n = \int z\, dP_n$. Diese wollen wir aufsummieren um ein Spektral-Maß P für N zu erhalten.

Die Funktion $f : z \mapsto \frac{1}{1+|z|^2} = (1 + \overline{z}z)^{-1}$ bildet $\mathbb{C}$ auf das Intervall $(0, 1]$ ab. Den Kreisringen entsprechen dabei Teilintervalle. Um also die Räume H_n ohne das noch nicht vorhandene Spektral-Maß P von N zu finden, betrachten wir die Kontraktion $S := (1 + N^*N)^{-1} \geq 0$ aus 9.38 und die Bilder ihrer Spektral-Projektoren (die wären $P \circ f^{-1}$ nach 8.58 für beschränktes N) auf Teilintervallen von $(0, 1] \subset [0, 1] \supseteq \sigma(S)$.

Sublemma.

Es sei $N : H \rightsquigarrow H$ normal, $S := (1 + N^*N)^{-1}$ und $S = \int_0^1 t\, dP(t)$ die Spektral-Darstellung.
Dann ist $S\,N \subseteq N\,S$ und $S\,N\,S = N\,S\,S$.
Falls Δ eine Borel-Teilmenge in $[\delta, 1]$ mit $0 < \delta < 1$ ist, so ist $H_\Delta := P(\Delta)H$

eine $\{S, N, N^*\}$-invariante Teilmenge von $\operatorname{Dom} N$*, weiters ist* $S|_{H_\Delta}$ *invertierbar und* $N|_{H_\Delta}$ *ein beschränkter normaler Operator mit* $\|N|_{H_\Delta}\| \leq \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1}$.

Beweis. Nach 9.38.3 und 9.38.4 sind S und $N\,S$ globale Kontraktionen.

$S\,N \subseteq N\,S$:
Sei dazu $f \in \operatorname{Dom} SN$. Dann ist $g := Sf \in \operatorname{Bild} S = \operatorname{Dom} N^*N \subseteq \operatorname{Dom} N$, also $f = (1 + N^*N)g$ und somit $N^*Ng = f - g \in \operatorname{Dom} SN - \operatorname{Dom} N^*N \subseteq \operatorname{Dom} N$. Damit ist $Ng \in \operatorname{Dom} NN^*$ und folglich ist $Nf = N(1+N^*N)g = Ng + NN^*Ng = (1+NN^*)Ng = (1+N^*N)Ng$, wegen der Normalität von N. Schließlich ist $SNf = S(1 + N^*N)Ng = Ng = NSf$, d.h. $S\,N \subseteq N\,S$.

Es folgt weiters $S\,N\,S \subseteq N\,S\,S$ und, da $\operatorname{Dom} NS = H$ nach 9.38.4 und somit auch $\operatorname{Dom} SNS = H$, ist $S\,N\,S = N\,S\,S$.

Sei nun $\Delta \subseteq [\delta, 1]$ eine Borelmenge.

Beh.: *$S : H_\Delta \to H_\Delta$ ist ein Isomorphismus.*

Da S mit seinen Spektral-Projektoren $P(\Delta)$ kommutiert, haben wir nebenstehendes kommutatives Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, tail, two heads, "S"] \arrow[d, "P(\Delta)"'] & \operatorname{Dom} N^*N \arrow[r, hook] & H \arrow[d, "P(\Delta)"] \\
H_\Delta \arrow[rr, tail, dotted, "S|_{H_\Delta}"] \arrow[d, hook] & & H_\Delta \arrow[d, hook] \\
H \arrow[rr, tail, "S"] & & H
\end{tikzcd}$$

Folglich hat $S|_{H_\Delta}$ dichtes Bild in H_Δ, denn $S(H_\Delta) = S(P(\Delta)H) = P(\Delta)(SH)$ ist dicht in $P(\Delta)H = H_\Delta$, weil $SH = \operatorname{Dom} N^*N$ nach 9.38.2 in H dicht liegt.

Für $h \in H_\Delta$ ist $h = P(\Delta)h$ und somit

$$\begin{aligned}
\|Sh\|^2 &= \langle S^2 P(\Delta)h, h\rangle = \Big\langle \Big(\int_0^1 t^2\, \chi_\Delta\, dP\Big)\, h, h\Big\rangle = \int_\Delta t^2\, dP_{h,h} \\
&\geq \delta^2 P_{h,h}(\Delta) = \delta^2 \langle P(\Delta)h, h\rangle = \delta^2\, \|h\|^2.
\end{aligned}$$

Also hat $S|_{H_\Delta}$ ein abgeschlossenes Bild in H_Δ und da dieses dicht ist, ist $S|_{H_\Delta}$ ein Isomorphismus.

Es ist $H_\Delta \subseteq \operatorname{Dom} N$, denn $H_\Delta = S(H_\Delta) \subseteq \operatorname{Bild} S = \operatorname{Dom}(N^*N) \subseteq \operatorname{Dom} N$.

Beh.: *H_Δ ist N-invariant.*
Sei $h \in H_\Delta$ und $g \in H_\Delta$ mit $h = S\,g$. Es sei $R := N\,S \in L(H)$. Dann ist $S\,R = S\,N\,S = N\,S\,S = R\,S$ nach obigem und somit $P(\Delta)\,R = R\,P(\Delta)$ nach 8.15, also ist H_Δ R-invariant. Folglich ist $N\,h = N\,S\,g = R\,g \in H_\Delta$.

Beh.: *H_Δ ist N^*-invariant.*
Falls $N_1 := N^*$ und $S_1 := (1 + N_1^* N_1)^{-1} = (1 + NN^*)^{-1} = (1 + N^*N)^{-1} = S$. Aus der vorigen Behauptung folgt somit, daß $N^* H_\Delta = N_1 H_\Delta \subseteq H_\Delta$.

Es folgt, daß die Einschränkung $N|_{H_\Delta}$ ebenfalls normal ist.

