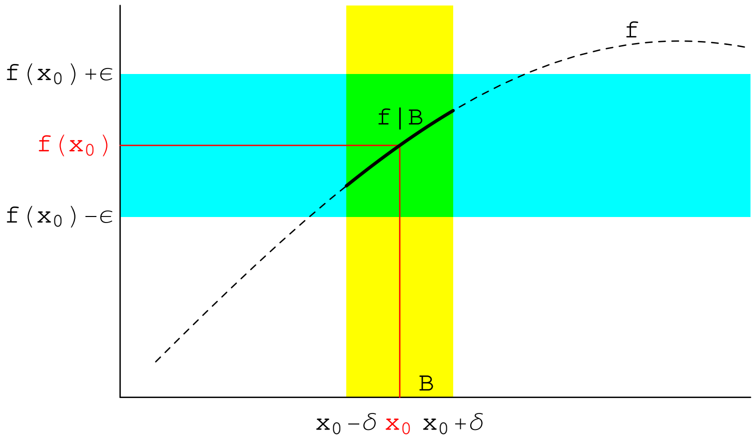
Analysis 1

Andreas Kriegl

803772, WS 03/04, Mo-Do. 7^{55}-8^{50}, Gr.Hs.Experimentalphysik



Dieses Skriptum deckt den Inhalt der gleichnamigen Vorlesung, welche ich im Wintersemester 2003/2004 halte, sowie den Anfang der Vorlesung Analysis 2 ab. Es handelt von der Analysis von Funktionen in einer Variable, also Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese kennen wir schon aus der Schulzeit, nun werden sie aber auf ein exakteres Fundament gestellt und feinere Methoden zu ihrer Analyse entwickelt. Eigentliche Zielrichtung der Analysis Vorlesungen sind Funktionen in mehreren Variablen, und das wird auch schon in diesem Teil angedeutet werden. werden.

Die Abschnitte (1.1)–(1.7) wurden in ähnlicher Form bereits in der Einführung in das mathematische Arbeiten behandelt, diese vorausgesetzend werden wir mit Abschnitt (2) beginnen.

Das vorliegendes Skriptum ist so angelegt, daß es den Stoff vollständig abgedeckt sollte, und ein permanentes Mitschreiben dadurch überflüssig wird. Ich bin dennoch überzeugt, daß eine Erarbeitung des Stoffes rein auf textlicher Basis schwierig wäre, und eine persönliche Vermittlung in der Vorlesung das Verständnis sehr fördert. Natürlich kann das dabei angeschlagene Tempo nicht alle (und möglicherweise sogar alle nicht) zufriedenstellen, darum empfehle ich vor den jeweiligen Vorlesungsstunden die entsprechenden Seiten im Skriptum anzusehen, um sich dann auf die unklareren Punkte konzentrieren zu können und entsprechende Ergänzungen und Anmerkungen im Skriptum vornehmen zu können. Für die LeserInnen, die nach ergänzenden Informationen suchen, sei das zweiteilige Werk Lehrbuch der Analysis von H.Heuser, erschienen im Teubner-Verlag, Stuttgart 1986, empfohlen.

Die online Version des Skriptums enthält auch einige Animationen, die durch nebenstehendes Icon gekennzeichnet sind.

Natürlich wird die aufmerksame LeserIn (Tip-)Fehler finden können. Ich möchte folglich wie immer die Bitte aussprechen, mir diese mitzuteilen (geteiltes Leid ist halbes Leid). Zukünftige Generationen von StudentInnen werden es sicher auch zu schätzen wissen.

Andreas Kriegl, Wien im Oktober 2003

Dies ist die zweite (korrigierte und ergänzte) Auflage. Es wurde die ursprüngliche Nummerierung vorläufig beibehalten, die Reihenfolge der Resultate entspricht dabei allerdings jener der Vorlesung.

Ich habe diejenigen Teile, die für die über diese Vorlesung hinausgehen, und für jene gedacht sind, die keine Angst habe zeitweilig ein wenig den Boden unter den Füßen zu verlieren und in höhere Sphären aufzusteigen durch linkseitiges Symbol eines Hängegleiters gekennzeichnet.

EXAM

Weitere Resultate oder Beweise, die zwar für die Vorlesung relevant sind, aber auf Grund ihrer Komplexität nicht zur Prüfung kommen habe ich mit linksseitigen Symbol gekennzeichnet.

Andreas Kriegl, Wien im März 2004

Inhaltsverzeichnis

EXAM

1 Grundlagen

1.1 Mengenlehre

Hilbert:

> Aus dem Paradies [die Mengenlehre], das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand mehr vertreiben können.

Poincaré:

> Spätere Generationen werden die Mengenlehre als Krankheit ansehen, die man überwunden hat.

In diesem ersten Abschnitt befassen wir uns mit der Sprache der Mathematik. Die natürlichen Sprachen wie deutsch, englisch, etc. mangelt es leider an der nötigen Präzision, insbesonders dann, wenn es darum geht unendliche Objekte und Prozesse zu beschreiben. Um die dadurch entstehenden Vieldeutigkeiten zu vermeiden wurde von Georg Cantor die Mengenlehre entwickelt.

1.1.1 Definition. Menge.
Unter einer Menge verstehen wir wie Cantor eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem neuen Ganzen. Es muß dabei im Prinzip feststellbar sein, ob ein gegebenes Objekt zur Menge gehört oder nicht. Jene Objekte die zur Menge gehören heißen Elemente der Menge. Wenn A eine Menge und x ein Objekt ist, dann schreiben wir $x \in A$ falls x ein Element der Menge A ist und $x \notin A$ andernfalls. Dies folgt der allgemeinen Methode in der Mathematik die Negation einer Beziehung zweier Objekte durch Durchstreichen des Relationssymbols zu bezeichnen, also $x \notin A$ bedeutet es ist nicht $x \in A$, sowie $x \neq y$ bedeutet x ist ungleich (nicht gleich) y und $x \not< y$ bedeutet, daß x nicht kleiner als y ist.

Wir haben zwei Möglichkeiten Mengen A zu beschreiben:

- Aufzählend: Durch Angabe einer Liste $x_1, x_2, \dots, x_n$ aller Elemente der Menge. Man schreibt dann $A := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Das Symbol ':=' bedeutet 'definitionsgemäß ist die linke Seite gleich der rechten' oder kurz 'ist definitionsgemäss gleich'. Also A ist definitionsgemäß gleich der Menge bestehend aus den Elementen x_1, x_2, ..., x_n. Man schreibt auch kürzer "$x_1, \dots, x_n \in A$" anstelle von "$x_1 \in A$, $x_2 \in A$,..., $x_n \in A$". Wir wollen dabei auch denn Fall zulassen, daß gewisse der x gleich sind. Ist z.B. $x_1 = x_2$ so ist $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Dies hat den Nachteil, daß wir nicht sofort erkennen, wieviel Elemente die Menge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ hat (höchstens jedenfalls n viele), aber den ungemeinen Vorteil, daß wir die Menge hinschreiben können ohne die genauen Werte von x_1, x_2, ..., x_n bestimmen zu müssen: Z.B.
$$A := \left\{\pi, 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx, \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx\right\}.$$
Dies wird bisweilen auch bei unendlichen Mengen verwendet. Z.B. $A := \{1, 2, 3, \dots\}$. Hierbei gibt es aber natürlich viele völlig verschiedene Interpretationen wie die weiteren Elemente dieser Menge nun wirklich aussehen:

  - A ist die Menge der positiven ganzen Zahlen.
  - A ist die Menge der Primzahlen, d.h. nur jener ganzen Zahlen, die keine anderen Teiler als 1 und sich selbst besitzen. Ein etwas längerer Abschnitt wäre somit $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$.
  - A besteht aus den Gliedern der Fibonacci-Folge, d.h. jedes Element ist die Summe seiner beiden unmittelbaren Vorgänger. Ein etwas längerer Abschnitt wäre somit $A = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$.
  - ...

- Beschreibend: Durch Angabe einer Eigenschaft $\mathcal{A}$, welche die Elemente der Menge charakterisiert. Man schreibt dann

$$A := \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{A}\}$$

  und liest dies als A ist per Definition die Menge alle (Objekte) x welche die Eigenschaft $\mathcal{A}$ besitzen. Also z.B. $A := \{x : x \text{ ist positive ganze Zahl}\}$ oder $B := \{x : x \text{ ist Primzahl}\}$. Natürlich darf man an Stelle von x auch jeden anderen Buchstaben verwenden.

Insbesonders nennt man die Menge $\emptyset := \{\}$ die kein einziges Element hat die leere Menge. Beschreibend kann man sie auch durch Angabe einer Eigenschaft die für kein x erfüllt ist, wie z.B. $x \neq x$ angeben, d.h. $\emptyset = \{x : x \neq x\}$.

Ein analoger Ausdruck, nämlich $R := \{x : x \notin x\}$ führt allerdings auf einen fatalen Widerspruch, denn die Untersuchung der Frage "Ist R ein Element von sich selbst oder nicht?" kann nur eine der beiden Antworten: $R \in R$ oder $R \notin R$ haben. Im ersten Fall muß also R die definierende Eigenschaft von R besitzen, also $R \notin R$ erfüllen im Widerspruch zur Annahme. Im anderen Fall darf R die definierende Eigenschaft von R nicht besitzen, es darf also nicht $R \notin R$ gelten, und (wegen dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten) muß $R \in R$ gelten, ebenfalls ein Widerspruch zur Annahme.

Auswege aus dem Widerspruch, den die Russel'sche Menge R liefert, wurden viele ersonnen. Grundidee dabei ist nicht alle Konstruktionen von Mengen zuzulassen.

Die erste recht technische und heute überholte Methode wurde von Russel und Whitehead in der Principia Mathematica präsentiert und bestand darin Buchzuführen wie tief verschachtelt die Mengenklammern einer Menge sind und jeweils nur solche eine Elemente einer Menge von Tiefe n zuzulassen, die selbst Tiefe $n-1$ haben. Dies ist aber sehr umständlich, und wollen wir "Buchhaltern" überlassen.

Zermelo, Fraenkel und Skolem sind ihrerseits so vorgegangen, daß nur mehr ganz bestimmte Konstruktionen, die wir in der Folge alle besprechen werden (wie z.B. Potenzmenge, Vereinigung, Durschnitt, etc.), verwendet werden dürfen um aus gegebenen Mengen neue zu definieren.

Eleganter ist der Zugang von Gödel, Bernays und Neumann, die in der Beschreibung $A := \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } \mathcal{A}\}$ wieder alle Eigenschaften $\mathcal{A}$ zulassen, aber die so erhaltenen Objekte A nun Klassen oder Unmengen nennen, und nur deren Elemente als Mengen bezeichnen. Ein Menge in ihren Sinn ist also eine Klasse, die in mindestens einer Klasse als Element enthalten ist.

Morse, Kelley und Tarski haben dies noch insofern modifiziert, daß die Einschränkung, daß alle Variablen in den bei der Klassenbildung betrachteten Aussagen nur Mengen durchlaufen dürfen, fallengelassen wurde. Für genauere Details dazu sei auf eine Vorlesung über Mengenlehre oder entsprechende Bücher verwiesen.

Zwei Mengen A und B sind genau dann GLEICH, wenn sie genau die selben Elemente besitzen, d.h. jedes beliebige Objekt x genau dann zu A gehört, wenn es zu B gehört. Um dies kürzer symbolisieren zu können schreiben wir “ $\forall$” statt “für alle”. Und wenn eine Aussage $\mathcal{A}$ genau dann wahr ist wenn es eine Aussage $\mathcal{B}$ ist, so schreiben wir $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ und sagen dafür $\mathcal{A}$ ist äquivalent zu $\mathcal{B}$. Wir können aus den Wahrheitswerten TRUE und FALSE der beiden Teilaussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ jene der (LOGISCHEN) ÄQUIVALENZ $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ bestimmen:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
TRUE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	TRUE
FALSE	TRUE	FALSE
TRUE	FALSE	FALSE

Wenn schlußendlich “:” als “(für die) gilt” gelesen wird, dann sind zwei Mengen A und B genau dann GLEICH (d.h. $A = B$) wenn $\forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$, also

$$A = B \;:\Leftrightarrow\; \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Eine schwächere Möglichkeit Mengen miteinander zu vergleichen ist folgende: Eine Menge A heißt TEILMENGE einer Menge B (und wir schreiben dann $A \subseteq B$, oder sagen auch B ist OBERMENGE von A), genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Wenn eine Aussage $\mathcal{A}$ eine Aussage $\mathcal{B}$ zur Folge hat, so schreibt man für diesen Sachverhalt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und sagt auch $\mathcal{A}$ IMPLIZIERT $\mathcal{B}$. Es ist also $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ selbst eine Aussage, die nur dann falsch sein kann, wenn zwar $\mathcal{A}$ erfüllt ist, nicht aber $\mathcal{B}$. Die Wahrheitstafel für “$\Rightarrow$” ist somit die folgende:

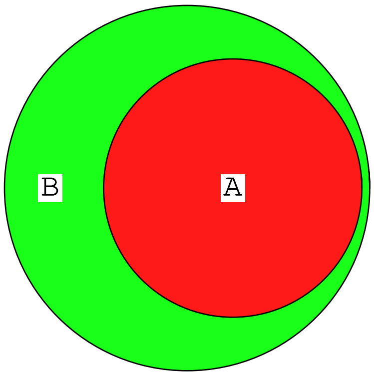
$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
TRUE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	TRUE
FALSE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE

Beachte, daß $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ genau dann gilt, wenn sowohl $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ als auch $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ (auch als $\mathcal{B} \Leftarrow \mathcal{A}$ geschrieben) gilt, d.h. die beiden Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sich gegenseitig implizieren.

Wir können obige Definition nun kurz wie folgt schreiben:

$$A \subseteq B \;:\Leftrightarrow\; \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Graphisch können wir das durch folgendes sogenanntes VENN-DIAGRAMM veranschaulichen:



Beachte, daß analog zu $\leq$ bei Zahlen für alle Mengen A die Aussage $A \subseteq A$ gilt. Will man nur echte Teilmengen $A \subseteq B$ betrachten, d.h. welche $A \neq B$ erfüllen, so schreiben wir dafür $A \subset B$ (und sagt A ist eine ECHTE TEILMENGE von B), d.h.

$$A \subset B :\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ und } A \neq B.$$

Für das Teilmengesein wird oft auch das Symbol $A \subset B$ anstelle von $A \subseteq B$ verwendet, da diese Situation in der Mathematik viel öfter auftaucht als jene der echten Teilmenge (für die man dann allerdings soetwas schreckliches wie $A \subsetneq$B oder $A \subsetneqq B$ schreiben muß). Da man bei Zahlen in der entsprechenden Situation aber auch $a \leq b$ und nicht $a < b$ schreibt, will ich nicht so schreibfaul sein.

Offensichtlich ist $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Diese Eigenschaft von $\subseteq$ heißt ANTISYMMETRIE.

Weiters folgt aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ die Aussage $A \subseteq C$. Mann nennt diese Eigenschaft die TRANSITIVITÄT von $\subseteq$.

Natürlich können Mengen selbst wieder Elemente einer Menge sein. Z.B. können wir die Menge $\mathcal{P}(A)$ aller Teilmengen einer Menge betrachten, also

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &:= \{B : B \subseteq A\}, \text{ d.h.} \\ B \in \mathcal{P}(A) &\Leftrightarrow B \subseteq A. \end{aligned}$$

Diese Menge $\mathcal{P}(A)$ heißt POTENZMENGE von A. Z.B. ist

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}, \\ \mathcal{P}(\{a\}) &= \{\emptyset, \{a\}\}, \\ \mathcal{P}(\{a, b\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ und} \\ \mathcal{P}(\{a, b, c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}. \end{aligned}$$

Wir werden später in (1.3.24) zeigen, daß die Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(A)$ also der Teilmengen von A gerade $2^{|A|}$ ist, wobei $|A|$ die Anzahl der Element von A bezeichnet. Dies ist der Grund für die Namensgebung “Potenzmenge”.

Beachte, daß sehr deutlich zu unterscheiden ist zwischen $A \subseteq B$, $A \subset B$ und $A \in B$. Wenn $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$ bezeichnet (Wer meint schon zu wissen, was die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ sind, der möge andere Symbole für die 3 eben definierten Mengen verwenden), so ist

- $0 \subseteq 0$ (Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge), aber nicht $0 \subset 0$ (denn $0 = 0$) und auch nicht $0 \in 0$ (denn die leere Menge hat kein einziges Elemente).
- $1 \in \{1\}$, aber nicht $1 \subseteq \{1\}$ (da $0 \in 1$ aber nicht $0 \in \{1\}$), und somit auch nicht $1 \subset \{1\}$.
- $1 \subset 2$ (denn das einzige Element 0 von 1 ist auch Element der Menge 2) und somit $1 \subseteq 2$ aber auch $1 \in 2$.

Es ist also gefährlich Formulierungen wie “x liegt in A” zu verwenden, denn dabei ist es nicht klar, ob dies x liegt in A als Element ($x \in A$) oder x liegt in A als Teilmenge ($x \subseteq A$) bedeutet.

1.1.2 Definition. Mengenoperationen.
Aus je zwei Mengen A und B können wir neue Mengen bilden:
Der DURCHSCHNITT $A \cap B$ von A und B ist die Menge aller Objekte die sowohl Elemente von A als auch von B sind. Salopp könnte man auch sagen:

Der Durchschnitt besteht aus den Elementen die in beiden Mengen liegen. Dies könnte allerdings zu Verwechslung mit der weiter unten definierten Vereinigungsmenge führen, z.B. wenn wir die Menge aller Studentinnen, die in beide parallel-Klassen gehen, betrachten.

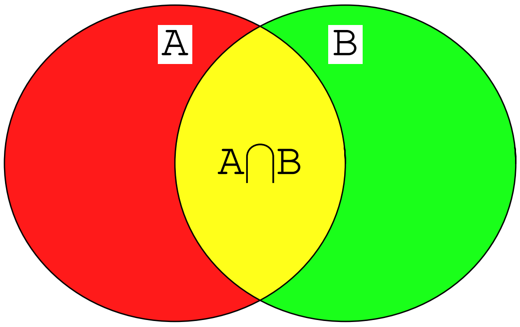
Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Aussagen sind, dann bezeichnet man mit "$\mathcal{A}, \mathcal{B}$" oder $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ die Aussage, daß beide Aussagen zutreffen. In vielen Computersprachen wird '&&' anstelle des auf der Tastatur nicht vorhandenen $\wedge$ verwendet. Man ließt dies als "$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$". Die Wahrheitstafel des (LOGISCHEN) UNDS $\wedge$ ist also folgende:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
TRUE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE
TRUE	FALSE	FALSE

Es ist also

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Dies kann man durch ein Venn-Diagramm veranschaulichen:



Man sagt zwei Mengen A und B seien ELEMENT-FREMD oder auch DISJUNKT, wenn $A \cap B = \emptyset$, d.h. sie kein einziges gemeinsames Element besitzen.

Beachte, daß $A \cap B$ die größte gemeinsame Teilmenge von A und B ist, siehe auch (1.1.5).

Beweis. Offensichtlich ist $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$, denn aus $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ folgt A und es folgt B.

Sei nun M eine weitere gemeinsame Teilmenge von A und B. Dann ist $M \subseteq A \cap B$ (also $A \cap B$ die größte gemeinsame Teilmenge), denn aus $x \in M$ folgt $x \in A$ und $x \in B$ also $(x \in A) \wedge (x \in B)$ und somit $x \in A \cap B$. □

Es ist $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Beweis. Aus $A \subseteq B$ folgt, daß $A \subseteq A \cap B$. Und wegen $A \cap B \subseteq A$ gilt Gleichheit. Umgekehrt folgt aus $A \cap B = A$, daß $A = A \cap B \subseteq B$. □

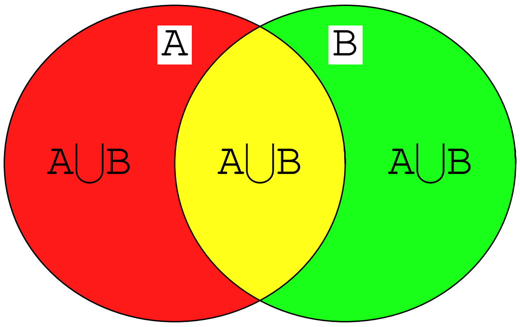
Die VEREINIGUNG $A \cup B$ von A und B ist die Menge aller Objekte die Element mindestens einer der beiden Mengen A bzw. B sind. Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Aussagen sind, dann bezeichnet man mit $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ die Aussage, daß zumindestens eine der beiden Aussagen zutrifft. In vielen Computersprachen wird || anstelle von $\vee$. Man liest dies als "$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$", muß dabei aber beachten, daß dies ein nicht ausschließendes oder ist, also auch den Fall, daß $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gelten, inkludiert. Interpretiere z.B. den Satz 'Jack liebt Jill oder (Jack liebt) Jane". D.h. die Wahrheitstafel des (LOGISCHEN) ODERS $\vee$ ist folgende:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
TRUE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	TRUE

Es ist also

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Auch dies kann man durch ein Venn-Diagramm veranschaulichen:



Wir wollen nun die wichtigsten Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung aufstellen:

1.1.3 Lemma.
Es seien A, B und C Mengen. Dann gilt:

(1) Kommutativität*: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.*

(2) Assoziativität*: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.*

(3) Distributivität*:*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Kommutativität besagt also, daß wir bei der Durchschnitts- und Vereinigungsbildung die beiden Mengen miteinander vertauschen dürfen.

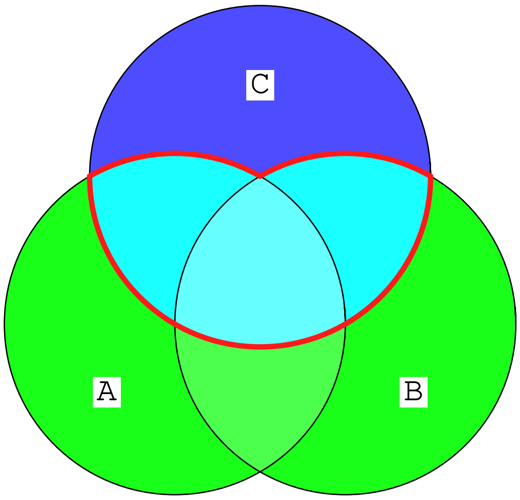
Assoziativität besagt also, daß es ist egal ist, wie wir bei mehrfachen Vereinigungen oder mehrfachen Durchschnitten Klammern setzen (in welcher Reihenfolge wir sie also ausrechnen), und wir können sie auch ganz weglassen, also $A \cap B \cap C$ oder $A \cup B \cup C$ schreiben, ohne irgendwelche Mißverständnisse zu provozieren.

Distributivität zeigt, daß wenn sich Durchschnitts- und Vereinigungsbildung abwechseln, so darf man nicht mehr Klammern vertauschen, aber kann C "hineinmultiplizieren". Vergleiche dies mit dem Distributivgesetz für das Rechnen mit Zahlen: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ aber nicht $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$.

Beweis. Wir geben verschiedene Beweise für das Distributivitätsgesetz $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, die anderen Gesetze lassen sich ähnlich aber einfacher beweisen:

1. Durch Zeichnung (Venn-Diagramme). Wichtig dabei ist, daß die drei Mengen A, B und C in allgemeiner Lage gezeichnet werden, d.h. alle möglichen Fälle für Punkte zu den einzelnen Mengen zu gehören oder nicht wirklich

vorkommen. Für vier Mengen wäre das schon nicht mehr ganz einfach erreichbar.



2. Durch Wahrheitstafel. D.h. man betrachtet alle Fälle dafür, daß $x \in A$ oder nicht, $x \in B$ oder nicht und $x \in C$ oder nicht, und überprüft ob in allen Fällen x genau dann ein Element der linken Seite ist, wenn es auch eines der rechten Seite ist.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

3. Durch Umwandeln mittels der Definitionen in Aussagenlogik:

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x : x \in A \text{ und } x \in B \cup C\} \\
&= \{x : x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C)\} \\
&= \{x : (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C)\} \\
&= \{x : x \in A \cap B \text{ oder } x \in A \cap C\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Wir haben das distributiv-Gesetz für Durchschnitt und Vereinigung von Mengen also auf das distributiv-Gesetz für 'und' und 'oder' von Aussagen zurückgeführt. Die Gültigkeit des letzteren sagt uns der gesunde Hausverstand oder wir (als Logiker) beweisen es mittels Wahrheitstafel so wie zuvor.

□

1.1.4 Definition. Durchschnitt und Vereinigung.
Wenn man anstelle zweier Mengen A und B endlich viele Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ gegeben hat, so kann man rekursiv (siehe (1.3.5)) Durchschnitt und Vereinigung

als

$$\begin{aligned} A_1 \cap \cdots \cap A_n &:= (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n \\ A_1 \cup \cdots \cup A_n &:= (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n \end{aligned}$$

definieren. Motiviert wird diese Definition durch das Assoziativgesetz (1.1.3.2). Direkter können wir diesen Durchschnitt und Vereinigung durch

$$\begin{aligned} A_1 \cap \cdots \cap A_n &= \{x : x \in A_1 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\} \\ A_1 \cup \cdots \cup A_n &= \{x : x \in A_1 \vee \cdots \vee x \in A_n\} \end{aligned}$$

beschreiben, also als die Menge jener Objekte, die in allen A's enthalten sind, bzw. in mindestens einem der A's enthalten sind.

Man schreibt kürzer und eindeutiger unter Vermeidung von "..." auch $\bigcap_{i=1}^n A_i$ bzw. $\bigcup_{i=1}^n A_i$ für diese Mengen und liest dies als "Durchschnitt/Vereinigung für i gleich 1 bis n der A unten i".

Will man das nun auf unendlich viele Mengen übertragen, also den Durchschnitt $\bigcap \mathcal{A}$ oder die Vereinigung $\bigcup \mathcal{A}$ einer beliebigen Menge $\mathcal{A}$ von Mengen A definieren, dann sollte wohl der Durchschnitt $\bigcap \mathcal{A}$ die Menge all jener Objekte sein, die gleichzeitig in jeder der Mengen $A \in \mathcal{A}$ als Element enthalten sind, d.h.

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x : \ \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\},$$

und die Vereinigung $\bigcup \mathcal{A}$ sollte die Menge all jener Objekte sein, die zumindest in einer der Mengen $A \in \mathcal{A}$ als Element enthalten sind, d.h.

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x : \ \exists\, A \in \mathcal{A} : x \in A\},$$

wobei " $\exists$" für "es gibt (mindestens) ein" steht. Besteht $\mathcal{A}$ nur aus endlich vielen Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, d.h. $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, dann ist

$$\begin{aligned} & \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{A_1, \ldots, A_n\} = A_1 \cap \cdots \cap A_n \\ \text{und} \quad & \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A_1, \ldots, A_n\} = A_1 \cup \cdots \cup A_n \end{aligned}$$

Wenn $\mathcal{A}$ eine Eigenschaft für Mengen ist, so benutzt man auch die Schreibweise

$$\begin{aligned} \bigcap_{A \text{ hat } \mathcal{A}} A &:= \bigcap \Big\{ A : A \text{ besitzt die Eigenschaft } \mathcal{A} \Big\} \\ \bigcup_{A \text{ hat } \mathcal{A}} A &:= \bigcup \Big\{ A : A \text{ besitzt die Eigenschaft } \mathcal{A} \Big\} \end{aligned}$$

Also wenn z.B. M eine fixe Menge ist und $\mathcal{A}$ die Eigenschaft "Teilmenge von M zu sein" ist, dann ist

$$\bigcup_{A \subseteq M} A = \bigcup \Big\{ A : A \subseteq M \Big\} = \bigcup \mathcal{P}(M) = M.$$

Ist für jedes Element $i \in I$ einer (Index-)Menge I eine Menge A_i gegeben, so setzt man

$$\Big\{ A_i : i \in \mathcal{I} \Big\} := \Big\{ A : \ \exists\, i : i \in \mathcal{I} \text{ und } A = A_i \Big\},$$

und nennt dies eine durch $i \in I$ indizierte Menge (oder auch Familie) von Mengen. Allgemeiner, wenn $\mathcal{I}$ eine Eigenschaft für Mengen und A_i ein Ausdruck (Term) für eine Menge mit der Variablen i ist, so setzt man

$$\Big\{A_i : i \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{I}\Big\} := \Big\{A : \ \exists\, i : i \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{I} \text{ und } A = A_i\Big\}.$$

Damit kann man nun die Schreibweisen

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \bigcap \{A_i : i \in I\} = \big\{x : \ \forall i \in I : x \in A_i\big\}$$
$$\bigcup_{i\in I} A_i := \bigcup \{A_i : i \in I\} = \big\{x : \ \exists\, i \in I : x \in A_i\big\}$$

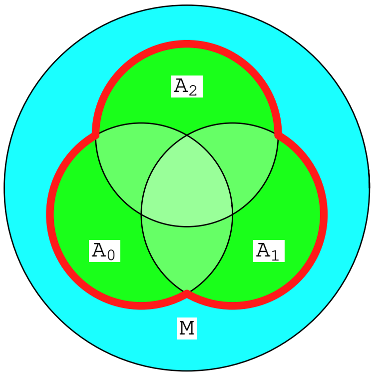
einführen.

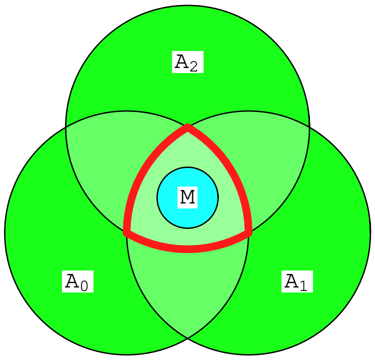
Wie für zweifache Vereinigung und Durchschnitt erhalten wir auch in dieser allgemeinen Situation:

1.1.5 Lemma. Durchschnitt und Vereinigung als Infimum und Supremum.
Es sei $\mathcal{A}$ eine nicht-leere Menge von Mengen. Dann ist $\bigcup \mathcal{A}$ die kleinste (im Sinne von "Teilmenge sein") Menge, die alle $A \in \mathcal{A}$ als Teilmengen enthält.
Ebenso ist $\bigcap \mathcal{A}$ die größte (im Sinne von "Teilmenge sein") Menge, die in allen $A \in \mathcal{A}$ enthalten ist.

Beweis. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, denn aus $x \in \bigcap \mathcal{A}$ folgt nach Definition $\forall A \in \mathcal{A}$: $x \in A$. Und aus $x \in A \in \mathcal{A}$ folgt ebenso nach Definition $x \in \bigcup \mathcal{A}$.

Sei nun M eine Menge mit $A \subseteq M$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $\bigcup \mathcal{A} \subseteq M$, denn aus $x \in \bigcup \mathcal{A}$ folgt $\exists\, A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A$ und wegen $A \subseteq M$ ist somit $x \in M$.





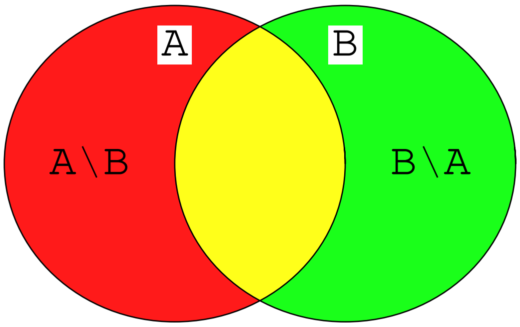
Sei andererseits M eine Menge mit $M \subseteq A$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $M \subseteq \bigcap \mathcal{A}$, denn aus $x \in M$ folgt $x \in A$ für alle $A \in \mathcal{A}$, also $x \in \bigcap \mathcal{A}$.

□

1.1.6 Definition. Mengendifferenz.
Unter der Differenzmenge $A \setminus B$ zweier Mengen A und B (man sagt dafür auch: A vermindert um B) versteht man die Menge aller Objekte x die zwar Elemente von A nicht aber von B sind, d.h.

$$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Das entsprechenden Venn-Diagramm ist:



Wenn die Menge A klar ist, d.h. sich alles in einer fixen Grundmenge A abspielt, dann schreibt man auch kürzer B^c für $A \setminus B$ und nennt dies das Komplement von B (in A).

1.1.7 Proposition. Distributiv und De Morgan'sche Gesetze.
Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge von Mengen A und B eine weitere Menge. Dann gelten:

Verallgemeinerte distributiv Gesetze*:*

$$B \cap \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B \cap A, \qquad B \cup \bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} B \cup A,$$

$$B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} B \cap A_i, \qquad B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} B \cup A_i.$$

De Morgan'schen Gesetze*:*

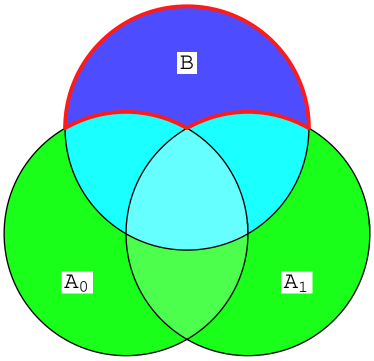
$$B \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} B \setminus A, \qquad B \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B \setminus A$$

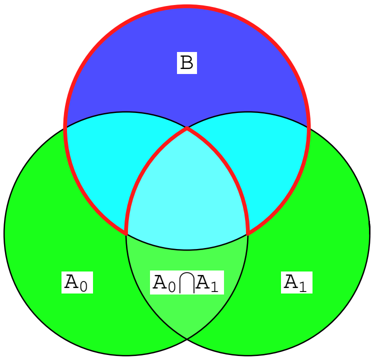
$$\Big(\bigcup \mathcal{A}\Big)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c, \qquad \Big(\bigcap \mathcal{A}\Big)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c,$$

$$\Big(\bigcup_i A_i\Big)^c = \bigcap_i (A_i)^c, \qquad \Big(\bigcap_i A_i\Big)^c = \bigcup_i (A_i)^c.$$

Eine verbale Formulierung des links stehenden distributiv-Gesetzes ist: Ein Objekt liegt genau dann in B und in mindestens einem $A \in \mathcal{A}$, wenn es sowohl in B als auch in A für mindestens ein $A \in \mathcal{A}$ liegt. Für das rechts stehende ist eine solche: Ein Objekt liegt genau dann in allen $A \in \mathcal{A}$ oder in B, wenn es für jedes $A \in \mathcal{A}$ in A oder in B liegt.

Eine graphische Darstellung der De Morgan'schen Gesetze ist:





Eine verbale Formulierung ist: Ein Objekt ist genau dann kein Element der Vereinigung, wenn es in keinen der $A \in \mathcal{A}$ liegt. Und ein Objekt ist genau dann kein Element des Durchschnitts, wenn es in einen der $A \in \mathcal{A}$ nicht enthalten ist.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in B \cap \bigcup \mathcal{A} &\Leftrightarrow x \in B \text{ und } x \in \bigcup \mathcal{A} \\ &\Leftrightarrow x \in B \text{ und } \ \exists A \in \mathcal{A} : x \in A \\ &\Leftrightarrow \ \exists A \in \mathcal{A} : x \in B \text{ und } x \in A \\ &\Leftrightarrow \ \exists A \in \mathcal{A} : x \in B \cap A \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B \cap A \end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder das Gesetz für Mengen auf ein entsprechendes distributiv-Gesetz für Aussagen zurückgeführt. Und entsprechend zeigt man auch die übrigen Identitäten, wobei man verwendet daß eine Aussage über A genau dann nicht für alle A gilt, wenn ein A existiert, für welche sie nicht gilt. □

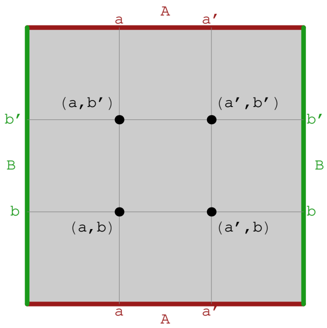
Um Beziehungen zwischen Objekten behandeln zu können, benötigen wir eine Möglichkeit diese paarweise zusammenzufassen. Natürlich könnten wir zu a und b die Menge $\{a, b\}$ betrachten. Wegen $\{a, b\} = \{b, a\}$ ist das aber für Vergleiche nicht geeignet, und wir brauchen den Begriff des GEORDNETEN PAARES (a, b), der gewährleistet, daß

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = b \wedge c = d$$

gilt. Mengentheoretisch kann dies, wie man leicht zeigt, durch die Definition $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ erreicht werden, denn grob gesagt erkennt man welches das Erste der beiden sein soll daran, daß es das Element a des 1-elementigen Elements $\{a\}$ von $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ist. Die Menge aller geordneten Paare wird als KARTESISCHEN PRODUKT

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\} := \{x : \ \exists a \in A \, \exists b \in B : x = (a, b)\}$$

von A und B bezeichnet. Man kann sich $A \times B$ als Menge der Gitterpunkte eines rechteckigen Gitters mit Seiten A und B vorstellen.



Um also z.B. die Beziehung des Elternseins zu beschreiben müßte man eine Tabelle, wo für jeden Menschen seine Eltern angeführt sind, aufstellen, oder eine solche, wo für jeden Menschen alle seine Kinder angeführt sind, oder für je zwei Menschen a und b angeben, ob a ein Kind von b (bzw. b ein Elternteil von a) ist. D.h. in $A \times B$ sind alle Punkte (a, b) entsprechend mit den Werten TRUE oder FALSE zu belegen. Es genügt natürlich dabei alle mit den Wert TRUE anzugeben, also eine Teilmenge von $A \times B$ auszuzeichnen. Dies führt zu folgender

1.1.8 Definition. Relation.
Eine Relation R auf $A \times B$ ist eine Teilmenge von $A \times B$. Man schreibt kürzer $a\,R\,b$ anstelle von $(a,b) \in R$, und sagt dafür a steht in Relation R zu b. Ist $A = B$ so spricht man kürzer (aber nicht ganz sauber) von einer Relation auf A.

Z.B. haben wir die Relationen $\in$, $\notin$, $=$, $\subseteq$, $\subset$, $\dots$ für Mengen, also auch auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ jeder fix vorgegebenen Menge M.

Wir können eine Relation auch mittels gerichteten Graph veranschaulichen, z.B. für die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(\{0,1\})$ wobei wir Pfeile die sich aus der Reflexivität ergeben nicht eingezeichnet sind:

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \{0\} \arrow[d] \\
\{1\} \arrow[r] & \{0,1\}
\end{tikzcd}$$

Auf folgende wichtige Eigenschaften können wir Relationen R auf A untersuchen

- Reflexivität: $\forall x \in A$: xRx.
- Symmetrie: $\forall x, y \in A$: $xRy \Rightarrow yRx$.
- Transitivität: $\forall x, y, z \in A$: xRy, $yRz \Rightarrow xRz$.

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn sie alle diese 3 Eigenschaften besitzt. Man schreibt dann oft $\sim$ anstelle von R, beziehungsweise versieht $\sim$ noch mit einen Index, wenn man mehrere Relationen gleichzeitig betrachtet. Es ist z.B. die Gleichheit '$=$' von Mengen eine Äquivalenzrelation. Beachte jedoch das in vielen Computersprachen Befehle wie $x = x + 1$ verwendet werden. Dort wird das Symbol '$=$' nicht für die logische Gleichheit der linken mit der rechten Seite verwendet, sondern so aufgefaßt, daß der linken Seite (wo nur eine Variable stehen darf) der Wert der rechten Seite zugeordnet wird. Es ist also in der Informatik ein wesentlicher Unterschied zwischen $a = b$ und $b = a$. Als Symbol für Gleichheit wird in diesen Sprachen zumeist '$==$' verwendet.