Sei schließlich $h \in H_\Delta$. Dann gilt ähnlich wie zuvor

$$\|Nh\|^2 = \langle N^*Nh, h\rangle = \langle (S^{-1} - 1)h, h\rangle = \int_\delta^1 (\tfrac{1}{t} - 1)\, dP_{h,h}(t) \leq \|h\|^2\, (\tfrac{1}{\delta} - 1).$$

Also ist $\|N|_{H_\Delta}\| \leq \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1}$. □

Beweis von 9.44. Wie im Sublemma sei $S := (1+N^*N)^{-1}$ und $R := NS$. Weiters sei $S = \int_0^1 t\, dP(t)$ die Spektral-Darstellung, $P_n := P(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ und $H_n := P_n H$ für $n \geq 1$. Also ist $1 = P(\sigma(S)) = P(\{0\}) + \sum_{n=1}^\infty P_n$. Da $\operatorname{Ker} S = \{0\}$ ist, ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert von S und somit $P(\{0\}) = 0$ nach 8.17, also ist $1 = \sum_{n=1}^\infty P_n$ und somit

$H = \bigoplus_n H_n$. Nach dem Sublemma ist H_n ein $\{N, N^*\}$-invarianter Teilraum von $\operatorname{Dom} N$ und $N_n := N|_{H_n}$ ist ein beschränkter normaler Operator mit $\|N_n\| \le \sqrt{n}$.

Ist also $\lambda \in \sigma(N_n)$, so ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+|\lambda|^2} \in \sigma((1+N_n^* N_n)^{-1}) &= \sigma(S|_{H_n}) = \sigma((S \circ P_n)|_{H_n}) \\
&= \sigma\Bigg(\Big(\int t \cdot \chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(t)\, dP(t)\Big)\Big|_{H_n}\Bigg) \\
&\subseteq \sigma\Big(\int t\, \chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(t)\, dP(t)\Big) \\
&= \text{ess-Bild}(\{t\, \chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(t) : t \in \sigma(S)\}) \quad \text{nach } \boxed{8.59} \\
&\subseteq \overline{\{t\, \chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(t) : t \in (0,1]\}} \subseteq \{0\} \cup [\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}],
\end{aligned}$$

d.h. $\sigma(N_n) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{1+|\lambda|^2} \le \frac{1}{n}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \sqrt{n} \ge |\lambda| \ge \sqrt{n-1}\} =: \Delta_n$.

Sei nun $P_n : \mathcal{B}(\Delta_n) \to L(H_n)$ das Spektralmaß von N_n und sei P auf jeder Borel-Menge $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(\Lambda) := \bigoplus_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda \cap \Delta_n).$$

Um zu zeigen, daß P ein Spektral-Maß ist, beachten wir zuerst, daß klarerweise $P(X) = 1$. Es ist $P_n(\Lambda \cap \Delta_n)$ eine orthogonal-Projektion mit Bild in H_n und somit $P(\Lambda)$ eine orthogonal-Projektion in $L(H)$. Da die H_n paarweise orthogonal sind, ist für Borel-Mengen Λ_i:

$$\begin{aligned}
P(\Lambda_1)\, P(\Lambda_2) &= \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda_1 \cap \Delta_n)\Big)\Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda_2 \cap \Delta_n)\Big) \\
&= \bigoplus_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda_1 \cap \Delta_n)\, P_n(\Lambda_2 \cap \Delta_n) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \Delta_n) \\
&= P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2).
\end{aligned}$$

Für $h \in H$ ist $P(\Lambda)h = \big(P_n(\Lambda \cap \Delta_n)h_n\big)_n$. Falls Λ_n paarweise disjunkte Borel-Mengen sind, so konvergiert $\sum_j P(\Lambda_j)$ punktweise nach $\boxed{8.4}$ und es gilt also:

$$\begin{aligned}
\Big\langle P\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Lambda_j\Big)h, h\Big\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big\langle P_n\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Lambda_j \cap \Delta_n\Big)h_n, h_n\Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\langle \sum_{j=1}^{\infty} P_n(\Lambda_j \cap \Delta_n)h_n, h_n\Big\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\langle P_n(\Lambda_j \cap \Delta_n)h_n, h_n\rangle}_{\ge 0} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle P_n(\Lambda_j \cap \Delta_n)h_n, h_n\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle P(\Lambda_j)h, h\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{\infty} P(\Lambda_j)h, h\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Somit ist P σ-additiv.

($\boxed{1}$) Für $h = (h_n)_n \in \operatorname{Dom}(\bigoplus_n N_n)$ liegt $\big((h_1, \dots, h_n, 0, \dots), (N_1 h_1, \dots, N_n h_n, 0, \dots)\big) \in \operatorname{Graph} N$ (wegen $N_n := N|_{H_n}$) und dieser Ausdruck konvergiert gegen $\big(h, (\bigoplus_n N_n)h\big)$. Da N abgeschlossen ist, liegt $h \in \operatorname{Dom} N$ und $Nh = (\bigoplus_n N_n)h$. Da aber sowohl N als auch $\bigoplus_n N_n$ normal ist, gilt $N = \bigoplus_n N_n = \bigoplus_n \int z\, dP_n(z) =: \int z\, dP(z)$ nach $\boxed{9.39}$.

Beh.: Es ist $\sigma(N)=\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \sigma(N_n)}$.
Klarerweise ist $\sigma(N)\supseteq\bigcup_{n=1}^\infty \sigma(N_n)$ und, da $\sigma(N)$ abgeschlossen ist, zeigt dies ($\supseteq$). Umgekehrt sei $\lambda\notin\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \sigma(N_n)}$. Dann existiert ein $\delta>0$ mit $|\lambda-z|\geq\delta$ für alle $z\in\bigcup_{n=1}^\infty \sigma(N_n)$. Also existiert $(N_n-\lambda)^{-1}$ und $\|(N_n-\lambda)^{-1}\|=\|z\mapsto(z-\lambda)^{-1}\|_\infty\leq\frac{1}{\delta}$ für alle n. Folglich ist $\bigoplus_{n=1}^\infty(N_n-\lambda)^{-1}$ ein beschränkter Operator und gleich $(N-\lambda)^{-1}$, d.h. $\lambda\notin\sigma(N)$.

($\boxed{2}$) Es gilt: $\Lambda\cap\sigma(N)=\emptyset\Rightarrow\forall n:\Lambda\cap\sigma(N_n)=\emptyset\Rightarrow\forall n:P_n(\Lambda)=0\Rightarrow P(\Lambda)=0$.

($\boxed{3}$) Falls U offen ist und $U\cap\sigma(N)\neq\emptyset$, dann impliziert die obige Behauptung, daß $U\cap\sigma(N_n)\neq\emptyset$ für ein n. Da damit $P_n(U)\neq 0$ nach 8.15, ist auch $P(U)\neq 0$.

($\boxed{4}$) Sei nun $A\in L(H)$ mit $AN\subseteq NA$ und $AN^*\subseteq N^*A$. Dann ist $A(1+N^*N)\subseteq(1+N^*N)A$ nach 9.40. Also ist $SA\subseteq AS$, und da beide Seiten global definiert sind, ist $SA=AS$. Nach 8.15 kommutiert somit A mit den Spektral-Projektionen von S und insbesonders ist H_n bezüglich A invariant. Somit ist $A_n:=A|_{H_n}\in L(H_n)$ und $A_nN_n=N_nA_n$. Also gilt $A_n\,f(N_n)=f(N_n)\,A_n$ für jede beschränkte Borel-Funktion f. Nach 9.41 folgt nun $A\left(\int_X f\,dP\right)=(\bigoplus_n A_n)\circ(\bigoplus_n f(N_n))\subseteq\bigoplus(A_n\circ f(N_n))=\bigoplus(f(N_n)\circ A_n)=(\bigoplus_n f(N_n))\circ(\bigoplus_n A_n)=\left(\int_X f\,dP\right)A$, da $\bigoplus_n A_n$ ein beschränkter Operator ist. □

9.45 Theorem.

Es sei $N:H\rightsquigarrow H$ ein normaler Operator auf einem separablen Hilbert-Raum H. Dann existiert ein σ-endlicher Maßraum (X,Ω,μ) und eine Ω-meßbare Funktion $f:X\to\mathbb{C}$, sodaß N unitär äquivalent ist zu M_f auf $L^2(\mu)$.

Beweis. Wir zerlegen N in die unbeschränkte Summe von beschränkten normalen Operatoren N_n wie im Beweis von 9.44. Nach Theorem 8.35 existieren σ-endliche Maß-Räume (X_n,Ω_n,μ_n) und beschränkte Ω_n-meßbare Funktion f_n, so daß N_n unitär-äquivalent ist zu M_{f_n}. Es sei X die disjunkte Vereinigung der X_n und $\Omega:=\{\Delta\subseteq X:\Delta\cap X_n\in\Omega_n \text{ für alle } n\}$. Falls $\Delta\in\Omega$ so sei $\mu(\Delta):=\sum_{n=1}^\infty\mu_n(\Delta\cap X_n)$. Weiters sei $f:X\to\mathbb{C}$ definiert durch $f|_{X_n}:=f_n$. Dann ist f Ω-meßbar und $N=\bigoplus_n N_n\sim\bigoplus_n M_{f_n}=M_f$ auf $L^2(X,\Omega,\mu)$. □

9.46 Beispiel.

Wir wollen nun einen unitären Operator U finden, welcher den Impuls-Operator $P:f\mapsto i\,f'$ in einen Multiplikations-Operator transformiert. Dazu rufen wir uns die Fouriertransformation $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ aus Kapitel [**18**, 8] in Erinnerung. Sie war durch

$$\mathcal{F}f(y):=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-ixy}\,dx$$

definiert und hat die Parsevalsche Gleichung

$$\langle\mathcal{F}f,\mathcal{F}g\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle f,g\rangle$$

erfüllt. Damit sie wirklich unitär wird, modifizieren wir sie durch einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, d.h.

$$\mathcal{F}f(y):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-ixy}\,dx.$$

Da dann $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ eine surjektive Isometrie ist mit inverser $\mathcal{F}^{-1}f=S(\mathcal{F}f)$ (wobei S die Spiegelung bezeichnet) und $\mathcal{S}$ dicht liegt in L^2, läßt sie sich zu einem eindeutigen unitären Operator $\mathcal{F}:L^2\to L^2$ erweitern.

Für $f \in \mathcal{S}$ ist, wie wir in [18, 8.1.5] gesehen haben:

$$\begin{aligned}(P \circ \mathcal{F})f(y) &= i \frac{d}{dy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, (-i^2)\, x\, e^{-ixy}\, dx \\ &= (\mathcal{F} \circ Q) f(y),\end{aligned}$$

wobei Q wie üblich den Orts-Operator bezeichnet. Es ist also $P|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F} \circ Q|_{\mathcal{S}} \circ \mathcal{F}^{-1}$, und da P der Abschluß von $P|_{C_c^\infty}$ nach $\boxed{9.6}$ und somit auch von $P|_{\mathcal{S}}$ ist, und auch Q analog jener von $Q|_{\mathcal{S}}$ ist nach $\boxed{9.4}$, ist $P = \overline{P|_{\mathcal{S}}} = \overline{\mathcal{F} \circ Q|_{\mathcal{S}} \circ \mathcal{F}^{-1}} = \mathcal{F} \circ \overline{Q|_{\mathcal{S}}} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ Q \circ \mathcal{F}^{-1}$. In der Tat genügt es dafür zu wissen, daß Q der Abschluß von $Q|_{\mathcal{S}}$ ist, denn natürlich enthält P den Abschluß von $P|_{\mathcal{S}}$, d.h. den selbst-adjungierten Operator $\overline{P|_{\mathcal{S}}} = \overline{\mathcal{F} \circ Q|_{\mathcal{S}} \circ \mathcal{F}^{-1}} = \mathcal{F} \circ \overline{Q|_{\mathcal{S}}} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ Q \circ \mathcal{F}^{-1}$. Da selbst-adjungierte Operatoren maximal symmetrisch sind, muß dies P sein.