Äquivalenzrelationen sind zumeist dadurch gegeben, daß man Objekte äquivalent nennt, wenn sie eine gewisse Eigenschaft gemein haben. Z.B. ist für $m \in \mathbb{N}$ die Relation "gleicher Rest bei Division durch m" also $x \sim_m y :\Leftrightarrow m$ teilt $x - y$, d.h. $\exists\, k \in \mathbb{Z}$: $x - y = k\,m$, eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$. Ebenso sind "gleicher Geburtstag", "gleiches Sternzeichen", "gleich viele Kinder", "gleiches Gewicht", "gleicher Vornamen", "in die gleiche Klasse gehen" u.s.w. Äquivalenzrelationen auf der Menge aller Menschen.

Beim letzten Beispiel, der in gleiche Klassen gehenden Schüler einer Schule, steckt offensichtlich dahinter, daß die Schule (oder auch deren Schüler) in Klassen eingeteilt sind. Wir wollen eine analoge Beschreibung nun für jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf Mengen X erhalten. Dazu bezeichnen wir Mengen A, die bezüglich "$\subseteq$" so groß wie möglich (man sagt maximal) unter allen Teilmengen $A \subseteq X$ sind welche nur paarweise äquivalente Elemente enthalten, als Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$. Wir verwenden dabei die Sprechweise "paarweise äquivalenter" anstelle "äquivalenter" Elemente, denn wir können ja jeweils nur 2 Elemente miteinander vergleichen um ihre

Äquivalenz zu überprüfen und nicht alle Elemente der Menge A auf einmal. Wir können auch nicht von **der** größten Teilmenge mit obiger Eigenschaft sprechen, denn man denke nur an die Klassen einer Schule, welche mehrere maximale Mengen mit obiger Eigenschaft sind.

Wie kann man nun Äquivalenzklassen finden? Man beginnt mit einen Element $a \in X$ und betrachtet die Menge

$$[a]_\sim := \{x \in X : x \sim a\}.$$

Falls klar ist, von welcher Äquivalenzrelation $\sim$ wir sprechen, so lassen wir auch den Index $\sim$ weg.

Diese Menge besteht offensichtlich aus paarweise äquivalenten Elementen, denn wegen der Transitivität und Symmetrie sind je zwei Elemente $x, x' \in [a]_\sim$ zueinander äquivalent. Es kann auch keine echte Obermenge $A \supset [a]_\sim$ mit dieser Eigenschaft geben, denn deren Elemente müßten dann zu $a \in [a]_\sim$ äquivalent sein. Also ist $[a]_\sim$ eine Äquivalenzklasse von $\sim$, die einzige Klasse in der a als Element liegt, die sogenannte VON a ERZEUGTE ÄQUIVALENZKLASSE.

Umgekehrt ist jede Äquivalenzklasse A von dieser Form, denn kann A nicht leer sein, andernfalls wählen wir irgend ein $a \in X$ und erhalten eine größere Menge $[a]_\sim \supset A = \emptyset$, einen Widerspruch zur Maximalität. Somit existiert ein $a \in A$ und wir wählen ein solches. Dann ist $A \subseteq [a]_\sim$, da jedes $x \in A$ zu $a \in A$ äquivalent ist und wegen der Maximalität von A ist $A = [a]_\sim$.

Es ist also $\{[a]_\sim : a \in A\}$ gerade die Menge aller Äquivalenzklassen von X.

Die Äquivalenzklassen zur Teilbarkeit durch m heißen RESTKLASSEN MODULO m, und man schreibt $\mathbb{Z}_m$ für die Menge $\{[k]_{\sim_m} : k \in \mathbb{Z}\}$ der Restklassen ganzer Zahlen modulo m.

Beachte, daß sich hier unsere Vereinbarung, daß in der aufzählenden Beschreibung einer Menge gleiche Elemente mehrfach auftreten dürfen bezahlt macht, denn z.B. ist $\{[k]_{\sim_2} : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, [-2]_{\sim_2}, [-1]_{\sim_2}, [0]_{\sim_2}, [1]_{\sim_2}, [2]_{\sim_2}, \dots\} = \{[0]_{\sim_2}, [1]_{\sim_2}\}$, denn als Reste bei Division durch 2 kann ja nur 0 und 1 auftreten.

1.1.9 Definition. Klasseneinteilung.
Eine KLASSENEINTEILUNG $\mathcal{A}$ einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{A}$ von nicht-leeren Teilmengen $A \subseteq X$ die paarweise disjunkt sind (d.h. $A, A' \in \mathcal{A}$ mit $A \cap A' \neq \emptyset \Rightarrow A = A'$) und deren Vereinigung X ist, d.h. $X = \bigcup \mathcal{A}$.

1.1.10 Proposition. Äquivalenzrelation versus Klasseneinteilung.
Es sei X eine nicht-leere Menge. Dann entsprechen den Äquivalenzrelation $\sim$ auf X genau den Klasseneinteilungen $\mathcal{A}$ von X.

Beweis. ($\mapsto$) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Menge $\mathcal{A} = \{[a]_\sim : a \in A\}$ aller Äquivalenzklassen von X ist dann eine Klasseneinteilung von X: Offensichtlich ist $X \supseteq \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{a \in X} [a]_\sim \supseteq \bigcup_{a \in X} \{a\} = X$, also $X = \bigcup \mathcal{A}$.

Sei weiters $A, A' \in \mathcal{A}$ und $a \in A \cap A' \neq \emptyset$. Dann ist $A = [a]_\sim = A'$ nach obigen.

($\leftarrow\!\mid$) Umgekehrt sei $\mathcal{A}$ eine Klasseneinteilung von X. Wir definieren $x \sim x' :\Leftrightarrow \exists\, A \in \mathcal{A}$: $x, x' \in A$. Dies beschreibt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X:
Die Relation ist reflexiv, denn für $x \in X = \bigcup \mathcal{A}$ existiert eine $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A$, also $x \sim x$. Sie ist offensichtlich symmetrisch. Nun zur Transitivität. Sei $x \sim y \sim z$, d.h. $\exists\, A, B \in \mathcal{A}$ mit $x, y \in A$, $y, z \in B$. Also ist $y \in A \cap B \neq \emptyset$ und somit $A = B$, d.h. $x \in A = B \ni z$, also $x \sim z$.

Bleibt zu zeigen, daß das hin und her zwischen Äquivalenzrelationen $\sim$ und Klasseneinteilungen $\mathcal{A}$ zusammenpaßt.

Sei also $\mathcal{A}$ die Menge der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation $\sim$ und $\sim_{\mathcal{A}}$ die aus $\mathcal{A}$ gewonnene Äquivalenzrelation. Wir behaupten, daß diese mit der ursprünglichen übereinstimmt. Wir müssen also $\forall x, y \in X : x \sim y \Leftrightarrow x \sim_{\mathcal{A}} y$ zeigen.
Sei zuerst $x \sim y$, dann liegt $x, y \in [y]_\sim \in \mathcal{A}$, also ist auch $x \sim_{\mathcal{A}} y$ nach Definition. Umgekehrt sei $x \sim_{\mathcal{A}} y$, d.h. es existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x, y \in A$. Da A aber aus bezüglich $\sim$ paarweise äquivalenten Elementen bestehen muß, ist $x \sim y$.

Sei nun andererseits $\mathcal{A}$ irgend eine Klasseneinteilung von X und $\sim$ die zugehörige Äquivalenzrelation, d.h. $x \sim y :\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} : x, y \in A$. Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{A}$ gerade aus den Äquivalenzklassen $[x]_\sim$ von $\sim$ besteht.
Es ist $[x]_\sim \in \mathcal{A}$, denn für $y \in [x]_\sim$ ist $y \sim x$, also existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x, y \in A$. Verschiedene y liefern das gleiche A, denn die $A \in \mathcal{A}$ sind nach Voraussetzung paarweise disjunkt. Also ist $[x]_\sim \subseteq A$. Sei umgekehrt $a \in A$. Dann ist $a, x \in A$, also $a \sim x$ und damit $a \in [x]_\sim$.
Sei nun $A \in \mathcal{A}$. Nach Voraussetzung ist $A \neq \emptyset$, also können wir ein $a \in A$ wählen. Dann ist aber wie zuvor $[a]_\sim = A$, denn $x \in [a]_\sim$ impliziert $x \sim a$ und somit $\exists A' \in \mathcal{A} : x, a \in A'$. Wegen der paarweisen Disjunktheit ist somit $x \in A' = A$. $\square$

1.1.11 Definition. Ordnungsrelationen.
Eine weitere wichtige Eigenschaft, auf die wir Relationen $\leq$ auf einer Menge X untersuchen können, ist die ANTISYMMETRIE, d.h. $\forall x, y \in X$: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

Eine Relation die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist heißt ORDNUNGSRELATION (oder auch PARTIELLE ORDNUNG).

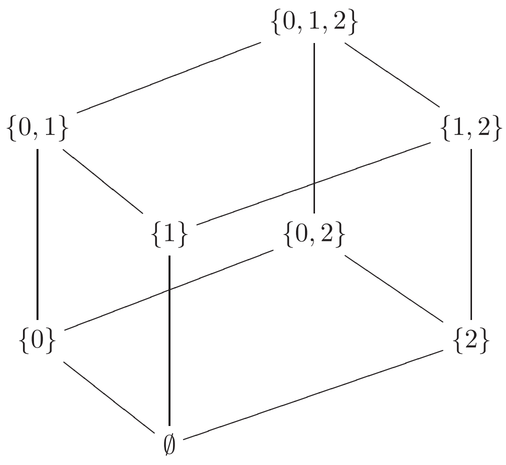
Ein Beispiel dafür ist die Relation $\subseteq$ für Mengen.

Gilt zusätzlich die DICHOTOMIE $x \leq y \vee y \leq x$, d.h. je zwei Elemente sind miteinander vergleichbar, so heißt die Ordnung LINEAR oder auch TOTALE ORDNUNG.

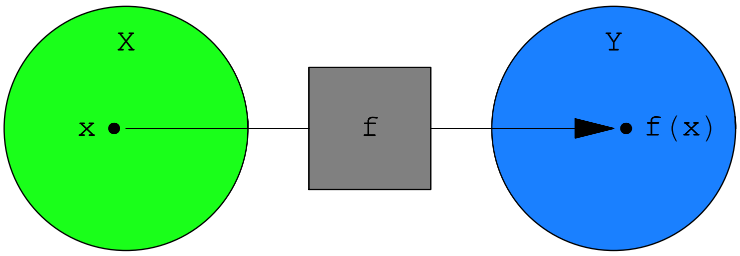
Ein Beispiel dafür ist die Relation $\leq$ für Zahlen.

Mittels solcher Relationen, können wir die Elemente einer Menge in eine Reihenfolge bringen.

Ordnungsrelationen auf einer endlichen Menge können wir mittels sogenannten HASSE-DIAGRAMM veranschaulichen, wobei größere Elemente weiter oben stehen und Verbindungen die sich aus Reflexivität oder Transitivität ergeben nicht eingezeichnet werden. Z.B. für die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(\{0,1,2\})$:

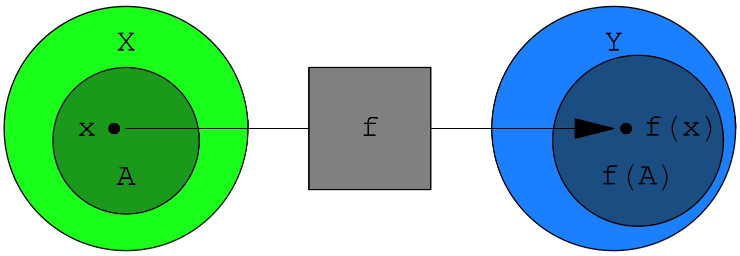


1.1.12 Definition. Funktionen.
Unter einer Abbildung (oder Funktion) f von X nach Y (man schreibt $f : X \to Y$ und nennt X den Definitionsbereich und Y den Wertebereich von f) versteht man eine Relation $f \subseteq A \times B$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in f$ (und man schreibt dann $f(x)$ für dieses y oder auch $x \mapsto y$ und nennt es den Funktionswert von x bezüglich der Funktion f). Wir können uns eine Abbildung $f : X \to Y$ als Programm (oder besser als eine blackbox) vorstellen, welches für jeden Input $x \in X$ einen wohldefinierten Output $y \in Y$ liefert.

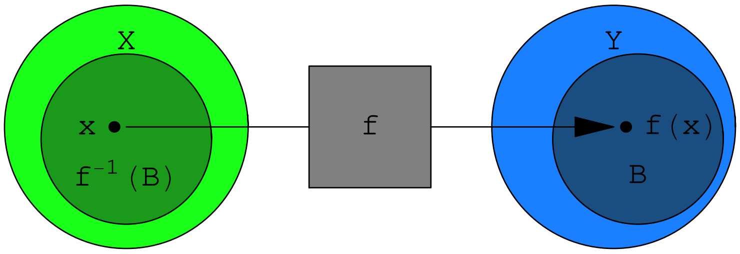


Wir schreiben Y^X für die Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$. Die Motivation für diese Bezeichnungsweise ist, daß $|Y^X| = |Y|^{|X|}$ für endliches X und Y gilt, siehe (1.3.24).

Für Abbildungen $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ ist das Bild von A unter f definiert durch $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$

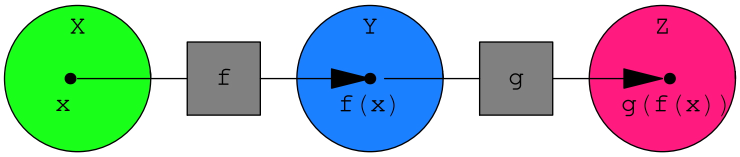


und das Urbild von B unter f definiert durch $f^{-1}(B) := \{x : f(x) \in B\}$.



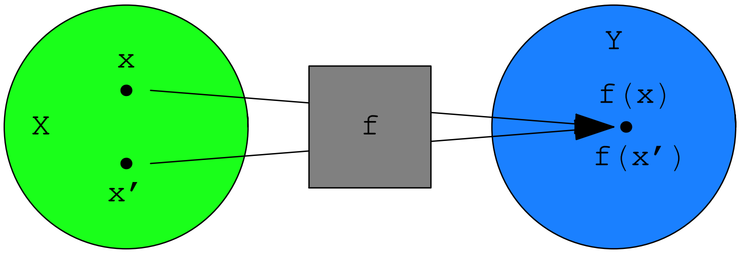
Man kann Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ZUSAMMENSETZEN zu einer Abbildung $g \circ f : X \to Z$, die definiert ist durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Lies dies als "g ring f" oder "g zusammengesetzt mit f". Als Teilmenge $g \circ f \subseteq X \times Z$ bedeutet dies

$$g \circ f := \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y : (x, y) \in f \text{ und } (y, z) \in g\}.$$

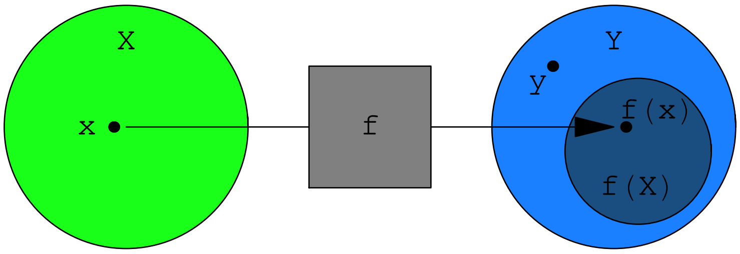


Wichtige Eigenschaften, auf die hin man Abbildungen $f : X \to Y$ untersuchen kann, sind:

- f heißt INJEKTIV, wenn aus $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, oder äquivalent wenn $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$, d.h. jedes $y \in Y$ tritt höchstens für ein x als Output unter f auf. Nicht Injektivität läßt sich graphisch wie folgt darstellen:

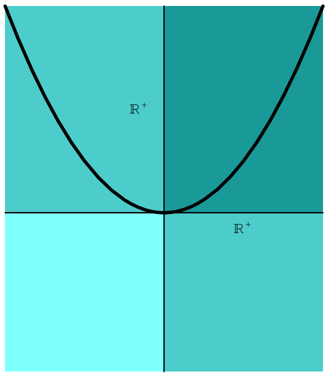


- f heißt SURJEKTIV, wenn $f(X) = Y$ ist, also für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. jedes $y \in Y$ tritt mindestens für ein x als Output unter f auf. Nicht Surjektivität läßt sich graphisch wie folgt darstellen:



- f heißt BIJEKTIV, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist, d.h. zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.

Beispiel.
Wir betrachten die Funktion $f(x) := x^2$ als Funktion zwischen folgenden Mengen wobei $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ bezeichnet:



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv.
- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist injektiv aber nicht surjektiv.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist nicht injektiv aber surjektiv.
- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist bijektiv.

1.1.13 Bemerkung. Bezeichnungsweise.
Die Notation $g \circ f$ für die Zusammensetzung von $f : X \to Y$ mit $g : Y \to Z$ ist keineswegs glücklich gewählt, denn dabei wirkt ja zuerst f und dann g auf einen Input $x \in X$. Würde man hier allerdings die Reihenfolge umdrehen, so wäre es wegen der definierenden Formel $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ zweckmäßig auch die rechte Seite besser als $((x)f)g$ zu schreiben, d.h. den Wert von x bzgl. der Abbildung f als $(x)f$ und nicht $f(x)$. Dies würde auch durchwegs der Idee entsprechen, daß ja x genommen wird und darauf dann die Vorschrift f angewandt wird, was auch der Schreibweise $x \overset{f}{\longmapsto} y$ entspricht. Die Definition der Zusammensetzung wäre dann $(x)(f \circ g) := ((x)f)g$. Allerdings ist dies fast allen MathematikerInnen doch eine zu radikale Veränderung alteingessener Bezeichnungsweisen und es würde zweifellos zu einem heillosen Durcheinander kommen, würden diese Bezeichnungsweise gleichzeitig verwendet werden. Im Sinne der kulturellen Vielfalt können wir wohl durchaus damit leben, daß Teile unserer Notation halt nicht europäisch von links nach rechts laufend geschrieben werden. Anhand vieler Beweise werden wir sowieso zum Schluß kommen, daß Mathematik nicht linear von sich geht. In diesem Sinn werden wir viele Relationssymbole in allen möglichen Orientierungen schreiben, wie z.B.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \rotatebox{90}{$\geq$} & & \\ 1 & \leq & 2 & \geq & 1 \\ & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \\ & & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \cap & & \\ 1 & \subset & 2 & \supset & 1 \\ & & \cup & & \\ & & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \rotatebox{90}{$\ni$} & & \\ 1 & \in & 2 & \ni & 1 \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Mit Buchstaben sollten wir das natürlich besser nicht machen ;–),
z.B. $b \leq q$ im Gegensatz zu $p \geq d$.

Auch die Bezeichnung $f(A)$ für die Bildmenge und $f^{-1}(A)$ für Urbildmenge ist mit Vorsicht zu genießen, denn wenn $f : X \to Y$ eine Abbildung ist dann kann für eine Teilmenge $A \subseteq X$ gleichzeitig auch $A \in X$ gelten und somit kann die Bildmenge $f(A)$ und der Funktionswert $f(A)$ etwas ganz verschiedenes sein. Wenn man dazuschreibt, ob man $A \in X$ oder $A \subseteq X$ betrachtet, so ist allerdings eine Mißverständnis ausgeschlossen.

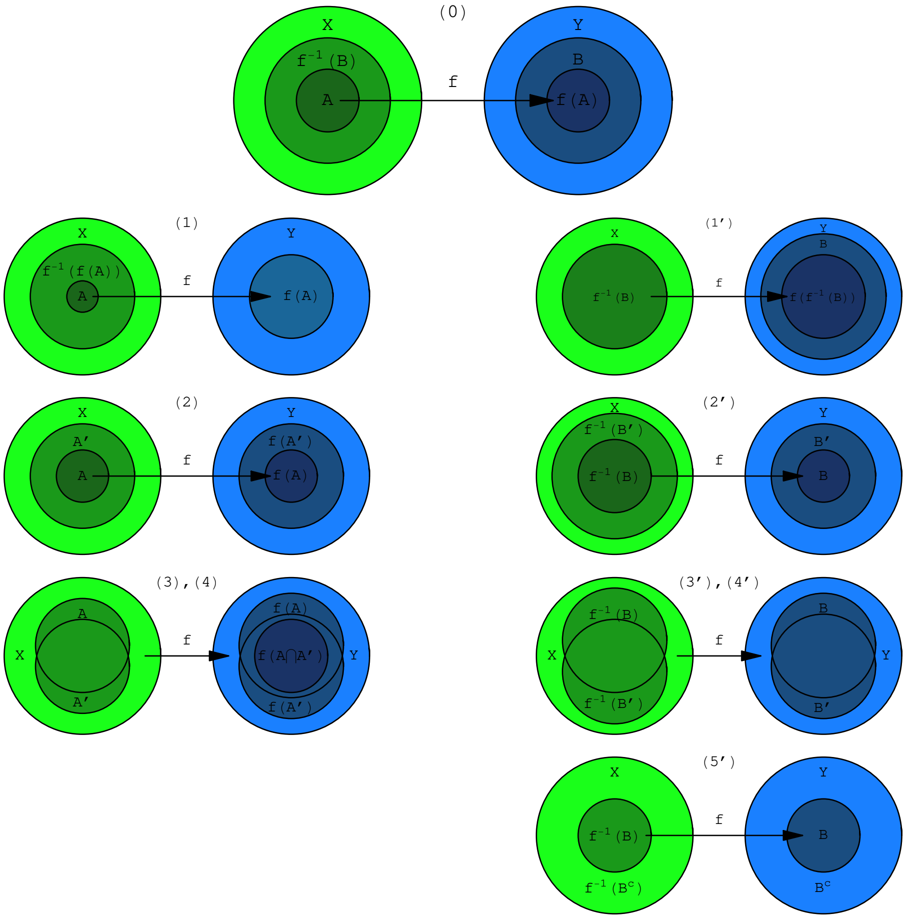
Die grundlegenden Eigenschaften von Bild und Urbild faßt folgende Proposition zusammen:

1.1.14 Proposition. Bild und Urbild.
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A, A' \subseteq X$, $B, B' \subseteq Y$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Dann gilt:

$$(0) \quad A \subseteq f^{-1}(B) \;\Leftrightarrow\; f(A) \subseteq B;$$

$$\begin{array}{llll}
(1) & A \subseteq f^{-1}(f(A)); & (1') & B \supseteq f(f^{-1}(B)); \\
(2) & A \subseteq A' \;\Rightarrow\; f(A) \subseteq f(A'); & (2') & B \subseteq B' \;\Rightarrow\; f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B'); \\
(3) & f\Big(\bigcap \mathcal{A}\Big) \subseteq \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} f(A); & (3') & f^{-1}\Big(\bigcap \mathcal{B}\Big) = \bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B); \\
(4) & f\Big(\bigcup \mathcal{A}\Big) = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} f(A); & (4') & f^{-1}\Big(\bigcup \mathcal{B}\Big) = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B); \\
 & & (5') & f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c.
\end{array}$$

Visualisieren kann man diese Aussagen folgendermaßen:



Verbale Formulierungen sind z.B.:

(0) A liegt genau dann im Urbild von B, wenn das Bild von A in B liegt.

(1) Jede Menge liegt im Urbild ihres Bildes.

(1') Jede Menge enthält das Bild ihres Urbilds.

(2) Sind zwei Mengen ineinander enthalten, so auch ihre Bilder.

(2') Sind zwei Mengen ineinander enthalten, so auch ihre Urbilder.

(3) Das Bild eines Durchschnitts ist im Durchschnitt der Bilder enthalten, d.h. Elemente, die Bilder eines Elements sind, welches in allen $A \in \mathcal{A}$ liegt, liegt in den Bildern $f(A)$ aller $A \in \mathcal{A}$.

(3') Das Urbild eines Durchschnitts ist der Durchschnitt der Urbilder, d.h. ein Element hat genau dann Bild in allen $B \in \mathcal{B}$, wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ sein Bild in B liegt.

(4) Die Bilder jener Elemente die in mindestens einen $A \in \mathcal{A}$ liegen sind genau jene Objekte die in mindestens einen Bild $f(A)$ mit $A \in \mathcal{A}$ liegen.

(4') Das Urbild einer Vereinigung ist die Vereinigung der Urbilder, d.h. das Bild eines Element liegt genau dann in mindestens einen $B \in \mathcal{B}$, wenn für mindestens ein $B \in \mathcal{B}$ sein Bild in B liegt.

(5') Das Urbild des Komplements ist das Komplement des Urbilds, d.h. das Bild eines Elements liegt genau dann nicht in B, wenn nicht stimmt, daß das Bild des Elements in B liegt.

Beweis. (0)

$$\begin{aligned} A \subseteq f^{-1}(B) &\Leftrightarrow \ \forall x \in A : x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \ \forall x \in A : y := f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \ \forall y \in f(A) : y \in B \\ &\Leftrightarrow f(A) \subseteq B \end{aligned}$$

(1) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ nach (0), da $f(A) \subseteq f(A)$.

(2) Sei $A \subseteq A'$, $y \in f(A)$, d.h. $\exists\, a \in A : y = f(a)$. Somit ist $a \in A \subseteq A'$ und damit $y = f(a) \in f(A')$.

(3)

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcap \mathcal{A}) &\Leftrightarrow \ \exists\, a \in \bigcap \mathcal{A} : y = f(a) \\ &\Leftrightarrow \ \exists\, a\, \forall A \in \mathcal{A} : a \in A \text{ und } y = f(a) \\ &\Rightarrow \ \forall A \in \mathcal{A}\, \exists\, a \in A : y = f(a) \\ &\Leftrightarrow \ \forall A \in \mathcal{A} : y \in f(A) \\ &\Leftrightarrow: y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A) \end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
y \in f(\bigcup \mathcal{A}) &\Leftrightarrow\ \exists a \in \bigcup \mathcal{A} : y = f(a)\\
&\Leftrightarrow\ \exists a\, \exists A \in \mathcal{A} : a \in A \text{ und } y = f(a)\\
&\Leftrightarrow\ \exists A \in \mathcal{A}\, \exists a \in A \text{ und } y = f(a)\\
&\Leftrightarrow\ \exists A \in \mathcal{A} : y \in f(A)\\
&\Leftrightarrow y \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A)
\end{aligned}
$$

(5')

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B^c) &\Leftrightarrow f(x) \in B^c\\
&\Leftrightarrow f(x) \notin B\\
&\Leftrightarrow \text{nicht } f(x) \in B\\
&\Leftrightarrow \text{nicht } x \in f^{-1}(B)\\
&\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B)\\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)^c
\end{aligned}
$$

□

Beachte, daß in (3) nicht Gleichheit gilt: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := x^2$, $A := \{x : x \geq 0\}$ und $A' := \{x : x \leq 0\}$. Dann ist $f(A) = f(A') = \{x : x \geq 0\} = f(A) \cap f(A')$, aber $A \cap A' = \{0\}$ und somit auch $f(A \cap A') = \{0\} \neq f(A) \cap f(A')$.

Der Grund warum der Beweis für Gleichheit nicht funktioniert ist, daß zwar "es gibt ein a, sodaß für alle A eine Aussage gilt" zur Folge hat, daß "für jedes A ein a existiert, sodaß dieselbe Aussage gilt" jedoch nicht umgekehrt. Man vergleiche z.B. "Jeder Mensch besitzt eine Mutter" mit "Es gibt eine Frau die Mutter von jedem Menschen ist". Oder auch "jeder wird von jemanden geliebt" im Gegensatz zu "Es gibt jemanden der jeden liebt".

1.1.15 Proposition. Bijektivität.
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $X \neq \emptyset$. Dann gilt:

- *f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\exists g : Y \to X$: $g \circ f = \mathrm{id}_X$.*
- *f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\exists g : Y \to X$: $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*
- *f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $\exists g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.*

Beweis. (1) ($\Rightarrow$) Es sei f injektiv und $X \neq 0$. Dann wählen wir ein $x_0 \in X$ und definieren

$$
g : y \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } f(x) = y \\ x_0 & \text{falls } y \notin f(X) \end{cases}.
$$

Wegen der Injektivität ist g wohldefiniert und offensichtlich gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt sei $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, also f injektiv.

(2) ($\Rightarrow$) Sei nun f surjektiv. Für jedes $y \in Y$ wählen wir ein zugehöriges $x \in f^{-1}(y) \subseteq X$ (Das dies wirklich möglich ist, ist das Auswahlaxiom der

Mengenlehre) und setzen $g(y) := x$. Dann ist $g : Y \to X$ eine wohldefinierte Funktion mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt sei $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $y \in Y$. Es ist $x := g(y) \in X$ und $f(x) = y$, d.h. f ist surjektiv.

(3) ($\Rightarrow$) Entweder man definiert $f^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X : x, y \in f\}$ und rechnet leicht nach, daß diese Relation eine Abbildung ist, welche invers zu f ist, oder man verwendet (1) und (2) und erhält ein linksinverses g und ein rechtsinverses h. Dann ist

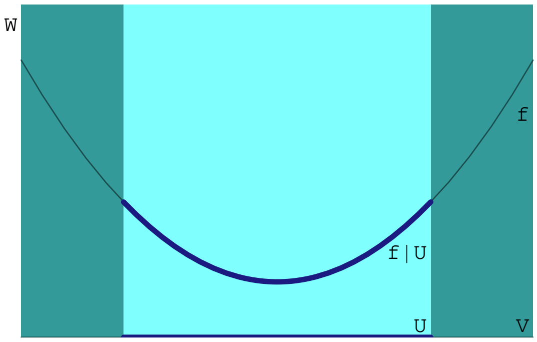
$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h.$$

($\Leftarrow$) Dies folgt sofort aus (1) und (2). $\square$

1.1.16 Bemerkung. Umkehrfunktion.
Die eindeutige Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$, die für bijektive $f : X \to Y$ existiert, heißt Umkehrfunktion von f oder auch inverse Funktion zu f und wird auch als f^{-1} bezeichnet.

Falls f bijektiv ist, so ist das Urbild $f^{-1}(B)$ von B bzgl. der Funktion f gerade das Bild von B bzgl. der Umkehrfunktion f^{-1} von f. Beachte jedoch, daß $f^{-1}(B)$ auch dann definiert ist, wenn f^{-1} als Abbildung nicht existiert.

1.1.17 Definition. Einschränkung.
Es sei $f : V \to W$ eine Abbildung und $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Unter der Einschränkung $f|_U$ verstehen wir die Abbildung $f|_U : U \to W$, die auf $x \in U$ mit f übereinstimmt, also durch $f|_U(x) := f(x)$ gegeben ist. Als Teilmenge von $U \times W$ ist also $f|_U := \{(v,w) \in U \times W : (v,w) \in f\} = f \cap (U \times W)$.



1.1.18 Gleichmächtigkeit Um Mengen der Größe nach miteinander vergleichen zu können, können wir für endliche Mengen natürlich die Anzahlen der Elemente bestimmen und diese dann vergleichen. Ohne wirklich zählen zu können gibt es aber auch eine andere Möglichkeit: Um z.B. festzustellen, ob gleichviele HöhrerInnen wie Sitzplätze vorhanden sind, bittet man darum, daß sich alle setzten und falls weder leere Sitze überbleiben noch Personen stehenbleiben, dann sind es gleich viele. Mathematisch kann man das so beschreiben, daß versucht wird jeder Person x einen Platz y so zuzuordnen, daß keine zwei Personen den gleichen Platz angewiesen bekommen und auch kein Platz übrigbleibt, d.h. diese Zuordnung f von der Menge aller Personen in die Menge aller Plätze bijektiv ist. Dieses Verfahren können wir auch bei unendlichen Mengen durchführen und geben dazu folgende

Definition.
Wir schreiben $X \cong Y$ (oder auch $X \sim Y$), falls X und Y gleichmächtig sind, d.h. eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert. Eine Menge X heißt

ABZÄHLBAR (UNENDLICH) falls sie gleichmächtig mit der Menge $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ der NATÜRLICHEN ZAHLEN ist.

Eine Menge heißt ENDLICH, falls sie nur endlich viele Elemente besitzt, also gleichmächtig zu einer natürlichen Zahl $n := \{0, 1, \dots, n-1\} \in \mathbb{N}$ ist.

1.1.19 Bemerkung. Gleichmächtige Teilmengen.
Im Unterschied zu endlichen Mengen, kann eine unendliche Menge durchaus gleichmächtig mit einer echten Teilmenge sein. Z.B. definiert $x \mapsto x+1$ eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{N}$.

Veranschaulichen kann man sich dies wie folgt: Man betrachtet Hilbert's Hotel, ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern, die mit den natürlichen Zahlen 0,1,2,... durchnumeriert sind. Diese Hotel sei voll belegt und es kommt ein neuer Gast, welcher dadurch untergebracht werden kann, daß man die bereits einquartierten Gäste bittet jeweils in das Zimmer mit der nächst höheren Nummer zu wechseln und somit Zimmer 0 freibekommt.

Man kann sogar eine unendliche Teilmenge entfernen ohne die Gleichmächtigkeit zu stören: Betrachte die Menge $\mathbb{G} := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ der gerade Zahlen. Dann definiert $n \mapsto 2n$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{G}$. Und für die Menge $\mathbb{N} \setminus \mathbb{G}$ der ungeraden Zahlen gilt ebenfalls $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \setminus \mathbb{G}$ vermöge $n \mapsto 2n+1$. Es ist also $\mathbb{N}$ die disjunkte Vereinigung $\mathbb{G} \cup (\mathbb{N} \setminus \mathbb{G})$ und beide Teilmengen sind gleichmächtig mit $\mathbb{N}$.

Ebenso ist $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$, denn $\mathbb{Z} = \{n : n \geq 0\} \cup \{-n : n > 0\}$ und $\{n : n \geq 0\} = \mathbb{N} \cong \mathbb{G}$ sowie $\{-n : n > 0\} \cong \{n : n > 0\} \cong \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \setminus \mathbb{G}$, also $\mathbb{Z} = \{n : n > 0\} \cup \{-n : n > 0\} \cong \mathbb{G} \cup (\mathbb{N} \setminus \mathbb{G}) = \mathbb{N}$ nach Übungsaufgabe (43).

Veranschaulichen kann man sich das wieder durch Hilbert's Hotel. Diesmal kommt ein Reisebus mit abzählbar unendlich vielen Passagieren die alle untergebracht werden sollen. Diesmal werden die bereits einquartierten Gäste gebeten jeweils in das Zimmer mit der doppelt so großen Nummer zu wechseln. Dann werden alle Zimmer mit ungerader Nummer frei und wir können die Passagiere des Reisebusses in diesen abzählbar unendlich vielen Zimmern unterbringen.

Aber auch $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Dazu numeriere man die Punkte in $\mathbb{N}^2$ wie folgt:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\
2 & 4 & 7 & 11 & 16 & 22 & \\
5 & 8 & 12 & 17 & 23 & & \\
9 & 13 & 18 & 24 & & & \\
14 & 19 & \cdot & & & & \\
20 & \cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & &
\end{array}$$

Eine andere Bijektion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch $f(n, m) := (2m+1)2^n - 1$ gegeben. Dabei stehen in der n-ten Zeile gerade jene Zahlen, die um 1 vermehrt in der Dualzahlentwicklung von rechts gelesen genau n 0'er stehen haben.

Das bedeutet also, daß selbst wenn auf abzählbar unendlich vielen Welten jeweils ein voll belegtes Hotel von Hilbert steht und aus Einsparungsgründen alle bis auf ein Hotel aufgelöst werden sollen, dann kann man den Gästen, die durch Hotelnummer und Zimmernummer beschrieben werden können (also durch Punkte in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), auf eindeutige Weise neue Zimmernummern in $\mathbb{N}$ des verbleibenden Hotels zuweisen.

In Übungsaufgabe (44) werden wird zeigen, daß die Menge aller endlichen Folgen natürlicher Zahlen ebenfalls abzählbar ist, und somit auch die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten und ebenso die Menge der algebraischen

Zahlen, d.h. Nullstellen solcher Polynome. Aus dem gleichen Argument ist auch die Menge aller möglichen (endlich langen) Worte (die mittels Buchstaben aus einen abzählbaren Alphabet gebildet werden können) abzählbar und ebenfalls die Menge aller mögliche (endlichen) Sätze und genauso aller (endlichen) Bücher.

Daß es aber auch echt mächtigere unendliche Mengen (sogenannte ÜBERABZÄHLBARE Mengen) gibt, war eine von Cantor's wesentlichen Erkenntnissen:

1.1.20 Proposition. Mächtigkeit der Potenzmenge.
Es sei X eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ nicht gleichmächtig mit X.

Offensichtlich definiert $x \mapsto \{x\}$ eine injektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$, und somit ist $\mathcal{P}(X)$ entscheidend größer als X.

Beweis. Angenommen es gäbe eine surjektive Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Dann betrachten wir die Menge $A := \{x \in X : x \notin f(x)\} \subseteq X$. Nach Voraussetzung existiert ein $a \in X$ mit $f(a) = A$. Falls $a \in A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ liegt, so folgt $a \notin f(a) = A$, ein Widerspruch. Also kann nur $a \notin A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ gelten und damit nicht $a \notin f(a) = A$ also $a \in A$, ebenfalls ein Widerspruch. Folglich muß die Annahme, daß f surjektiv ist, falsch sein. □

Bemerkung.
Ähnlich zeigt man, daß die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist.

1.1.21 Definition. Produkt von Mengen.
Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Mengen. Unter dem PRODUKT $\prod \mathcal{A}$ versteht man die Menge

$$\prod \mathcal{A} := \Big\{ f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A} : \ \forall A \in \mathcal{A} : f(A) \in A \Big\}.$$

Im Falle $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ schreibt man

$$\prod_{i \in I} A_i := \prod \mathcal{A}.$$

Im Fall $\mathcal{A} = \{A, B\}$ ist $\prod\{A, B\} \neq A \times B$ im Unterschied zu Vereinigung und Durchschnitt, jedoch gilt $\prod\{A, B\} \cong A \times B$ vermöge $\prod\{A, B\} \ni f \mapsto (f(A), f(B)) \in A \times B$, siehe Aufgabe (37). Beachte auch, daß nach Aufgabe (38) zwar $A \times B \neq B \times A$ aber zumindest $A \times B \cong B \times A$ gilt. Und nach Aufgabe (40) ist das Produkt $\prod$ assoziativ.

1.2 Grundlegende Algebra

Wir wollen als nächstes die verschiedenen Typen von Zahlen behandeln, insbesonders fixieren wie man mit ihnen rechnen kann, und klären wie sie definiert sind. Am wichtigsten dabei sind wohl die reellen Zahlen, die man ja geometrisch als Punkte auf einer in beide Richtungen unendlich langen Gerade auffassen kann.

1.2.1 Bemerkung. Reelle Zahlen.
Reelle Zahlen werden im täglichen Leben üblicherweise als Dezimalzahlen beschrieben, also als ein Vorzeichen $+$ oder $-$ gefolgt von einer (möglicherweise) unendliche Folgen von Ziffern in $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ die noch irgendwo durch einen Dezimalpunkt unterbrochen werden. Beachte aber, daß es verschiedene Darstellungen der gleichen Dezimalzahl gibt, z.B. $-0001. = -1.$. Führende Nuller zu verbieten ist keine gute Idee, denn z.B. für $+0.001$ benötigt man sie. Weiters ist $1.0 = 0.999999\ldots$.

Eine exakte Beschreibung werden wir in (1.6.4) liefern.

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir wie üblich die Menge aller reeller Zahlen. Was kann man mit reellen Zahlen anfangen? Nun offensichtlich können wir sie vergleichen, d.h. wir haben eine lineare Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$. Weiters können wir reelle Zahlen addieren und multiplizieren und es gelten die kommutativ- und assoziativ-Gesetz für Addition und Multiplikation sowie das distributiv-Gesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

der Multiplikation bzgl. der Addition. Beachte, daß wir zwecks Vermeidung zuvieler Klammern die Regel verwenden, daß Punktrechnungen stärker binden (also zuerst ausgeführt werden müssen) als Strichrechnungen.

Natürlich besteht eine der Hauptaufgaben des Mathematikers darin Gleichungen zu lösen. Insbesonders können wir Gleichungen der Form

$$a = x + b \text{ und } a = x \cdot b$$

betrachten. Um nicht für die Addition und für die Multiplikation (und auch für einige andere Operationen) die gleichen Argumente mehrmals durchführen zu müssen, ist es am günstigsten das Gemeinsame herauszuarbeiten. Wir haben also in einer Grundmenge X (in unserem Fall $X = \mathbb{R}$) eine Operation $\bullet : X \times X \to X$ (in unseren Fall '$+$' bzw. '$\cdot$') die assoziativ ist. Wir sind daran interessiert Gleichungen der Form $a = x \bullet b$ bzw. $a = b \bullet y$ mit $a, b \in X$ nach x bzw. y aufzulösen. In unserem Fall ist die Operation kommutativ, also würde es genügen nur eine der beiden Gleichungstypen zu behandeln, aber um hinreichend allgemeine Situationen zu inkludieren (wie z.B. die Komposition) wollen wir von der Kommutativität absehen.

1.2.2 Definition. Gruppe.
Unter einer Halbgruppe versteht man eine Menge H zusammen mit einer Abbildung $\bullet : H \times H \to H$ welche das assoziativ-Gesetz erfüllt:

$$\forall x, y, z \in H : \ (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z),$$

wobei wir $x \bullet y$ anstelle von $\bullet(x, y)$ schreiben.

Unter einer Gruppe verstehen wir eine Halbgruppe $(H, \bullet)$, s.d.

$$\forall a, b \in H \ \ \exists x, y \in H : a = x \bullet b \text{ und } a = b \bullet y,$$

d.h. all diese Gleichungen lösbar sind.

1.2.3 Beispiele von Halbgruppen.

1. Die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Addition eine kommutative Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ mit neutralem Element 0.
2. Die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Multiplikation ebenfalls eine kommutative Halbgruppe $(\mathbb{N}, \cdot)$ mit neutralem Element 1.
3. Die Potenzmenge einer fixen Menge X ist sowohl bezüglich Durchschnitt als auch bezüglich Vereinigung eine kommutative Halbgruppe $(\mathcal{P}(X), \cap)$ bzw. $(\mathcal{P}(X), \cup)$ mit X bzw. $\emptyset$ als neutralem Element.
4. Die Menge der Abbildungen einer Menge in sich ist bezüglich der Komposition eine (nicht kommutative) Halbgruppe $(X^X, \circ)$ mit der Identität id_X als neutralen Element.
5. Keines dieser Beispielen ist eine Gruppe. Allerdings ist die Teilmenge $\mathrm{Bij}(X) := \{f \in X^X : f \text{ ist bijektiv}\}$ der bijektiven Abbildungen von X auf X bezüglich der Zusammensetzung eine Gruppe.

1.2.4 Proposition. Gruppen via Lösbarkeit von Gleichungen.
Eine nicht-leere Halbgruppe $(H, \bullet)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\exists\, e \in H \ \ \forall x \in H\colon e \bullet x = x$;
2. $\forall x \in H \ \ \exists\, y \in H\colon y \bullet x = e$, *wobei e ein fixes Element wie im vorigen Punkt sei.*

Man nennt e LINKS-NEUTRALES ELEMENT *und y* LINKS-INVERSES ELEMENT *zu x. Diese sind in jeder Gruppe eindeutig bestimmt und erfüllen zusätzlich die Gleichungen $x \bullet e = x$ und $x \bullet y = e$, sind also gleichzeitig auch* RECHTS-NEUTRAL *und* RECHTS-INVERS. *Es genügt also zusammenfassend von dem* NEUTRALEN *und dem zu x* INVERSEN *Element (und man schreibt x^{-1} dafür) zu sprechen.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $H \neq \emptyset$ und $c \in H$. Dann existiert eine Lösung e von $c = e \bullet c$. Sei nun $h \in H$ beliebig. Dann existiert ein $x \in H$ mit $h = c \bullet x$. Somit ist

$$e \bullet h = e \bullet (c \bullet x) = (e \bullet c) \bullet x = c \bullet x = h.$$

Nun zur Existenz von Inversen. Sei $h \in H$ beliebig. Dann existiert eine Lösung k von $k \bullet h = e$, also ein Linksinverses zu h.

($\Leftarrow$) Wir zeigen zuerst, daß links-neutrale und links-inverse es auch für die rechte Seite sind: Sei a' ein Linksinverses zu a, d.h. $a' \bullet a = e$. Somit ist $a' \bullet (a \bullet a') = (a' \bullet a) \bullet a' = e \bullet a' = a'$, und nach Multiplikation mit dem Linksinversen a'' zu a' ist $a \bullet a' = e \bullet (a \bullet a') = (a'' \bullet a') \bullet (a \bullet a') = a'' \bullet (a' \bullet (a \bullet a')) = a'' \bullet a' = e$.

Weiters ist $a \bullet e = a \bullet (a' \bullet a) = (a \bullet a') \bullet a = e \bullet a = a$.

Nun zur Eindeutigkeit. Sei e' ein weiteres Linksneutrales. Dann gilt $e = e' \bullet e = e'$, da e auch rechtsneutral ist. Sei k' ein weiteres Linksinverses zu h, d.h. $e = k' \bullet h$. Dann ist $k = e \bullet k = (k' \bullet h) \bullet k = k' \bullet (h \bullet k) = k' \bullet e = k'$, da k auch rechtsinvers und e rechtsneutral ist.

Sei $x := a \bullet b'$ und $y := b' \bullet a$, wobei b' ein Inverses zu b sei. Dann ist $x \bullet b = (a \bullet b') \bullet b = a \bullet (b' \bullet b) = a \bullet e = a$ und $b \bullet y = b \bullet (b' \bullet a) = (b \bullet b') \bullet a = e \bullet a = a$.

Die Gleichungen haben dann sogar eindeutige Lösungen, denn aus $a = x \bullet b$ folgt durch Multiplikation mit dem Inversen b^{-1} zu b die Beziehung $a \bullet b^{-1} = (x \bullet b) \bullet b^{-1} = x \bullet (b \bullet b^{-1}) = x \bullet e$, und ebenso $b^{-1} \bullet a = b^{-1} \bullet (b \bullet y) = (b^{-1} \bullet b) \bullet y = e \bullet y = y$. □

Achtung: Die Menge H der injektiven Abbildungen $f : X \to X$ ist bezüglich Zusammensetzung $\circ$ eine Halbgruppe mit der Identität id_X auf X als neutralem Element. Zu jedem solchen f existiert nach (1.1.15) ein links-Inverses. Warum ist H trotz (1.2.4) dennoch keine Gruppe?

1.2.5 Lemma. Inverse eines Produkts.
Falls Elemente x und y einer Halbgruppe H invertierbar sind, so auch $x \bullet y$ und es ist $(x \bullet y)^{-1} = y^{-1} \bullet x^{-1}$.

Beweis. Es ist $(x \bullet y) \bullet (y^{-1} \bullet x^{-1}) = x \bullet y \bullet y^{-1} \bullet x^{-1} = x \bullet e \bullet x^{-1} = x \bullet x^{-1} = e$. □

Aus der Schule wissen wir von der Existenz neutraler Elemente 0 bzw. 1 in $\mathbb{R}$ bzgl. Addition und Multiplikation, als auch von der Existenz additiver Inverser $-a$ zu $a \in \mathbb{R}$ und multiplikativer Inverser $1/a$ zu $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Es ist also $\mathbb{R}$ mit der Addition eine kommutative (oder Abel'sche) Gruppe, und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine solche bzgl. der Multiplikation. Wie man deren Existenz wirklich beweisen kann, werden wir in (1.6.4) skizzieren.

Man nennt eine Menge X mit zwei Operationen $+ : X \times X \to X$ (genannt Addition) und $\cdot : X \times X \to X$ genannt Multiplikation) die assoziativ und distributiv sind und für die $(X, +)$ eine Abel'sche Gruppe ist einen Ring. Man schreibt dann 0 für das neutrale Element und $-x$ für das zu x inverse Element bzgl. der Addition. Falls die Multiplikation zusätzlich kommutativ ist, so spricht man von einen kommutativen Ring, und falls ein neutrales Element bzgl. der Multiplikation existiert so schreibt man 1 für dieses und spricht von einen Ring mit 1. Ist sogar $X \setminus \{0\}$ bzgl. Multiplikation eine kommutative Gruppe so spricht man von einem Körper und schreibt auch $1/x$ für das zu x inverse Element bzgl. der Multiplikation.

Zusammengefaßt wissen wir also aus der Schule, daß $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Die Lösung der Gleichung $a = x + b$ ist somit durch $x := a + (-b) =: a - b$ (die Differenz, also das Ergebnis der Subtraktion von a minus b) gegeben und jenen von $a = x \cdot b$ für $b \neq 0$ durch $x := a \cdot (1/b) =: \frac{a}{b}$ (der Quotient, also das Ergebnis der Division von a durch b). Wir können also auch in beliebigen Körpern Subtraktion und Division auf diese Weise definieren.

Die lineare Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist mit den Operationen $+$ und $\cdot$ im folgenden Sinn verträglich (Monotoniegesetze):

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$
$$a \leq b \text{ und } c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

In diesen Situation (also einen Körper mit einer Ordnung die die Monotoniegesetze erfüllt) spricht man von einem angeordneten Körper.

1.2.6 Rechenregeln für angeordnete Körper.

- In jedem Körper gelten folgende Regeln für das Bruchrechnen:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{ad+bc}{bd}&=(ad+bc)(bd)^{-1}=(ad+bc)d^{-1}b^{-1}\\&=add^{-1}b^{-1}+bcd^{-1}b^{-1}=ab^{-1}+cd^{-1}bb^{-1}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\\\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}&=(ab^{-1})(cd^{-1})=acd^{-1}b^{-1}=(ac)(bd)^{-1}=\frac{ac}{bd}\\\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}&=(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1}=ab^{-1}(d^{-1})^{-1}c^{-1}\\&=adc^{-1}b^{-1}=(ad)(bc)^{-1}=\frac{ad}{bc}\end{aligned}$$

□

- Folgende einfache Rechenregeln gelten ebenfalls in jedem Körper:

$$\begin{aligned}0\cdot a&=0\\\text{Nullteilerfreiheit: } a\cdot b=0&\Leftrightarrow a=0\vee b=0\\\text{Vorzeichenregeln: } (-a)\cdot b&=-a\cdot b\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a\quad&\Rightarrow\\0=0\cdot a-(0\cdot a)&=0\cdot a+0\cdot a-(0\cdot a)=0\cdot a\\a\cdot b=0 \text{ und } b\neq 0\Rightarrow 0&=0\cdot b^{-1}=a\cdot b\cdot b^{-1}=a\\a\cdot b+(-a)\cdot b=(a+(-a))\cdot b=0\cdot b=0\quad&\Rightarrow\\-(a\cdot b)=(-a)\cdot b&\end{aligned}$$

□

- Für jede Ordnung $\leq$ ist durch $a<b :\Leftrightarrow (a\leq b$ und $a\neq b)$ eine Strikte Ordnung definiert, d.h. eine transitive und antireflexive (d.h. $\forall x: x\not< x$) Relation, für die und aus $x<y$ die Aussage $y\not< x$ folgt.

  Beweis. Es ist nur die Transitivität nachzuweisen. Sei also $x<y$ und $y<z$. Dann ist $x\leq y$ und $y\leq z$, also $x\leq z$. Wäre $x=z$ so hätte die Antisymmetrie von $\leq$ zur Folge, daß $x=y$ gilt, ein Widerspruch zu $x<y$. □

- Umgekehrt kann man natürlich die Ordnung $\leq$ aus der strikten Ordnung $<$ zurückerhalten, indem man $x\leq y :\Leftrightarrow x<y\vee x=y$ setzt. Aus obigen Eigenschaften von $<$ folgt für beliebige strikte Ordnungen $<$, daß die daraus erhaltene Relation $\leq$ eine Ordnung ist.

Beweis. Die Reflexivität von $\leq$ ist klar und die Antisymmetrie folgt, denn $x \leq y \Rightarrow x < y \vee x = y$. Wäre also $x \neq y$, dann wäre $y \not< x$ und wegen $y \leq x$ folgt doch $y = x$. Die Transitivität von $\leq$ folgt aus jener von $<$ durch Fallunterscheidungen. □

- In jedem angeordneten Körper gilt:

$$\begin{aligned}
a \leq b, \quad c \leq d &\Rightarrow a + c \leq b + d \\
a \leq b &\Rightarrow -b \leq -a \\
a \leq b, \quad c \leq 0 &\Rightarrow bc \leq ac \\
0 &\leq 1 \\
0 < a &\Rightarrow 0 < \frac{1}{a} \\
0 < a \leq b &\Rightarrow 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
a \leq b,\ c \leq d &\Rightarrow a + c \leq b + c \leq b + d \\
a \leq b &\Rightarrow -b = a + (-a) + (-b) \leq b + (-a) + (-b) = -a \\
a \leq b,\ c \leq 0 &\Rightarrow -c \geq 0 \Rightarrow -a \cdot c = a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) = -b \cdot c \\
&\Rightarrow b \cdot c \leq a \cdot c \\
\text{Ang. } 0 \geq 1 &\Rightarrow -1 \geq -0 = 0 \\
&\Rightarrow 1 = (-1) \cdot (-1) \geq 0, \text{ ein Widerspruch} \\
\text{Ang. } 0 < a \text{ und } 0 \geq \frac{1}{a} &\Rightarrow 0 = 0 \cdot a \leq a \cdot \frac{1}{a} = 1, \text{ ein Widerspruch} \\
0 < a \leq b &\Rightarrow 0 < \frac{1}{b},\ 0 < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} = a\,\frac{1}{a}\,\frac{1}{b} \leq b\,\frac{1}{a}\,\frac{1}{b} = \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

□

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie wir die Existenz von $\mathbb{R}$ als angeordneter Körper nachweisen können. Wir gehen dabei in etwa der Geschichte folgend vor und beginnen bei:

1.3 Die natürlichen Zahlen

Von Kronecker stammt folgendes Zitat

> Die natürlichen Zahlen sind vom lieben Gott geschaffen, alles andere in der Mathematik ist nur Menschenwerk.

und von Dedekind 1897

> Die natürlichen Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes.

1.3.1 Konstruktion von $\mathbb{N}$.
Die Elemente $0, 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{R}$ heißen natürlichen Zahlen. Wie können wir dabei die Punkte "…" präzise machen? Diese sollen offensichtlich bedeuten, daß mit jeder natürlichen Zahl n auch (der Nachfolger) $n+1$ eine natürliche Zahl sein soll. Die Abbildung $n \mapsto n+1$ sollte also nicht aus der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen herausführen. Dadurch ist aber $\mathbb{N}$ noch nicht eindeutig beschrieben, denn z.B. auch die Teilmengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ haben diese Eigenschaft. Die Menge $\mathbb{N}$ sollte wohl eine möglichst kleine Teilmenge mit dieser Eigenschaft sein. Allerdings sind auch $\emptyset$, $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{2, 3, 4, \dots\}$ solche Mengen. Wenn wir aber zusätzlich $0 \in \mathbb{N}$ verlangen, dann paßt alles. Es ist also $\mathbb{N}$ die kleinste Teilmenge von $\mathbb{R}$, die 0 enthält und unter dem Zählen $n \mapsto n+1$ abgeschlossen ist, d.h.

$$\mathbb{N} = \bigcap \big\{ N \subseteq \mathbb{R} : 0 \in N, (n \in N \Rightarrow n+1 \in N) \big\}.$$

Da wir uns von der Existenz von $\mathbb{R}$ und der Addition aber noch nicht überzeugt haben und gerade $\mathbb{N}$ als ersten Schritt zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ verwenden wollen, können wir $\mathbb{N}$ so nicht definieren.

Die einzelnen natürlichen Zahlen sollten wie alle mathematischen Objekte selbst Mengen sein, und zwar n gerade eine Mengen mit n Elementen. Wir können die einzelnen natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$ also rekursiv durch

$$\begin{aligned}
0 &:= \emptyset, \\
1 &:= \{0\}, \\
2 &:= \{0, 1\} = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
3 &:= \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\vdots \\
n+1 &:= n^+ := \{0, 1, 2, 3, \dots, n\} = n \cup \{n\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

definieren. Die Menge $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ aller natürlichen Zahlen soll dann die kleinste Menge N sein, die 0 enthält und unter der NACHFOLGER-Abbildung $x \mapsto x^+ := x \cup \{x\}$ abgeschlossen ist, d.h. mit $x \in N$ ist auch x^+ in N. Vergleiche diese Operation mit $x{+}{+}$ bzw. ${+}{+}x$ in der Informatik, wo der Befehl $x{+}{+}$ bedeutet, daß x durch $x+1$ zu ersetzen ist. Mathematische Notation ist da eher statisch, denn Variablen sollten in einer Rechnung nicht ihren Wert ändern, d.h. $x = x+1$ ist in der Mathematik schlichtweg falsch, in der Informatik (C, Java, etc.) hingegen bedeutet es, daß der Speicherinhalt von x um eins erhöht wird. Wenn wir nun eine Menge N mit obigen beiden Eigenschaften INDUKTIV nennen, so ist die MENGE DER NATÜRLICHEN ZAHLEN:

$$\mathbb{N} := \bigcap \big\{ N : N \text{ ist induktiv} \big\}.$$

Damit dies als Menge wirklich existiert, muß man die Existenz einer induktiven Menge oder von $\mathbb{N}$ als Menge voraussetzen. Dies ist das Unendlichkeitsaxiom der Mengenlehre.

1.3.2 Induktionsprinzip.
Es sei $N \subseteq \mathbb{N}$ eine induktive Teilmenge. Dann ist $\mathbb{N} = N$.

Beweis. Die ist offensichtlich, da $\mathbb{N}$ nach Konstruktion die kleinste induktive Teilmenge ist. □

Dies ist die wichtigste Beweismethode für Aussagen über natürliche Zahlen, die sogenannte vollständige Induktion: Um also zu zeigen, daß eine Aussage $\mathcal{N}$ auf alle natürlichen Zahlen zutrifft, zeigt man zuerst, daß sie für 0 erfüllt ist (dies nennt man den Induktionsanfang) und dann, daß für jede natürliche Zahl gilt, wenn sie für diese erfüllt ist (die Induktionsannahme) so auch für deren Nachfolger (dies nennt man denn Induktionsschritt). Das Induktionsprinzip besagt dann, daß die induktive Menge $N := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{N} \text{ trifft für } n \text{ zu}\}$ mit $\mathbb{N}$ übereinstimmt, die Aussage $\mathcal{N}$ also auf alle natürlichen Zahlen zutrifft.

Zur Erläuterung einige

1.3.3 Beispiele von vollständigen Induktionen.

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Beweis. Beweis mittels Induktion nach n:
   Der Induktionsanfang $n = 0$ ist offensichtlich erfüllt, denn $0 + \cdots + 0 = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.
   Den Induktionsschritt von n auf $n + 1$ zeigen wir nun wie folgt. Nach Induktionsannahme ist die Aussage für n richtig, also $0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nun zeigen wir die Aussage für $n + 1$ an Stelle von n:

   $$\begin{aligned} 0 + 1 + \cdots + n + (n + 1) &= (0 + 1 + \cdots + n) + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \\ &= \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2}. \end{aligned}$$

   □

2. Für alle $n \geq 4$ ist $2^n \geq n^2$.

   Beweis. Wieder verwenden wir Induktion nach n. Zwar ist $2^0 = 1 > 0 = 0^2$ und $2^1 = 2 \geq 1 = 1^2$ aber $2^3 = 8 < 9 = 3^2$. Also verwenden wir als Induktionsanfang ($n = 4$) und erhalten $2^4 = 16 = 4^2$.
   Nun den Induktionsschritt von n auf $n+1$. Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung $2^n \geq n^2$ erhalten wir

   $$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2\,n^2 \geq (n + 1)^2 = n^2 + 2\,n + 1, \text{ denn} \\ n^2 - 2\,n + 1 = (n - 1)^2 \geq 2^2 > 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

   sofern $n - 1 \geq 2$, also $n \geq 3$ ist. □

3. Rekursive Definition der Entlohnung für Schacherfindung als Beispiel: Bekanntlich hatte der Erfinder des Schachspiels vom König folgende Entlohnung gefordert. Man möge auf das erste Feld des Schachbretts 1 Korn

Getreide lege, auf das zweite das doppelte also 2 Körner, auf das dritte das doppelte des zweiten, also vier Körner und so weiter bis zum letzten den $8 * 8 = 64$-ten. Die Anzahl a_n der Körner auf Feld n ist also rekursiv durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} = 2\,a_n$ gegeben. Explizit prüft man mittels Induktion leicht nach, daß $a_n = 2^{n-1}$ ist und $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ ist. Das sind also insgesamt $S_{64} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615 \sim 0.18 * 10^{20}$ viele Körner. Wenn wir ein Korn mit $50\mathrm{mm}^3 = 5 * 10^{-8}\,\mathrm{m}^3 \sim 3 * 10^{-5}\,\mathrm{kg}$ abschätzen, dann wiegt S_{64} circa $0.18 * 10^{20} * 3 * 10^{-5} \sim 5 * 10^{14}\,\mathrm{kg}$ also 500 Milliarden Tonnen – eine nicht zu erfüllende Forderung.

4. Zinseszinsrechnung als Beispiel: Ein Betrag b werde mit jährlichen Zinsen von p Prozent verzinst, d.h. nach einem Jahr sind die Zinsen $b \cdot \frac{p}{100}$ und der Endbetrag somit $b_1 := b + b\frac{p}{100}$. Nach 2 Jahren fallen nicht nur ein weiteres Mal die Zinsen $b \cdot \frac{p}{100}$ von b sondern auch die Zinsen $b \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{p}{100}$ der Zinsen $b \cdot \frac{p}{100}$ des ersten Jahres an, d.h. der Endbetrag ist nun

$$b_2 := b + b\frac{p}{100} + b \cdot \frac{p}{100} + b \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{p}{100} = b(1 + \frac{p}{100})^2,$$

und nach n Jahren folgt mittels Rekursion, daß der Endbetrag

$$b_n = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

ist.

1.3.4 Definition. Folge.
Man nennt Abbildungen $a : \mathbb{N} \to X$ auch Folgen in X und schreibt gerne a_n anstelle von $a(n)$, wie wir in Beispiel (1.3.3) bereits getan haben.

Man kann Induktion auch dazu verwenden die Sinnhaftigkeit rekursive Definitionen zu zeigen, d.h. anstelle explizit anzugeben wie gewisse Objekte a_n für $n \in \mathbb{N}$ definiert sind, beschreibt man einerseits a_0 und andererseits wie man a_{n+1} aus a_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen kann, d.h. man gibt eine Rekursionsvorschrift R an, s.d. $a_{n+1} = R(a_n)$ ist.

1.3.5 Proposition. Rekursion.
Es sei X eine Menge, $a_0 \in X$ und $R : X \to X$ eine Abbildung. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$ mit $a(0) = a_0$ und $a(n+1) = R(a(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man sagt a ist durch die Rekursion R definiert.

Beweis. Abbildungen $a : \mathbb{N} \to X$ sind ja Teilmengen $a \subseteq \mathbb{N} \times X$. Folglich betrachten wir die kleinste Teilmenge $a \subseteq \mathbb{N} \times X$, die $(0, a_0)$ enthält und mit (n, x) auch $(n+1, R(x))$ enthält, d.h.

$$a = \bigcap \Big\{ A \subseteq \mathbb{N} \times X : (0, a_0) \in A, \Big((n,x) \in A \Rightarrow (n+1, R(x)) \in A\Big) \Big\}.$$

Da $A = \mathbb{N} \times X$ eine Teilmenge A mit obigen Eigenschaften ist, existiert a, und wir müssen nur noch zeigen, daß a eine Funktion $\mathbb{N} \to X$ beschreibt. Sei dazu $N := \{n \in \mathbb{N} : \ \exists x \in X : (n,x) \in A\}$. Offensichtlich ist N eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ und wegen dem Induktionsprinzip (1.3.2) somit $N = \mathbb{N}$.

Bleibt zu zeigen, daß auch die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} :$ es gibt höchstens ein $x \in X$ mit $(n,x) \in a\}$ mit $\mathbb{N}$ übereinstimmt. Offensichtlich ist $0 \in M$, denn gäbe es ein $x \neq a_0$ mit $(0, a_0) \in a$, so könnten wir $(0, x)$ ungestraft aus a entfernen und würden eine kleinere Menge A mit obiger Eigenschaft erhalten. Sei nun

$n \in M$, also existiert ein eindeutiges $x \in X$ mit $(n, x) \in a$ und damit auch $(n+1, R(x)) \in a$. Wäre $n+1 \notin M$, dann gäbe es ein $x' \in X$ mit $R(x) \neq x'$ und $(n+1, x') \in a$. Die Menge $A := a \setminus \{(n+1, x')\}$ hätte dann obige Eigenschaft, also $a \subseteq A$ und somit wäre $(n+1, x') \notin a$. □

1.3.6 Die Grundrechnungsarten für natürliche Zahlen.
Die Addition $m \mapsto n + m$ natürlicher Zahlen definiert man rekursiv durch

$$n + 0 := n,$$
$$n + m^+ := (n + m)^+$$

D.h. für fixes $n \in \mathbb{N}$ ist die Rekursionsvorschrift $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $R(x) := x^+ = x + 1$ gegeben. Beachte, daß dies nur die mathematische Formulierung der Methode ist VolksschülerInnen, die bereits zählen können, die Addition zu erklären: $x + 2 = (x + 1) + 1$, $x + 3 = (x + 2) + 1 = ((x + 1) + 1) + 1, \dots$.

Ebenso verfährt man mit der Multiplikation $m \mapsto n \cdot m$:

$$n \cdot 0 := 0,$$
$$n \cdot m^+ := n \cdot m + n,$$

und hat nun für fixes $n \in \mathbb{N}$ als Rekursionsvorschrift $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $R(x) := x + n$. Beachte, daß auch dies nur die mathematische Formulierung der Methode ist VolksschülerInnen, die bereits addieren können, die Multiplikation zu erklären: $x \cdot 1 = x$, $x \cdot 2 = x \cdot 1 + x = x + x$, $x \cdot 3 = x \cdot 2 + x = (x + x) + x, \dots$.

Es ist 0 nach Definition ein links-neutrales Element bzgl. Addition, d.h. $n+0 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen nun mittels Induktion, daß auch $0 + n = n$ gilt:
Induktionsanfang: $0 + 0 = 0$ nach Definition.
Induktionsschritt: $0 + n = n \Rightarrow 0 + n^+ = (0 + n)^+ = n^+$.
Nach Induktion gilt somit $\{n \in \mathbb{N} : 0 + n = n\} = \mathbb{N}$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 + n = n$.

Weiters zeigen wir mittels Induktion, daß ebenso $n^+ + m = (n + m)^+$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.
Dazu betrachten wir die Menge $N := \{m \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N} : n^+ + m = (n + m)^+\}$.
Induktionsanfang: $0 \in N$, denn $n^+ + 0 = n^+ = (n + 0)^+$.
Induktionsschritt: $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m^+ \in \mathbb{N}$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^+ + m^+ = (n^+ + m)^+ = ((n + m)^+)^+ = (m + m^+)^+$.
Nach Induktion gilt somit $N = \mathbb{N}$.

Diese beiden Resultate sind Spezialfälle des *kommutativ-Gesetzes der Addition*, welches wir mit deren Hilfe und Induktion nun zeigen: Sei dazu $N := \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n + m = m + n\}$.
Induktionsanfang: $0 \in N$, da nach obigen $0+n = n$ und nach Definition $n+0 = n$ ist.
Induktionsschritt: $n \in N \Rightarrow n^+ \in N$, da $n^+ + m = (n + m)^+ = n + m^+$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt.
Nach Induktion ist somit $N = \mathbb{N}$, d.h. $\forall n, m \in \mathbb{N}$: $n + m = m + n$.

Auf ähnliche Weise zeigt man auch das assoziativ-Gesetz für die Addition, daß 1 ein neutrales Element für die Multiplikation ist, das kommutativ-Gesetz und das assoziativ-Gesetz für die Multiplikation, sowie schließlich das distributiv-Gesetz $n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$.

1.3.7 Die Ordnung der natürlichen Zahlen.
Man kann die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$ durch $n \leq m :\Leftrightarrow n \subseteq m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ definieren. Es ist $n < m$, d.h. $n \leq m$ und $n \neq m$, genau dann, wenn $n \in m$ gilt. Offensichtlich ist dies eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}$, denn für $\subseteq$ gilt das.

Es läßt sich zeigen, daß dies sogar eine lineare Ordnung ist und $n \leq m$ genau dann gilt, wenn $\exists\, k \in \mathbb{N} : m = n + k$.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup n \subseteq n$ (d.h. $\in$ ist auf n transitiv), denn $\bigcup 0 = \bigcup \emptyset = \emptyset$ und aus $\bigcup n \subseteq n$ folgt $\bigcup n^+ = \bigcup (n \cup \{n\}) = (\bigcup n) \cup n = n \subseteq n^+$.

Weiters gilt die KÜRZUNGSREGEL: Aus $n + k = m + k$ folgt $n = m$.
Für $k = 0$ ist dies trivial. Für $k = 1$ folgt es aus $\bigcup n^+ = n$, und allgemein mittels Induktion $(n + k) + 1 = n + (k + 1) = m + (k + 1) = (m + k) + 1$, also $n + k = m + k$ und damit $n = m$.
Beachte, daß wir beim Beweis nicht $-k \notin \mathbb{N}$ verwenden können.

1.3.8 Folgerung. Ganzzahlige Division mit Rest.
Es sei $1 \leq m \in \mathbb{N}$. *Dann läßt sich jede natürliche Zahl* n *eindeutig als* $n = q\,m + r$ *mit* $q, r \in \mathbb{N}$ *und* $r < m$ *schreiben.*

Beweis. Existenzbeweis mittels Induktion nach n:
Für $n = 0$ erhalten wir die Darstellung $0 = 0\,m + 0$. Nun der Induktionsschritt von n auf $n + 1$. Nach Induktionsannahme ist $n = q\,m + r$ mit $r < m$. Damit ist $n + 1 = q\,m + r + 1$. Falls $r + 1 \geq m$, also $m - 1 \leq r < m$ ist und somit die natürliche Zahl $r = m - 1$ ist, so ist $n + 1 = q\,m + m = (q + 1)\,m + 0$. In jeden Fall erhalten wir also eine Darstellung $n = q'\,m + r'$ mit $r' < m$.

Die Eindeutigkeit sieht man nun wie folgt: Angenommen $q\,m + r = q'\,m + r'$ mit $r, r' < m$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit (kurz: o.B.d.A.) $q \geq q'$. Wäre $q > q'$, also $q \geq q' + 1$ so wäre $n = q\,m + r \geq (q' + 1)\,m + r = q'\,m + (m + r) > q'\,m + r' = n$, ein Widerspruch. Also ist $q = q'$ und wegen $(q - q')m = r' - r$ auch $r = r'$. □

1.3.9 Folgerung. Wohlordnung von $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N}$ *ist wohlgeordnet, d.h. jede nicht-leere Teilmenge* $N \subseteq \mathbb{N}$ *besitzt ein kleinstes Element* $\min(N)$, *das sogenannte* MINIMUM *von* N.

Beachte, daß dies für unendliche Teilmengen N nicht trivial ist, z.B. besitzt die unendliche Teilmenge $N := \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ kein kleinstes Element.

Beweis. Indirekt, angenommen $N \subseteq \mathbb{N}$ sei nicht-leer und ohne kleinstes Element. Sei S die Menge der UNTEREN SCHRANKEN aus $\mathbb{N}$ von N (d.h. jener natürlichen Zahlen, die $\leq$ allen Elementen aus N sind). Wir zeigen mittels Induktion, daß $S = \mathbb{N}$ ist:
Offensichtlich ist $0 \in S$. Sei nun $a \in S$, also eine untere Schranke von N. Dann ist auch $a + 1$ eine untere Schranke, den andernfalls gäbe es ein $n \in N$ mit $a + 1 > n$ und somit wäre $n \leq a \leq n'$ für alle $n' \in \mathbb{N}$, also n ein minimales Element von N, ein Widerspruch zur Annahme.

Da aber $S \cap N = \emptyset$ (ein Element des Durchschnitts wäre ein Minimum von N) und $S = \mathbb{N} \supseteq N$ gilt, ist $N = \emptyset$, ebenfalls ein Widerspruch zur Annahme. □

1.3.10 Folgerung. Ordnungsinduktion.
Es sei $N \subseteq \mathbb{N}$ *und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\{k \in \mathbb{N} : k < n\} \subseteq N$ *gelte* $n \in N$. *Dann ist* $N = \mathbb{N}$.

Dies ist ein stärkeres Beweismittels als die vollständige Induktion, denn nun dürfen wir beim Induktionsschritt auf $n + 1$ die Induktionsannahme nicht nur für den unmittelbaren Vorgänger n verwenden, sondern für alle $k \leq n$.

Beweis. Indirekt: Angenommen es ist $N \neq \mathbb{N}$. Nach (1.3.9) existiert das Minimum der Menge $N^c = \mathbb{N} \setminus N$. Sei $n \in N^c \subseteq \mathbb{N}$ dieses Minimum. Für alle $k \in \mathbb{N}$

mit $k < n$ ist also $k \notin N^c$, d.h. $k \in N$. Nach Voraussetzung an N ist damit auch $n \in N$, ein Widerspruch zu $n \in N^c$. □

1.3.11 Folgerung. Primfaktorenzerlegung.
Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich in ein Produkt von Primzahlen zerlegen.

Beweis. Wir machen eine Ordnungsinduktion nach n. Entweder n ist selbst eine Primzahl (und wir sind fertig) oder n besitzt einen echten Teiler m, d.h. $1 < m \in \mathbb{N}$ und $1 < k := \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. Da somit sowohl $m < n$ als auch $k < n$ ist, besitzen diese beiden Faktoren nach Induktionsvoraussetzung Zerlegungen in Primzahlen $m = p_1 \cdot \dots \cdot p_i$ und $k = q_1 \cdot \dots \cdot q_j$ und somit auch $n = m \cdot k = p_1 \cdot \dots \cdot p_i \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_j$. □

1.3.12 Rekursive Definition der Potenzen..
Die a^n ist für $n \in \mathbb{N}$ wie folgt rekursiv definiert: $a^1 := a$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$. Die Idee dabei ist natürlich, daß $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$ ist. Mittels Induktion zeigt man dann $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ für $n, m \geq 1$. Setzt man $n = 0$ so ergäbe sich $a^0 \cdot a^m = a^m$, also $a^0 = 1$. Darum definiert man $a^0 := 1$ für alle a.

1.3.13 Proposition. Rechnen mit Potenzen.
Es gelten folgende Rechenregeln (für Elemente a, b einer Halbgruppe und natürlicher Zahlen n, m, wobei in den Formeln mit Bruchstrich die Invertierbarkeit von b vorausgesetzt ist):

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m},$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Beweis. Beweis durch Induktion nach m:
$(m = 1)$ $a^{n+1} = a^n \cdot a = a^n \cdot a^1$.
$(m+1)$ $a^{n+(m+1)} = a^{(n+m)+1} = a^{n+m} \cdot a = (a^n \cdot a^m) \cdot a = a^n \cdot (a^m \cdot a) = a^n \cdot a^{m+1}$.

Die zweite Gleichung folgt aus $a^n = a^m \cdot a^{n-m}$ durch Division mit a^{n-m}.

Die dritte Gleichung folgt wieder mit vollständiger Induktion, denn

$$(a^n)^{m+1} = (a^n)^m \cdot a^n = a^{n \cdot m} \cdot a^n = a^{n \cdot m + n} = a^{n \cdot (m+1)}.$$

Die vierte Gleichung folgt ebenfalls mittels vollständiger Induktion, denn

$$a^{n+1} \cdot b^{n+1} = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = (a^n \cdot b^n) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^{n+1}.$$

Daraus folgt die fünfte durch Division. □

1.3.14 Beispiel. Quadrieren als Rekursionsvorschrift.
Es sei $a_0 := c$ und $a_{n+1} := (a_n)^2$, also

$$a_0 = c,\ a_1 = c^2,\ a_2 = (c^2)^2 = c^4,\ a_3 = (c^4)^2 = c^8, \ldots$$

Wir vermuten $a_n = c^{2^n} := c^{(2^n)}$ und können dies auch leicht mittels vollständiger Induktion zeigen. Insbesonders für $c = 2$ erhalten wir

$$a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 16, a_2 = 256, a_3 = 65536, a_4 = 4294967296, \ldots$$

allesamt wichtige Zahlen in der Informatik, siehe (1.3.25).

1.3.15 Rekursive Definition von endlichen Summen und Produkten.
Man definiert die SUMME $\sum_{i=1}^n x_i$ rekursiv durch

$$\sum_{i=1}^{0} x_i := 0, \text{ oder wer lieber bei 1 beginnt } \sum_{i=1}^{1} x_i := x_1$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i := \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + x_{n+1}$$

Die Idee dabei ist natürlich eine unzweideutige Formulierung für die Punkte in

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

zu geben. Vergleiche diese Schreibweise mit $\bigcup_{i=1}^n A_i$ und $\bigcap_{i=1}^n A_i$.
Für $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1} + a_{k+n}$ schreibt man entsprechend $\sum_{i=k}^{k+n} a_i$ und definiert diese auf gleiche Weise rekursiv.

Ebenso definiert man das PRODUKT $\prod_{i=1}^n x_i$ als präzise Formulierung für $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ rekursiv durch

$$\prod_{i=1}^{0} x_i := 1, \text{ oder wer lieber bei 1 beginnt } \prod_{i=1}^{1} x_i := x_1$$
$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i := \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) \cdot x_{n+1}$$

Z.B. ist $a^n := \prod_{i=1}^n a$ und $n! := \prod_{i=1}^n i$.

1.3.16 Lemma. Rechenregeln für Summation.
Für $n, m \in \mathbb{N}$ und beliebige $c, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) \qquad c \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} c\, a_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i = \sum_{i=1}^{n+m} a_i \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+m}^{n+m} a_{i-m}$$

Man veranschauliche sich diese Formeln durch Übersetzung in "…"-Schreibweise.

Beweis. Zeigt man leicht mittels vollständiger Induktion. □

1.3.17 Zifferndarstellung natürlicher Zahlen.
Wir können nun zwar mit beliebigen natürlichen Zahlen herumrechnen, haben aber kurze Namen $0, 1, 2, 3, \ldots$ nur für die ersten paar Zahlen zur Verfügung.

Um nicht in römischer Manier laufend neue Symbole wie $I, V, X, L, C, \ldots$ für größere Zahlen einführen zu müssen wurde die Ziffernschreibweise erfunden. Man führt dabei nur für die ersten paar (sagen wir zehn) Zahlen Symbole (die ZIFFERN) ein (üblicherweise $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) und interpretiert ein Folge $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ solcher Ziffern als als die natürliche Zahl $a_0 + a_1\, b + a_2\, b^2 + \cdots + a_{n-1}\, b^{n-1} + a_n\, b^n$, wobei b die Anzahl der zur Verfügung stehenden Ziffern (üblicherweise also zehn) ist, und schreibt diese Ziffern als Wort mit den Stellen in umgekehrter Reihenfolge, z.B. $123 = 1 \cdot b^2 + 2 \cdot b + 3$. Das sich wirklich jede natürliche Zahl so darstellen läßt besagt folgendes

Lemma.
Es sei $2 \le b \in \mathbb{N}$. Dann existiert für jede natürliche Zahl z eine eindeutige Darstellung (die Zifferndarstellung von z zur Basis b*)*

$$z = \sum_{k=0}^{n} z_k\, b^k \text{ mit } z_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

Bislang war (von den Babyloniern abgesehen) vor allem die Basis $b = 10$ üblich (man spricht dann von der Dezimaldarstellung). In der Informatik spielen aber vor allem die Basen 2 (Binärdarstellung), 8 (Oktaldarstellung) und 16 (Hexadezimaldarstellung) eine wichtige Rolle. Bei der Hexadezimaldarstellung wird üblicherweise A, B, C, D, E und F für die Ziffern mit Dezimalzahldarstellung $10, 11, 12, 13, 14, 15$ geschrieben.