Da $\mathcal{F}^{-1} = S \circ \mathcal{F}$ ist, gilt umgekehrt $Q = \mathcal{F}^{-1} \circ P \circ \mathcal{F} = S \circ \mathcal{F} \circ P \circ S^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F} \circ S \circ S^{-1} \circ P \circ \mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F} \circ P \circ \mathcal{F}^{-1}$, denn

$$\begin{aligned}(S \circ \mathcal{F})f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix(-y)}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i(-x)y}\, dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x)\, e^{-ixy}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} Sf(x)\, e^{-ixy}\, dx \\ &= (\mathcal{F} \circ S) f(y)\end{aligned}$$

und

$$(S \circ P)f(y) = P(f)(-y) = i\, f'(-y) = -i\, \frac{d}{dy}(f'(-y)) = -(P \circ S)f(y).$$

1-Parameter Gruppen und infinitesimale Erzeuger

Motivation.

In der klassischen Mechanik ist die Bewegungsgleichung durch das Newton'sche Gesetz

$$F(x) = m \cdot \ddot{x} \qquad \text{(Kraft = Masse × Beschleunigung)}$$

geben. Durch den Ansatz $q := x$ und $p := m\dot{x}$ (Impuls = Masse × Geschwindigkeit) wird diese gewöhnliche Differential-Gleichung 2.ter Ordnung in folgende Differential-Gleichung 1.ter Ordnung übergeführt:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{m} p \\ \dot{p} &= F(q)\end{aligned}$$

Ist das Kraftfeld ein Gradientenfeld, d.h. $F = -\operatorname{Grad} U$, und definiert man die Energie E (= Hamilton-Funktion H) als Summe der kinetischen Energie $\frac{m\|\dot{x}\|^2}{2} = \frac{\|p\|^2}{2m}$ und potentieller Energie $U(q)$ so erhält man

$$E(q, p) := \frac{|p|^2}{2m} + U(q)$$

und $\frac{\partial E}{\partial q} = \operatorname{Grad} U = -F$ und $\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{1}{m} p$. Also ist die Energie eine Bewegungs-Invariante, d.h. $\frac{d}{dt} E(p,q) = \frac{\partial E}{\partial p}\,\dot p + \frac{\partial E}{\partial q}\,\dot q = \frac{p}{m}\,F(q) - F(q)\,\frac{p}{m} = 0$ und die Bewegungsgleichung ist äquivalent zu

$$\dot q = \frac{\partial E}{\partial p}$$
$$\dot p = -\frac{\partial E}{\partial q}.$$

Wenn wir dies nun in die Quanten-Mechanik übersetzen, so wird p zum Differential-Operator $P = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} : f \mapsto f'$ und q zum Multiplikationsoperator $Q = x$ mit der Identität. Die Energie-Funktion wird dann zum Schrödinger Operator: $S := -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + U(x)$, beziehungsweise in mehreren Variablen zu

$$S = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x).$$

Die entsprechende Bewegungsgleichung ist die Schrödinger Gleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}u = S\,u.$$

Von ganz ähnlicher Bauart ist auch die Wärmeleitungs-Gleichung

$$\frac{d}{dt}u = \Delta u.$$

Auch die Schwingungs-Gleichung $\frac{d^2u}{dt^2} = \Delta u$ läßt sich mittels des Ansatzes $v = \frac{d}{dt}u$ in die Form

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bringen.

Wir müssen also Gleichungen der Gestalt $\dot u = A\,u$ lösen, eine lineare gewöhnliche Differential-Gleichung 1.ter Ordnung. Für beschränkte Operatoren auf Banachräumen ist die Lösung nach [**18**, 3.5.1] durch $u(t) = u(0)\,e^{t\,A}$ gegeben. Die in obigen Situationen auftretenden Operatoren sind aber partielle Differential-Operatoren zweiter Ordnung, also keine stetigen Operatoren auf Banach-Räumen. Für Fréchet-Räume wie $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muß aber die Reihe $e^{t\,A} = \sum_n \frac{t^n}{n!}A^n$ nicht konvergieren. Also sollten wir A als lineare (unbeschränkte) Operatoren auf L^2 auffassen, und für solche $e^{t\,A}$ definieren.

Man beachte, daß der Laplace Operator selbst-adjungiert ist. Nach einem Resultat von [**15**] ist der Schrödinger Operator $S = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x)$ unter geeigneten Wachstumsbedingungen an das Potential U wesentlich selbst-adjungiert, siehe auch [**37**, 253].

Es sei $t \mapsto u_x(t)$ die Lösungs-Kurve zum Anfangswert $u(0) = x$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot u = A(u)$. Dann hat die Abbildung $U : (t,x) \mapsto u_x(t)$ dort wo sie definiert ist, offensichtlich folgende Eigenschaften:

$$U(0,x) = x$$
$$U(t+s,x) = U(t, U(s,x)).$$

Sie heißt auch der Fluss der Differentialgleichung. Ist A linear, so ist klarerweise auch $x \mapsto U(t,x)$ linear, und somit $\overset{\vee}{U} : \mathbb{R} \to L(H)$ eine Kurve mit $\overset{\vee}{U}(0) = 1$ und $\overset{\vee}{U}(t+s) = \overset{\vee}{U}(t) \circ \overset{\vee}{U}(s)$. Es ist also $\overset{\vee}{U} : \mathbb{R} \to L(H)$ ein Gruppen-Homomorphismus. Und für alle $x \in H$ gilt $\frac{d}{dt}\overset{\vee}{U}(t)(x) = \frac{\partial}{\partial t}u_x(t) = A(u_x(t)) = (A \circ \overset{\vee}{U}(t))(x)$. Insbesonders ist also die punktweise Ableitung der Kurve $\overset{\vee}{U}$ bei 0 genau A. Diesen

Zusammenhang zwischen Operatoren und 1-Parameter Untergruppen wollen wir nun auf unbeschränkte selbst-adjungierte Operatoren übertragen.

9.47 Stone's Theorem

Sei $S : H \rightsquigarrow H$ selbstadjungiert und $S = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t)$ seine Spektral-Darstellung. Da für $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $s \mapsto e^{its}$ beschränkt auf $\mathbb{R}$ ist, existiert $U(t) := e^{itS} := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\, dP(s) \in L(H)$. Weiters ist $U(t)^* = e^{-itS}$ und somit $U(t)\circ U(t)^* = e^{itS}\circ e^{-itS} = e^0 = 1$ und $U(t)^*\circ U(t) = e^{-itS}\circ e^{itS} = 1$, d.h. $U(t)$ ist unitär.