Beweis. Die Ziffern $z_0, \dots, z_k$ einer Zahl z erhält man als Reste bei wiederholter Division mit Rest beginnend bei z durch die Basis b, d.h. $z = z' \cdot b + z_0$, $z' = z'' \cdot b + x_1$, …, $z^{(k)} = z^{(k)} \cdot b + x_k$, bis $z^{(k)} = 0$ ist. □

Ein andere (vielleicht einsichtigere) Möglichkeit die Ziffern einer Zahl x zu bestimmen ist sich zuerst einen Vorrat an Potenzen $b^1, b^2, b^3, \dots$ aufzuschreiben. Die kleinste solche Potenz $b^{n+1} > x$ zu suchen und dann x durch b^n ganzzahlig zu dividieren, d.h. $x = x_n\, b^n + x'$ nach x_n, x' mit $x' < b$ zu lösen. Dann ist x_n die höchste Stelle, und man fährt nun mit x' anstelle von x mit dem gleichen Verfahren fort und erhält so auch die weiteren Ziffern. Für die Binärdarstellung ist diese Methode natürlich besonders einfach, da als Ziffer nur 0 oder 1 auftreten kann. Nachteil ist allerdings, daß man genügend viele Zweierpotenzen $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, \dots$ bei der Hand haben muß.

1.3.18 Beispiel.
Wir betrachten die Dezimalzahlen 123 und 321 und bestimmen ihre Binärdarstellungen 1111011 und 101000001:

$$\begin{aligned}
123 &= 61 \cdot 2 + 1 \\
61 &= 30 \cdot 2 + 1 \\
30 &= 15 \cdot 2 + 0 \\
15 &= 7 \cdot 2 + 1 \\
7 &= 3 \cdot 2 + 1 \\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
321 &= 160 \cdot 2 + 1 \\
160 &= 80 \cdot 2 + 0 \\
80 &= 40 \cdot 2 + 0 \\
40 &= 20 \cdot 2 + 0 \\
20 &= 10 \cdot 2 + 0 \\
10 &= 5 \cdot 2 + 0 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}$$

Wegen $2^3 = 8$ und $2^4 = 16$ erhält man daraus die Darstellungen als Oktalzahlen bzw. Hexadezimalzahlen durch Zusammenfassen jeweils 3 bzw. 4 Ziffern der

Binärzahldarstellung, also in unserem Beispiel Oktal 173 und 501 und Hexadezimal $7D$ und 141.

Hexadezimal	1	2	3	4	5	6	7	8
Dezimal	1	2	3	4	5	6	7	8
Oktal	1	2	3	4	5	6	7	10
Binär	1	10	11	100	101	110	111	1000

Hexadezimal	9	A	B	C	D	E	F	10
Dezimal	9	10	11	12	13	14	15	16
Oktal	11	12	13	14	15	16	17	20
Binär	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000

Addition und Multiplikation der Zifferndarstellungen.
Genauso wie wir es schon von Dezimalzahlen kennen, können wir Zahlen auch mittels Darstellung bezüglich anderer Basen addieren und multiplizieren. Für die Addition von zwei Binärzahlen brauchen wir dazu nur, daß $1 + 1 = 10$ und $1 + 1 + 1 = 11$ um Überträge zu berücksichtigen. Bei der Addition mehrerer Zahlen auf einmal müssen wir wie bei Dezimalzahlen auch Überträge auf mehrere Stellen auf einmal berücksichtigen (also z.B. bei Berechnung der 1-er Stelle der Summe $9 + 19 + 29 + 39 + 49 + 59 + 69 + 79 + 89 + 99 + 109 + 119$ erhalten wir $9 + \cdots + 9 = 12 * 9 = 108$ und somit 8 und ein Übertrag von 10)

Bei der Multiplikation von Binärzahlen in Ziffernschreibweise, brauchen wir nur mit 0 und 1 multiplizieren, also Weglassen oder Kopieren. Eine Multiplikation ist somit nichts anderes als eine mehrfache Addition. Z.B. ist $(123)_2 = 1111011$ und $(321)_2 = 101000001$ und $123 \cdot 321 = 39483$ hat als Binärzahl die Darstellung 1001101000111011, denn

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & = \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & &
\end{array}$$

Kombinatorik

In der Kombinatorik geht es darum Anzahlen von jeweils endlich vielen Möglichkeiten zu bestimmen.

1.3.19 Definition. Permutation.
Unter einer Permutation einer n-elementigen Mengen versteht man eine lineare Anordnung dieser Menge, das läuft darauf hinaus die Elemente der n-elementigen Menge auf die Plätze $1, 2, \dots, n$ zu positionieren. Wir wollen nun die Anzahl der möglichen Permutationen bestimmen.

1.3.20 Lemma. Anzahl der Permutationen.
Die Anzahl der möglichen Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ (sprich: n-faktorielle).

Man setzt auch $0! = 1$, als Anzahl der Permutationen der leeren Menge.

Beweis. Mittels Induktion:
(n=1) Hier gibt es nur eine Möglichkeit das einzige Element auf den einzigen Platz zu setzen.

(n+1) Nach Induktionsannahme können wir eine n-elementige Menge auf $n!$-viele Möglichkeiten anordnen. Um auch das $n+1$-te nun neu hinzugekommene Element zu positionieren haben wir $n+1$ viele Möglichkeiten, nämlich entweder vor allen anderen, oder zwischen 1-ten und 2-ten, oder 2-ten und 3-ten, ..., oder $n-1$-ten und n-ten, oder nach allen anderen. Zu jeder der $n!$ vielen Möglichkeiten alle bis auf ein Element anzuordnen gibt es also jeweils $n+1$ viele Möglichkeiten auch dieses noch einzuordnen, also insgesamt $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$. Hier haben wir $|A \times B| = |A| \times |B|$ verwendet. □

1.3.21 Definition. Variation ohne Wiederholung.
Unter einer VARIATION OHNE WIEDERHOLUNG von k vielen Objekten aus n vielen, versteht man eine Auswahl von k-verschiedenen Elementen aus einer Grundmenge von n vielen, wobei es auf die Reihenfolge der Auswahl ankommen soll. Also wenn z.B. der Vorstand bestehend aus Obmann, Schriftführer und Kassier eines Vereins mit 100 Mitgliedern gewählt werden soll ohne daß Ämterkummulierung zulässig ist, so ist eine Variation ohne Wiederholungen von 3 aus 100 zu bestimmen.

1.3.22 Lemma. Anzahl der Variationen ohne Wiederholung.
Die Anzahl der möglichen Variationen ohne Wiederholung von k vielen Objekten aus n vielen ist $(n)_k := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)$.

Beweis. Wie in (1.3.20) verwenden wir Induktion nun nach k:
(k=1) Wir haben genau $n = (n)_1$ Möglichkeiten ein Element aus n auszuwählen.
(k+1) Für die ersten k-Wahlen haben wir nach Induktionsannahme $(n)_k$ viele Möglichkeiten. Für die $k+1$-te Wahl sind nur noch $n-k$ viele Elemente übrig, da wir ja nicht gleiche Elemente wiederholt wählen dürfen. Insgesamt gibt es also $(n)_k \cdot (n-k) = (n)_{k+1}$ viele Möglichkeiten. □

Wie ändert sich dies nun, wenn wir Wiederholungen doch zulassen.

1.3.23 Definition. Variation mit Wiederholungen.
Unter einer VARIATION MIT WIEDERHOLUNGEN von k vielen Objekten aus n vielen, versteht man eine Auswahl von k Elementen aus einer Grundmenge von n vielen, wobei es auf die Reihenfolge der Auswahl ankommen soll und gleiche Elemente auch mehrfach gewählt werden dürfen. Also wenn z.B. der Vorstand bestehend aus Obmann, Schriftführer und Kassier eines Vereins mit 100 Mitgliedern gewählt werden soll, wobei Personen auch mehrerer Positionen innehaben dürfen, so ist eine Variation mit Wiederholungen von 3 aus 100 zu bestimmen.

1.3.24 Lemma. Anzahl der Variationen mit Wiederholungen.
Die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen von k vielen Objekten aus n vielen ist $n^k := n \cdot \cdots \cdot n$.

Beweis. Der Beweis geht wie in (1.3.22), wobei nun die für die Wahl des $(k+1)$-ten Elements verbleibende Anzahl noch immer alle, also n ist, □

1.3.25 Beispiel.
Wir wollen die Anzahl aller möglichen Bytes (d.h. Folgen von 8 Ziffern in $\{0,1\}$) bestimmen. Wir müssen also für jede der 8 Stellen eine Ziffer aus $\{0,1\}$ wählen, wobei es auf die Reihenfolge der Ziffern natürlich ankommt und gleiche Ziffern vorkommen können (ja sogar müssen). Die Anzahl dieser Variationen mit Wiederholung von 8 aus 2 ist somit $2^8 = 256$.

Ein Computer der als Adressen binäre Worte von 16bit Länge verwendet, kann also $2^{16} = 65536 = 64k$ Speicherpositionen adressieren, wobei $1k = 2^{10} = 1024 \sim 10^3$ ist, also gerade die Anzahl der mit zehn bits (engl.: digits = Finger, Stellen) darstellbaren Zahlen.

Verwendet er hingegen doppelt so lange Worte von 32bit Länge, dann kann er $2^{32} = 4294967296 = 4G$ Speicherpositionen adressieren, wobei $1G = 2^{30} = 1024^3 \sim 10^9$ ist.

1.3.26 Zyklen und Transpositionen.
Für die rechnerische Behandlung von Permutationen ist nicht wirklich wichtig, wie die Elemente der endlichen Menge heißen, wir können genausogut die Menge $n := \{0, \dots, n-1\}$ oder auch $\{1, \dots, n\}$ dafür verwenden. Eine Permutation dieser Menge wird also durch eine bijektive Abbildung $\pi : n \to n$ beschrieben, die jeden Element $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ einen eindeutig bestimmten Platz $\pi(i) \in \{0, \dots, n-1\}$ zuordnet. Natürlich können wir auch genausogut die Umkehrfunktion $\pi^{-1} : n \to n$ verwenden, die für jeden Platz k angibt, welches Element i auf diesen gesetzt wird, d.h. $\pi(i) = k$ oder $i = \pi^{-1}(k)$.

Die Menge aller Permutationen π auf n bilden offensichtlich bzgl. der Zusammensetzung eine Gruppe, die sogenannte SYMMETRISCHE GRUPPE $\mathcal{S}_n$ der Ordnung n.

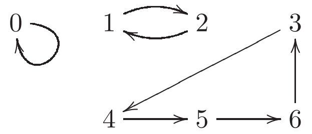
Solche Bijektionen können wir auf verschiedene Weisen veranschaulichen bzw. festlegen. Einerseits durch Angabe der Funktionswerte am besten in Form einer Tabelle:

i	0	1	$\dots$	$n-2$	$n-1$
$\pi(i)$	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\dots$	$\pi(n-2)$	$\pi(n-1)$

Z.B.:

i	0	1	2	3	4	5	6
$\pi(i)$	0	2	1	4	5	6	3

Oder aber als Graph, wobei die Punkte $0, 1, \dots, n-1$ so durch Pfeile verbunden werden, wie sie aufeinander abgebildet werden. In unseren Beispiel ist das:



Die Elemente der Menge $\{0, 1, \dots, 6\}$ zerfallen offensichtlich in Klassen $\{0\}$, $\{1, 2\}$ und $\{3, 4, 5, 6\}$, aus welchen π nicht herausführt, und deren Elemente durch π durchgemischt werden.

Allgemein erhält man dadurch eine weitere Darstellung nämlich durch Zyklen, d.h. man zerlegt $\{0, 1, \dots, n\}$ in kleinstmögliche, unter π INVARIANTE nichtleere Teilmengen A, d.h. $\pi(A) \subseteq A$. Solche erhält man, indem man mit einem Element aus $i \in \{0, \dots, n-1\}$ startet und sooft π darauf anwendet, bis man wieder i erhält, d.h. i, $\pi(i)$, $\pi^2(i) := \pi(\pi(i))$,...,$\pi^d(i) = i$ betrachtet. Dies passiert wirklich für hinreichend großes d, denn die $\pi^j(i) \in \{0, \dots, n-1\}$ können nicht für alle j verschieden sein, und wenn $\pi^j(i) = \pi^{j'}(i)$ für $j < j'$ ist, so ist $\pi^{j'-j}(i) = ((\pi^j)^{-1} \circ \pi^{j'})(i) = i$. Die Menge $A := \{i = \pi^0(i), \pi(i), \dots, \pi^{d-1}(i)\}$ ist dann eine minimale invariante nicht-leere Menge. Und π kann darauf durch die Folge $(i, \pi(i), \dots, \pi^{d-1}(i))$ beschrieben werden (man nennt dies einen ZYKLUS). Man beachte jedoch, daß verschiedene TUPEL (die Verallgemeinerung von PAAR, TRIPEL, QUADRUPEL, QUINTUPEL, ...) die gleiche zyklische Permutation beschreiben, z.B. sind die Paare $(1, 2)$ und $(2, 1)$ verschieden, aber die zyklischen Permutationen $(1,2)$ und $(2,1)$ ident. Auf ganz $\{0,\dots,n-1\}$ kann somit π als Zusammensetzung der Element-fremden Zyklen, die zu der Zerlegung in invariante Teilmengen gehören, beschrieben werden. Das Inverse zu einen Zyklus $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ in $\mathcal{S}_n$ ist offensichtlich durch den umgekehrt durchlaufenen Zyklus $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1)$ gegeben.

Besonders einfach Zyklen sind jene der Länge 2, d.h. der Form (j, j'), wo also π nur die Position der beiden Elemente j und j' vertauscht. Diese heißen Transpositionen. Und am einfachsten ist, wenn dies benachbarte Elemente sind, also $j' = j+1$ ist.

Unser Ziel ist nun zu zeigen, daß sich jede Anordnung (d.h. Permutation) dadurch erreichen läßt, das man hintereinander gewisse Transpositionen (benachbarter Elemente) ausführt.

1.3.27 Proposition. Zerlegung in Transpositionen.
Jede Permutation läßt sich als Zusammensetzung endlich vieler elementfremder Zyklen schreiben und jeder Zyklus läßt sich als Zusammensetzung endlich vieler Transpositionen aufeinanderfolgender Elemente schreiben.

Beweis. Daß sich Permutationen in elementfremde Zyklen zerlegen lassen, haben wir oben bereits gezeigt.

Ein Zyklus der Form $(1, 2, 3, \dots, n)$ läßt sich wie folgt in ein Produkt von Transpositionen zerlegen:

$$(1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n) = (1, 2) \circ (2, 3) \circ \dots \circ (n-2, n-1) \circ (n-1, n).$$

oder allgemeiner

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ \dots \circ (a_{n-2}, a_{n-1}) \circ (a_{n-1}, a_n).$$

Idee dabei ist, daß um ein Element vom letzten Platz n an den ersten Platz 1 zu bekommen (und alle anderen um einen Platz nach hinten rücken zu lassen) man zuerst das Element auf Platz n und $n-1$ Platz tauschen läßt, danach jene nunmehr auf Platz $n-1$ und $n-2$ liegenden, u.s.w. bis schließlich noch die dann auf Platz 1 und 2 liegenden Plätze tauschen. Der Ablauf sieht also folgendermaßen aus:

Am Anfang	1	2	...	n-2	n-1	$\boxed{n}$
nach 1. Schritt	1	2	...	n-2	$\boxed{n}$	n-1
nach 2. Schritt	1	2	...	$\boxed{n}$	n-2	n-1
$\vdots$						
nach (n-2). Schritt	1	2	$\boxed{n}$	...	n-2	n-1
nach (n-1). Schritt	1	$\boxed{n}$	2	...	n-2	n-1
nach n. Schritt	$\boxed{n}$	1	2	...	n-2	n-1

Eine beliebige Transposition $(k, j) = (j, k)$ mit o.B.d.A. $k < j$ läßt sich als Produkt von Zyklen der zuletzt behandelten Form schreiben:

$$(k, j) = (j, j-1, \dots, k+3, k+2, k+1) \circ (k, k+1, k+2, k+3, \dots, j-1, j).$$

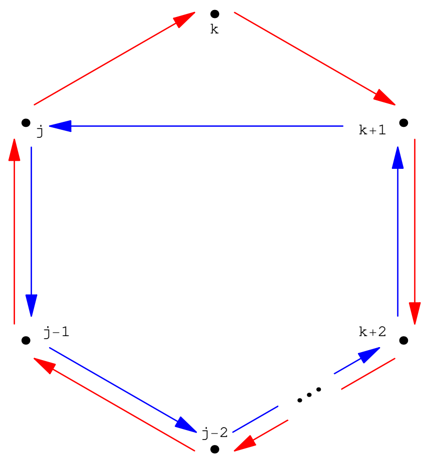
In der Tat ist nach obigen

$$(k+1, k+2, \dots, j-1, j) = (k+1, k+2) \circ \dots \circ (j-1, j) \text{ und}$$
$$(k+1, k+2, \dots, j-1, j, k) = (k+1, k+2) \circ \dots \circ (j-1, j) \circ (j, k)$$

und damit

$$
\begin{aligned}
(k,j) &= (j,k) \\
&= (k+1,k+2,k+3,\dots,j-1,j)^{-1} \circ (k+1,k+2,k+3,\dots,j-1,j,k) \\
&= (j,j-1,\dots,k+3,k+2,k+1) \circ (k,k+1,k+2,k+3,\dots,j-1,j)
\end{aligned}
$$

Mittels Graphen sieht man das wie folgt ein:



Somit läßt sich jeder allgemeine Zyklus als Zusammensetzung von Transpositionen schreiben, die sich seinerseits jeweils als Zusammensetzung zweier Zyklen mit aufeinanderfolgenden Elementen schreiben lassen und somit ihrerseits Zusammensetzungen von Transpositionen aufeinanderfolgender Elemente sind. □

Beispiel.
Wir berechnen $(1,3)$ und $(1,4)$ nach obiger Formel, $(1,3) = (3,2) \circ (1,2,3) = (3,2) \circ (1,2) \circ (2,3)$ und $(1,4) = (4,3,2) \circ (1,2,3,4) = (4,3) \circ (3,2) \circ (1,2) \circ (2,3) \circ (3,4)$. Permutationen können somit verschiedene Zerlegungen in Produkte aus Transpositionen haben.

Wir wollen als nächstes zeigen, daß die Anzahl der Transpositionen in die man eine fixe Permutation zerlegen kann aber immer gerade oder immer ungerade ist und man somit von geraden und ungeraden Permutationen sprechen kann.

1.3.28 Definition. Inversionen einer Permutation.
Unter einer INVERSION einer Permutation π versteht man ein Paar (i,j) mit $i < j$ aber $\pi(i) > \pi(j)$. Eine Permutation π heißt GERADE und man schreibt $\operatorname{sgn}(\pi) = +1$, wenn die Anzahl all ihrer Inversionen gerade ist. Andernfalls heißt sie UNGERADE und man schreibt $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$.

1.3.29 Beispiel.
Die Inversionen der Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

sind die mit '+' gekennzeichneten Punkte in der folgenden Tabelle

$i\backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
1			$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
2				$-$	$-$	$-$	$-$
3					$-$	$-$	$+$
4						$-$	$+$
5							$+$
6							

Die Anzahl der Inversionen ist somit 4 und π ist gerade.

1.3.30 Lemma. Vorzeichen einer Zusammensetzung von Permutationen.
Es sei π eine Permutation und σ eine Transposition.

Dann ist $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi) = -\operatorname{sgn}(\pi)$.

Beweis. Es sei $\sigma = (a, b)$ mit $a < b$. Dann unterscheiden sich die Werte von π und $\sigma \circ \pi$ nur an den Stellen $\pi^{-1}(a)$ und $\pi^{-1}(b)$, und diese werden ausgetauscht. Es ändert sich die Eigenschaft Inversion zu sein also höchstens für solche Paare die a oder b im Bild haben. Das Paar $(\pi^{-1}(a), \pi^{-1}(b))$ ändert sicher seine Eigenschaft Inversion zu sein. Und die übrigen dieser Paare ändern ihre Eigenschaft Inversion zu sein genau dann, wenn der andere Bildpunkt $a < \pi(i) < b$ erfüllt. Es seien nun p viele der i mit $a < \pi(i) < b$ Inversionen mit zweiten Punkt a, d.h. $i < a$ und q viele mit zweiten Punkt b, d.h. $i > b$. Da es insgesamt $b-a-1$ viele i in $\pi^{-1}(\{a+1, \dots, b-1\})$ gibt, sind nach Vertauschen von a mit b gerade $b-a-1-p$ viele Inversionen mit zweiten Punkt $\sigma(a) = b$ und $b-a-1-q$ viele Inversionen mit anderen Punkt $\sigma(b) = a$. Insgesamt hat sich also die Anzahl der relevanten Inversionen von $p+q$ auf $\pm 1 + (b-a-1-p) + (b-a-1-q)$ geändert, also um eine ungerade Anzahl $\pm 1 + 2(b-a-1-p-q)$. Somit ist $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi) = -\operatorname{sgn}(\pi)$. □

1.3.31 Folgerung. Vorzeichen einer Permutation.
Eine Permutation ist genau dann gerade, wenn sie sich in eine gerade Anzahl von Transpositionen zerlegen läßt. Das Vorzeichen einer zyklischen Permutation $(a_0, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k)$ ist $(-1)^k$. Insbesonders ist $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$ *für alle Permutationen σ und π. Und die Menge $\mathcal{A}_n$ der geraden Permutationen der Ordnung n bildet eine* UNTERGRUPPE *von $\mathcal{S}_n$, d.h. eine Teilmenge die bezüglich der Operation der Obermenge selbst eine Gruppe ist.*

Beweis. Mittels Induktion folgt aus (1.3.30), daß eine Komposition von Transpositionen genau dann gerade ist, wenn die Anzahl der Faktoren gerade ist. Dies zeigt die erste Aussage.

Da eine zyklische Permutation $(a_0, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k)$ in $(a_0, a_1) \circ \dots \circ (a_{k-1}, a_k)$ zerlegt werden kann, also in k viele Transpositionen, folgt auch die zweite.

Mittels Induktion folgt aus (1.3.30) und der Zerlegung von σ in Transpositionen, daß die behauptete Formel für das Vorzeichen einer Zusammensetzung gilt.

Und, da $(+1) \cdot (+1) = +1$ und $1/(+1) = +1$ ist, folgt, daß $\mathcal{A}_n := \{\pi \in \mathcal{S}_n : \operatorname{sgn}(\pi) = +1\}$ eine Untergruppe ist. □

1.3.32 Definition. Symmetrische Abbildungen.
Eine Abbildung $f : X^n := X \times \dots \times X \to \mathbb{R}$ in n vielen Variablen heißt

SYMMETRISCH, wenn

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$$

für alle Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ und alle $x_1,\dots,x_n \in X$ gilt, d.h. man die Variablen $x_1,\dots,x_n$ beliebig vertauschen darf ohne den Funktionswert $f(x_1,\dots,x_n)$ zu ändern. Z.B. sind $f(x_1,x_2) := x_1 + x_2$ und $f(x_1,x_2) := x_1 \cdot x_2$ symmetrisch (Man braucht nur mit der Permutation $\pi = (1,2)$ zu testen). Allgemeiner ist $f(x_1,x_2,x_3) := x_1 + x_2 + x_3$ und $f(x_1,x_2,x_3) := x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ symmetrisch, aber auch $f(x_1,x_2,x_3) := x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_3\,x_1$ (Hier müssen wir bereits mit den Transpositionen $(1,2)$, $(2,3)$ und $(3,1)$ testen). Noch allgemeiner ist $f(x_1,\dots x_n) := \sum_{j=1}^n x_j^p$ sowie die ELEMENTARSYMMETRISCHEN FUNKTIONEN

$$\sigma_k(x_1,\dots,x_n) := \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} x_{j_1}\cdot\dots\cdot x_{j_k} = \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |J|=k}} \prod_{j\in J} x_j$$

für alle $k,n \in \mathbb{N}$ symmetrisch.

Eine Abbildung $f : X^n := X\times\ldots\times X \to \mathbb{R}$ heißt ALTERNIEREND, wenn

$$\operatorname{sgn}(\pi)\, f(x_1,\dots,x_n) = f(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$$

für alle Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ und alle $x_1,\dots,x_n \in X$ gilt, d.h. sich der Funktionswert nur um ein Vorzeichen (nämlich jenes der Permutation) ändert, wenn man die Variablen vertauscht. Z.B. ist $f(x_1,x_2) := x_1 - x_2$ alternierend, denn für $\pi = (1,2)$ ist $f(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)}) = f(x_2,x_1) = x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) = \operatorname{sgn}(\pi)\, f(x_1,x_2)$. Allgemeiner ist $f(x_1,x_2,x_3) := (x_1-x_2)\,(x_2-x_3)\,(x_1-x_3)$ alternierend, denn z.B. für $\pi = (1,2)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},x_{\pi(3)}) = f(x_2,x_1,x_3) &= (x_2-x_1)\,(x_1-x_3)\,(x_2-x_3) = \\ &= -(x_1-x_2)\,(x_2-x_3)\,(x_1-x_3) = \operatorname{sgn}(\pi)\, f(x_1,x_2,x_3),\end{aligned}$$

oder noch allgemeiner ist $f : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ alternierend.

1.4 Die ganzen Zahlen

Descartes nannte die negativen ganzen Zahlen auch "falsche Zahlen".

1.4.1 Konstruktion von $\mathbb{Z}$.
Um auch für natürliche Zahlen $a < b$ Gleichungen der Form $a = b + x$ zu lösen, benötigen wir ein Inverses (welches wir mit $-n$ bezeichnen) zu jedem $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Da in jeder Gruppe das neutrale Element invers zu sich selbst ist, ist $-0 = 0$. Somit sollte die Menge der ganzen Zahlen durch $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$ gegeben sein.

Um die Operationen für $\mathbb{Z}$ ohne Fallunterscheidungen zu definieren, betrachten wir für $a, b \in \mathbb{N}$ ein Symbol $x_{a,b}$ (die virtuelle Lösung der Gleichung $a = b + x$). Die Menge $\mathbb{Z}$ sollte auch als Menge $\{x_{a,b} : a, b \in \mathbb{N}\}$ aller Lösungen beschrieben werden können. Wir versuchen nun mit diesen Lösungen x zu rechnen. Natürlich erwarten wir, daß $x_{a,b}$ durch $a - b := a + (-b)$ gegeben ist, wobei $-b$ das (zu findende) Inverse von b ist. Wegen $(b + b') + (x_{a,b} + x_{a',b'}) = (b + x_{a,b}) + (b' + x_{a',b'}) = a + a'$ sollte $x_{a,b} + x_{a',b'} = x_{a+a',b+b'}$ sein. Dies sieht man auch wie folgt ein:

$$\begin{aligned} x_{a,b} + x_{a',b'} &= a - b + a' - b' = (a + a') + ((-b) + (-b)') \\ &= (a + a') - (b + b') = x_{a+a',b+b'}. \end{aligned}$$

Also betrachten wir die Halbgruppe $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der komponentenweisen Addition. Die Abbildung $(a, b) \mapsto x_{a,b}$ sollte surjektiv $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ sein. Nach Übungsaufgabe (19) existiert eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}^2/\sim \to \mathbb{Z}$ auf der Menge der Äquivalenzklassen bzgl. der Relation $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow x_{a,b} = x_{a',b'}$, welche gegeben ist durch $[(a, b)]_\sim \mapsto x_{a,b}$. Wir können also virtuelle Lösungen $x_{a,b}$ mit Äquivalenzklassen $[(a, b)]_\sim$ von Paaren natürlicher Zahlen identifizieren. Es sollte $(a, b) \sim (c+a, c+b)$ sein, denn aus $b+x_{a,b} = a$ folgt $(c+b)+x_{a,b} = c+(b+x_{a,b}) = c+a$. Also definieren wir $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a + b' = b + a'$. Dies entspricht auch der Idee $x_{a,b} = a - b$, denn dann ist $x_{a,b} = x_{a',b'}$ genau dann, wenn $a - b = a' - b'$, also nach Addition von $b + b'$, wenn $a + b' = a' + b$ ist.

Diese Relation ist mit der Addition verträglich (man sagt $\sim$ ist eine Kongruenzrelation), denn aus $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$ folgt $(a+c, b+d) \sim (a' + c', b' + d')$ da

$$(a + c) + (b' + d') = (a + b') + (c + d') = (a' + b) + (c' + d) = (a' + c') + (b + d).$$

Folglich können wir Äquivalenzklassen $[(a, b)]_\sim$ addieren, indem wir ihre Repräsentanten (=Elemente) addieren.

$$[(a, b)]_\sim + [(c, d)]_\sim := [(a + c, b + d)]_\sim.$$

Somit erhalten wir eine kommutative Halbgruppe $\mathbb{N}^2/\sim$ mit neutralem Element $0 := [(0, 0)]_\sim$. Für jedes $x = [(a, b)]_\sim \in \mathbb{Z}$ existiert ein Inverses $-x := [(b, a)]_\sim$, denn $x+(-x) = [(a, b)]_\sim+[(b, a)]_\sim = [(a+b, b+a)]_\sim = [(0, 0)]_\sim$. Also ist $\mathbb{N}^2/\sim$ sogar eine Gruppe, die wir mit gutem Recht als $\mathbb{Z}$ bezeichnen könnten. Allerdings ist $\mathbb{N}$ keine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ sondern nur injektiv in $\mathbb{Z}$ vermöge $n \mapsto [(n, 0)]_\sim$ eingebettet. Um $\mathbb{N}$ wirklich als Teilmenge zu erhalten, könnte man noch die Klassen $[(n, 0)]_\sim$ durch n in $\mathbb{Z}$ ersetzen.

Die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ erweitert sich ebenfalls zu einer Operation auf $\mathbb{N}^2$ durch $(a, b) \cdot (a', b') := (a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + a' \cdot b)$. Idee dabei ist $(a - b) \cdot (a' - b') = (aa' + bb') - (ab' + a'b)$. Auch diese Operation ist mit $\sim$ verträglich, denn aus $(a, b) \sim (a', b')$, also $a+b' = a'+b$, folgt $ac+bd+a'd+b'c = (a+b')c+(a'+b)d =$

$(a'+b)c+(a+b')d = ad+bc+a'c+b'd$, d.h. $(a,b)\cdot(c,d) \sim (a',b')\cdot(c,d)$. Also ist auch $(\mathbb{Z},\cdot)$ eine kommutative Halbgruppe mit $1 = [(1,0)]_\sim$. Weiters gilt das distributiv-Gesetz, d.h. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

Allerdings ist $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ kein Körper den außer ± 1 hat kein einziges Element $x \in \mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses. Trotzdem ist $\mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich, d.h. es ist ein kommutativer Ring mit 1, der nullteilerfrei ist.

1.4.2 Unendliche Zifferndarstellung negativer ganzer Zahlen.
Wendet man das übliche Verfahren zur Berechnung der Differenz $x - y$ zweier Zahlen auch im Falle $x < y$ an so erhält man z.B. für Dezimalzahlen $123-321 = -198$ in der Binärdarstellung:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & - & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

insbesonders ergibt $0 - 321$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & - & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Diese Folgen sind nach links durch unendlich viele 1'er zu ergänzen. Die unendliche Binärzahlentwicklung einer negativen ganzen Zahl $-x$ erhalten wir also dadurch, daß wir in der Binärzahlentwicklung von $x-1$ an allen Stellen (auch bei den führenden Nullen) 1 und 0 austauschen, oder bei gleicher Wirkung alle Stellen von x komplementieren und danach 1 dazuzählen. Der Vorteil dieser Darstellung ist, daß man bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation keine Fallunterscheidungen mehr machen muß und Subtraktionen $x - y$ wirklich als Addition $x + (-y)$ berechnet werden können. Der Nachteil, daß man dafür unendlich viele Schritte ausführen muß, verschwindet am Computer, denn da haben Zahlen ohnehin üblicherweise nur eine fixe Maximallänge (wie z.B. bei Byte's von 8 Binärstellen, bei short von 16, bei int(eger) von 32 und bei long von 64 Binärstellen). Man muß sich allerdings dazumerken, ob man die Zahlen als positiv oder möglicherweise als negative Zahlen auffassen will (also unsigned oder signed Datentypen spezifizieren). Im "signed" Fall verwendet der Computer das höchste Bit einer Zahl als Vorzeichen, z.B. bei Bytes:

binär	hexadezimal	unsigned byte	signed byte
00000000	00	0	0
00000001	01	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮
01111110	7E	126	126
01111111	7F	127	127
10000000	80	-128	128
10000000	81	-127	129
⋮	⋮	⋮	⋮
11111110	FE	-2	254
11111111	FF	-1	255

1.4.3 Restklassenringe.
Auch die Restklassenringe $\mathbb{Z}_m$ für $0 \neq m \in \mathbb{N}$ sind kommutative Ringe mit 1, wobei die Addition und Multiplikation von Klassen durch

$$[x]_m + [y]_m := [x+y]_m$$
$$[x]_m \cdot [y]_m := [x \cdot y]_m$$

gegeben sind. Es ist $\mathbb{Z}_m$ genau dann ein Integritätsbereich, wenn m eine Primzahl ist: Denn aus $m = a \cdot b$ mit $1 < a, b < m$ folgt, daß $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m = [m]_m = 0$ ist, obwohl $[a]_m \neq 0 \neq [b]_m$. Ist hingegen m eine Primzahl, so ist $0 = [a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$ genau dann, wenn m das Produkt $a \cdot b$ teilt, und somit eine Faktor teilt. Dessen Restklasse ist dann aber 0.

Insbesonders sind $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$ Integritätsbereiche (und sogar Körper, wie wir in (1.4.7) zeigen werden) $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_{16}$ und $\mathbb{Z}_{256}$ hingegen nicht einmal Integritätsbereiche.

1.4.4 Definition. Teiler.
Es sei R ein Integritätsbereich und $a, b \in R$. Dann heißt b TEILER von a falls ein $q \in R$ existiert mit $a = b\,q$. Ein GRÖSSTER GEMEINSAMER TEILER (kurz GGT) von a und b ist ein Element $d \in R$ welches a und b teilt, und welches von jedem anderen gemeinsamen Teiler geteilt wird. Falls 1 ein größter gemeinsamer Teiler ist, so heißen a und b RELATIV PRIM.

1.4.5 Proposition. Charakterisierung des ggT.
Die Menge $\mathrm{ggT}(a, b)$ *der größte gemeinsame Teiler zweier Elemente* a *und* b *eines Integritätsbereichs erhält man durch Multiplikation eines ggT mit allen* EINHEITEN *(d.h. invertierbaren Elementen).*

In $\mathbb{Z}$ ist also der ggT nur bis auf ein Vorzeichen $\{\pm 1\}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Es sei d ein Teiler von a und u eine Einheit. Dann ist auch $u\,d$ ein Teiler von a: Nach Voraussetzung existiert ein $q \in R$ mit $a = b\,q$. Dann ist $a = b\,u^{-1}\,u\,q$, also wird a durch $u\,q$ geteilt.

Sei nun d ein ggT von a und b und u eine Einheit, dann ist $u\,d$ ebenfalls ein ggT von a und b: Nach obigen ist $u\,d$ ein Teiler von a und b. Sei t ein weiterer gemeinsamer Teiler von a und b. Dann ist t ein Teiler von d. Da u invertierbar ist, existiert u^{-1} und ist auch eine Einheit. Somit ist auch $u^{-1}\,t$ ein Teiler von d, d.h. es existiert ein $q \in R$ mit $d = u^{-1}\,t\,q$, also $u\,d = t\,q$, somit ist t auch Teiler von $u\,d$.

Sei schließlich d' ein weiterer ggT von a und b. Dann teilen sich d und d' gegenseitig, also existieren $u' \in R$ und $u \in R$ mit $d = d'\,u'$ und $d' = d\,u$, also ist $d'\,(1 - u'\,u) = 0$ und da wir Nullteilerfreiheit vorausgesetzt haben (und Teiler nicht 0 sind) ist $1 = u'\,u$, also u eine Einheit mit $d' = u\,d$. q.e.d.

Euklid'ischer Algorithmus.
Man kann den ggT von $a, b \in \mathbb{Z}$ wie folgt bestimmen (ohne die aufwendige Bestimmung der Primfaktorenzerlegung von a und b). Sei dazu O.B.d.A. $a \geq b \geq 0$. Wir setzen $r_0 := a$ und $r_1 := b$ und berechnen mittels Division mit Rest rekursiv q_k und r_k mit $r_{k-1} = q_{k+1} r_k + r_{k+1}$ mit $0 \leq r_{k+1} < r_k$. Nach höchstens $|b|$ Schritten ist $r_{k+1} = 0$. Das letzte $r_k \neq 0$ ist dann ein ggT d von a und b.

$$\begin{aligned} r_0 &= q_2\,r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3\,r_2 + r_3 \\ &\;\vdots \\ r_{k-3} &= q_{k-1}\,r_{k-2} + r_{k-1} \\ r_{k-2} &= q_k\,r_{k-1} + r_k \\ r_{k-1} &= q_{k+1}\,r_k + 0 \end{aligned}$$

Weiters existieren $a', b' \in \mathbb{Z}$ mit $d = a'\,a + b'\,b$.

Beweis. Aus der letzten Gleichung der Rekursion folgt, daß r_{k-1} durch $d := r_k$ geteilt wird, aus der vorletzen, daß r_{k-2} ebenfalls durch d geteilt wird, und induktiv, daß $b = r_1$ und schließlich auch $a = r_0$ durch d geteilt wird.

Weiters können wir die Gleichungen rekursiv bei der vorletzten Gleichung beginnend nach oben fortschreitend auflösen und erhalten:

$$\begin{aligned} d = r_k &= r_{k-2} - q_k\, r_{k-1} \\ &= r_{k-2} - q_k\,(r_{k-3} - q_{k-1}\, r_{k-2}) = r_{k-3}\,(-q_k) + r_{k-2}\,(1 - q_k\, q_{k-1}) \\ &\vdots \\ &= a''\, r_1 + b''\, r_2 \\ &= a''\, r_1 + b''\,(r_0 - q_2\, r_1) = b''\, r_0 + (a'' - b''\, q_2)\, r_1 \\ &= a'\, a + b'\, b \end{aligned}$$

mit gewissen $a', b' \in \mathbb{Z}$.

Falls ein $t \in \mathbb{Z}$ sowohl a als auch b und damit die rechte Seite teilt, so teilt t auch die linke Seite d. Also ist d ein ggT von a und b. □

1.4.6 Beispiel.
Wir bestimmen mittels Euklid'ischen Algorithmus den ggT von 209 und 77: Fortgesetze Division mit Rest liefert:

$$\begin{aligned} 209 &= 77 \cdot 2 + 55, \\ 77 &= 55 \cdot 1 + 22, \\ 55 &= 22 \cdot 2 + 11, \\ 22 &= 11 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

also ist $ggT(209, 77) = \{\pm 11\}$ und

$$\begin{aligned} 11 &= 55 - 22 \cdot 2 = 55 - (77 - 55 \cdot 1) \cdot 2 = 55 \cdot 3 - 77 \cdot 2 \\ &= (209 - 77 \cdot 2) \cdot 3 - 77 \cdot 2 = 209 \cdot 3 - 77 \cdot 8. \end{aligned}$$

1.4.7 Folgerung. Einheiten unter den Restklassen.
Eine Restklasse $[a] \in \mathbb{Z}_m$ ist genau dann eine Einheit, wenn 1 ein ggT von a und m ist, d.h. a und m RELATIV PRIM *sind.*
Somit ist $\mathbb{Z}_m$ genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.

Beweis. Wegen dem Euklid'ischen Algorithmus ist 1 genau dann ein ggT von a und m, wenn $\exists\, a', m' \in \mathbb{Z}$: $1 = a'\,a + m'\,m$, d.h. $[1]_m = [a']_m \cdot [a]_m$, also $[a]_m$ ein (links)-Inverses besitzt. □

Polynome

1.4.8 Definition. Polynom.
Unter einem REELLEN POLYNOM p verstehen wir eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch $p(x) := \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k$ mit $n \in \mathbb{N}$ und gewissen KOEFFIZIENTEN $p_k \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

Manchmal ist es günstiger Polynome als formal unendliche Summen $\sum_k p_k\, x^k$ zu schreiben, wobei halt in Wirklichkeit FAST ALLE Koeffizienten p_k gleich 0 sind, d.h. alle bis auf endlich viele.

Wir können Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ addieren und multiplizieren:

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x),$$
$$f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

In diesem Sinn sind Summe und Produkt von Polynomen wieder Polynome, denn

$$\begin{aligned}\Big(\sum_k a_k\, x^k\Big) + \Big(\sum_k b_k\, x^k\Big) &= \sum_k (a_k + b_k)\, x^k \\ \Big(\sum_i a_i\, x^i\Big) \cdot \Big(\sum_j b_j\, x^j\Big) &= \sum_{i,j} a_i\, b_j\, x^{i+j} = \sum_n \Big(\sum_{i+j=n} a_i\, b_j\Big) x^n \\ &= \sum_n \Big(\sum_{i=0}^n a_i\, b_{n-i}\Big) x^n\end{aligned}$$

Idee beim vorletzten Gleichungszeichen ist, anstelle in der Tabelle

$i \backslash j$	0	1	2	3	...
0	$a_0 b_0$	$a_0 b_1 x$	$a_0 b_2 x^2$	$a_0 b_3 x^3$	...
1	$a_1 b_0 x$	$a_1 b_1 x^2$	$a_1 b_2 x^3$	$a_1 b_3 x^4$	...
2	$a_2 b_0 x^2$	$a_2 b_1 x^3$	$a_2 b_2 x^4$	$a_2 b_3 x^5$	...
3	$a_3 b_0 x^3$	$a_3 b_1 x^4$	$a_3 b_2 x^5$	$a_3 b_3 x^6$	...
$\vdots$					

nacheinander über alle Zeilen zu summieren, besser über die Diagonalen mit gleicher Summe $i + j = n$ zu summieren.

Da reelle Polynome p eindeutig durch ihre Koeffizienten p_k beschrieben werden (siehe (1.4.15)), können wir diese auch als die Teilmenge

$$\{(p_0, p_1, p_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : p_k = 0 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}\}$$

von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ auffassen.

Allgemeiner sei nun R ein kommutativer Ring mit 1 und X eine Menge. Dann ist auch die Menge R^X aller Abbildungen $X \to R$ ein kommutativer Ring mit 1 vermöge der Operationen:

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Die Menge $\{x \mapsto p_0 + p_1\, x + \dots + p_n\, x^n : n \in \mathbb{N}, p_0, \dots, p_n \in R\}$ der POLYNOMIALEN FUNKTIONEN bildet einen Teilring mit 1 von R^X. **Achtung**, dieser ist nicht für alle R nullteilerfrei: Für $R = \mathbb{Z}_2$ ist z.B. $0 = x - x^2 = x \cdot (1 - x)$. Wir betrachten also besser nur die Koeffizienten und definieren POLYNOME in R als endliche Folgen $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ von Koeffizienten $p_0, \dots, p_n \in R$, die wir uns auch durch 0'en aus R zu einer unendlichen Folge $(p_0, \dots, p_n, 0, \dots)$ fortgesetzt denken dürfen. Man definiert Addition und Multiplikation von solchen Polynomen analog zu obigen durch

$$\begin{aligned}&(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, 0, \dots) \\ &(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots) \\ &\quad := (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots, a_n b_m, 0, \dots)\end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, daß dadurch die Menge der Polynome zu einen kommutativen Ring mit 1 wird (man schreibt üblicherweise $R[x]$ für diesen), und wir werden in (1.4.10) zeigen, daß dies ein Integritätsbereich ist falls R einer ist.

Jedes Polynom $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ können wir natürlich als polynomiale Funktion $R \to R$ vermöge $r \mapsto a_0 + a_1\, r + \dots + a_n\, r^n$ auffassen. Dies liefert einen Homomorphismus (d.h. Abbildung, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist) $R[x] \to R^R$, der aber für endliche Ringe R nicht injektiv zu sein braucht. Für $R = \mathbb{Z}_2$ z.B. ist die zum Monom $x \mapsto x^k$ gehörende polynomiale Funktion $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ für jedes $k \ge 1$ durch die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$ gegeben.

Man schreibt statt der Folge $(p_0, p_1, \dots)$ üblicherweise die "formale Summe" $\sum_k p_k\, x^k$ damit die Formeln für die Addition und Multiplikation sich durch formale Anwendung des distributiv-Gesetzes ergeben.

Der Grad $\mathrm{grad}(p)$ eines Polynoms $p \neq 0$ ist der größte Index k der nicht verschwindenden Koeffizienten p_k diese Polynoms, oder wie man auch sagt der Index des führenden Koeffizienten.

Es ist $\mathrm{grad}(a + b) \le \max\{\mathrm{grad}(a), \mathrm{grad}(b)\}$ und $\mathrm{grad}(a \cdot b) = \mathrm{grad}(a) + \mathrm{grad}(b)$ falls R ein Integritätsbereich ist. Für das Nullpolynom ergäbe sich daraus $\mathrm{grad}(0) = \mathrm{grad}(0 \cdot b) = \mathrm{grad}(0) + \mathrm{grad}(b)$ für alle Polynome $b \neq 0$. Diese Gleichung in $\mathrm{grad}(0)$ ist in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar, aber $-\infty$ erfüllt sie, also setzt man $\mathrm{grad}(0) := -\infty$.

Die Summanden $p_k\, x^k$ heißen auch Monome vom Grad k.

Man schreibt oft $R_n[x]$ für die Menge der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n.

1.4.9 Lemma. Invertierbare Polynome.
Ein reelles Polynom p (oder allgemeiner Polynom mit Koeffizienten in einen Körper) besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses, d.h. ist eine Einheit, wenn $\mathrm{grad}(p) = 0$, d.h. p konstant aber nicht 0 ist.

Beweis. Sei p eine Einheit, also existiert ein Polynom q mit $1 = q \cdot p$ und somit ist $0 = \mathrm{grad}(1) = \mathrm{grad}(q) + \mathrm{grad}(p)$, also ist $\mathrm{grad}(p) = 0$, d.h. p ist konstant. $\square$

1.4.10 Folgerung. Polynomring als Integritätsbereich.
Falls R ein Integritätsbereich ist, so ist auch der Ring $R[x]$ der Polynome mit Koeffizienten in R ein solcher.

Beweis. Es seien $p \neq 0$ und $q \neq 0$ Polynome. Dann ist $\mathrm{grad}(p) \ge 0$ und $\mathrm{grad}(q) \ge 0$ und somit $\mathrm{grad}(p \cdot q) = \mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q) \ge 0$, also $p \cdot q \neq 0$. $\square$

1.4.11 Bemerkung. Division mit Rest.
Wie bei ganzen Zahlen, können wir auch bei reellen Polynomen (oder allgemeiner bei Polynomen mit Koeffizienten in einem Körper) die Division mit Rest durchführen: Wir fassen dazu die Koeffizienten a_k als k-te "Ziffer" von rechts gezählt auf. Z.B. ist

$$(6x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 3) = (2x^2 + 1) \cdot (3x^2 + 2x + 1) + (-x + 2),$$

denn

$$\begin{array}{ccccccl}
(& +6x^4 & +4x^3 & +5x^2 & +1x^1 & +3x^0 &) : (+2x^2 + 0x^1 + 1x^0) = \\
 & \pm 6x^4 & \pm 0x^3 & \pm 3x^2 & & & \qquad = 3x^2 + 2x + 1 \\
\hline
 & 0 & +4x^3 & +2x^2 & +1x^1 & & \\
 & & \pm 4x^3 & \pm 0x^2 & \pm 2x^1 & & \\
\hline
 & & 0 & +2x^2 & -x^1 & +3x^0 & \\
 & & & \pm 2x^2 & \pm 0x^1 & \pm 1x^1 & \\
\hline
 & & & 0 & -x^1 & +2x^0 & \text{Rest}
\end{array}$$

Dies entspricht der Division mit Rest $64513 = 201 \cdot 321 + (-1)2$. Beachte also, daß bei Polynomen beliebige (auch negative oder rationale oder komplexe) "Ziffern" auftreten können.

1.4.12 Horner-Schema.
Es sei p ein Polynom $p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ mit Koeffizienten aus einem Ring R und $\xi \in R$. Division durch $x-\xi$ mit Rest liefert ein Polynom $q(x) := \sum_{k=0}^{n-1} b_k\, x^k$ und Rest $r \in R$ mit $p(x) = q(x)\,(x-\xi) + r$. Wir versuchen nun eine Formel für Koeffizienten b_k und Rest r zu finden. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_j a_j\, x^j = p(x) = (x-\xi)\, q(x) + r &= (x-\xi) \sum_j b_j\, x^j + r \\ &= \sum_j b_j\, x^{j+1} - \sum_j b_j\, \xi\, x^j + r.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a_n = b_{n-1}$, sowie $a_j = b_{j-1} - b_j\,\xi$ für $n > j > 0$ und $a_0 = -b_0\,\xi + r$. Daraus ergibt sich die gewünschte Rekursionsformel $b_{k-1} = a_k + \xi\, b_k$ mit $b_n := 0$ und $b_{-1} := r$. Dies nennt man HORNER-SCHEMA.

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
ξ	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = b_{n-1}\xi + a_{n-1}$	$\dots$	$b_0 = b_1\xi + a_1$	$b_{-1} = b_0\xi + a_0$

Setzt man in obige Gleichung ξ anstelle von x so erhält man $p(\xi) = 0 \cdot q(\xi) + r = r$, also ist der Rest $r = b_{-1}$ der Funktionswert von p an der Stelle ξ.

Induktive Anwendung liefert das VOLLSTÄNDIGE HORNER-SCHEMA zur Darstellung eines Polynoms p als Linearkombination von Potenzen von $(x-\xi)$, d.h. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\,(x-\xi)^k$.

1.4.13 Definition. Nullstellen.
Unter einer NULLSTELLE einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, versteht man ein $\xi \in X$ mit $f(\xi) = 0$. Falls f ein Polynom ist, so spricht man auch von einer WURZEL ξ von f.

1.4.14 Proposition. Nullstellen und Teilbarkeit.
Es sei $p \in R[x]$ ein Polynom und $\xi \in R$. Dann gilt:
$p(\xi) = 0 \Leftrightarrow x - \xi$ teilt p:

Beweis. Da $p(\xi)$ gerade der Rest von p bei Division durch $x - \xi$ ist, ist dies offensichtlich. □

1.4.15 Folgerung. Koeffizientenvergleich.
Es sei $0 \neq p \in R[x]$ ein Polynom vom Grad n und R ein Integritätsbereich. Dann besitzt p höchstens n Nullstellen. Ist also $\sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k = 0$ für unendlich viedle (oder zumindestens $n+1$ viele $x \in R$), dann sind alle Koeffizienten $p_k = 0$.

Beweis. Es seien $\xi_1, \dots, \xi_n$ paarweise verschiedene Nullstellen von p. Nach (1.4.14) wird p von $x - \xi_1$ geteilt, also existiert ein Polynom p' mit $p(x) = (x-\xi_1)\, p'(x)$. Folglich sind $\xi_2, \dots, \xi_n$ auch Nullstellen on p' und mittels Induktion folgt $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\xi_i)\, q(x)$ für ein Polynom $q \neq 0$. Damit ist $\mathrm{grad}(p) = \sum_{i=1}^{n} 1 + \mathrm{grad}(q) \geq n$. □

1.4.16 Proposition. Rationale Nullstellen.
Es sei p ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und $\frac{r}{s}$ eine rationale Nullstelle von

p mit relativ primen r und s. Dann wird der führende Koeffizient von p durch s und der 0-te Koeffizient durch r geteilt.

Dies kann dazu verwendet werden die rationalen Nullstellen eines Polynoms durch Probieren zu finden.

Beweis. Es sei also $0 = \sum_{k=0}^n p_k\,(r/s)^k$ mit $p_n \neq 0$ oder äquivalent $0 = \sum_{k=0}^n p_k\,r^k\,s^{n-k}$. Alle bis auf den Term für $k = 0$ sind durch r teilbar, also auch dieser, d.h. r teilt den niedersten Koeffizienten p_0. Weiters sind alle bis auf den Term für $k = n$ durch s teilbar, also auch dieser, d.h. s teilt den führenden Koeffizenten p_n. □

1.4.17 Proposition. Vieta'scher Wurzelsatz.
Der k-te Koeffizient von $\prod_{j=1}^n (x - \xi_j)$ *ist durch* $(-1)^{n-k}\,\sigma_{n-k}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ *gegeben, wobei* σ_j *die* j*-te* ELEMENTARSYMMETRISCHE FUNKTION *ist.*

Im Fall $n = 2$ bedeutet dies $(x - \xi_1) \cdot (x - \xi_2) = x^2 - x(\xi_1 + \xi_2) + \xi_1\,\xi_2$.

Beweis. Wenn man $\prod_j (x - \xi_j)$ ausmultipliziert erhält man eine Summe von n-fachen Produkten, die dadurch entstehen, daß aus jeder der n Klammern jeweils x oder $-\xi_j$ gewählt wird. Der Koeffizient von x^k wird also gerade durch solche Auswahlen erhalten, wo genau k-mal x und immer sonst die entsprechenden $-\xi_j$ gewählt werden. Diese Auswahlen werden also genau durch die $n-k$-elementigen Teilmengen J von $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ beschrieben und tragen $(-1)^{n-k} \prod_{j \in J} \xi_j$ zum Koeffizienten bei. □

1.4.18 Euklid'ischer Algorithmus für Polynome.
Wie für ganze Zahlen können wir den Euklid'ische Algorithmus auch dazu verwenden um einen ggT in $\mathbb{R}[x]$ zweier Polynome p_0 und p_1 zu bestimmen. Wir müssen dazu nur rekursive Division mit Rest ausführen bis wir bei Rest 0 landen. Der letzte Rest davor ist dann ein ggT.

Sei z.B. $p : x \mapsto x^4 - 1$ und $q : x \mapsto x^3 + x$. Fortgesetze Division mit Rest liefert

$$\begin{aligned}
(x^4 - 1) &= (x^3 + x) \cdot x + (-x^2 - 1), \\
(x^3 + x) &= (-x^2 - 1) \cdot (-x) + 0,
\end{aligned}$$

also ist $-x^2 - 1$ ein ggT von p und q und

$$-x^2 - 1 = (x^4 - 1) \cdot 1 + (x^3 + x) \cdot (-x).$$

Komposition von Polynomen.
Wenn wir Polynome als Abbildungen $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ auffassen, so können wir diese auch zusammensetzen, und erhalten somit allgemein eine Komposition:

$$\Big(\sum_{k=0}^n a_k\,x^k\Big) \circ \Big(\sum_{k=0}^m b_k\,x^k\Big) = \sum_{k=0}^n a_k \Big(\sum_{j=0}^m b_j\,x^j\Big)^k = \sum_{k=0}^{nm} c_k\,x^k,$$

wobei

$$\begin{aligned}
c_0 &= \sum_{k=0}^n a_k\,b_0^k \\
c_1 &= \sum_{k=1}^n a_k\,k\,b_0^{k-1}\,b_1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{grad}(p \circ q) = \operatorname{grad}(p) \cdot \operatorname{grad}(q)$.

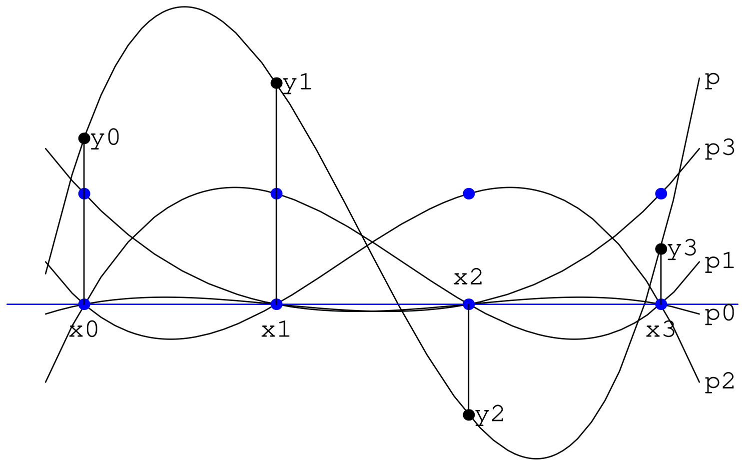
1.4.19 Bemerkung. Interpolationspolynom.
Jenes Polynom minimalen Grades, welches an den Stellen $x_0, \dots, x_n$ die Werte $y_0, \dots, y_n$ hat, heißt INTERPOLATIONSPOLYNOM und ist durch die LAGRANGE'SCHE INTERPOLATIONSFORMEL

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\prod_{i \neq j}(x - x_i)}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$$

gegeben.

Beweis. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} p(x_k) &= \sum_{j=0}^{n} y_j\, p_j(x_k) = y_k, \text{ wobei} \\ p_j(x) &:= \frac{\prod_{i \neq j}(x - x_i)}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}, \text{ also} \\ p_j(x_k) &= \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

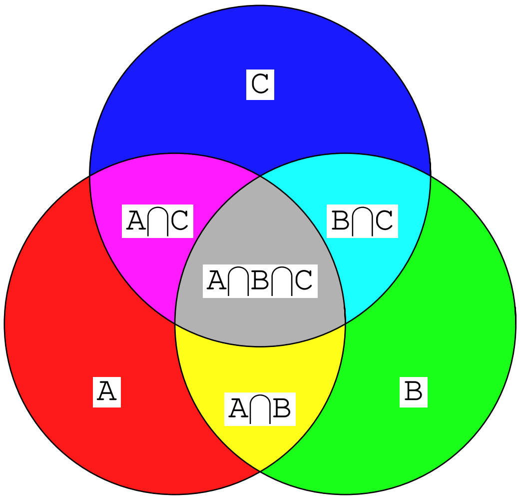


□

1.4.20 Inklusions-Exklusions-Prinzip.

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{1+|J|} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right| \\ \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| &= \sum_{J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|, \\ &\quad \textit{wobei wir } \bigcap_{j \in \emptyset} A_j := X \textit{ gesetzt haben.} \end{aligned}$$

Mit $|A|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der Menge A.



Beweis. Wir zeigen die erste Formel mittels Induktion nach n:
$(n = 1)$ ist offensichtlich, denn dann existiert nur ein $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}$, nämlich $J = \{1\}$.
$(n = 2)$ Es sind $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ sowie $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ und $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ disjunkte Zerlegungen und somit

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|\end{aligned}$$

$(n + 1)$ Es sei $C := \bigcup_{i=1}^n A_i$ und $B_i := A_i \cap A_{n+1}$. Unter Verwendung der Induktionsannahme für die A_i und die B_i mit $1 \le i \le n$ erhalten wir aus dem Fall $n = 2$:

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big| &= |C \cup A_{n+1}| = |C| + |A_{n+1}| - |C \cap A_{n+1}| \\ &= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+|J|}\Big|\bigcap_{j\in J} A_j\Big| + |A_{n+1}| + \Big|\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big| \\ &= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+|J|}\Big|\bigcap_{j\in J} A_j\Big| + |A_{n+1}| - \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+|J|}\Big|\bigcap_{j\in J} B_j\Big| \\ &= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+|J|}\Big|\bigcap_{j\in J} A_j\Big| + |A_{n+1}| - \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{1+|J|}\Big|\bigcap_{j\in J} A_j \cap A_{n+1}\Big| \\ &= \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\dots,n+1\}} (-1)^{1+|J|}\Big|\bigcap_{j\in J} A_j\Big|\end{aligned}$$

Die zweite Formel folgt mittels de Morgan'schen Gesetzen aus der ersten, denn

$$\bigcap_{i=1}^n A_i^c = X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i. \quad \square$$

1.5 Die rationalen Zahlen

1.5.1 Konstruktion von $\mathbb{Q}$.
Wir wollen nun nach der additiven Gleichung $a = b + x$ die uns in (1.4.1) zu den ganzen Zahlen geführt hat analog die multiplikative Gleichung $a = b \cdot x$ behandeln. Nur für $b \neq 0$ dürfen wir die Existenz einer Lösung x erhoffen, den in jedem Ring gilt $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in R$ nach (1.2.6). Leider haben wir für $\mathbb{Z}$ gesehen, daß die Gleichung $a = b \cdot x$ genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzt, wenn a durch b teilbar ist. Z.B. für $a = 1$ ist das nur für $b \in \{\pm 1\}$ der Fall.

Also versuchen wir wie in (1.4.1) wieder mit virtuellen Lösungen $x = x_{a,b}$ diesmal der Gleichungen $a = b \cdot x$ für $b \neq 0$ zu rechnen. Analog zum Übergang von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ sollte $x_{a,b} \cdot x_{a',b'} = x_{a\cdot a', b\cdot b'}$ sein und $x_{a,b} = x_{a',b'}$, falls $a \cdot b' = a' \cdot b$ ist. Wir definieren also die Menge der rationalen Zahlen als

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\sim, \text{ wobei } (a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a \cdot b = a' \cdot b.$$

Dann ist $(\mathbb{Q}, \cdot)$ eine kommutative Halbgruppe mit $1 := [(1, 1)]_\sim$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe, wobei $0 := [(0, 1)]_\sim$.

Weiters sollte $x_{a,b} + x_{a',b'} = x_{a\cdot b'+a'\cdot b, b\cdot b'}$ sein, denn $a \cdot b' + a' \cdot b = (x_{a,b} \cdot b) \cdot b' + (x_{a',b'} \cdot b') \cdot b = (x_{a,b} + x_{a',b'}) \cdot (b \cdot b')$. Einfache Rechnungen zeigen, daß damit $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ zu einem Körper wird, der Körper der rationalen Zahlen. Man schreibt natürlich üblicherweise $\frac{a}{b}$ an Stelle von $[(a, b)]_\sim$. Beachte dabei, daß wir ganze Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ als spezielle rationale Zahlen vermöge der Abbildung $x \mapsto \frac{x}{1}$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ auffassen können.

Kombinatorik (Fortsetzung)

1.5.2 Definition. Kombinationen ohne Wiederholung.
Unter einer Kombination ohne Wiederholung von k vielen Objekten aus n vielen, versteht man eine Auswahl von k-verschiedenen Elementen aus einer Grundmenge von n vielen, wobei es auf die Reihenfolge der Auswahl nicht ankommen soll. Also wenn z.B. der Vorstand bestehend aus 3 gleichberechtigen Personen, deren jeweilige Aufgaben/Ämter nicht explizit festgelegt sind, eines Vereins mit 100 Mitgliedern gewählt werden soll (ohne das Ämterkummulierung zulässig), so ist eine Kombination ohne Wiederholungen von 3 aus 100 zu bestimmen.

Kombinationen ohne Wiederholung von k aus n werden also gerade durch k-Elementige Teilmenge einer n-Elementigen Menge beschrieben.

1.5.3 Proposition. Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung.
Die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von k vielen Objekten aus n vielen ist gerade der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Beweis. Der Unterschied zwischen Variationen und Kombinationen ohne Wiederholung besteht gerade darin, daß es bei ersteren auf die Reihenfolge der Auswahlen ankommt. Aus jeder Auswahl einer Kombination ohne Wiederholung kann erhält man etliche Variationen ohne Wiederholung indem man die k gewählten Elemente irgendwie anordnet. Dafür gibt es nach (1.3.20) gerade $k!$ viele Möglichkeiten. Wenn wir also die Anzahl der Kombinationen mit $\binom{n}{k}$ bezeichnen, dann ist die Anzahl der Variationen $(n)_k = k! \cdot \binom{n}{k}$, also $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$. □

Beachte, daß es genau eine Möglichkeit gibt aus n-Elementen keines Auszuwählen, nämlich die leere Menge, also ist $\binom{n}{0} = 1$.

1.5.4 Folgerung. Binomsche Lehrsatz.
Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Beweis. Ausmultiplizieren von $(x+y)^n = (x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)$ vermöge dem distributiv-Gesetz funktioniert so, daß man aus jeder der n Klammern jeweils x oder y auswählt, die gewählten Variablen miteinander multipliziert und die Summe über alle diese Auswahlen bildet. Um die jeweiligen Produkte zu bestimmen genügt es festzustellen wie oft (sagen wir k mal) y gewählt wurde. In den anderen $n-k$ vielen Klammern wurde dann x gewählt, also ist (wegen Kommutativgesetz) das Produkt $x^{n-k}y^k$ und die Anzahl der Möglichkeiten bei den n-Klammern gerade k mal y zu wählen wird gerade durch Kombinationen ohne Wiederholung von k (den Klammern wo wir y gewählt haben) aus n-vielen (Klammern) beschrieben. Also folgt die Formel. □

1.5.5 Lemma. Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten.
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Veranschaulichen kann man diese Rekursionsformel durch das Pascal'sches Dreieck, in welchen sich die Eintragungen als Summe des direkt darüber sowie des links darüberstehenden Elements ergeben:

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\vdots & & & & \ddots & & \\
\binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \dots & \binom{n}{n} & \\
\binom{n+1}{0} & \dots & \dots & \binom{n+1}{k+1} & \dots & \dots & \binom{n+1}{n+1}
\end{array}$$

Beweis. Dies läßt sich leicht mit Induktion zeigen, oder indem man beachtet, daß $k+1$-elementige Teilmengen von $\{0,\dots,n\}$ eingeteilt werden können in solche die n nicht enthalten und somit $k+1$-elementige Teilmengen von $\{0,\dots,n-1\}$ sind und solche die n enthalten und somit eindeutig als Vereinigung von $\{n\}$ und einer k-elementige Teilmenge von $\{0,\dots,n-1\}$ geschrieben werden können. □

1.5.6 Bemerkung.
Beachte, daß Kombinationen ohne Wiederholung von k-Elementen aus der Menge $\{0,1,2,\dots,n-1\}$, also k-elementige Teilmengen $\{x_0,\dots,x_{k-1}\} \subseteq \{0,\dots,n-1\}$, o.B.d.A. so geschrieben werden können, daß $x_0 < \dots < x_{k-1}$, also gerade durch streng monoton wachsende Folgen von k natürlichen Zahlen $0 \le x_0 < \dots < x_{k-1} < n$ beschrieben werden können.

1.5.7 Definition. Kombination mit Wiederholung.
Unter einer Kombination mit Wiederholung von k vielen Objekten aus n

vielen, versteht man eine Auswahl von k Elementen aus einer Grundmenge von n vielen, wobei es auf die Reihenfolge der Auswahl nicht ankommen soll, und man durchaus auch mehrmals gleiche Elemente wählen kann. Man spricht auch von Auswählen mit Zurücklegen.

1.5.8 Bemerkung.
Jede Kombination mit Wiederholung von k vielen Objekten aus n vielen wird also durch $x_0, \dots, x_{k-1} \in \{0, \dots, n-1\}$ beschrieben, wobei wir verschiedene Reihenfolgen der $x_0, \dots, x_{k-1}$ als gleichbedeutend ansehen müssen. Wir können aber wie bei Kombinationen ohne Wiederholung die natürliche Reihenfolge $x_0 \leq \dots \leq x_{k-1}$ benutzen, und somit Kombinationen mit Wiederholung als monoton wachsende Folgen von natürlichen Zahlen $0 \leq x_0 \leq \dots \leq x_{k-1} < n$ auffassen.

1.5.9 Proposition. Anzahl der Kombination mit Wiederholung.
Die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von k vielen Objekten aus n vielen ist $\binom{n+k+1}{k}$.

Beweis. Wir können aus jeder Kombination mit Wiederholung aufgefaßt als monotone Folge $0 \leq x_0 \leq \dots \leq x_{k-1} < n$ eine streng monotone Folge $0 \leq y_0 < \dots < y_{k-1} < n+k-1$ vermöge $y_i := x_i + i$ machen. Umgekehrt können wir aus jeder solchen streng monoton wachsenden Folge von y's eine monoton wachsende Folge von x'en zurückgewinnen, indem wir $x_i := y_i - i$ setzen. Also entsprechen den Kombinationen mit Wiederholung von k aus n gerade die Kombinationen ohne Wiederholung von k aus $n+k-1$, von welchen es $\binom{n+k-1}{k}$ viele nach (1.5.3) gibt. □

Beispiel.
Es werden in einer Übungsstunde 10 Beispiele von gewissen der anwesenden 20 StudentInnen gerechnet. Wieviele Möglichkeiten bestehen dafür, wenn es nur darauf ankommt dranzukommen, aber nicht welches Beispiel man rechnet.
Antwort: Kombinationen mit Wiederholung von 10 aus 20, also $\binom{20+10-1}{10} = 20030010$.

Zusammenfassung.
Wir haben also folgende Anzahlen für Auswahlen von k aus n bestimmt:

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
mit Reihenf. (Variationen)	n^k	$(n)_k$
ohne Reihenf. (Kombinationen)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

1.5.10 Definition. Wahrscheinlichkeit.
Es sei eine Menge X möglicher und gleich-wahrscheinlicher Ereignisse gegeben. Also z.B. $\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ bei Werfen einer Münze, oder $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bei Werfen eines Würfels, oder $\{0, 1, 2, 3, \dots, 36\}$ beim Roulette. Sei E eine Teilmenge von X. Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ dafür, daß ein Ereignis aus E eintritt ist per Definition

$$P(E) := \frac{|E|}{|X|},$$

also der Quotient aus der Anzahl der günstigen Fälle (d.h. der Fälle aus E) dividiert durch die Anzahl aller möglicher Fälle die auftreten können. Voraussetzung für diese Definition ist allerdings, daß die einzelnen Fälle gleichwahrscheinlich sind!

Offensichtlich ist $0 \leq P(E) \leq 1$. Es ist $P(E) = 1$, wenn E ein sicher(eintretend)es Ereignis ist; und $P(E) = 0$, wenn E ein unmögliches Ereignis ist.

So ist z.B. beim einmaligen Würfeln, ein einzelner Fall gerade ein einzelner Wurf, der durch die oben liegende Ziffer des Würfels beschrieben werden kann. Es gibt also 6 mögliche Fälle. Sei nun das Ereignis E gegeben, daß die Augenzahl gerade ist, dann sind die Fälle 2, 4 und 6 günstig und somit $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Beim Roulette hingegen ist die Anzahl der möglichen Fälle $1 + 36$ und die für "rouge"(=rot) gerade 18, somit $P(E) = \frac{18}{37} \sim 0.4865$.

Beachte jedoch, daß es beim Werfen 2'er Münzen (oder auch beim zweimaligen Werfen einer Münze) 4 mögliche Fälle gibt: (Kopf,Kopf), (Kopf,Zahl), (Zahl,Kopf), (Zahl,Zahl). Wenn wir also die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, daß genau eine Zahl kommt, bestimmen, so ergibt sich $P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, und nicht ein Drittel wie an vielleicht fälschlich wie folgt vermuten könnte: Es gibt 3 Fälle: Keinmal Kopf, genau einmal Kopf und zweimal Kopf. Einer davon ist günstig, also $P(E) = \frac{1}{3}$. Diese Argumentation ist falsch, denn genau einmal Kopf zu werfen, kann auf zwei Arten zustande kommen, nämlich dadurch, daß die eine oder (ausschliesend) die andere Münze auf Kopf fällt. Es ist also doppelt so wahrscheinlich als, daß beide Münzen auf Kopf fallen.

1.5.11 Additionssatz.
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.

Beweis. Dies folgt aus $|E_1 \cup E_2| + |E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2|$. □

Beispiel.
Z.B. ist die Wahrscheinlichkeit bei 2 maligen Würfeln mindestens einen 6'er zu haben wie folgt bestimmbar. Die Wahrscheinlichkeit $P(E_i)$ beim i-ten Wurf einen 6'er zu Würfeln ist $1/6$. Die Wahrscheinlichkeit $P(E_1 \cap E_2)$ bei beiden Würfen einen 6'er zu Würfeln ist $1/36$, also ist $P(E \cup E_2) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$. Dies hätten wir natürlich auch recht schnell durch Abzählen der günstigen Fälle erhalten.

1.5.12 Satz über das Komplementärereignis.
$P(E^c) = 1 - P(E)$.

Beweis. Wegen $X = E \cup E^c$ und $E \cap E^c = \emptyset$ folgt dies aus dem Additionssatz. □

Beispiel.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens zwei Personen auf einer Party mit n Personen am gleichen Tag Geburtstag haben berechnen wir wie folgt. Das komplementäre Ereignis, daß keine 2 der Personen am gleichen Tag Geburtstag haben ist $\frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365-n+1)}{365^n}$. Bereits bei $n = 23$ ist dies ~ 0.4927 also ist die Chance für 2 mit gleichen Geburtstag bereits mehr als 50%.

1.5.13 Definition. Bedingte Wahrscheinlichkeit.
Unter der BEDINGTEN WAHRSCHEINLICHKEIT $P(E/E_0)$ versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis E eintritt, wenn man schon weiß, daß das Ereignis E_0 eintritt (oder eingetreten ist).

Z.B. sei beim zweimaligen Werfen einer Münze E_0 das Ereignis, daß die erste Münze auf Kopf fällt und E das Ereignis, daß die zweite Münze auf Kopf fällt. Dann hängt E offensichtlich nicht von E_0 ab, also ist $P(E/E_0) = P(E)$.

Hingegen ist beim zweifachen Ziehen einer Karte aus $4 \cdot 8$ Karten (ohne die erste zurückzustecken) die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Karte ein As ist $\frac{4}{4 \cdot 8} = \frac{1}{8}$. Jene, daß die zweite ein As ist hängt nun aber davon ab ob wir bereits ein As gezogen und somit entfernt haben, dann ist sie $\frac{3}{4 \cdot 8 - 1} = \frac{3}{31} < \frac{1}{8}$, oder ob wir beim ersten Zug kein As erwischt haben, dann ist sie $\frac{4}{4 \cdot 8 - 1} = \frac{4}{31} > \frac{1}{8}$.

1.5.14 Satz über die bedingte Wahrscheinlichkeit.
Es ist $P(E/E_0) = P(E \cap E_0)/P(E_0)$.

Beweis. Es ist $P(E/E_0) = |E \cap E_0|/|E_0| = (|E \cap E_0|/|X|)/(|E_0|/|X|) = P(E \cap E_0)/P(E_0)$. □

Diese Formel kann umgekehrt verwendet werden, um die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen zweier Ereignisse E_1 und E_2 wie folgt zu bestimmen:

1.5.15 Multiplikationssatz.
Es ist $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1)$. *Genau dann wenn* E_1 *und* E_2 *unabhängig voneinander sind, d.h.* $P(E_1) = P(E_1/E_2)$ *gilt, ist* $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$.

Beweis. Die allgemeine Formel folgt sofort aus der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit. Die spezielle Formel $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$ gilt somit genau dann, wenn $P(E_1) = P(E_1/E_2)$ gilt, d.h. daß die Wahrscheinlichkeit von E_1 übereinstimmt mit jener von E_1 unter der Voraussetzung, daß E_2 eingetreten ist, also E_1 unabhängig von E_2 ist. □

Beispiel.
Die Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$ bei einem Kartenspiel von 32 Karten ein As zu ziehen ist $\frac{4}{32}$. Ist die gezogene Karte ein As, so ist die Wahrscheinlichkeit $P(E_2/E_1)$ beim Ziehen einer weiteren Karten wieder ein As zu ziehen $\frac{3}{31}$. Die Wahrscheinlichkeit zwei Asse zu ziehen ist somit $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \sim 0.012$.

Vergleiche dies auch mit der Rechnung im Beispiel nach (1.5.12).

1.5.16 Formel für totale Wahrscheinlichkeit.

$$E \subseteq E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_k \;\Rightarrow\; P(E) = \sum_i P(E_j) \cdot P(E/E_j),$$

wobei $\sqcup$ *für eine Vereinigung disjunkter Mengen steht.*

Beweis. Es ist $E = E \cap \bigsqcup_j E_j = \bigsqcup_j (E \cap E_j)$ und somit

$$P(E) = \sum_j P(E \cap E_j) = \sum_j P(E_j) \cdot P(E/E_j)$$

□

1.5.17 Formel von Bayes.

$$E \subseteq E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_k \;\Rightarrow\; P(E_i/E) = \frac{P(E_i) \cdot P(E/E_i)}{\sum_j P(E_j)\, P(E/E_j)}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}P(E_i)\cdot P(E/E_i) &= P(E\cap E_i) = P(E_i\cap E) = P(E)\cdot P(E_i/E)\\ &= \Big(\sum_j P(E_j)\cdot P(E/E_j)\Big)\cdot P(E_i/E)\end{aligned}$$

□

1.5.18 Beispiele.
Die Wahrscheinlichkeit bei Würfelpokern eine große Straße zu Würfeln können wir wie folgt bestimmen. Es gibt 6^5 möglichen Fälle für die 5 Würfe. Ein günstiger wäre 10,B,D,K,A für 1.,2.,3.,4. und 5. Würfel, aber auch jede andere der 5! Anordnungen ist günstig, also ist $P = \frac{5!}{6^5} = \frac{5}{324} \sim 0.015$.

Die Wahrscheinlichkeit bei Kartenpokern (wobei das Kartenspiel aus 9, 10, B, D, K, A in den 4 Farben bestehen soll) eine große Straße zu erhalten kann wie folgt bestimmt werden: Die Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$ als erste Karte ein As zu erhalten ist $\frac{4}{4\cdot 6}$, jene $P(E_2/E_1)$ für die zweite Karte einen König zu erhalten, wenn die erste ein As war ist $\frac{4}{4\cdot 6-1}$. Die Wahrscheinlichkeit $P(E_1\cap E_2)$ ist somit $\frac{4}{4\cdot 6}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-1}$. Jene, daß dann die 3.te Karte eine Dame ist, ist $\frac{4}{4\cdot 6-2}$, und somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ersten 3 Karten (A,K,D) in dieser Reihenfolge sind, gerade $\frac{4}{4\cdot 6}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-1}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-2}$. Das wir $(A,K,D,B,10)$ in dieser Reihenfolge erhalten hat analog die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4}{4\cdot 6}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-1}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-2}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-3}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-4}$$

Und da es uns auf die Reihenfolge der Karten nicht ankommt erhalten wir insgesamt als Wahrscheinlichkeit

$$5!\cdot\frac{4}{4\cdot 6}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-1}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-2}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-3}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-4} = \frac{128}{5213} \sim 0.024$$

Bei $4\cdot 9$ Karten wäre das entsprechend

$$5!\cdot\frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36-1}\cdot\frac{4}{36-2}\cdot\frac{4}{36-3}\cdot\frac{4}{36-4} = \frac{512}{129591} \sim 0.004$$

Bei $4\cdot 5$ Karten wäre das entsprechend

$$5!\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{4}{16} = \frac{64}{969} \sim 0.066$$

Die Wahrscheinlichkeit beim Würfelpoker ein full-hand mit sagen wir 2 Assen und 3 Könige zu würfeln können wir analog wie folgt bestimmen: Ein günstiger (der 6^5 möglichen) Würfe wäre A,A,K,K,K. Es gibt soviel Umordnungen dieses Falles wie 2-elementige Teilmengen der Plätze 1 bis 5 die den Positionen der Asse entsprechen, also ist die Wahrscheinlichkeit $\binom{5}{2}\frac{1}{6^5} = \frac{5}{3888} \sim 0.0013$. Es gibt $6\cdot 5$ verschiedene Arten von full-houses, also ist die Wahrscheinlichkeit irgendein full-house zu würfeln $6\cdot 5\cdot\frac{5}{3888} = \frac{25}{648} \sim 0.039$.