Wegen $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ ist $U(t)\circ U(s) = U(t+s)$. Weiters ist U SOT-stetig, denn $\|U(t)h - U(s)h\| = \|U(t-s+s)h - U(s)h\| = \|U(s)\,(U(t-s)h - h)\| = \|U(t-s)h - h\|$. Also genügt zu zeigen, daß $\|U(t)h - h\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{i\,t\,s} - 1|^2\, dP_{h,h}(s) \to 0$ für $t \to 0$. Es ist $P_{h,h}$ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und für jedes $s \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{i\,t\,s} - 1|^2 \to 0$ für $t \to 0$ und $|e^{i\,t\,s} - 1|^2 \le 4$. Also folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, daß $U(t)h \to h$ für $t \to 0$.

Theorem.

Es ist eine Bijektion

$$\{S : H \rightsquigarrow H,\ \textit{selbstadjungiert}\} \cong \{U : \mathbb{R} \to L(H),\ \textit{unitäre Darstellung}\}$$

vermöge

$$U(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it}\, dP(t) \ \textit{für}\ S = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t)$$
$$i\,S := \frac{d}{dt}|_{t=0} U(t)h \ \textit{für}\ h \in \operatorname{Dom} S := \{h : \exists \frac{d}{dt}|_{t=0} U(t)h\}$$

gegeben.

Beweis. Daß U eine unitäre Darstellung ist, haben wir gerade gezeigt. Es ist $\frac{1}{t}(U(t)-1) - i\,S = f_t(S)$, wobei $f_t(s) := \frac{1}{t}(e^{i\,t\,s}-1) - i\,s$. Für $h \in \operatorname{Dom} S$ ist also

$$\left\|\frac{1}{t}(U(t)h - h) - i\,S\,h\right\|^2 = \|f_t(S)h\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{i\,t\,s}-1}{t} - i\,s\right|^2 dP_{h,h}(s).$$

Für $t \to 0$ gilt $\frac{1}{t}(e^{i\,t\,s}-1) - i\,s \to 0$ und wegen des Mittelwertsatzes $|e^{i\,s}-1| \le |s|$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Also ist $|f_t(s)| \le \frac{1}{t}|e^{i\,t\,s}-1| + |s| \le 2|s|$. Da $\operatorname{id} \in L^2(P_{h,h})$ nach 9.42, folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, daß $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)-1)h = i\,S\,h$.

Sei $D := \{h \in H : \frac{d}{dt}|_{t=0} U(t)\,h$ existiert in $H\}$. Für $h \in D$ sei $\tilde{S}h$ definiert durch

$$\tilde{S}h := -i\,\tfrac{d}{dt}|_{t=0} U(t)\,h.$$

Man sieht sofort ein, daß $\tilde{S}$ ein linearer Operator ist. Nach Obigem ist $\tilde{S}$ eine Erweiterung von S und somit ist auch $\tilde{S}$ dicht-definiert. Für $h, g \in D$ gilt:

$$\langle \tilde{S}h, g\rangle = -i \lim_{t\to 0}\Big\langle \frac{U(t)h - h}{t}, g\Big\rangle = \lim_{t\to 0}\Big\langle h, -i\,\frac{U(-t)g - g}{-t}\Big\rangle = \langle h, \tilde{S}g\rangle,$$

weil $U(t)^* = U(t)^{-1} = U(-t)$. Also ist $\tilde{S}$ eine symmetrische Erweiterung von S und, da nach 9.29 der selbst-adjungierte Operator S maximal symmetrisch ist, gilt $\tilde{S} = S$ und $D = \operatorname{Dom} S$.

Sei umgekehrt $U : \mathbb{R} \to U(H)$ eine unitäre Darstellung, $D := \{h \in H : \exists \frac{d}{dt}|_{t=0} U(t)\,h\}$ und $Sh := -i\frac{d}{dt}|_{t=0} U(t)h$ für $h \in D$.

Beh.: D ist dicht in H.
Dazu definieren wir Operatoren R_n durch

$$R_n h := \int_0^\infty e^{-t}\, U(\tfrac{t}{n}) h\, dt.$$

Da $\|U(t)h\| = \|h\|$ und $(t \mapsto e^{-t}) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, ist dieses Integral wohldefiniert und es gilt $\|R_n h\| \le \int_0^\infty e^{-t}\, \|h\|\, dt = -e^{-t}\, \|h\|\,|_{t=0}^\infty = \|h\|$. Offensichtlich ist somit $R_n : H \to H$ ein beschränkter linearer Operator mit $\|R_n\| \le 1$.
Wir wollen nun zeigen, daß das Bild von R_n ganz in D liegt. Sei dazu $h \in H$, dann ist

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{t}(U(t)-1)\, R_n h &= -\frac{i}{t}\int_0^\infty e^{-s}\, U(t+\tfrac{s}{n})\, h\, ds + \frac{i}{t}\int_0^\infty e^{-s}\, U(\tfrac{s}{n})\, h\, ds \\
&= -\frac{i}{t}\int_{nt}^\infty e^{-(r-nt)}\, U(\tfrac{r}{n})\, h\, dr + \frac{i}{t}\int_0^\infty e^{-s}\, U(\tfrac{s}{n})\, h\, ds \\
&= -in\,\frac{e^{nt}-1}{nt}\int_0^\infty e^{-s}\, U(\tfrac{s}{n})\, h\, ds + in\,\frac{1}{nt}\int_0^{nt} e^{-r+nt}\, U(\tfrac{r}{n})\, h\, dr \\
&= -i\,n\,\frac{e^{nt}-1}{nt}\, R_n h + i\,n\, e^{nt}\, \tfrac{1}{nt}\int_0^{nt} e^{-r}\, U(\tfrac{r}{n})\, h\, dr.
\end{aligned}$$

Für $t \to 0$ gilt

$$\frac{e^{nt}-1}{nt} \to 1, \quad e^{nt} \to 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{nt}\int_0^{nt} e^{-r}\, U(\tfrac{r}{n})\, h\, dr \to e^0\, U(0)\, h = h.$$

Also ist $R_n h \in D$ und $S\, R_n\, h = -i\, n\, (R_n - 1)h$.