Beim Kartenspiel hingegen erhalten wir als Wahrscheinlichkeit von 2 Assen und 3 Königen

$$\binom{5}{2}\cdot\frac{4}{4\cdot 6}\cdot\frac{3}{4\cdot 6-1}\cdot\frac{4}{4\cdot 6-2}\cdot\frac{3}{4\cdot 6-3}\cdot\frac{2}{4\cdot 6-4} = \frac{1}{1771} \sim 0.00056$$

und somit für irgend ein full-house $30\cdot\frac{1}{1771} \sim 0.017$.

1.6 Die reellen Zahlen

Von Stiefel stammt folgendes Zitat aus dem Jahre 1544:

> So wie eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie sozusagen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.

1.6.1 Unlösbare Gleichungen in $\mathbb{Q}$.
Es ist $\mathbb{Q}$ ein Körper, ja sogar ein angeordneter Körper, und so dachten die alten Griechen (genauer die Pythagoräer) damit auch das Auslangen zu finden, d.h. daß sich alle relevanten Größen als Verhältnisse ganzer Zahlen beschreiben lassen. Insbesonders sollte dies auch für die Diagonale eines Quadrats mit rationalen oder zumindestens mit Seite 1 gelten. Nach dem Satz von Pythagoras ist nun $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, also $d = \sqrt{2}$.

Es gelang nun Hippasos von Metapont im 5.Jh. v.Chr. zu zeigen, daß $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, die Lösung der Gleichung $x^2 := x \cdot x = 2$ also in $\mathbb{Q}$ nicht gefunden werden kann, und dafür wurde er von den Pythagoräern bei einer Bootsfahrt ertränkt.

Beweis. Indirekt. Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h. es existieren ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q > 0$ und $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. dabei dürfen wir annehmen, daß der Bruch soweit wie möglich gekürzt ist, also p und q relativ prim sind. Es ist $2 = \sqrt{2}^2 = (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $2q^2 = p^2$. Da 2 die linke Seite teilt, muß auch die rechte Seite durch 2 teilbar sein, und somit p gerade sein, also ist $p' = p/2 \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber $2q^2 = (2p')^2$ und somit $2(p')^2 = q^2$. Da 2 auch diese linke Seite teilt ist $q' = q/2 \in \mathbb{Z}$ und somit 2 ein gemeinsamer Teiler von p und q, ein Widerspruch zu ihrer Teilerfremdheit. $\square$

Es gibt also Lücken in $\mathbb{Q}$, d.h. Punkte auf der Zahlengeraden, die nicht rational sind. Wie können wir dieser Punkte Frau werden. Anstelle diese Punkte direkt anzugeben können wir sie auch durch die beiden Teilmengen beschreiben, in die $\mathbb{Q}$ zerfällt, wenn man es dort zerteilt. Für jedem Punkt t der Geraden können wir also die Menge $R := \{x \in \mathbb{Q} : t < x\}$ der rechts liegenden rationalen Punkte und auch die Menge $L := \{x \in \mathbb{Q} : x \leq t\}$ der links liegenden rationalen Punkte betrachten. Diese beiden Mengen bilden eine Zerlegung $\{L, R\}$ von $\mathbb{Q}$ mit $\forall l \in L$ $\forall r \in R$: $l \leq r$. So etwas nennt man einen DEDEKIND'SCHEN SCHNITT von $\mathbb{Q}$, und dieser ist bereits durch die Menge $\emptyset \neq R \subset \mathbb{Q}$ ohne kleinstes Element und mit der Eigenschaft $r \in R$, $r < x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in R$ eindeutig bestimmt, denn dann ist $L := \mathbb{Q} \setminus R$ und aus $l \in L$, $r \in R$ folgt $l < r$, denn andernfalls wäre $l \geq r$ und somit $l \in R = \mathbb{Q} \setminus L$.

Man nennt eine Zahl t SCHNITTZAHL des Dedekind'schen Schnittes, wenn $\forall l \in L\, \forall r \in R : l \leq t \leq r$ gilt.

1.6.2 Proposition. Eindeutigkeit der Schnittzahl.
Die Schnittzahl jedes Dedekind'schen Schnittes ist eindeutig bestimmt (sofern sie existiert).

Beweis. Es seien t und t' zwei Schnittzahlen des Dedekind'schen Schnittes (L, R). O.B.d.A. sei $t < t'$. Dann erfüllt $x := \frac{t+t'}{2}$ die Ungleichung $t = \frac{t+t}{2} < \frac{t+t'}{2} = x < \frac{t'+t'}{2} = t'$. Da t eine Schnittzahl ist, ist $x \in R$ und weil t' eine ist, ist $x \in L$, ein Widerspruch zu $L \cap R = \emptyset$. $\square$

1.6.3 Definition. Vollständig angeordneter Körper.
Unter einem VOLLSTÄNDIGEN ANGEORDNETEN KÖRPER versteht man einen angeordneten Körper für den jeder Dedekind'sche Schnitt eine Schnittzahl besitzt.

Der angeordnete Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist kein vollständig angeordneter Körper, wie der Dedekind'sche Schnitt für $\sqrt{2}$ zeigt.

Hingegen sollte $\mathbb{R}$ ein vollständig angeordneter Körper sein.

1.6.4 Konstruktion von $\mathbb{R}$.
Die MENGE DER REELLEN ZAHLEN definiert man nun als

$$\mathbb{R} := \{R : R \text{ ist Dedekind'scher Schnitt in } \mathbb{Q}\}.$$

Offensichtlich kann man jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ als Dedekind'schen Schnitt $\{x \in \mathbb{Q} : x > r\}$ auffassen. Als Erweiterung zur Ordnung der rationalen Zahlen definiert man ein Ordnung auf $\mathbb{R}$ durch $R \leq R' :\Leftrightarrow R \supseteq R'$.

Wir können nun zeigen, daß $\mathbb{R}$ seinerseits keine Lücken mehr aufweist:

1.6.5 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.
Es sei $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und nicht leer. Dann existiert das INFIMUM $\inf(\mathcal{R})$ *von $\mathcal{R}$, d.h. die größte untere Schranke von $\mathcal{R}$.*

SUPREMUMSPRINZIP. *Es sei $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und nicht leer. Dann existiert das* SUPREMUM $\sup(\mathcal{R})$ *von $\mathcal{R}$, d.h. die kleinste obere Schranke von $\mathcal{R}$.*

Beweis. Sei also $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Als einziger möglicher Kandidat für $\inf \mathcal{R}$ kommt nur $\bigcup \mathcal{R}$ in Frage, denn nach (1.1.5) ist dies die größte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ die alle $R \in \mathcal{R}$ als Teilmengen enthält. Es ist $\bigcup \mathcal{R} \in \mathbb{R}$, d.h. ein Dedekind'scher Schnitt: Wegen $\mathcal{R} \neq \emptyset$ und $R \in \mathcal{R} \Rightarrow R \neq \emptyset$ ist $\bigcup \mathcal{R} \neq \emptyset$. Sei $R_0 \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von $\mathcal{R}$, d.h. $R_0 \supseteq R$ für alle $R \in \mathcal{R}$. Dann ist $R_0 \neq \mathbb{Q}$ und somit auch $\bigcup \mathcal{R} \subseteq R_0$ ungleich $\mathbb{Q}$. Sei nun $\mathbb{Q} \ni r \in \bigcup \mathcal{R}$ und $r < x \in \mathbb{Q}$. Dann ist $r \in R$ für ein $R \in \mathcal{R}$ und somit auch $x \in R \subseteq \bigcup \mathcal{R}$. Schließlich besitzt $\mathcal{R}$ kein kleinstes Element $r_0 \in \mathbb{Q}$, denn ein solches läge in einen $R \in \mathcal{R}$ und wäre damit auch kleinstes Element von R.

Für den zweiten Teil betrachten wir $-\mathcal{R} := \{-x : x \in \mathcal{R}\}$. Dies ist nach unten beschränkt, besitzt also nach dem ersten Teil ein Infimum, und offensichtlich ist $\sup(\mathcal{R}) = -\inf(-\mathcal{R})$. □

$\mathbb{R}$ als vollständig angeordneter Körper.
Weiters erweitert man die Grundrechnungsarten für rationale Zahlen nun auf reelle Zahlen durch

$$\begin{aligned} R + R' &:= \{a + a' : a \in R, a' \in R'\} \text{ und} \\ R \cdot R' &:= \{a \cdot a' : a \in R, a' \in R'\} \text{ falls } R, R' \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen $(-x)y = -xy = x(-y)$ ergibt sich daraus auch eine Definition für $R \cdot R'$ in allen anderen Fällen. Mit etwas Ausdauer kann man nun nachweisen, daß $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist.

Man kann weiters zeigen, daß $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphie, d.h. Umbenennung seiner Elemente, der einzige vollständig angeordnete Körper ist: Sei R ein beliebiger vollständig angeordneter Körper. Dazu zeigt man zuerst, daß die rekursiv definierte Abbildung $n \mapsto \sum_{i=1}^{n} 1$ eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach R injektiv ist und die Addition Multiplikation und Ordnung entsprechend übersetzt. Diese Abbildung läßt sich dann zu einer injektiven und monotonen Abbildung zuerst auf $\mathbb{Z}$ und dann auf $\mathbb{Q}$ erweitern und schließlich, wegen der vollständigen Angeordnetheit auch zu einer solchen $\mathbb{R} \to R$. Man zeigt schlußendlich, daß diese Abbildung die gesuchte Bijektion darstellt.

1.6.6 Satz von Archimedes und Eudoxos.
Satz von Archimedes*: $\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt.*
Satz von Eudoxos*: $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists 0 < n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Es gibt also beliebig große natürliche Zahlen und beliebig kleine positive Kehrwerte natürlicher Zahlen.

Beweis. Satz von Archimedes: Andernfalls wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt und besäße wegen der Vollständigkeit ein Supremum $\sigma := \sup(\mathbb{N})$. Dann wäre aber auch $\sigma - 1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$, denn aus $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq \sigma$ folgt $n+1 \leq \sigma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $n \leq \sigma - 1$. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß σ die kleinste Schranke ist.

Satz von Eudoxos: Andernfalls wäre $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ für alle $0 < n \in \mathbb{N}$ und somit $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, ein Widerspruch zum Satz von Archimedes. □

1.6.7 Folgerung. Existenz der Wurzel.
Die Quadratwurzel *von $\alpha \geq 0$ existiert in $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.*

Entsprechendes kann man auch für die n-te Wurzel positiver Zahlen a zeigen, und man schreibt $\sqrt[n]{a}$ oder auch $a^{1/n}$ für diese.

Beweis. Es sei $R := \{x \geq 0 : x^2 \geq \alpha\}$. Dann ist $R \neq \emptyset$, denn nach dem Satz von Archimedes existiert sogar ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq \alpha < n \leq n^2$. Weiters ist R nach unten durch 0 beschränkt. Wegen (1.6.5) existiert also das Infimum $t := \inf(R) \geq 0$. Bleibt zu zeigen, daß $t^2 = \alpha$ gilt (also $t = \sqrt{\alpha}$ ist).
Angenommen $t^2 < \alpha$, dann betrachten wir $t + \frac{1}{n}$ und erhalten $(t + \frac{1}{n})^2 = t^2 + \frac{2}{n}t + \frac{1}{n^2} = t^2 + \frac{1}{n}(2t + \frac{1}{n}) \leq t^2 + \frac{1}{n}(2t+1) < \alpha$ fÜr n mit $\frac{1}{n} < \frac{\alpha - t^2}{2t+1}$, welche nach dem Satz von Eudoxos existieren. Damit wäre $t + \frac{1}{n} \notin R$ und somit auch eine untere Schranke von R, denn aus $x^2 \geq \alpha > (t + \frac{1}{n})^2$ folgt (wie man leicht sieht), daß $x \geq t + \frac{1}{n}$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu $t = \inf(R)$.
Angenommen $t^2 > \alpha$. Dann betrachten wir $t - \frac{1}{n} \geq 0$ und erhalten $(t - \frac{1}{n})^2 \geq t^2 - \frac{1}{n}2t \geq \alpha$ für n mit $\frac{1}{n} \leq \min\{t, \frac{t^2-\alpha}{2t}\}$, welche wieder nach dem Satz von Eudoxos existieren. Somit ist $t - \frac{1}{n} \in R$ und t keine untere Schranke, erneut ein Widerspruch zu $t = \inf(R)$.
Verbleibt also nur die Möglichkeit $t^2 = \alpha$. □

1.7 Die komplexen Zahlen

Von Leibniz stammt folgende Aussage aus 1702:

> ... imaginäre Wurzeln als feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein.

Bzw. Euler 1768:

> ... dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Der Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind und gemeiniglich imaginäre Zahlen oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß allein in der Einbildung statt finden.

1.7.1 Bemerkung. Probleme mit Wurzel.
Keine Lösung von $x^2 = -1$ liegt in $\mathbb{R}$.

Beweis. Angenommen eine Lösung, die wir mit i bezeichnen, liegt in $\mathbb{R}$. Dann ist $-1 = i^2 \geq 0$ und somit $1 \leq 0$, ein Widerspruch zu (1.2.6). $\square$

1.7.2 Definition. Körper der komplexen Zahlen.
Wir betrachten folglich eine virtuelle Lösung i (die sogenannte IMAGINÄRE EINHEIT) von $i^2 = -1$ und versuchen damit herumzurechnen. Insbesonders sollten wir reelle Zahlen hinzuaddieren und hinzumultiplizieren können, also Ausdrücke der Form $a + i\,b$ bilden können. Da das kommutativ- und das distributiv-Gesetz auch hier gelten sollte ergibt sich

$$\begin{aligned}(a + i\,b) + (a' + i\,b') &= (a + a') + i\,(b + b') \qquad \text{und}\\ (a + i\,b) \cdot (a' + i\,b') &= a.\ a' + i\,b\,a' + a\,i\,b' + i\,b\,i\,b' = a.\ a' + i\,a'\,b + i\,a\,b' - b\,b'\\ &= (a\,a' - b\,b') + i(a\,b' + a'\,b).\end{aligned}$$

Somit definieren wir die MENGE DER KOMPLEXEN ZAHLEN durch $\mathbb{C} := \{a+i\,b : a, b \in \mathbb{R}\}$ mit Addition $(a+i\,b)+(a'+i\,b') := (a+a')+i\,(b+b')$ und Multiplikation $(a + i\,b) \cdot (a' + i\,b') := (a\,a' - b\,b') + i(a\,b' + a'\,b)$ und erhalten den Körper der komplexen Zahlen. Man nennt a den REALTEIL $\mathfrak{Re}(z)$ der komplexen Zahl $z = a + i\,b$ und b den IMAGINÄRTEIL $\mathfrak{Im}(z)$ von z. Das multiplikative Inverse ist dabei durch $(a + ib)^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)\cdot(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$ gegeben. Formal einwandfreier können wir $\mathbb{C}$ auch mit $\mathbb{R}^2$, d.h. $a + i\,b$ mit dem dem Punkt (a, b) in der Ebene mit KARTESISCHEN KOORDINATEN a und b identifizieren, und Addition und Multiplikation durch

$$\begin{aligned}(a, b) + (a', b') &:= (a + a', b + b')\\ (a, b) \cdot (a', b') &:= (a\,a' - b\,b', a\,b' + a'\,b)\end{aligned}$$

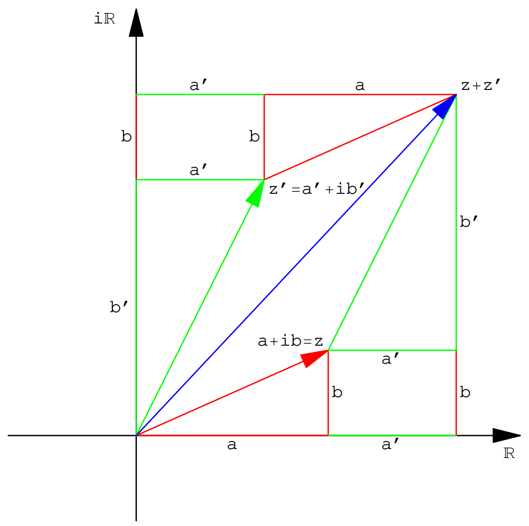
definieren, und nun die Körperaxiome nachzuweisen. Um z.B. die Existenz multiplikativer Inverser zu zeigen, muß man zu gegebenen $(a, b) \neq (0, 0)$ einen Punkt (a', b') finden mit $(1, 0) = (a', b')\cdot(a, b) = (a'\,a - b'\,b) + i(a'\,b + a\,b')$, also folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned}a'\,a - b'\,b &= 1\\ a'\,b + a\,b' &= 0\end{aligned}$$

Für $b \neq 0$ ergibt sich aus der letzten Gleichung $a' = -\frac{a\,b'}{b}$ und durch Einsetzen in die erste $-\frac{a\,b'}{b}\,a - b'\,b = 1$, also $b' = -\frac{b}{a^2+b^2}$ und somit $a' = \frac{a}{b}\,\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Für $b = 0$ ist $a \neq 0$ und man erhält die selbe Lösung indem man zuerst $b' = -\frac{a'\,b}{a}$ errechnet.

Die Addition von komplexen Zahlen als Punkten in der Ebene entspricht somit der Addition der (Orts)vektorenen. Also ist die Addition mit einer fixen komplexen Zahl $a + i\,b$ die Translation um den Vektor mit Koordinaten $(a.b)$.



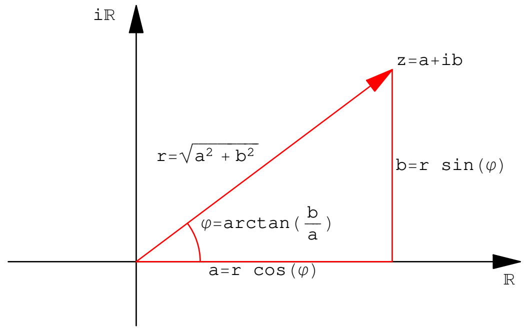
Um auch die Multiplikation mit komplexen Zahlen geometrisch zu beschreiben benötigen wir POLARKOORDINATEN, d.h. wir legen Punkte nun durch den Abstand r vom 0-Punkt und den Winkel φ von der x-Achse zum Ortsvektor fest. Die kartesischen Koordinaten eines Punktes erhalten wird dann wie folgt aus den Polarkoordinaten:

$$x = r\,\cos(\varphi),\ y = r\,\sin(\varphi),$$

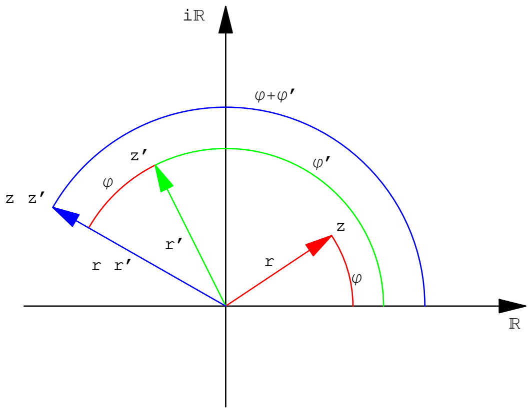
also

$$z = x + i\,y = r\,(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))$$

die POLARZERLEGUNG von z. Umgekehrt ist nach Pythagoras $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ also $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ falls $x > 0$ und $\varphi = \operatorname{arccot}(\frac{x}{y})$ falls $y > 0$ bzw. $\varphi = \pi + \arctan(\frac{y}{x})$ falls $x < 0$ und $\varphi = \pi + \operatorname{arccot}\frac{x}{y}$ falls $y < 0$. Beachte jedoch, daß der Winkel φ für den 0-Vektor völlig willkürlich ist, und für andere Punkte auch nur bis auf Addition von 2π festgelegt ist.



Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl mit Polarkoordinaten (r, φ) ist nun gerade die DREHSTRECKUNG um den Winkel φ und den Streckungsfaktor r, d.h. Ein Punkt mit Polarkoordinaten (r', φ') wird durch Multiplikation mit (r, φ) auf den Punkt mit Polarkoordinaten $(r\,r', \varphi + \varphi')$ abgebildet.



Rechnet man obige Beschreibung der Multiplikation komplexer Zahlen von Polarkoordinaten auf kartesische Koordinaten um so erhält man:

$$\begin{aligned} r\,r'\ \cos(\varphi+\varphi') &= \Re e((x+i\,y)\,(x'+i\,y')) = x\,x' - y\,y' \\ &= r\cos(\varphi)\,r'\cos(\varphi') - r\sin(\varphi)\,r'\sin(\varphi') \\ r\,r'\ \sin(\varphi+\varphi') &= \Im m((x+i\,y)\,(x'+i\,y')) = x\,y' + x'\,y \\ &= r\cos(\varphi)\,r'\sin(\varphi') + r\cos(\varphi')\,r'\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich nach Division durch $r\,r'$ die ADDITIONSTHEOREME von Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi+\varphi') &= \cos(\varphi)\ \cos(\varphi') - \sin(\varphi)\ \sin(\varphi') \\ \sin(\varphi+\varphi') &= \cos(\varphi)\ \sin(\varphi') + \cos(\varphi')\ \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Der Körper $\mathbb{C}$ kann aber leider nicht mehr angeordnet werden, denn in jedem angeordneten Körper gilt $x^2 \geq 0$ für alle x und somit wäre $-1 = i^2 \geq 0$. Dann wäre aber $1 \leq 0 < 1^2 = 1$ nach (1.2.6) ein Widerspruch.

1.7.3 Folgerung. Formel von Moivre.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $\Big(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi)\Big)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$.

Beweis. Dies folgt sofort durch Induktion aus der Darstellung der Multiplikation in Polarkoordinaten. □

1.7.4 Folgerung. Wurzeln komplexer Zahlen.
Es gibt genau n n-te Wurzeln jeder komplexen Zahl $z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) \neq 0$ nämlich $\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\ \sin(\frac{\varphi+2k\pi}{n}))$ für $k = 0, \ldots, n-1$.

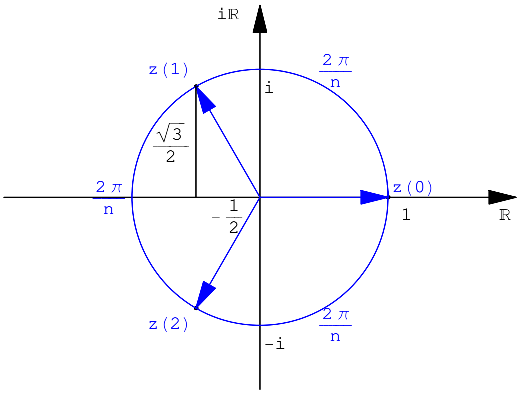
Beweis. Die Lösungen der Gleichung

$$r'(\cos(\varphi') + i\sin(\varphi')) = (r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi)))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

sind gerade durch $r' = r^n$ und $\varphi' - n\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$ gegeben, also durch $r = \sqrt[n]{r'}$ und $\varphi = \frac{\varphi'+2\,k\,\pi}{n}$. □

Z.B. erhält man die 3-ten Einheitswurzeln, d.h. komplexen Zahlen z mit $z^3 = 1$ als

$$\begin{aligned} z_0 &:= \cos(0) + i\,\sin(0) = 1; \\ z_1 &:= \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ z_2 &:= \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



1.7.5 Lemma. Quadratische Gleichung.
Die (möglicherweise komplexen) Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{C}$ *sind*

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Beweis. Wir können die Gleichung wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} &x^2 + p\,x + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + 2\,x\,\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Leftrightarrow\ &x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

□

1.7.6 Bemerkung. Cardano'sche Formeln.
Es gibt die Cardano'schen Formeln für Lösungen polynomiale Gleichungen 3. und 4. Ordnung.

Gleichungen höherer Ordnung lassen sich im Allgemeinen nicht mehr mittels Wurzelziehen auflösen. Jedoch gilt der

1.7.7 Fundamentalsatz der Algebra.
Jedes nicht-konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ *besitzt eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$. *Man sagt dafür auch,* $\mathbb{C}$ *ist* ALGEBRAISCH ABGESCHLOSSEN.

Ein Beweis wäre an dieser Stelle nur sehr aufwendig zu führen, siehe jedoch (3.4.8) für einen Beweis.

1.7.8 Folgerung. Zerlegung in linear-Faktoren.
Jedes Polynom $p : x \mapsto \sum_{j=0}^n p_j\, x^j$ *in* $\mathbb{C}[x]$ *läßt sich wie folgt in linear-Faktoren zerlegen:*

$$p(x) = p_n \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

wobei p_n *der führende Koeffizient und* $x_1, \dots, x_n$ *die (algebraisch gezählten) Nullstellen von* p *sind.*

Beweis. Wir machen Induktion nach $n = \mathrm{Grad}(p)$. Nach dem Fundamentalsatz (1.7.7) existiert eine Nullstelle x_1 von p und nach (1.4.14) ist $p(x) = (x-x_1) \cdot q(x)$ für ein Polynom q vom Grad $n-1 < n$ und höchsten Koeffizienten $q^{n-1} = p^n$. Nach Induktionsannahme ist $q(x) = q^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1}(x - y_i)$, wobei y_i die Nullstellen von q und somit auch welche von p sind. $\square$

Beispiel.
Es sei $p(z) := z^3 - 1$. Dann ist offensichtlich $z_0 = 1$ eine Nullstelle und somit können wir (mittels Hornerschema) $p(z)$ durch $z - 1$ dividieren und erhalten $p(z) = (z - 1) \cdot (z^2 + z + 1)$. Die Nullstellen von $z^2 + z + 1$ sind wegen (1.7.5) durch

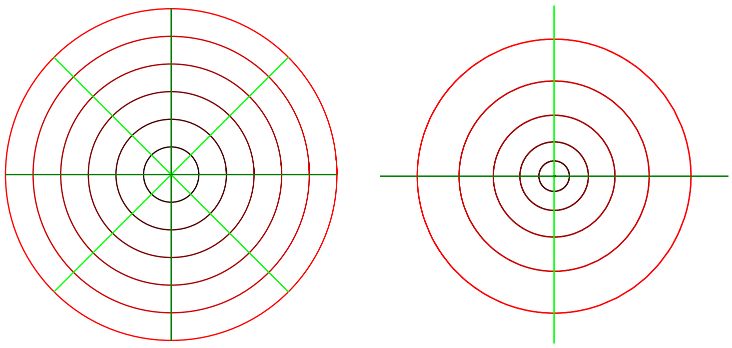
$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-1)\left(\frac{3}{4}\right)} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

gegeben, also ist

$$p(z) = (z - 1)\Big(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big),$$

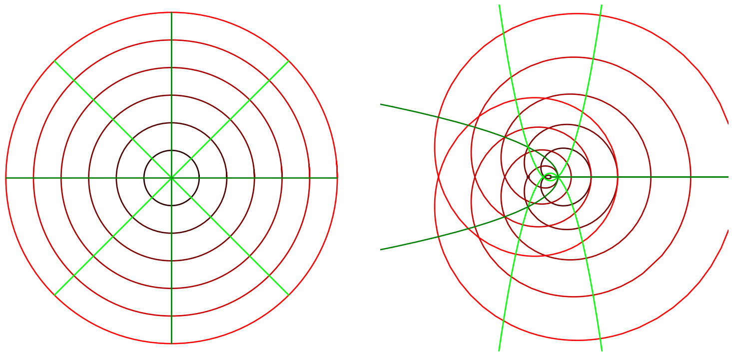
in Übereinstimmung mit (1.7.4).

Bemerkung.
Komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wie z.B. Polynome $f \in \mathbb{C}[z]$, sind nach Definition Teilmengen von $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ und somit schwer zu visualisieren. Am besten ist wohl Definitionsbereich $\mathbb{C}$ und Wertebereich $\mathbb{C}$ getrennt zu zeichnen, und die Funkion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadurch anzudeuten, daß man gewisse Linien (wie z.B. konzentrische Kreise und Halbstrahlen durch 0) im Definitionsbereich und deren Bilder unter f im Wertebereich einzeichnet. Für die Funktion $z \mapsto z^2$ gibt dies z.B.

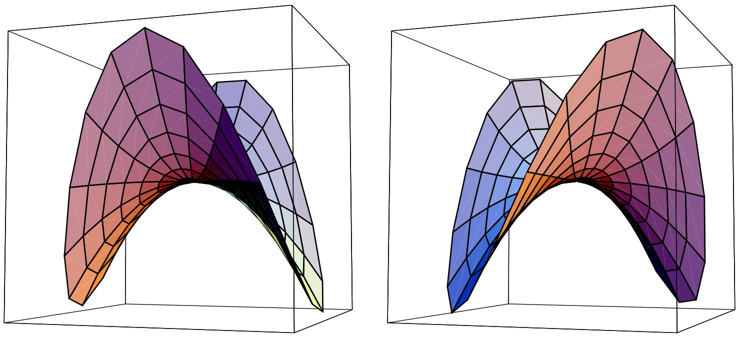


Es wird also die Ebene zweimal um den Nullpunkt herumgewickelt, und der Abstand der Punkte zum Nullpunkt dabei quadriert.

Diese Darstellung wird allerdings schnell kompliziert, denn z.B. für $z \mapsto z^2+z+1$ sieht sie so aus:



Eine andere Möglichkeit ist den Realteil $z \mapsto \mathfrak{Re}(f(z))$ und getrennt davon den Imaginärteil $z \mapsto \mathfrak{Im}(f(z))$ als Funktionen von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und somit als Gebirge über der Ebene zu zeichnen. Für $x + i\,y = z \mapsto z^2 = (x^2 - y^2) - i\,x\,y$ sieht das wie folgt aus:



Resumeé

Wir haben nun alle wichtigen Zahlenbereiche durchbesprochen. Es ist allerdings letztlich nicht so entscheidend was die Zahlen sind sondern was sie können, d.h. daß wir den vollständig angeordneten Körper $\mathbb{R}$ und den algebraische abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}$ erhalten haben mit allen Konsequenzen die sich daraus ergeben. Somit können wir frei nach Wittgenstein "die Leiter wegwerfen, nachdem wir mit ihrer Hilfe hinaufgestiegen sind".

Wir sollten allerdings nicht alles von unterwegs vergessen, denn einerseits haben wir "mathematics at work" gesehen. Z.B. wie man durch Mengentheoretische Konstruktionen, Lösungen die von vornherein nicht existieren so beschreiben und auf ein gesichertes Fundament stellen kann, daß man wie gewünscht mit ihnen rechnen kann: Beim Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ waren die Elemente des kartesischen Produkts $\mathbb{R}^2$ also Paare, von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ waren es Dedekind'sche Schnitte (also Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ waren es Äquivalenzklassen von Paaren in $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ und von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ Äquivalenzklassen von Paaren in $\mathbb{N}^2$. Gleichzeitig haben wir erkannt, daß Computer üblicherweise mit anderen Zahlen (nämlich Restklassen modulo 2, 256 oder ähnlichen) also in $\mathbb{Z}_m$ rechnen. Wir haben dabei auch kennengelernt, wie man mathematische Beweise führen kann, insbesonders die Methode des indirekten Beweises und der vollständigen Induktion. Weiters haben wir erste Einblicke in die Gebiete der Algebra (Gruppe, Ring, Körper, etc.), der Kombinatorik (Permutation, Variation, Kombination, etc.), der Zahlentheorie (Teilbarkeit, Primzahlen, ggT, etc.), der Wahrscheinlichkeitstheorie, dem Rechnen mit Polynomen erhalten sowie Verfahren (Algorithmen) wie man dies auch am Computer umsetzen kann.

2 Konvergenz von Folgen und Reihen

2.1 Motivation

Wir wollen damit beginnen anhand einiger Beispiele zu erläutern, warum wir uns mit Analysis und damit mit Grenzprozessen oder ungenau formuliert dem unendlich Kleinen beschäftigen müssen.

EXAM

2.1.1 Der freie Fall.
In der Physik erkennt man, daß sich Körper, die keinen Kräften ausgesetzt sind, gleichförmig bewegen, d.h. daß ihre Geschwindigkeit konstant bleibt, also in gleicher Zeit gleich langer Weg zurückgelegt wird. Falls andererseits eine konstante Kraft $F \neq 0$ (wie z.B. die Erdanziehung in Bodennähe) auf den Körper wirkt, so ändert sich seine Geschwindigkeit proportional zur vergangenen Zeit und zur Kraft. Sei also $v(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t (wir setzen der Einfachheit halber $v(0) = 0$ voraus) und Δt eine Zeitspanne, dann gilt

$$v(t + \Delta t) = v(t) + m \cdot \Delta t \cdot F$$

mit einem Proportionalitätsfaktor m. Setzen wir $t := 0$ und $s := \Delta t$, so erhalten wir $v(s) = v(0) + m\,F\,s$. Nun interessiert uns aber nicht primär die Geschwindigkeit sondern der zurückgelegte Weg $x(t)$. Mittlere Geschwindigkeiten v sind per Definition der Quotient aus zurückgelegten Weg und verstrichener Zeit, die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ sollte also durch $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ angenähert werden, und zwar umso besser, je näher $t + \Delta t$ an t liegt, d.h. je kleiner $|\Delta t|$ ist. Dies ist der Anstieg der Sehne von x im Zeit-Weg-Diagramm. Die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ sollte also der Anstieg der Tangente zum Zeitpunkt t sein, d.h.

$$v(t) := x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

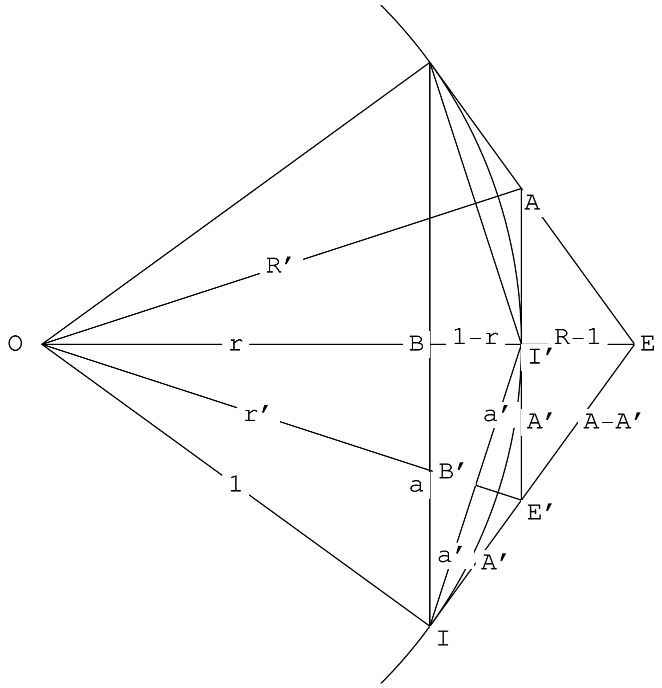
Vorläufig nur durch Probieren erhalten wir die Lösung $x(t) := x(0) + \frac{m\,F}{2}\,t^2$ dieser Differentialgleichung, denn dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= \frac{x(0) + \frac{m\,F}{2}\,(t + \Delta t)^2 - x(0) + \frac{m\,F}{2}\,t^2}{\Delta t} \\ &= \frac{m\,F}{2}\,(2\,t + \Delta t) \to m\,F\,t = v(t). \end{aligned}$$

Eine Konsequenz davon ist, daß geworfene/geschossene Gegenstände sich längs einer Parabel bewegen (mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit).

2.1.2 Berechnung von π.
Per Definition ist π die Länge eines Halbkreises mit Radius 1 oder auch die Fläche eines Vollkreises mit selben Radius. Natürlich ist nicht klar, daß dies die gleiche Zahl liefert. Auch ist uns vorerst nur bekannt, wie die Fläche von Rechtecken und damit von rechtwinkeligen Dreiecken berechnet werden kann. Und ebenso nur die Länge von Polygonzügen. Die Länge einer Kurve $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ können wir nur durch die Länge von Polygonzügen $c(0), c(t_1), \dots, c(t_{n-1}), c(1)$ annähern, wobei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} = t_n = 1$ eine Zerlegung der Strecke von 0 nach 1 ist. Wir definieren folglich die Länge der Kurve $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ als $\sup\{\sum_{k=1}^n |c(t_k) - c(t_{k-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < \dots < t_n = 1\}$. Nun betrachten wir regelmäßige Vielecke, die wir dem Einheitskreis ein- und umschreiben.

Die Fläche des Einheitskreises liegt dann offensichtlich zwischen jener der eingeschriebenen und der umgeschriebenen Vielecke.



Es sei

- r ... der Radius des Inkreises des eingeschriebenen n-Ecks
- a ... die halbe Seitenlänge des eingeschriebenen n-Ecks
- $u = na$ ... der halbe Umfang des eingeschriebenen n-Ecks
- $f = nar$ ... die Fläche des eingeschriebenen n-Ecks
- R ... der Radius des Umkreises des umschriebenen n-Ecks
- A ... die halbe Seitenlänge des umschriebenen n-Ecks
- $U = nA$ ... der halbe Umfang des umschriebenen n-Ecks
- $F = nA = U$ ... die Fläche des umschriebenen n-Ecks

Sei weiters

- O ... der Mittelpunkt des Kreises
- B ... der Berührpunkt des Inkreises des eingeschriebenen n-Ecks
- I ... eine benachbarte Ecke des eingeschriebenen n-Ecks
- E ... eine Ecke des umschriebenen n-Ecks

Entsprechend bezeichnen gestrichene Variablen die selben Größen aber für n'-Ecke mit $n' = 2n$. Dann sind folgende rechtwinkelige Dreiecke ähnlich:

$$\Delta(IBE) \sim \Delta(E'I'E) \sim \Delta(OBI) \sim \Delta(OIE).$$

Somit gilt:

$$a : (R - r) : A = A' : (R - 1) : (A - A') = r : a : 1 = 1 : A : R.$$

Damit ist $\frac{a}{A'} = \frac{R-r}{R-1} = \frac{1/r-r}{1/r-1} = \frac{1-r^2}{1-r} = 1 + r$, also

$$\frac{1}{A'} = \frac{1+r}{a} = \frac{1}{a} + \frac{r}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{A}.$$

Somit ist

$$U' = n'A' = 2n\frac{1}{1/a + 1/A} = \frac{2}{1/u + 1/U},$$ das HARMONISCHE MITTEL.

Es ist

$$f' = n'a'r' = n'\Delta(OII') = 2n\frac{a}{2} = n\,a = u,$$

also

$$F' = U' = \frac{2}{1/u + 1/U} = \frac{2}{1/f' + 1/F}.$$

Weiters ist wegen $a = rA$

$$(f')^2 = (na)^2 = (nar)(nA) = f\,F$$

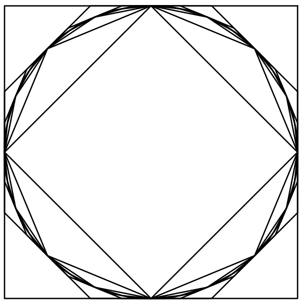
und somit u' das GEOMETRISCHE MITTEL aus u und U':

$$(u')^2 = (f'')^2 = f'\,F' = u\,U'.$$

Diese Gleichungen ermöglichen es also aus den halben Umfängen (u, U) bzw. den Flächen (f, F) jenen der Vielecke mit doppelt sovielen Ecken rekursive zu berechnen. Für die Quadrate ergibt sich $A = 1$ und somit $U = F = 4A = 4$ sowie $R = \sqrt{2}$ und damit $a = A/R = 1/\sqrt{2}$, $u = 4a = 2\sqrt{2}$, $r = \sqrt{1 - a^2} = a$ und $f = 4ar = 2$. Offensichtlich ist $f <$ Fläche des Kreises $< F$ und, da die approximierenden Polygonzüge des Kreises stückweise kürzere Längen haben als die Projektion auf das umschriebene Vieleck, gilt ebenso $u <$ Länge des Halbkreises $\leq U$. Wir machen nun noch eine Fehlerabschätzung: Es ist

$$\begin{aligned}
F' - f' &= \frac{2f'F}{F + f'} - f' = f'\,\frac{F - f'}{F + f'} \\
&= f'\frac{\sqrt{F^2} - \sqrt{fF}}{\sqrt{F^2} + \sqrt{fF}}) = f'\frac{\sqrt{F} - \sqrt{f}}{\sqrt{F} + \sqrt{f}}) = \frac{f'}{(\sqrt{F} + \sqrt{f})^2}\,(F - f) \\
&\sim \frac{\pi}{(2\sqrt{\pi})2}\,(F - f) = \frac{F - f}{4}
\end{aligned}$$

Wegen $4^5 = 2^{10} = 1024 \sim 10^3$, nimmt die Genauigkeit nach jeweils 5 Rekursionsschritten um 3 Dezimalstellen zu. Die Größen u, U, f, F approximieren somit π beliebig genau und insbesonders ist die Fläche und der halbe Umfang des Einheitskreises gleich groß.