Für die Dichtheit von D genügt es zu zeigen, daß $R_n h \to h$ für $n \to \infty$ und $h \in H$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
R_n h - h &= \int_0^\infty e^{-t}\, U(\tfrac{t}{n})\, h\, dt - \int_0^\infty e^{-t}\, h\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\, (U(\tfrac{t}{n})h - h)\, dt.
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so gewählt, daß $\|U(t)h - h\| < \varepsilon$ für alle $|t| \le \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|R_n h - h\| &\le \int_0^\infty e^{-t}\, \|U(\tfrac{t}{n})h - h\|\, dt \\
&\le \int_0^{n\delta} e^{-t}\, \varepsilon\, dt + \int_{n\delta}^\infty e^{-t}\, (\|U(\tfrac{t}{n})h\| + \|h\|)\, dt \\
&\le \varepsilon + \int_{n\delta}^\infty e^{-s}\, 2\, ds \\
&\le 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

falls $n = n(\varepsilon, \delta)$ so groß gewählt wurde, daß $\int_{n\delta}^\infty e^{-s}\, ds \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Beh..: S ist symmetrisch, denn für $h, k \in D$ ist

$$\begin{aligned}
0 &= -i\tfrac{d}{dt}|_{t=0}\langle h, k\rangle \\
&= -i\tfrac{d}{dt}|_{t=0}\langle U(t)h, U(t)k\rangle \\
&= \langle -i\tfrac{d}{dt}|_{t=0}U(t)h, U(0)k\rangle - \langle U(0)h, -i\tfrac{d}{dt}|_{t=0}U(t)k\rangle \\
&= \langle Sh, k\rangle - \langle h, Sk\rangle.
\end{aligned}$$

Nach 9.19 ist S abschließbar und wir bezeichnen den Abschluß von S wieder mit S.
Nach 9.25 müssen wir für die selbst-Adjungiertheit nur zeigen, daß $\mathrm{Ker}(S^* \pm i) =$

$\{0\}$, oder äquivalent, daß Bild$(S \pm i)$ dicht ist. Dazu berechnen wir

$$(S + i) \circ (-i\, R_1) = i^2(R_1 - 1) - i^2 R_1 = 1,$$

also ist $S + i$ surjektiv.

Definiert man analog zu R_n einen Operator T_n durch $T_n h := \int_0^\infty e^{-t}\, U(-\frac{t}{n}) h\, dt$, und zeigt $S \circ T_n = i\, n\, (T_n - 1)\, h$, so erhält man

$$(S - i) \circ (i\, T_1) = i^2(T_1 - 1) - i^2 T_1 = 1,$$

also ist auch $S - i$ surjektiv.

Sei nun $h \in D$. Dann ist $\frac{U(t+s)h - U(t)h}{s} = U(t) \frac{U(s)-1}{s} h$ und da $\frac{d}{ds}|_{s=0} U(s)h = \lim_{s\to 0} \frac{U(s)-1}{s} h$ existiert, gilt das auch für

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} U(t)h &= \lim_{s\to 0} \frac{U(t+s)h - U(t)h}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} U(t) \frac{U(s)-1}{s} h = U(t) \lim_{s\to 0} \frac{U(s)-1}{s} h \\
&= U(t)(i\, S\, h).
\end{aligned}$$

Andererseits ist aber $\frac{U(t+s)h - U(t)h}{s} = \frac{U(s)-1}{s}\, U(t)\, h$, also ist $U(t)h \in D$ und

$$\frac{d}{dt} U(t)\, h = \lim_{s\to 0} \frac{U(t+s)h - U(t)h}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{U(s)-1}{s}\, U(t)\, h = i\, S\, U(t)\, h.$$

Die Rechnung zuvor hat gezeigt, daß für $h \in D = \operatorname{Dom} S = \operatorname{Dom}(U(t)\, S)$ die Gleichung $U(t)\, S\, h = i \frac{d}{dt} U(t)\, h = S\, U(t)\, h$ gilt, d.h. $U(t)\, S \subseteq S\, U(t)$. Dies wäre auch direkt aus 9.43 gefolgt.

Sei nun $V(t) := \exp(i\, S\, t)$. Wir müssen zeigen $U = V$. Sei dazu $h \in D$. Nach Obigen ist $V(t)h \in D$ und es gilt

$$\frac{d}{dt} V(t)\, h = i\, S\, V(t)\, h.$$

Ähnlich gilt:

$$\frac{d}{dt} U(t)\, h = i\, S\, U(t)\, h.$$

Folglich ist $t \mapsto h(t) := U(t)\, h - V(t)\, h$ differenzierbar und

$$h'(t) = i\, S\, U(t)h - i\, S\, V(t)h = i\, S\, h(t).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt} \|h(t)\|^2 &= \tfrac{d}{dt} \langle h(t), h(t) \rangle \\
&= \langle \tfrac{d}{dt} h(t), h(t) \rangle + \langle h(t), \tfrac{d}{dt} h(t) \rangle \\
&= \langle i\, S\, h, h \rangle + \langle h, i\, S\, h \rangle \\
&= i \langle Sh, h \rangle - i \langle h, Sh \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Somit ist h konstant, und damit $h(t) = h(0) = 0$ für alle t, i.e. $U(t)h = V(t)h$ für alle $h \in D$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Da D dicht ist, ist $U = V$. □

9.48 Proposition.

Der infinitesimale Erzeuger ist genau dann beschränkt, wenn $\lim_{t\to 0} \|U(t) - 1\| = 0$ *ist, d.h. U Norm-stetig ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) gilt wegen $\|U(t) - 1\| = \|\exp i\, t\, T - 1\| = \|\int_{\sigma(T)} (e^{its} - 1)\, dP(s)\| = \|s \mapsto e^{its} - 1\|_\infty = sup\{|e^{i\,t\,s} - 1| : s \in \sigma(T)\} \to 0$ für $t \to 0$, da $\sigma(T)$ beschränkt ist.