Wir werden später die Fläche des Einheitskreises wie folgt durch ein Integral berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - x^2}\,dx &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin(t)^2}\,\cos(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(t)^2\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \cos(2t)\,dt \\
&= \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi + \frac{\sin(\pi)}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{2} = \pi
\end{aligned}$$

2.1.3 Rekursive Berechnung von $\sqrt{a}$.

Die Wurzel erfüllt $\sqrt{a}^2 = a$, d.h. wir versuchen a in ein Produkt $x \cdot y$ zweier gleicher Zahlen zu zerlegen. Sei o.B.d.A. $0 < a < 1$, andernfalls bestimmen wir $1/\sqrt{a} = \sqrt{1/a}$. Wir versuchen es mit $x := 1$, dann wäre $y := a/x = a$ und somit $x > \sqrt{a} > y$. Also probieren wir ein neues besseres $x' := \frac{x+y}{2}$. Das zugehörige $y' := a/x'$ erfüllt $x > x' > \sqrt{a} > y' > y$, denn $\frac{x+y}{2} > \sqrt{x \cdot y} = a$. Fahren wir so fort, so erhalten wir Folgen

$$1 = x > x' > x'' > \cdots > \sqrt{a} > \cdots > y'' > y' > y = a$$

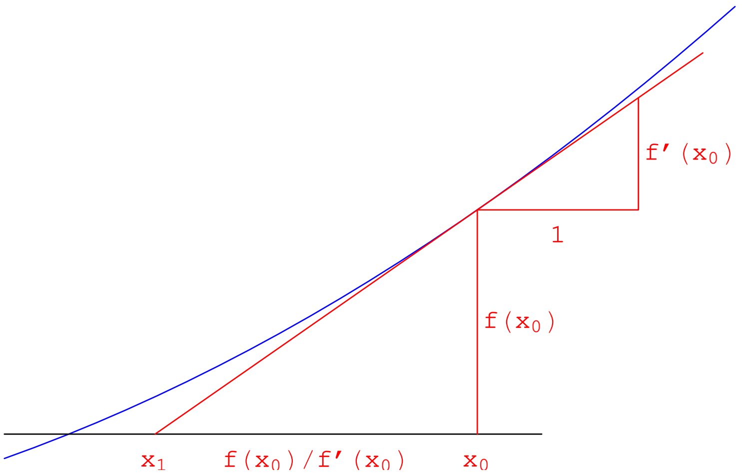
Beachte, daß

$$|x' - \sqrt{a}| = \left|\frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{x^2 + a - 2\sqrt{a}x}{2x}\right| = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}.$$

Grob gesprochen bedeutet dies, daß sich die Anzahl der bereits richtigen Stellen von jeden Schritt auf den nächsten verdoppelt.

Die verallgemeinerungsfähige geometrische Idee die dahinter steckt ist, daß wir eine Nullstelle von $f : x \mapsto x^2 - a$ suchen. Dazu wählen wir eine Näherungsnullstelle $x_0 := 1$, legen die Tangente an f im Punkte $(x_0, f(x_0))$, d.h. $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$ und ersetzen nun x_0 durch die Nullstelle x_1 der Tangente, also

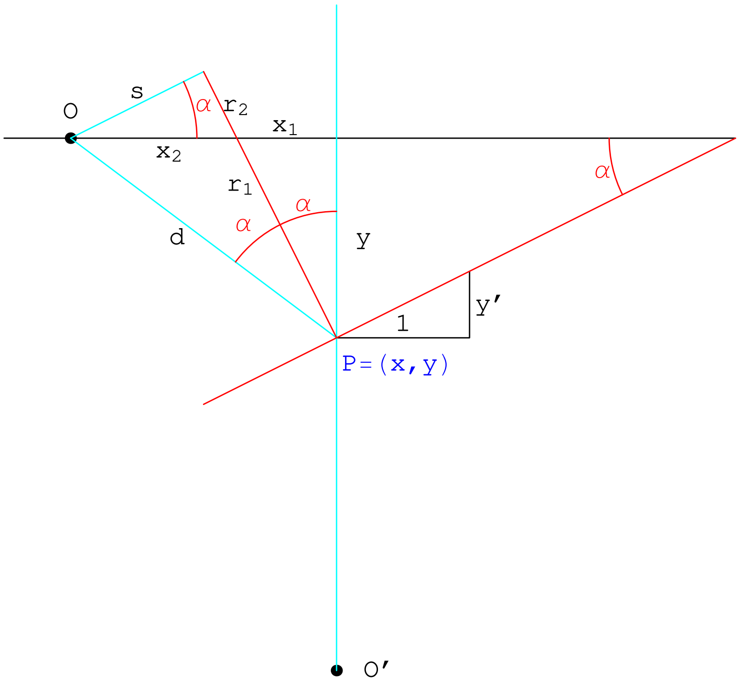
$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - a}{2\,x_0} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$



EXAM

2.1.4 Brennspiegel.

Wir wollen nun einen Spiegel konstruieren, der parallel (zur y-Achse) einfallende Lichtstrahlen in einem Punkt (den wir mit O bezeichnen) konzentriert. Das ist natürlich auch für Radioteleskope und in umgekehrter Richtung für Scheinwerfer interessant. Da Lichtstrahlen kürzeste Verbindungslinien sind, ist der Einfallswinkel auf eine Fläche gleich dem Ausfallswinkel. Sei also (x, y) ein Punkt auf der Schnittkurve und der Anstieg der Schnittkurve $y' = k = \tan(\alpha)$.



Die Ähnlichkeit von Dreiecken ergibt

$$x_1 : y : r_1 = r_2 : s : x_2 = s : (r_1 + r_2) : d$$

und somit

$$\begin{aligned}
\frac{r_1}{s} &= \frac{r_1 + r_2}{s} - \frac{r_2}{s} = \frac{y}{x_1} - \frac{x_1}{y} \\
\frac{x}{y} &= \frac{x_1 + x_2}{y} = \frac{x_1}{y} + \frac{x_2}{y} = \frac{x_1}{y} + \frac{x_2}{s}\frac{s}{y} \\
&= \frac{x_1}{y} + \frac{r_1}{y}\frac{s}{y} = \frac{x_1}{y} + \frac{r_1}{y^2}\frac{r_1}{y/x_1 - x_1/y} \\
&= \frac{x_1}{y} + \frac{x_1^2 + y^2}{y^2(y/x_1 - x_1/y)} = \frac{x_1}{y}\left(1 + \frac{(x_1/y)^2 + 1}{1 - (x_1/y)^2}\right)
\end{aligned}$$

$$= k\,\frac{2}{1-k^2}$$

oder direkter

$$\frac{x}{y} = \tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)^2} = \frac{2k}{1-k^2}$$

wobei wir y als positiven Abstand aufgefaßt haben. Die y-Koordinate des Punktes P ist jedoch negativ, so daß die Gleichung eigentlich

$$\frac{x}{-y} = \frac{2k}{1-k^2}$$

lautet und somit ist

$$k = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}.$$

Wegen $k > 0$ (für $x > 0$) müssen wir $+$ bei $\pm$ wählen. Dies ist eine Differentialgleichung für die Kurve, welche wir mit dem Ansatz $u := \frac{y}{x}$ lösen können:

$$\begin{aligned}
y' &= x\,u' + u \\
x\,u' + u = y' &= u + \sqrt{1+u^2} \\
\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} &= \frac{1}{x} \\
\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} &= \int \frac{dx}{x} \\
\ln(u + \sqrt{1+u^2}) &= C + \ln(x) = \ln(c\,x) \\
u + \sqrt{1+u^2} &= cx \\
1 + u^2 &= (cx-u)^2 = c^2x^2 - 2cxu + u^2 \\
u &= \frac{c^2x^2-1}{2cx} \\
y = u\,x &= \frac{c^2x^2-1}{2c} = \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2c}
\end{aligned}$$

2.2 Metriken

Um die Fehler, die wir beim Approximieren machen abschätzen zu können, müssen wir die Distanz zwischen wahren und approximierten Objekt messen. Wir fassen die wesentlichen Eigenschaften der Distanzfunktion nun zusammen, um unabhängiger davon zu werden, welche Objekte wir vergleichen, wie z.B. reelle Zahlen, komplexe Zahlen, Punkte oder Kurven in der Ebene oder im Raum, etc. .

2.2.1a Bemerkung.
Der Abstand $d(x,y) := |x-y|$ reeller Zahlen x, y hat folgende Eigenschaften:

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, denn $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ($|a| = \pm a$).
- $d(x,y) = d(y,x)$, denn $|a| = |-a|$ (Beweis durch Fallunterscheidungen).
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, denn $|a+b| \leq |a| + |b|$. Dies zeigt man entweder mittels 8 Fallunterscheidungen, je nachdem ob $a \lg 0$, $b \lg 0$ and $a + b \lg 0$, oder mittels nachfolgendem Argumenten

Sublemma.
$|a| \leq c \Leftrightarrow$ *(*$a \leq c$ *und* $-a \leq c$*)*

Beweis. ($\Rightarrow$) ist klar, da $\pm a \leq |a|$, denn entweder ist $\pm a \leq 0$ und somit $|a| \geq 0 \geq \pm a$ oder $\pm a > 0$ und somit $|a| = \pm a$.
($\Leftarrow$) ist ebenfalls klar, denn $|a| = \pm a \leq c$. □

Aus $\pm(a+b) = (\pm a) + (\pm b) \leq |a| + |b|$ folgt somit $|a+b| \leq |a| + |b|$.

2.2.1 Definition. Metrik.
Allgemein heißt eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf einer Menge X, falls die folgenden Eigenschaften (d0), (d1) und (d2) erfüllt sind.

(d0) (POSITIV) DEFINITHEIT: $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
(d1) SYMMETRIE: $d(x,y)=d(y,x)$
(d2) DREIECKSUNGLEICHUNG: $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

Eine Menge X zusammen mit einer Metrik d heißt METRISCHER RAUM. Beachte, daß jede Metrik $d(x,y)\ge 0$ erfüllt, denn $0=d(x,x)\le d(x,y)+d(y,x)=2d(x,y)$.

Warum betrachtet man verschiedene Metriken? Man denke z.B. an das Problem den Abstand zwischen Personen zu beschreiben. Das erste was einen dabei in den Sinn kommt ist wohl die räumliche Distanz (allerdings ist nicht mehr klar von welchen Bezugspunkt aus gemessen). Aber man kann z.B. auch an Distanz im Stammbaum denken, also die minimale Anzahl von Schritten die nötig sind um im Stammbaum von einer zur anderen Person zu gelangen. Eine weitere Möglichkeit wäre die genetische Distanz, d.h. die Anzahl der Nukleoidpaare die in den DNS-Sequenzen verschieden sind (da haben wir allerdings mit eineiigen Zwillingen und mit Klonen Probleme)

Wir wollen als nächstes zeigen, daß die Euklid'ische Distanz $d(x,y):=|x-y|:=\sqrt{\sum_k |x_k-y_k|^2}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ oder sogar $\mathbb{C}^n$ definiert. Dazu benötigen wir folgende Ungleichung:

2.2.3 Cauchy-Schwarz Ungleichung.

$$\sum_{k=1}^n |a_k\cdot b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \text{ für } a_k,b_k\in\mathbb{R}.$$

Beweis. O.B.d.A. ist $A:=\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}>0$ und $B:=\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}>0$. Wir setzen $\alpha_k:=\frac{a_k}{A}$ und $\beta_k:=\frac{b_k}{B}$. Dann ist

$$\sum_k \alpha_k\,\beta_k=\sum_k\sqrt{\alpha_k^2\beta_k^2}\le\sum_k\left(\frac{\alpha_k^2}{2}+\frac{\beta_k^2}{2}\right)=\frac12\sum_k\alpha_k^2+\frac12\sum_k\beta_k^2=\frac12+\frac12=1,$$

wegen der Ungleichung $\sqrt{\alpha\beta}\le\frac{\alpha+\beta}{2}$ zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel. □

Die geometrische Interpretation der Cauchy-Schwarz Ungleichung ist die folgende:

$$|\langle a,b\rangle|\le|a|\,|b|,$$

wobei

$$\langle a,b\rangle:=\sum_{k=1}^n a_k\,b_k$$

das skalare Produkt von a und b ist. Diese Ungleichung erlaubt den Winkel $\angle ab$ den die Vektoren a und b einschließen mittels

$$\cos(\angle ab)=\frac{\langle a,b\rangle}{|a|\,|b|}$$

zu berechnen.

Diese Interpretation legt auch den Beweis nahe, den dieser bestand darin die Vektoren a und b auf Einheitslänge zu normieren, d.h. $\alpha:=\frac{1}{|a|}a$ und $\beta:=\frac{1}{|b|}b$ zu betrachten, und für diese dann $|\langle\alpha,\beta\rangle|\le 1$ mittels Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel zu zeigen.

Nun zur Dreiecksungleichung für die Euklid'ische Metrik:

2.2.4 Minkowski Ungleichung.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $\sum_k (a_k+b_k)^2 > 0$. Es ist nach (2.2.3)

$$\begin{aligned}\sum_k (a_k+b_k)^2 &= \sum_k (a_k+b_k)a_k + \sum_k (a_k+b_k)b_k \\ &\le \sum_k |a_k+b_k|\,|a_k| + \sum_k |a_k+b_k|\,|b_k| \\ &\le \sqrt{\sum_k (a_k+b_k)^2} \cdot \Big(\sqrt{\sum_k a_k^2} + \sqrt{\sum_k b_k^2}\Big)\end{aligned}$$

und Division durch $\sqrt{\sum_k (a_k+b_k)^2}$ liefert das gewünschte Resultat. □

Die geometrische Interpretation der Minkowski Ungleichung ist $|a+b| \le |a|+|b|$, d.h. die Länge der Summe zweier Vektoren ist höchstens so groß wie die Summe der Längen der Vektoren.

Die Idee des Beweises ist

$$|a+b|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a+b, a\rangle + \langle a+b, b\rangle \le |a+b|\,|a| + |a+b|\,|b|,$$

wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung, also ist $|a+b| \le |a| + |b|$.

Die Minkowski Ungleichung liefert die Dreiecksungleichung für die Euklid'ische Distanz im $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$ erhalten wir insbesonders eine Metrik auf $\mathbb{C}$ durch $|a + i\,b| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Damit können wir aber die Euklid'ische Metrik am $\mathbb{C}^n$ analog durch $|x| := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^n}$ definieren und für solche Vektoren mit dem selben Beweis auch die Minkowski Ungleichung zeigen.

2.2.2 Beispiele von Metriken.

- Die Euklid'ische Metrik: Sei $X \subseteq \mathbb{C}^n$. Dann ist

$$d(x,y) := |x-y| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

  eine Metrik auf X wegen der Dreiecksungleichung (2.2.4) für Längen von Vektoren.
- Die Taxi-Metrik: $d(x,y) := \sum_k |x_k - y_k|$ ist ebenfalls eine Metrik auf $X \subseteq \mathbb{C}^n$.
- Die Maximums-Metrik: $d(x,y) := \max\{|x_k - y_k| : 1 \le k \le n\}$ ist auch eine Metrik auf X, denn:
  $\max\{|a_i| : 1 \le i \le n\} = 0 \Leftrightarrow \forall i\colon a_i = 0 \Leftrightarrow: a = 0.$

  $\max\{|(a+b)_i| : 1 \le i \le n\} \le \max\{|a_i| : 1 \le i \le n\} + \max\{|b_j| : 1 \le j \le n\},$

  da $|a_i + b_i| \le |a_i| + |b_i| \le \max\{|a_i| : 1 \le i \le n\} + \max\{|b_j| : 1 \le j \le n\}$.

- Die SUPREMUMS-METRIK: $d(x,y) := \sup\{|x(t) - y(t) : t \in T\}$ ist eine Metrik auf der Menge der Funktionen $x : T \to \mathbb{R}$, welche beschränkt sind, d.h. $d(x,0) < \infty$ erfüllen.
  Die Supremums-Metrik ist eine Metrik, denn:
  $\sup\{|a(t)| : t \in T\} = 0 \Leftrightarrow \ \forall i$: $a(t) = 0 \Leftrightarrow$: $a = 0$.
  $$\sup\{|(a+b)(t)| : t \in T\} \leq \sup\{|a(t)| : t \in T\} + \sup\{|b(s)| : s \in T\},$$
  da $|a(t) + b(t)| \leq |a(t)| + |b(t)| \leq \sup\{|a(t)| : t \in T\} + \sup\{|b(t)| : t \in T\}$.
- Die HAMMING-METRIK: Es sei X die Menge der endlichen Folgen von Elementen einer Menge A und sei $d(x,y)$ die Anzahl der Stellen an welchen sich $x = (x_1, \ldots, x_n)$ von $y = (y_1, \ldots, y_m)$ unterscheidet.

2.2.5 Definition. Bälle.
Es sei d eine Metrik auf einer Menge X, $x_0 \in X$ und $r > 0$. Dann heißt die Menge $U_r(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ der OFFENE BALL um x_0 mit Radius r oder auch r-UMGEBUNG. Ebenso heißt die Menge $B_r(x_0) := \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$ der ABGESCHLOSSENE BALL um x_0 mit Radius r. In obigen Beispielen mit $n = 3$ sind dies

- Eine Kugel
- Ein Oktaeder
- Ein Würfel

Der abgeschlossene Ball um 0 mit Radius r ist bzgl. der Euklid'schen Metrik gegeben durch

$$B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \leq r^2\right\},$$

also einer Kreisscheibe (für $n = 2$) bzw. Kugel (für $n = 3$).

Der abgeschlossene Ball um 0 mit Radius r bzgl. der Taxi-Metrik ist im positiven Quadranten $Q := \{x : \ \forall i : x_i \geq 0\}$ gegeben durch

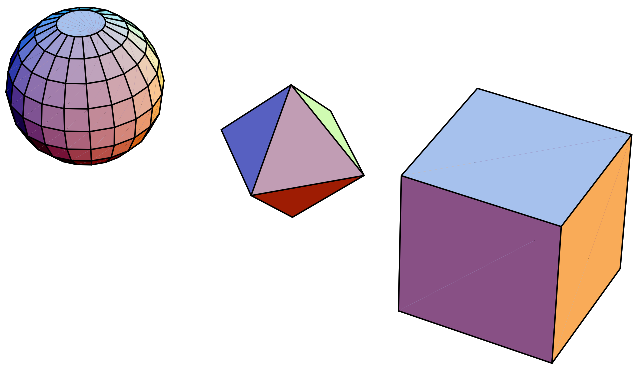
$$B_r(0) \cap Q := \left\{x \in Q : \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq r\right\},$$

also durch jenen Teil welchen die (Hyper-)Ebene $\sum_i x_i = r$ abschneidet. Also ist aus Symmetriegründen der Ball ein auf der spitze stehendes Quadrat (für $n = 2$) bzw. ein Oktaeder (für $n = 3$).

Der abgeschlossen Ball um 0 mit Radius r ist bzgl. der Maximums Metrik gegeben durch

$$B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \forall i : |x_i| \leq r\},$$

also ein achsenparalleler Quader mit Seitenlänge $2r$.



Wenn wir die Euklid'ische Metrik auf $\mathbb{R}$ verwenden, d.h. $d(x,y) := |x-y|$, dann sind die Bälle um $x_0 \in \mathbb{R}$ mit Radius $r > 0$ durch

$$\begin{aligned}
U_r(x_0) &:= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x - x_0 < r, -(x - x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} \\
B_r(x_0) &:= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \le r\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x - x_0 \le r, -(x - x_0) \le r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r \le x \le x_0 + r\}
\end{aligned}$$

gegeben. Dies führt zu folgender

2.2.6 Definition. Intervalle.
Unter einen INTERVALL $I \subseteq \mathbb{R}$ versteht man eine nicht-leere Teilmenge die mit je zwei Elementen $a, b \in I$ auch alle dazwischenliegenden enthält. Jedes Intervall I ist also von der Form $I = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\} =: (\alpha, \beta)$ oder $I = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \le x < \beta\} =: [\alpha, \beta)$ oder $I = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \le \beta\} =: (\alpha, \beta]$ oder $I = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \le x \le \beta\} = [\alpha, \beta]$, wobei $\alpha := \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta := \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, denn einerseits ist $(\alpha, \beta) \subseteq I$, denn aus $\alpha = \inf(I) < x < \sup(I) = \beta$ folgt die Existenz von $a, b \in I$ mit $\alpha \le a \le x \le b \le \beta$ und somit liegt $x \in I$; umgekehrt ist $I \subseteq [\alpha, \beta]$, denn für alle $x \in I$ gilt $\alpha = \inf(I) \le x \le \sup(I) = \beta$.

2.2.7 Lemma. Charakterisierung von Intervallen.
Eine mindestens 2-elementige Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn jeder Dedekind'sche-Schnitt von I eine Teilungszahl in I besitzt.

Beweis. Sei I ein Intervall und (A, B) ein Dedekind'scher Schnitt von I. Sei $A' := \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A : x \le a\}$ und $B' := \{x \in \mathbb{R} : \exists b \in B : x \ge b\}$. Dann ist (A', B') ein Dedekind'scher Schnitt von $\mathbb{R}$ und besitzt somit eine Teilungszahl $t \in \mathbb{R}$. Für $a \in A \subseteq I$ und $b \in B \subseteq I$ ist $a \le t \le b$, also auch $t \in I$, da I ein Intervall ist.

Sei umgekehrt I eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, für die jeder Dedekind'sche Schnitt eine Teilungszahl besitzt. Sei $\alpha := \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta := \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann ist $I \subseteq [\alpha, \beta]$. Sei $\alpha < t < \beta$ und $A := \{x \in \mathbb{R} : x < t\}$ und $B := \{x \in \mathbb{R} : x \ge t\}$. Dann ist (A, B) ein Dedekind'scher Schnitt von $\mathbb{R}$ und auch von I und t ist seine Teilungszahl und somit nach Voraussetzung in I, d.h. das offene Intervall $(\alpha, \beta) \subseteq I$, und somit I ein Intervall. □

2.2.8 Definition. Beschränktheit.
Eine Teilmenge $M \subseteq X$ eines metrischen Raumes heißt BESCHRÄNKT, wenn ihr DURCHMESSER $d(M) := \sup\{d(x,y) : x,y \in M\}$ endlich ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn sie in einem Ball mit hinreichend großen Radius enthalten ist, denn:
($\Leftarrow$) $M \subseteq B_r(x_0) \Rightarrow \forall x,y \in M\colon d(x,y) \leq d(x,x_0)+d(x_0,y) \leq 2r \Rightarrow d(M) \leq 2r$.

($\Rightarrow$) Es sei $d(M) < \infty$ und $x_0 \in M$, dann ist $M \subseteq B_{d(M)}(x_0)$, denn für $x \in M$ ist $d(x,x_0) \leq d(M)$.

2.3 Grenzwerte

Um von sukzessiv besseren Approximationen x_0, x_1, x_2,... sprechen zu können benötigen wir folgenden Begriff:

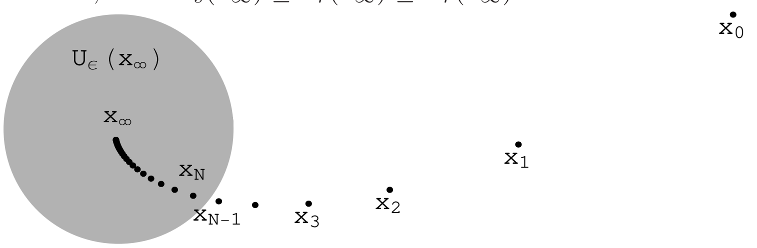
2.3.1 Definition. Folge.
Unter einer (unendlichen) FOLGE in X versteht man eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to X$. Anstelle von $x(n)$ schreibt man auch x_n. Und statt der Folge x spricht man auch von $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ oder präziser $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder noch kürzer $(x_n)_n$ oder ganz gewagt (x_n).

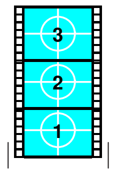
Um nun eine exakte Formulierung dafür zu haben, daß sukzessive Approximationen x_0, x_1, x_2,... einen Punkt x_∞ beliebig gut approximieren, geben wir folgende

2.3.2 Definition. Konvergenz.
Man sagt, daß eine Folge x gegen ein $x_\infty \in X$ KONVERGIERT (symbolisch: $x_n \to x_\infty$ für $n \to \infty$), wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : d(x_n, x_\infty) < \varepsilon,$$

d.h. FAST ALLE (i.e. alle bis auf endlich viele) Folgeglieder im offenen ε-Ball um x_∞ liegen. Falls ein x_∞ existiert, gegen welches die Folge x konvergiert, so heißt x KONVERGENT, andernfalls DIVERGENT. Beachte, daß es zu einer gegebenen Folge x nur höchstens ein x_∞ geben kann – der sogenannte GRENZWERT oder LIMES $\lim_{n\to\infty} x_n$ – gegen welches x konvergiert, denn die Bälle um zwei Punkte $x_\infty \neq x'_\infty$ mit Radius kleiner als $d(x_\infty, x'_\infty)/2$ sind disjunkt. Beachte weiters, daß wir den offenen Ball äquivalent auch durch den abgeschlossenen Ball ersetzen können, denn $B_s(x_\infty) \subseteq U_r(x_\infty) \subseteq B_r(x_\infty)$ für $s < r$.



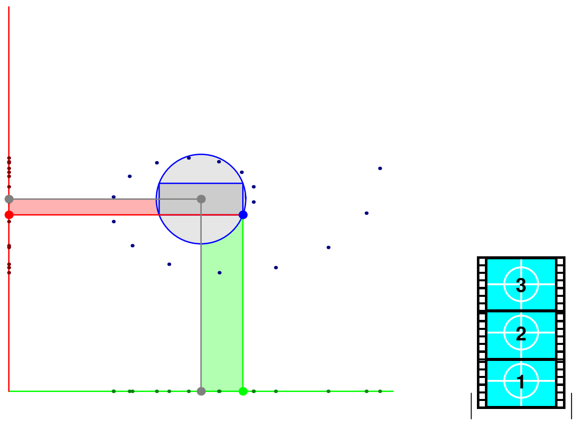


2.3.3 Grundlegendes Beispiel.
Nach dem Satz (1.6.6) von Eudoxos ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Oder man verwendet das Archimed'ische Prinzip aus (1.6.6) welches besagt, daß $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist, also für jede reelle Zahl x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < N$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert somit zu $x := 1/\varepsilon$ so ein $N \in \mathbb{N}$ und für alle $n \geq N$ ist $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{x} = \varepsilon$, also ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Konvergenz von Folgen x_n in metrischen Räumen wird wegen $x_n \to x_\infty \Leftrightarrow d(x_n, x_\infty) \to 0$ auf die Konvergenz reellen Zahlenfolgen zurückgeführt. Das folgende Lemma zeigt dies auch auf andere Weise.

2.3.4 Lemma. (Koordinatenweise) Konvergenz in $\mathbb{R}^p$.
Es sei $x_n := (x_n^1, \dots, x_n^p) \in \mathbb{R}^p$. Dann konvergiert $x_n \to x_\infty$ genau dann, wenn für jedes i die i-te Koordinate $x_n^i \to x_\infty^i$ für $n \to \infty$ konvergiert .



Beweis. ($\Rightarrow$) offensichtlich, wegen $|a^i - b^i| \le |a - b|$.

($\Leftarrow$) folgt aus

$$|a - b| = \sqrt{\sum_k |a^k - b^k|^2} \le \sqrt{p}\, \max\{|a^k - b^k| : 1 \le k \le p\} \quad \square$$

2.3.5 Proposition. Rechenregeln für Limiten reeller Zahlen.
Es konvergiere $x_n \to x_\infty$ und $y_n \to y_\infty$. Dann gilt

- $x_n \pm y_n \to x_\infty \pm y_\infty$.
- $x_n \cdot y_n \to x_\infty \cdot y_\infty$.
- $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_\infty}{y_\infty}$, *falls* $y_\infty \neq 0$ *ist.*

Man kann diese Aussagen auch in Form von Gleichungen wie

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

formulieren. Beachte jedoch, daß dabei die Existenz der rechten Seite nötiger Weise vorausgesetzt wird, wie das Beispiel $\lim_{n\to\infty}(n - n)$ zeigt.

Beweis. Zum Beweis des 1. Punktes sei $\varepsilon > 0$ beliebig:
$x_n \to x_\infty \Rightarrow\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \ge N_1$: $|x_n - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$
$y_n \to y_\infty \Rightarrow\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \ge N_2$: $|y_n - y_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow\ \forall n \ge N := \max\{N_1, N_2\}$:

$$\begin{aligned} |(x_n \pm y_n) - (x_\infty \pm y_\infty)| &= |(x_n - x_\infty) \pm (y_n - y_\infty)| \\ &\le |x_n - x_\infty| + |y_n - y_\infty| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. $x_n \pm y_n \to x_\infty \pm y_\infty$.

Zum Beweis des 2.Punktes zeigen wir zuerst das

Sublemma.
$x_n \to 0$ *und* $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ *beschränkt* $\Rightarrow x_n\, y_n \to 0$.

Beweis des Sublemmas. Sei $|y_n| \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $x_n \to 0$ folgt: $\exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \ge N$: $|x_n| \le \frac{\varepsilon}{K}$, also $|x_n\, y_n| = |x_n|\,|y_n| \le \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon$, also gilt $\lim_{n\to\infty} x_n\, y_n = 0$. □

Nach Aufgabe (2.12) genügt es in der allgemeinen Situation $x_n\, y_n - x_\infty\, y_\infty \to 0$ zu zeigen:

$$x_n\, y_n - x_\infty\, y_\infty = \underbrace{(x_n - x_\infty)}_{\to 0}\ \underbrace{y_n}_{\text{beschr.}} + \underbrace{x_\infty}_{\text{beschr.}}\ \underbrace{(y_n - y_\infty)}_{\to 0} \to 0$$

Zum Beweis des 3.Punktes beachte, daß nach Aufgabe (2.43) $\exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \ge N$: $y_n y_\infty > \frac{y_\infty^2}{2} > 0$. Also gilt für diese n:

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_\infty} = \underbrace{(y_\infty - y_n)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{y_n y_\infty}}_{\text{beschr.}} \to 0$$

und somit konvergiert $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y_\infty}$ und $\frac{x_n}{y_n} = x_n\,\frac{1}{y_n} \to x_\infty\,\frac{1}{y_\infty} = \frac{x_\infty}{y_\infty}$. □

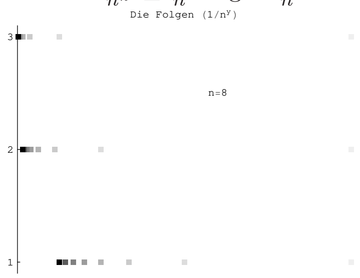
Wir können das vorige Resultat auch wie folgt formulieren:

2.3.6 Folgerung. Raum der konvergenten Folgen.
Es ist der Raum $c := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x$ ist konvergent$\}$ ein Vektorraum, ja sogar ein kommutativer Ring bezüglich der komponentenweisen Multiplikation. Die Abbildung $x \mapsto \lim x$ ist ein Ring-Homomorphismus von $c \to \mathbb{R}$.

Beweis. Daß c ein Vektorraum und Ring ist und die Funktion $\lim : c \to \mathbb{R}$ linear und multiplikativ ist, folgt sofort aus den Rechenregeln für konvergente Folgen. □

2.3.7 Beispiel.
Aus den Rechenregeln (2.3.5) und dem Satz (2.3.3) folgt $\lim_{n\to\infty} 1/n^k = 0$ für jedes $1 \le k \in \mathbb{N}$.

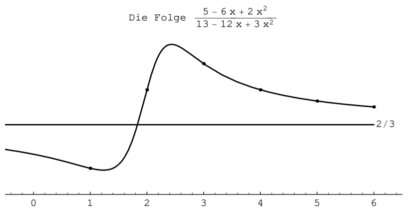
Dies folgt auch aus $0 < \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n}$ wegen $\frac{1}{n} \to 0$.



2.3.8 Lemma. Limiten rationaler Funktionen.
Es sei $f(n) := \frac{p(n)}{q(n)}$ eine rationale Funktion, d.h. p und q Polynome mit $q \ne 0$. Dann läßt sich $\lim_{n\to\infty} f(n)$ wie folgt berechnen. Man kürzt Zähler und Nenner durch die höchste auftretende Potenz n^K von n und erhält

$$\lim_n f(n) = \lim_n \frac{\frac{p_0}{n^K} + \cdots + \frac{p_K}{1}}{\frac{q_0}{n^K} + \cdots + \frac{q_K}{1}} = \frac{p_K}{q_K},$$

wobei dies nur dann existiert, wenn $\operatorname{grad}(p) \le \operatorname{grad}(q) =: K$ ist. Andernfalls siehe (2.3.16).



2.3.9 Proposition. Monotone Konvergenz.
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Umgekehrt ist jede beschränkte monoton wachsende Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergent und es gilt

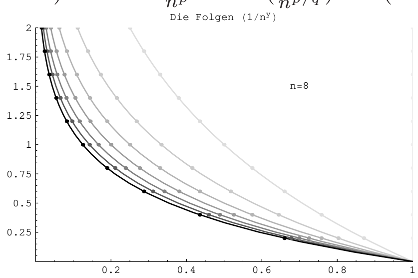
$$\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Klarerweise heißt eine Folge x in $\mathbb{R}$ MONOTON WACHSEND, wenn sie es als Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist, d.h. $x_k < x_{k'}$ aus $k < k'$ folgt.

Beweis. Jede konvergente Folge ist beschränkt, denn es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_\infty| < 1$ für alle $n > N$ und somit liegt x im Ball um x_∞ mit Radius $\max\{1, |x_0 - x_\infty|, \dots, |x_N - x_\infty|\}$.

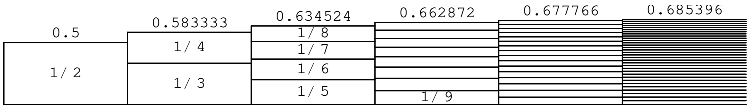
Umgekehrt sei x beschränkt. Dann existiert nach (1.6.5) $x_\infty := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, denn sei $\varepsilon > 0$, dann ist $x_\infty - \varepsilon$ keine obere Schranke und somit existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_N > x_\infty - \varepsilon$ und damit $x_\infty - \varepsilon < x_N \le x_n \le x_\infty < \times_\infty + \varepsilon$ für alle $n \ge N$. □

2.3.10 Beispiel. Limes von $1/n^a$.
Es sei $0 < a := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Dann ist $\lim_n \frac{1}{n^a} = 0$.
Offensichtlich ist $n \mapsto \frac{1}{n^a}$ fallend, denn $n \mapsto n^p$ ist wachsend und somit auch die Umkehrfunktion $n \mapsto n^{1/q}$ von $m \mapsto m^q$ und schlußendlich die Zusammensetzung $n \mapsto n^{p/q} = n^a$. Schließlich ist $m \mapsto 1/m$ fallend und damit auch $n \mapsto \frac{1}{n^a}$. Da $\frac{1}{n^a} > 0$ ist, existiert nach (2.3.9) der Limes $\alpha := \lim_n \frac{1}{n^a} \ge 0$. Somit ist nach (2.3.7) und (2.3.5) $0 = \lim \frac{1}{n^p} = \lim(\frac{1}{n^{p/q}})^q = (\lim \frac{1}{n^a})^q = \alpha^q$, d.h $\alpha = 0$.



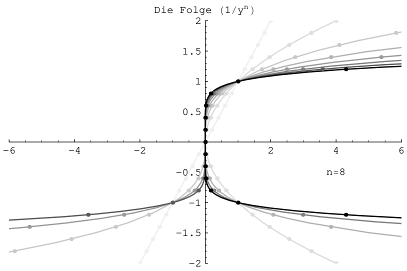
2.3.11 Beispiel. Limes der harmonischen Reihe.
Wir betrachten die Folge $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ für $n \ge 1$ der Partialsummen der HARMONISCHEN REIHE. Diese heißt harmonisch, da $\frac{1}{k}$ gerade das harmonische Mittel $2/(1/a + 1/b)$ der beiden benachbarten Terme $a := \frac{1}{k-1}$ und $b := \frac{1}{k+1}$ ist. Diese Folge ist offensichtlich (streng) monoton wachsend. Sie ist aber unbeschränkt also nicht konvergent, denn für $n = 2^m$ erhalten wir

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \ge \sum_{j=1}^{m} (2^j - 2^{j-1}) \frac{1}{2^j} = \frac{m}{2} \to \infty$$



2.3.12 Beispiel. Limes von q^n.
Es sei $q \in \mathbb{R}$ und $x_n := q^n$ die GEOMETRISCHE FOLGE. Der Name kommt daher, daß x_n das (sogenannte) geometrische Mittel $\sqrt{x_{n-1}\, x_{n+1}}$ der benachbarten Folgeglieder ist.

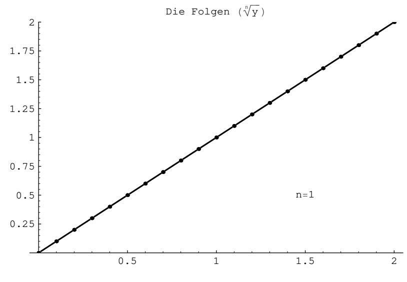
Falls $q = 0$ oder $q = 1$ ist, so ist $x_n = q$ für $n \geq 1$ und somit $\lim_n x_n = q$. Ist $q = -1$, so ist $x_n = 1$ für gerades n und $x_n = -1$ für ungerades n also sind ± 1 zwei Kandidaten für den Grenzwert und x_n ist nicht konvergent. Ist $q > 1$, so ist $q^n = (1+(q-1))^n \geq 1+n\,(q-1)$ nach der BERNOULLI-UNGLEICHUNG (siehe Proseminar Aufgabe ()) und somit unbeschränkt. Ist $q < -1$, so ist $|q^n| = |q|^n$ unbeschränkt und damit auch q^n. Ist $|q| < 1$, so ist $|q^n| = (\frac{1}{1/|q|})^n$ und somit konvergent gegen 0, da nach dem zuvorgesagten $(\frac{1}{|q|})^n$ unbeschränkt ist und monoton ist.



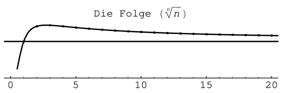
2.3.13 Beispiel. Limes von $\sqrt[n]{a}$.
Es sei $x_n := \sqrt[n]{a}$ mit $a \geq 0$. Falls $a \in \{0, 1\}$, so ist $x_n = a$ und somit gegen a konvergent. Ist $a > 1$, so ist $x_n =: 1 + y_n$ wobei $y_n := x_n - 1 \geq 0$ der Abstand vom vermeintlichen Grenzwert 1. Dieser läßt sich mittels Bernoulli-Ungleichung wie folgt abschätzen: $a = x_n^n = (1 + y_n)^n \geq 1 + n\, y_n$. Also ist $0 < y_n < \frac{a}{n}$ und somit $\lim_n y_n = 0$ und damit $\lim_n x_n = 1$.