($\Leftarrow$) Angenommen $\|U(t)-1\| \to 0$ für $t \to 0$. Es sei $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$. Dann existiert ein $t_0 > 0$ mit $\|U(t)-1\| < \varepsilon$ für $|t| \le t_0$. Da $U(t)-1 = \int_{\sigma(T)} (e^{i\,t\,s}-1)\,dP(s)$ ist $\sup\{|e^{i\,t\,s}-1| : s \in \sigma(T)\} = \|U(t)-1\| < \varepsilon$ für diese t. Für δ abhängig von ε gilt somit $t\,s \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]2\pi n - \delta, 2\pi n + \delta[=: G$ für alle $s \in \sigma(T)$ und $|t| \le t_0$. Da die Intervalle disjunkte Komponenten von G sind und für $s \in \sigma(T)$ das Intervall $\{ts : 0 \le t \le t_0\}$ enthalten ist in G, ist $|t\,s| < \delta$ für alle $|t| \le t_0$. Insbesonders ist $t_0\,\sigma(T) \subseteq [-\delta, \delta]$. Und somit $\sigma(T)$ beschränkt und damit T beschränkt, denn $T = \int_{\sigma(T)} z\,dP(z) \in L(H)$, da $(z \mapsto z)$ beschränkt ist auf $\sigma(T)$. □

9.49 Theorem.

Es sei H separabel und $U : \mathbb{R} \to L(H)$ eine unitäre Darstellung. Falls für alle $h, k \in H$ die Abbildung $t \mapsto \langle U(t)h, k\rangle$ Lebesgue-meßbar ist, so ist U SOT-stetig.

Beweis. Es sei $0 < a < \infty$ und $h, g \in H$. Dann ist $t \mapsto \langle U(t)h, g\rangle$ eine beschränkte meßbare Funktion auf $[0, a]$, also gilt

$$\int_0^a |\langle U(t)h, g\rangle|\,dt \le a\,\|h\|\,\|g\|.$$

Folglich ist $h \mapsto \int_0^a \langle U(t)h, g\rangle\,dt$ ein beschränktes lineares Funktional auf H. Es existiert also ein $g_a \in H$ mit $\langle h, g_a\rangle = \int_0^a \langle U(t)h, g\rangle\,dt$ für alle $h \in H$ und $\|g_a\| \le a\,\|g\|$.

Wir behaupten nun, daß das Erzeugnis von $\{g_a : g \in H, a > 0\}$ dicht liegt in H.
In der Tat, angenommen $h \in H$ ist orthogonal auf alle g_a. Dann gilt für alle $a > 0$ und $g \in H$, daß $0 = \langle h, g_a\rangle = \int_0^a \langle U(t)h, g\rangle\,dt$. Also ist $\langle U(\_)h, g\rangle = 0$ fast überall auf $\mathbb{R}$. Da H separabel ist, existiert eine Teilmenge $\Delta \subset \mathbb{R}$ von Maß 0, s.d. $\langle U(t)h, g\rangle = 0$ für alle $t \notin \Delta$ und g in einer fixen abzählbaren dichten Teilmenge von H. Also ist $\|h\| = \|U(t)h\| = 0$ für $t \notin \Delta$.

Für $s \in \mathbb{R}$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
\langle h, U(s)g_a\rangle &= \langle U(-s)h, g_a\rangle \\
&= \int_0^a \langle U(t)\,U(-s)\,h, g\rangle\,dt \\
&= \int_0^a \langle U(t-s)h, g\rangle\,dt \\
&= \int_{-s}^{a-s} \langle U(t)h, g\rangle\,dt \\
&\to \int_0^a \langle U(t)h, g\rangle\,dt = \langle h, g_a\rangle
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\langle h, U(s)g_a\rangle \to \langle h, g_a\rangle$ für $s \to 0$. Da $\{g_a : a > 0, g \in H\}$ dicht ist und wegen der gleichmäßigen Beschränkheit, ist $U : \mathbb{R} \to B(H)$ bezüglich der WOT stetig bei 0. Wegen der Gruppen-Eigenschaft ist U überall stetig bzgl. WOT. Also ist U auch SOT-stetig. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\|U(t)h - h\|^2 &= \langle (U(t)-1)h, (U(t)-1)h\rangle \\
&= \langle (U(t)-1)^*(U(t)-1)h, h\rangle \\
&= \langle (U(-t)-1)(U(t)-1)h, h\rangle \\
&= \langle (U(0)-U(-t)-U(t)+1)h, h\rangle \\
&= -\langle U(t)h-h, h\rangle - \langle U(-t)h-h, h\rangle \\
&\to 0 + 0 = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Da selbst-adjungierte Operatoren auf separablen Hilbert-Räumen als Multiplikations-Operatoren dargestellt werden können, braucht man nur die 1-Parameter Untergruppen dieser Operatoren zu bestimmen:

9.50 Proposition.

Es sei (X, Ω, μ) ein σ-endlicher Maß-Raum und f eine reell-wertige Ω-meßbare Funktion auf X. Es sei $S := M_f$ auf $L^2(\mu)$. Dann ist $\exp(i\,t\,S) = M_{e_t}$, wobei $e_t(x) := \exp(i\,t\,f(x))$ ist.

Beweis. Es ist $\operatorname{Dom} M_f = \{h \in L^2 : f\,h \in L^2\}$. Wir müssen also nur zeigen, daß $\frac{d}{dt}|_{t=0} e^{itf} h = i f h$ für alle $h \in \operatorname{Dom} M_f$. Punktweise gilt offensichtlich

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} e^{itf(x)} h(x) = i f(x) e^0 h(x) = i f(x) h(x).$$

Um den Satz über dominierte Konvergenz anzuwenden, benötigen wir eine obere Schranke für $|\frac{e^{itf(x)}-1}{t} h(x) - i f(x) h(x)|^2$ diese erhalten wir wie im Beweis von 9.47 mit $s = f(x)$:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{e^{itf(x)}-1}{t} h(x) - i f(x) h(x)\Big|^2 &= \Big|\frac{e^{its}-1}{t} h(x) - i s h(x)\Big|^2 \\ &= \Big|\Big(\frac{e^{its}-1}{t} h(x) - i s\Big)\, h(x)\Big|^2 \\ &= |f_t(s) h(x)|^2 \\ &\le |2\,s\,h(x)|^2 = 4|f(x)h(x)|^2,\end{aligned}$$

und da $f\,h \in L^2$ ist der Beweis vollständig. □

9.51 Theorem.

Es sei $P : f \mapsto i f'$ definiert auf

$$D := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ ist lokal absolut-stetig und } f' \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Dann ist P selbst-adjungiert und die zugehörige 1-Parameter Untergruppe U ist durch $U(t)f : x \mapsto f(x-t)$ gegeben.

Beweis. Wir haben gesehen, daß die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ ein unitärer Operator ist, welcher P in Q transformiert, d.h. $P = \mathcal{F} Q \mathcal{F}^{-1}$. Nach 9.50 ist die unitäre 1-Parameter Gruppe U_Q zu Q gegeben durch $U_Q(t)$ ist Multiplikation mit $x \mapsto e^{itx}$. Die unitäre 1-Parameter Gruppe U_P zu P ist folglich durch $U_P(t) = \mathcal{F} U_Q(t) \mathcal{F}^{-1}$ gegeben. Wir haben in [**18**, 8.1.5] gesehen, daß für $g \in \mathcal{S}$ folgendes gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U_Q(t)g)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, g(x)\, e^{-ixy}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-ix(y-t)}\, dx \\ &= \mathcal{F}(g)(y-t) \\ &= (T_t \mathcal{F} g)(y),\end{aligned}$$

wobei T_t den Verschiebungs-Operator bezeichnet. Folglich ist

$$U_P(t)(f) = (\mathcal{F} U_Q(t) \mathcal{F}^{-1}) f = \mathcal{F}(U_Q(t)(\mathcal{F}^{-1} f)) = T_t(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} f) = T_t f. \quad \square$$

Literaturverzeichnis

[1] An elementary example of a Banach space not isomorphic to its complex conjugate.

[2] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1985. Hochschultext.

[3] Sterling K. Berberian. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, volume 15. Springer, 1974. Graduate Texts in Mathematics.

[4] H.F. Bohnenblust and S. Karlin. *On a theorem of Ville*, volume 1 of *Theory of Games*, pages 155–160. Princeton, 1950.

[5] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, volume 96. Springer, 1985. Graduate Texts in Maths.

[6] M. De Wilde. Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes. *Mém. Soc. Roy. Sci. Liege 18*, 1969.

[7] Ky Fan. Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proc. NAS USA*, 38:121–126, 1952.

[8] H. G. Garnir. Solovay's axiom and functional analysis. In *Functional analysis and its applications (Internat. Conf., Eleventh Anniversary of Matscience, Madras, 1973; dedicated to Alladi Ramakrishnan)*, pages 189–204. Lecture Notes in Math., Vol. 399. Springer, Berlin, 1974.

[9] I.L. Glicksberg. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with applications to Nash equilibrium points. *Proc. AMS*, 3:170–174, 1952.

[10] Ernst Henze. *Einführung in die Maßtheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971. Hochschultaschenbücher Band 505.

[11] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. Teubner, 1980. Mathematische Leitfäden.

[12] E. Hewitt. Rings of continuous functions, I. *Trans. Am. Math. Soc.*, 64:45–99, 1948.

[13] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis*. Springer, 1963. Grundlehren.

[14] Hans Jarchow. *Locally convex spaces*. Teubner, Stuttgart, 1981.

[15] Tosio Kato. Fundamental Properties of Hamilton Operators of Schrödinger Type. *Trans. Am. Math. Soc.*, 70:195–211, 1950.

[16] H. J. Keisler and A. Tarski. From accessible to inaccessible cardinals. *Fund. Math.*, 53:225–308, 1964.

[17] Andreas Kriegl. Algebraische Topologie. Skriptum, 2006.

[18] Andreas Kriegl. Funktionalanalysis 1. Skriptum, 2006.

[19] Andreas Kriegl. Komplexe Analysis. Universität Wien, SS 2011.

[20] Andreas Kriegl. Analysis 1. Skriptum, 2005.

[21] Andreas Kriegl. Proseminar zur Analysis 1. Skriptum, 2005.

[22] Andreas Kriegl. Analysis 2. Skriptum, 2005.

[23] Andreas Kriegl. Proseminar zur Analysis 2. Skriptum, 2005.

[24] Andreas Kriegl. Analysis 3. Skriptum, 2005.

[25] Andreas Kriegl. Proseminar zur Analysis 3. Skriptum, 2005.

[26] Andreas Kriegl. Topologie 1. Skriptum, 2000.

[27] Andreas Kriegl and Peter W. Michor. *The convenient setting of global analysis*. Am. Math. Soc., 1997.

[28] K. Kuratowski and A. Mostokwski. *Set theory, 2nd edition*. Amsterdam, 1976.

[29] G. W. Mackey. Equivalence of a problem im measure theory to a problem in the theory of vector lattices. *Bull. Am. Math. Soc.*, 50:719–722, 1944.

[30] L. Nachbin. Topological vector spaces of continuous functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 40:471–474, 1954.

[31] Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Math. J.*, 8:457–459, 1941.

[32] Jean Schmets. Bornological and ultrabornological $C(X,E)$ spaces. *Manuscripta Math.*, 21:117–133, 1977.

[33] Jean Schmets. An example of the barrelled space associated with $C(X;E)$. *Advances in Functional Analysis, Holomorphy, and Approximation Theory, Springer Lecture Notes*, 843:561–571, 1981.

[34] T. Shirota. On locally convex vector spaces of continuous functions. *Proc. Japan Acad.*, 30:294–298, 1954.

[35] Robert M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. of Math. (2)*, 92:1–56, 1970.

[36] S. Ulam. Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre. *Fund. Math.*, 16:140–150, 1930.

[37] N. Ya. Vilenkin et al. *Functional Analysis.* Walters Noordhoff, 1972.

Index