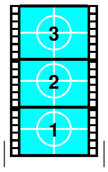
Ist $0 < a < 1$ so ist nach dem vorigen $\lim_n \sqrt[n]{1/a} = 1$ und somit auch

$$\lim_n \sqrt[n]{a} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = 1.$$

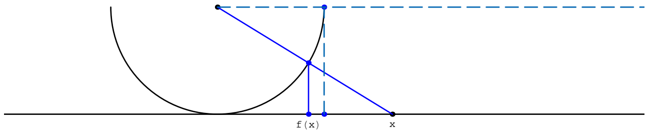


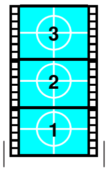
2.3.14 Beispiel. Limes von $\sqrt[n]{n}$.
Es sei $x_n = \sqrt[n]{n}$. Wieder setzen wir $x_n := 1 + y_n$ mit $y_n := x_n - 1 \geq 0$ den Abstand vom vermeintlichen Grenzwert 1. Dieser läßt sich mittels Binomschen Lehrsatz abschätzen: $n = x_n^n = (1 + y_n)^n \geq \binom{n}{2} y_n^2$. Somit ist $0 < y_n \leq \sqrt{2/(n-1)}$, also $\lim_n y_n = 0$ und damit $\lim_n x_n = 1$.





2.3.15 Definition. Uneigentliche Konvergenz.
Wir wollen nun die Definition von Konvergenz auf $\lim_n x_n = \pm\infty$ erweitern. Idee dabei ist, daß beliebig nahe an $+\infty$ zu kommen bedeuten soll, daß die Werte beliebig groß werden. Die übliche bislang verwendete Abstandsfunktion beschreibt dies natürlich nicht, denn $d(x, +\infty) = +\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir müssen uns also ein anderes geometrisches Bild der reellen Zahlen machen und zwar nicht als (Zahlen-)Gerade sondern als beschränktes Gebilde mit Randpunkten $\pm\infty$. Dazu bilden wir $\mathbb{R}$ mittels Zentralprojektion auf den bei 0 berührenden Einheitshalbkreis und dann weiter mittels Normalprojektion in das Intervall von -1 bis 1 ab. Explizit ist dieses streng monoton wachsende Abbildung durch $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ gegeben mit Umkehrabbildung $g : y \mapsto \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Es ist nun sinnvoll $f(\pm\infty) := \pm 1$ zu setzen. Die Abbildung f ist streng monoton wachsend, denn $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}}$ und $x \mapsto x^2$ ist für $x \geq 0$ wachsend und für $x \leq 0$ fallend.





Als neue Metrik d (der sogenannten Metrik der uneigentlichen Konvergenz) für Punkte $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definieren wir

$$d(x, y) := |f(x) - f(y)|.$$

Dann konvergiert eine Folge (x_n) bezüglich d genau dann gegen $x_\infty \in \mathbb{R}$, wenn sie es bezüglich der Euklid'ischen Metrik tut. In der Tat, sei o.B.d.A. $x \geq y$. Dann ist $x - y \geq f(x) - f(y) \geq 0$, denn $x - f(x) = x(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$ ist monoton wachsend, also $d(x, y) := |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.
Umgekehrt ist $y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$ falls $f(y - \varepsilon) < f(x) < f(y + \varepsilon)$, insbesonders also falls $|f(x) - f(y)| \leq \min\{|f(y + \varepsilon) - f(y)|, |f(y - \varepsilon) - f(y)|\} =: \delta > 0$ ist. Also konvergiert $x_n \to x_\infty \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $f(x_n) \to f(x_\infty)$ konvergiert, d.h. $d(x_n, x_\infty)$ gegen 0 geht.

Ist andererseits $x_\infty = +\infty$. Dann konvergiert $x_n \to +\infty$ uneigentlich, d.h. $f(x_n) \to f(x_\infty) = 1$ genau dann, wenn

$$\forall K > 0 \, \exists N \, \forall n \geq N : x_n \geq K.$$

Ebenso gilt: $x_n \to -\infty$ uneigentlich $\Leftrightarrow$

$$\forall K < 0 \, \exists N \, \forall n \geq N : x_n \leq K.$$

In der Tat ist $d(f(x_n), f(+\infty)) \leq \varepsilon := 1 - f(K) \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq f(x_n) \leq 1 \Leftrightarrow K := g(1-\varepsilon) \leq x_n \leq +\infty$. Somit haben wir $\lim_n x_n = \pm\infty$ einen Sinn geben der auch im Einklang zu unseren Definitionen von $\sup M = \pm\infty$ und $\inf M = \pm\infty$ steht.

2.3.16 Proposition. Rechenregel für uneigentliche Limiten.
Die Rechenregeln (2.3.5) gelten auch für uneigentliche Limiten, wenn man mit den Grenzwerten $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wie folgt rechnet.

- $p + (+\infty) = +\infty$ *für* $-\infty < p \le +\infty$,
- $p + (-\infty) = -\infty$ *für* $-\infty \le p < +\infty$,
- $(+\infty) + (-\infty)$ *ist undefiniert,*
- $p \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ *für* $0 < p \le +\infty$,
- $p \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ *für* $0 > p \ge -\infty$,
- $0 \cdot (\pm\infty)$ *ist undefiniert,*
- $p/(\pm\infty) = 0$ *für* $-\infty < p < +\infty$,
- $\pm\infty/p = \pm\infty$ *für* $0 < p < +\infty$,
- $\pm\infty/p = \mp\infty$ *für* $0 > p > -\infty$,
- $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ *ist undefiniert.*

Beweis. Die erste Aussage zeigt man wie folgt (und die anderen ähnlich): Sei $p := \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Dann ist $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$: Sei nämlich $K > 0$ beliebig. Es ist (x_n) nach unten beschränkt, also existiert ein $M > 0$ mit $x_n \ge M$ für alle n. Und wegen $y_n \to +\infty$ existiert ein N mit $y_n \ge K - M$ für alle $n \ge N$, also $x_n + y_n \ge M + (K - M) = K$, d.h. $\lim_n(x_n + y_n) = +\infty$. □

Daß die Ausdrücke $\infty - \infty = (+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ und $p/0$ undefiniert bleiben müssen zeigen folgende Beispiele:

$\lim(n - n^2) = -\infty$	$\lim((n + c) - n) = c$	$\lim(n^2 - n) = +\infty$
$\lim \frac{1}{n^2} \cdot n = 0$	$\lim \frac{1}{n} \cdot (cn) = c$	$\lim \frac{1}{\pm n} \cdot n^2 = \pm\infty$
$\lim \frac{n}{n^2} = 0$	$\lim \frac{cn}{n} = c$	$\lim \frac{n^2}{n} = +\infty$
$\lim \frac{1/n}{1/n^2} = +\infty$	$\lim \frac{c/n}{1/n} = c$	$\lim \frac{1/n^2}{1/n} = 0$
$\nexists \lim \frac{1}{(-1)^n/n}$		

Uneigentliche Grenzwerte rationaler Funktionen.
Es sei $f(n) := \frac{p(n)}{q(n)}$ eine rationale Funktion, d.h. p und q Polynome mit $q \neq 0$ und $K := \mathrm{grad}(p) > \mathrm{grad}(q) =: L$. Dann ist

$$\lim_n f(n) = \lim_n n^{K-L} \cdot \frac{\frac{p_0}{n^K} + \cdots + \frac{p_K}{1}}{\frac{q_0}{n^L} + \cdots + \frac{q_L}{1}} = +\infty \cdot \frac{p_K}{q_L} = \pm\infty,$$

je nachdem ob $p_K/q_L > 0$ oder $p_K/q_L < 0$ ist.

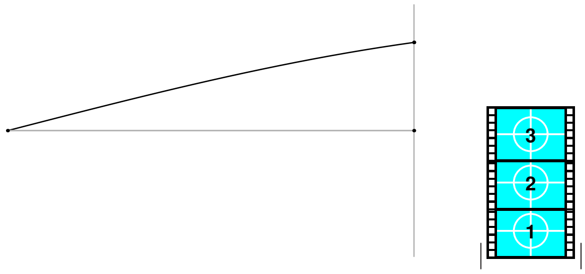
2.4 Häufungswerte

Was bedeutet nun, daß eine Folge $(x_n)_n$ nicht konvergiert? Ein Hinderungsgrund kann sein, daß mehrere Kandidaten für den Grenzwert vorhanden sind. Um dies präziser zu machen geben wir folgende

2.4.1 Definition. Häufungswert.
Ein $x_\infty \in X$ heißt HÄUFUNGSWERT der Folge $x : \mathbb{N} \to X$, falls in jeder ε-Umgebung von x_∞ unendlich viele Folgeglieder liegen, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall n\ \exists\, k > n : x_k \in B_\varepsilon(x_\infty).$$

Eine Folge kann durchaus mehrere Häufungswerte haben. Z.B. hat $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ die Häufungswerte ± 1 und jede Abzählung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ hat alle $x \in \mathbb{R}$ als Häufungswerte.



Unter einer Teilfolge x' einer Folge $x : \mathbb{N} \to X$ versteht man $x' = x \circ n$, wobei $n : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$ streng monoton wachsend ist. D.h. $x' = (x'_0, x'_1, x'_2, \dots)$ entsteht aus $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ durch Wegstreichen aller bis auf abzählbar vieler Elemente $n_0 = n(0)$, $n_1 = n(1), \dots$, $x' = (x'_0, x'_1, x'_2, \dots) = (\not{x}_0, \dots, \not{x}_{n_0-1}, x_{n_0}, \not{x}_{n_0+1}, \dots)$, also $x'_k := x_{n_k}$.

2.4.2 Definition. Limes inferior und superior.
Es sei x eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Sei H die Menge ihrer Häufungswerte. Statt $\inf(H) = \min(H)$ schreibt man auch

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n$$

und nennt dies LIMES INFERIOR und statt $\sup(H) = \max(H)$ schreibt man auch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

und nennt dies LIMES SUPERIOR.

Man sieht wie folgt, daß $\inf(H) = \min(H)$ ist: Sei $\mu := \inf(H)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\mu + \varepsilon$ keine untere Schranke, also existiert ein Häufungswert h mit $\mu \le h < \mu + \varepsilon$. Für $\delta := \mu + \varepsilon - h > 0$ liegen unendlich viele Folgeglieder in der δ-Umgebung um h und somit auch in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(\mu) \supseteq U_\delta(h)$ von μ. Also ist μ ein Häufungswert und damit $\mu = \min(H)$.

Behauptung.
Es sei x eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist genau dann $a = \limsup x$, wenn $\forall \varepsilon > 0$: $\{n : x_n \ge a - \varepsilon\}$ ist unendlich und $\{n : x_n > a + \varepsilon\}$ ist endlich.

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei $a := \limsup x$. Dann ist a ein Häufungswert, also $\{n : a - \varepsilon \le x_n \le a + \varepsilon\}$ unendlich. Wir nehmen indirekt an, daß $\{n : x_n > a + \varepsilon\}$ unendlich sei. Nach (2.4.5) besitzt die entsprechende Teilfolge einen Häufungswert $a' \ge a + \varepsilon$, ein Widerspruch dazu, daß a der größte Häufungswert ist.

($\Leftarrow$) Aus obiger Bedingung folgt insbesonders, daß $\{n : a - \varepsilon \le x_n \le a + \varepsilon\} = \{n : x_n \ge a - \varepsilon\} \setminus \{n : x_n > a + \varepsilon\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich ist, also a ein Häufungswert von x ist. Wir nehmen indirekt an, daß ein größerer Häufungswert $a' > a$ existiert. Wähle $0 < \varepsilon < d(a, a')/2$. Da a' Häufungswert ist, wäre $d(x_n, a') \le \varepsilon$ für unendlich viele n und wegen obiger Bedingung wäre $\{n : d(x_n, a') \le \varepsilon\} \subseteq \{n : x_n > a + \varepsilon\}$ aber endlich, ein Widerspruch. $\square$

2.4.3 Lemma. Häufungswerte via Teilfolgen.
Ein Punkt x_∞ ist genau dann ein Häufungswert der Folge $x : \mathbb{N} \to X$, wenn eine Teilfolge $x' : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to X$ existiert, welche gegen x_∞ konvergiert.

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei x_∞ ein Häufungswert von x. Rekursiv wählen wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Index $n_k > n_{k-1}$ mit $d(x_{n_k}, x_\infty) < \frac{1}{k}$. Dann ist $(x_{n_k})_k$ eine Teilfolge von x, welche gegen x_∞ konvergiert.

($\Leftarrow$) Sei $(x_{n_k})_k$ eine Teilfolge von x, welche gegen x_∞ konvergiert. Für jedes $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert somit ein k mit $n_k > n$ und $d(x_{n_k}, x_\infty) < \varepsilon$, d.h. x_∞ ist ein Häufungswert von x. □

Ein anderes Hindernis für die Konvergenz einer Folge ist, wenn sie unbeschränkt ist. Andernfalls können wir folgendes Resultat verwenden.

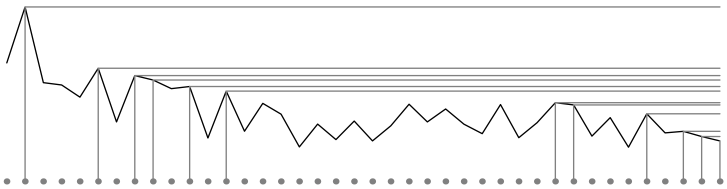
2.4.4 Lemma. Konvergenz via eindeutiger Häufungswerte.
Eine Folge x ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und $\liminf x = \limsup x$ *gilt, d.h. sie genau einen Häufungswert besitzt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei x konvergent gegen x_∞ und x'_∞ ein Häufungswert von x. Dann ist $x_\infty = x'_\infty$, denn andernfalls lägen fast alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von x_∞ mit $\varepsilon < d(x_\infty, x'_\infty)/2$ und somit nur endlich viele in der (disjunkten) ε-Umgebung von x'_∞. Also ist $H = \{x_\infty\}$ die Menge der Häufungswerte von x und somit $\liminf x = \inf(H) = x_\infty = \sup(H) = \limsup x$.

($\Leftarrow$) Sei $x_\infty := \liminf x = \limsup x$ und $\varepsilon > 0$. Dann liegen fast alle Folgeglieder rechts von $x_\infty - \varepsilon$, denn andernfalls gäbe es nach Bolzano-Weierstraß (2.4.5) einen (uneigentlichen) Häufungswert $\le x_\infty - \varepsilon$. Ebenso liegen fast alle Folgeglieder links von $x_\infty + \varepsilon$, denn andernfalls gäbe es einen (uneigentlichen) Häufungswert $\ge x_\infty + \varepsilon$. Dies zeigt die Konvergenz von x gegen x_∞. □

2.4.5 Satz von Bolzano & Weierstraß.
Es sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^p$. Dann besitzt x einen Häufungspunkt $x_\infty \in \mathbb{R}^p$.

Beweis. Sei vorerst $p = 1$. Wir nennen einen Index N Gipfelstelle von x, wenn $x_n \le x_N$ für alle $n > N$. Falls x unendlich viele Gipfelstellen $g_1 < g_2 < \dots$ besitzt, so ist $k \mapsto x_{g_k}$ eine monoton fallende Teilfolge. Anderenfalls existiert eine letzte Gipfelstelle g und damit können wir rekursive eine Teilfolge x_{n_k} durch $n_0 := g + 1$ und $n_{k+1} := \min\{n > n_k : x_n \ge x_{n_k}\}$. Dies definiert eine monoton wachsende Teilfolge von x.



Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt. Nach dem eben Gesagten existiert eine monotone Teilfolge von x und diese ist nach (2.3.9) konvergent, d.h. x besitzt eine Häufungswert nach (2.4.3).

Sei schließlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^p$ beschränkt. Nach obigen existiert eine konvergente Teilfolge $(x^p_{n_k})$ der letzten Koordinate. Die Folge $(x^1_{n_k}, \dots, x^{p-1}_{n_k})_k$ besitzt seinerseits nach Induktion eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_l$ in $\mathbb{R}^{p-1}$ und somit ist $l \mapsto x_{n_{k_l}}$ eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{R}^p$ wieder nach (2.4.3). □

Um die Konvergenz einer Folge mittels der Definition nachprüfen zu können, benötigen wir aber schon den Kandidaten für den Grenzwert. Deshalb ist das folgende Kriterium oft sehr hilfreich.

2.4.6 Proposition. Cauchy'sches Konvergenzkriterium.
Eine Folge $x = (x_n)_n$ in $\mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge *ist, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \ge N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

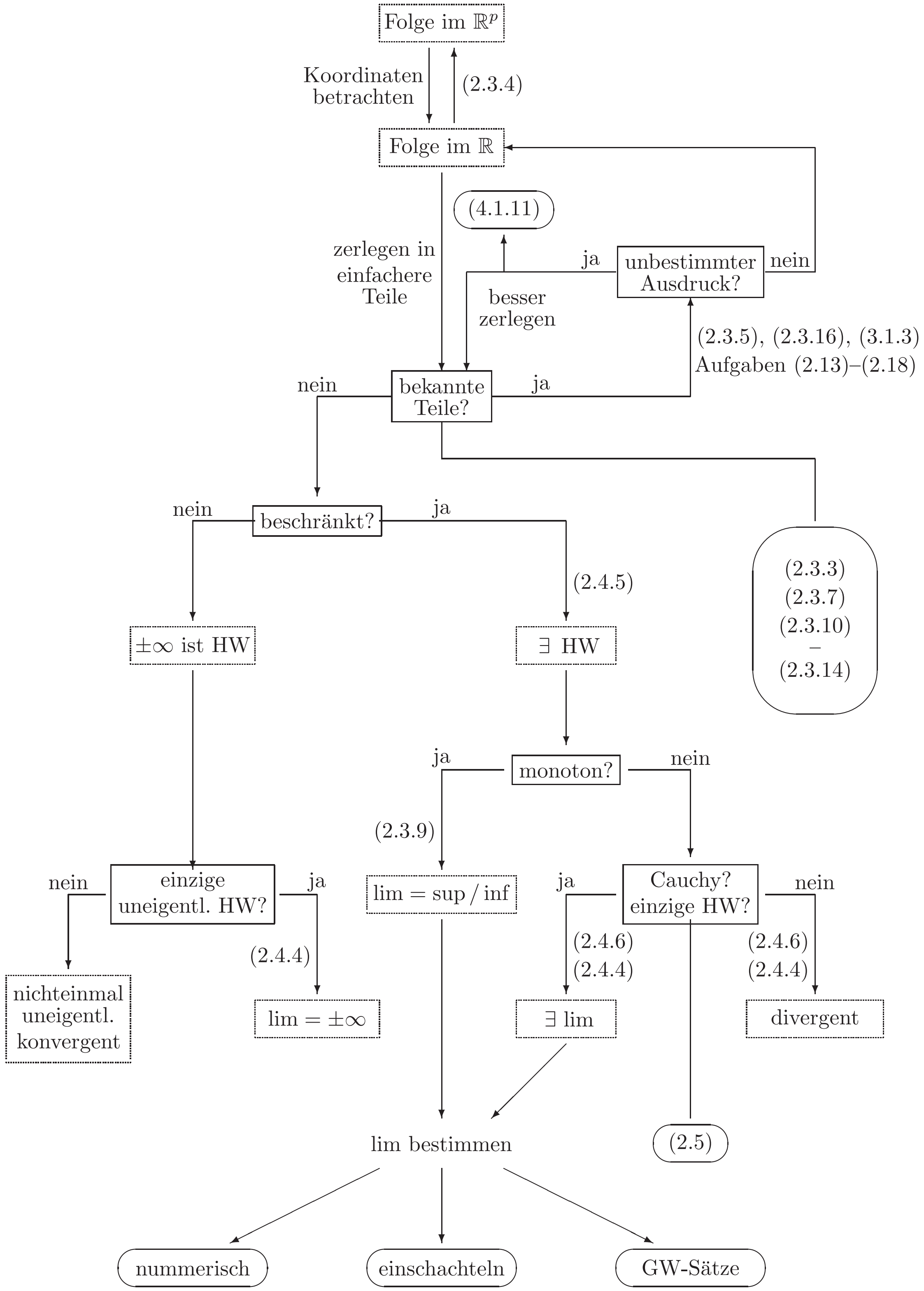
Ein metrischer Raum heißt VOLLSTÄNDIG, wenn jede Cauchy-Folge in ihm konvergiert.

Beweis. Jede konvergente Folge ist Cauchy, denn aus $|x_k - x_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq N$ folgt $|x_n - x_m| \leq |x_n - x_\infty| + |x_\infty - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Umgekehrt sei $x = (x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Dann existiert ein N mit $|x_n - x_N| \leq 1$ für $n \geq N$ und somit ist x beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (2.4.5) existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von x mit Grenzwert x_∞. Dies ist aber auch der Grenzwert von x, denn für $\varepsilon > 0$ existiert ein N mit $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ und somit $|x_\infty - x_m| \leq \varepsilon$ für alle $m > N$ durch Grenzübergang von $n = n_k$ für $k \to \infty$. □

2.4.7 Bemerkung.
Beachte jedoch, daß es für die Konvergenz nicht genügt wenn der Abstand aufeinanderfolgender Folgeglieder beliebig klein wird. Z.B. ist für die harmonische Folge $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$ der Abstand $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{n+1} \to 0$ aber die Folge divergiert gegen $+\infty$.

2.4.8 Einige Methoden zur Grenzwertbestimmung



2.5 Unendliche Reihen

2.5.1 Definition. Konvergenz von Reihen.
Unter einer REIHE verstehen wir einen Ausdruck der Form $\sum_k a_k$. Ein Reihe heißt KONVERGENT gegen s_∞, wenn die Folge s_n der PARTIALSUMMEN $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ gegen s_∞ konvergiert. Man schreibt dann auch $\sum_{k=0}^\infty a_k$ für diesen Grenzwert s_∞.

Beachte, daß jeder Reihe $\sum_k a_k$ **zwei** Folgen zugeordnet sind: Einerseits die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Glieder a_k der Reihe und andererseits die Folge $(\sum_{k=0}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ der Reihe. Diese beiden Folgen müssen strikt auseinander gehalten werden.

2.5.2 Definition. Uneigentliche Konvergenz von Reihen.
Wie für Folgen können wir auch bei Reihen von der UNEIGENTLICHEN KONVERGENZ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ sprechen.

2.5.3 Bemerkung. Reihen versus Folgen.
Jede Reihe $\sum_k a_k$ wird also durch die Folge ihrer Partialsummen $s_n := \sum_{k\le n} a_k$ beschrieben. Umgekehrt definiert jede Folge s_n eine Reihe $\sum_k a_k$ durch $a_n := s_n - s_{n-1}$ wobei wir $s_{-1} := 0$ gesetzt haben, deren Partialsummen gerade die gegebene Folge s_n sind.

Reihen $\sum_k a_k$ sind also nur eine andere Schreibweise für Folgen s_n, wobei man die Betonung auf den Zuwachs $a_n = s_n - s_{n-1}$ von einem Folgenglied auf das nächste legt.

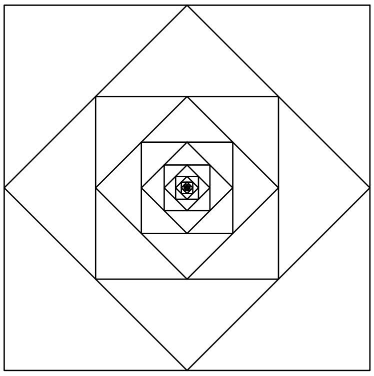
Beachte, daß es für die Konvergenzbetrachtung keine Rolle spielt, ob wir die Partialsummen als $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ oder für ein fixes K als $s'_n := \sum_{k=K}^{K+n}$ definieren, denn $s_{n+K} = s'_n + \Delta$, wobei $\Delta = \sum_{k=0}^{K-1} a_k$. Für die entsprechenden Grenzwerte gilt offensichtlich

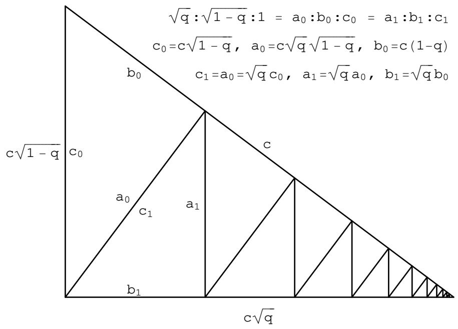
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^\infty a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{m\to\infty} s_{m+K}&\\ &= \lim_{m\to\infty} s'_m + \Delta = \Delta + \lim_{n\to\infty} s'_n =: \Delta + \sum_{k=K}^\infty a_k\\ &= \sum_{k=0}^{K-1} a_k + \sum_{k=K}^\infty a_k.\end{aligned}$$

Ein leicht modifizierte Art zu sehen, daß es bei der Konvergenz einer Reihe nicht auf die Anfangsglieder ankommt ist folgende: Seien $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ und $s'_n := \sum_{k=K}^n a_k$ (somit ist $s'_n = 0$ für $n < K$). Dann ist $s_n = s'_n + \Delta$, wobei $\Delta := \sum_{k=0}^{K-1} a_k$ ist. Also konvergiert s_n genau dann, wenn s'_n konvergiert und es gilt

$$\sum_{k=0}^\infty a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s'_n + \Delta = \Delta + \sum_{k=K}^\infty a_k.$$

2.5.4 Lemma. Geometrische Reihe.
Es konvergiert die geometrische Reihe $\sum_k q^k$ genau dann, wenn $|q| < 1$. Ihr Grenzwert ist $\frac{1}{1-q}$.





Beweis. Wegen der Summenformel ist $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$ und somit genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$. Im Fall $q = 1$ ist $\sum_{k=0}^n q^k = n+1$ divergent. □

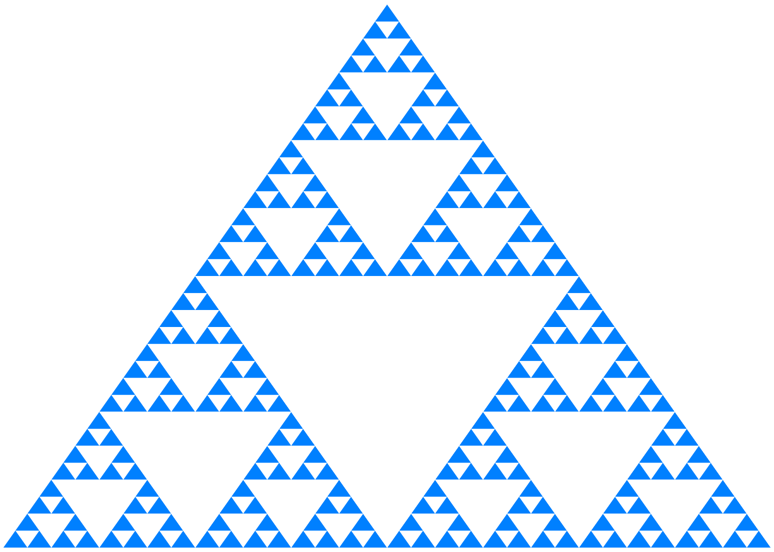
Sierpinski's Schwamm.
Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck. Wir teilen aller 3 Seiten in die Hälfte und entfernen das (offene) Dreieck dessen Ecken diese Teilungspunkte sind. Für die verbliebenen 3 Dreiecke fahren wir genauso fort, d.h. schneiden wieder aus jedem ein entsprechendes Teildreieck aus. Dies führen wir nun rekursiv weiter durch. Sei A die Fläche des ursprünglichen Dreiecks. Die des ersten ausgeschnittenen ist dann $A/4$, denn seine Seitenlänge ist nur mehr halb so groß. Es verbleiben also 3 Dreiecke mit einer Gesamtfläche von $A - \frac{A}{4} = \frac{3}{4}A$. Im nächsten Schritt entfernen wir 3 Dreiecke mit Fläche $\frac{1}{4}\frac{A}{4}$, also verbleiben 9 Dreiecke mit einer Fläche von $A - \frac{1}{4}A - \frac{3}{4^2}A = \frac{9}{16}A$. Im n-ten Schritt ist die verbleibende Gesamtfläche

$$A - \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{4^k} A = A\Big(1 - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{3^j}{4^j}\Big) = A\left(1 - \frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n A.$$

Und im Grenzwert

$$A - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}}{4^k} A = \Big(1 - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^j\Big) A = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right)}_{=0} A = 0$$

Trotzdem bleiben hier ziemlich viele Punkte übrig.



2.5.5 Beispiel. Exponentialreihe und Euler'sche Zahl e.
Die Reihe $\sum_k \frac{1}{k!}$ ist konvergent. Offensichtlich ist die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ monoton wachsend. Sie ist aber auch nach oben beschränkt, denn (siehe (2.5.9))

$$s_n \le 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \le 1 + \frac{1}{1-1/2} = 3.$$

Ihre Summe $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} =: e$ wir auch EULER'SCHE ZAHL genannt. Die Begründung für den Namen Exponentialreihe liefern wir in (4.2.4) nach. Es gilt auch $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$:
In der Tat ist $b_n := (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = s_n$. Weiters ist $n \mapsto (1+\frac{1}{n})^n$ monoton wachsend, denn wegen der Bernoulli-Ungleichung ist

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2\,n}{n^2+2n+1}\right)^n\\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n\\
&\ge \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-n\,\frac{1}{n^2+2n+1}\right) = 1+\frac{1}{(n+1)^3} \ge 1
\end{aligned}$$

Weiters ist für $m \ge n$

$$\begin{aligned}
b_m &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \sum_{k=0}^m \prod_{j=1}^k (m-j+1)\frac{1}{k!m^k}\\
&= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^k\left(1-\frac{j-1}{m}\right) \ge \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^k\left(1-\frac{j-1}{m}\right) =: b_{m,n}
\end{aligned}$$

mit

$$\lim_{m\to\infty} b_{m,n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^k 1 = s_n,$$

Also $\lim_m b_m \geq s_n$ für alle n und damit $\lim_{m\to\infty} b_m \geq e$ und schlußendlich $\lim_{m\to\infty} b_m = e$.

2.5.6 Lemma. Cauchy-Kriterium für Reihen.
Eine Reihe $\sum_k a_k$ konvergiert genau dann, wenn für

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n \geq N\, \forall q : \Big|\sum_{k=n}^{n+q} a_k\Big| < \varepsilon$$

Vgl. dies mit (2.4.6) für Folgen.

Insbesonders folgt, daß für jede konvergente Reihe $\sum_k a_k$ gilt, daß $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ist. Um das einzusehen brauchen wir in der Cauchy-Bedingung nur speziell $p := 0$ setzen und erhalten:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geq N : |a_n| < \varepsilon,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Nach Definition ist $\sum_k a_k$ genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ konvergiert, oder äquivalent eine Cauchy-Folge ist, d.h.

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n \geq N\, \forall q : \varepsilon > |s_{n+q} - s_n| = \Big|\sum_{k=1}^{q} a_{n+k}\Big| \qquad \square$$

2.5.7 Definition. Absolute Konvergenz.
Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt ABSOLUT KONVERGENT, wenn die Reihe $\sum_k |a_k|$ ihrer absolut-Beträge konvergiert. Da die Partialsummen von $\sum_k |a_k|$ monoton wachsend ist dies nach der Proposition (2.3.9) über monotone Konvergenz genau dann der Fall, wenn (die Folge der Partialsummen) von $\sum_k |a_k|$ beschränkt ist.

Beachte, daß der Unterschied zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz nur im Unterschied zwischen $\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right|$ und $\sum_{k=n}^{n+p} |a_k|$ liegt.

2.5.8 Lemma. Absolute- impliziert Konvergenz.
Es sei $\sum_k a_k$ absolut konvergent. Dann ist $\sum_k a_k$ auch konvergent.

Beweis. Die Cauchy-Bedingung ist wegen $|\sum_{k=n}^{n+p} a_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k|$ erfüllt. $\square$

Nun können wir die wichtigsten Methoden zur Konvergenzbestimmung von Reihen behandeln.

2.5.9 Proposition. Vergleichstest.
Es seien $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ zwei Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k$ für (fast alle) k

- *Falls $\sum_k b_k$ absolut konvergiert so auch $\sum_k a_k$.*
- *Falls $\sum_k a_k$ divergiert, so auch $\sum_k b_k$.*

Man sagt in dieser Situation, daß $\sum_k a_k$ eine MINORANTE von $\sum_k b_k$ und umgekehrt $\sum_k b_k$ eine MAJORANTE von $\sum_k a_k$ ist.

Beweis. Es ist $0 < \sum_{k=n}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n}^{n+p} b_k \to 0$. $\square$

2.5.10 Proposition. Wurzeltest.
Falls $(a_n)_n$ *beschränkt ist und* $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *ist, d.h. ein* $q < 1$ *existiert mit* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ *für fast alle* n*, so ist* $\sum_k a_k$ *absolut konvergent.*
Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *für unendlich viele* n*, so ist die Reihe divergent.*

Ein Beispiel, wo sich der Wurzeltest anwenden läßt, ist $\sum_n \frac{1}{n^n}$, denn dabei ist für $a_n := \frac{1}{n^n}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$.

Beweis. Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ folgt, daß $\sum_k q^k$ eine nach (2.5.4) (konvergente) Majorante von $\sum_k |a_k|$ ist, also letztere Reihe nach dem Vergleichstest (2.5.9) konvergiert.
Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ unendlich oft, so konvergiert a_n nicht gegen 0, also ist $\sum_n a_n$ nicht konvergent. □

2.5.11 Proposition. Quotiententest.
Falls $(a_n)_n$ *beschränkt ist und* $\overline{\lim}_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ *ist, d.h. ein* $q < 1$ *existiert mit* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ *für fast alle* n*, so ist* $\sum_k a_k$ *absolut konvergent.*
Ist jedoch fast immer $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ *so ist die Reihe divergent.*

Ein Beispiel, wo sich der Quotiententest anwenden läßt, ist $\sum_n \frac{1}{n!}$, denn dabei ist für $a_n := \frac{1}{n!}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.

Beweis. Es ist
$$\left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| = \prod_{j=1}^{p} \left|\frac{a_{n+j}}{a_{n+j-1}}\right| \leq q^p$$
also $\frac{|a_n|}{q^n} \sum_k q^k$ eine Majorante für $\sum_k |a_k|$.
Andererseits folgt aus $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, daß a_n keine Nullfolge sein kann. □

2.5.12 Proposition. Leibniz-Test.
Es sei $n \mapsto a_n \geq 0$ *monoton fallend. Dann ist* $\sum_k (-1)^k a_k$ *genau dann konvergent, wenn* $\lim_k a_k = 0$ *ist.*

Beweis. Es ist $\sum_k b_k$ nur dann konvergent, wenn $b_k \to 0$.
Umgekehrt ist
$$\begin{aligned} 0 &\leq \overbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}^{0\leq} + \overbrace{(a_{n+3} - \dots)}^{0\leq} + \dots + (-1)^{k+1} a_{n+k} \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{j=n+1}^{n+k} (-1)^j a_j = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \dots \leq a_{n+1} \to 0. \end{aligned}$$ □

2.5.13 Cauchy'scher Verdichtungssatz.
Es sei (a_n) *monoton fallend und nicht negativ. Dann ist* $\sum_n a_n$ *genau dann konvergent, wenn* $\sum_n 2^n a_{2^n}$ *es ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Es ist
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &\geq \sum_{k=1}^{2^n} a_k = a_1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k \\ &\geq \frac{1}{2} a_1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_{2^j} = \sum_{j=0}^{n} 2^{j-1} a_{2^j} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Für $m+1 \le 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \le \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} a_k = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_k$$
$$\le \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_{2^j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j\, a_{2^j} \le \sum_{j=0}^{\infty} 2^j\, a_{2^j}. \quad \square$$

2.5.14 Beispiele.

1. Die geometrische Reihe $\sum_k (1/2^{a-1})^k = \sum_k 2^k\,(1/2^k)^a$ konvergiert genau dann, wenn $1/2^{a-1} < 1$ ist, d.h. $a > 1$ ist. Nach (2.5.13) konvergiert somit $\sum_k \frac{1}{k^a}$ ebenfalls genau dann.

2. Ebenso folgt für die Reihe $\sum_k \frac{1}{k\,(\ln k)^a}$, daß sie genau dann konvergiert, wenn $\sum_k \frac{2^k}{2^k\,(\ln(2^k))^a} = \frac{1}{(\ln(2))^a} \sum_k \frac{1}{k^a}$ dies tut, also für $a > 1$.

2.5.15 Test von Raabe.
Falls ein $\beta > 1$ existiert, s.d. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le 1 - \frac{\beta}{n}$ für fast alle n ist, so konvergiert die Reihe $\sum_k a_k$ absolut.

Ist hingegen $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 - \frac{1}{n}$ für fast alle n, so divergiert $\sum_k a_k$.

Beweis. Es sei $\alpha_n := |a_n|$. Dann ist $\alpha_{n+1}/\alpha_n \le 1 - \beta/n$, also $0 < (\beta-1)\alpha_n \le n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) - \alpha_n = (n-1)\alpha_n - n\alpha_{n+1} =: b_n$. Folglich ist $n \mapsto (n-1)\alpha_n$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt also konvergent. Somit ist die Teleskopreihe $\sum_n b_n$ ebenfalls konvergent und wegen $(\beta-1)\alpha_n \le b_n$ auch die Reihe $(\beta-1)\sum_n \alpha_n$, d.h. $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent.

Aus $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 - \frac{1}{n}$ folgt, daß das Vorzeichen von a_n schließlich konstant, also o.B.d.A. $+1$ ist und somit $n a_{n+1} \ge (n-1)a_n$ gilt. Folglich existiert ein N mit $n a_{n+1} \ge (N-1)a_N =: \alpha > 0$ für alle $n \ge N$. Also ist $a_{n+1} \ge \frac{\alpha}{n}$ und da die harmonische Reihe divergiert folgt aus dem Majorantentest, daß $\sum_n a_n$ divergiert. $\square$

2.5.16 Beispiele.
In den Anfängen der Analysis hatten die Mathematiker unbekümmert Reihen umgeordnet. Das Beispiel

$$\sum_k (-1)^k = 1-1+1-1+\dots = (1-1)+(1-1)+\dots \ne 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots$$

zeigt, daß hier Vorsicht angebracht ist.

Ein noch raffinierteres Beispiel ist das folgende: Es sei

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \ge \frac{1}{2} > 0.$$

Dann ist $\frac{s}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, wobei $b_{2k} := \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ und $b_{2k-1} := 0$ sei. Die Reihe $\sum_k (a_k + b_k)$ hat also als Summe $s + \frac{s}{2} = \frac{3s}{2}$. Diese Reihe ist aber

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{1}+0\right)+\left(\tfrac{-1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{3}+0\right)+\left(\tfrac{-1}{4}+\tfrac{-1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{5}+0\right)+\left(\tfrac{-1}{6}+\tfrac{1}{6}\right)+\dots=\\ &\qquad = 1+0+\frac{1}{3}+\frac{-1}{2}+\frac{1}{5}+0+\dots,\end{aligned}$$

eine Umordnung der ursprünglichen Reihe mit Summe s.

$$\begin{array}{rcccccccc} s & = & \frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \dots \\ \frac{s}{2} & = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{10} & -\frac{1}{12} & \dots \\ & = & 0 & \frac{1}{2} & +0 & -\frac{1}{4} & +0 & \frac{1}{6} & \dots \\ \frac{3s}{2} & = & \frac{1}{1} & +0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & +0 & \dots \end{array}$$

2.5.17 Definition. Unbedingte Konvergenz.
Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt UNBEDINGT KONVERGENT, wenn jede ihrer Umordnungen $\sum_k a_{\pi(k)}$ konvergiert (und zwar immer gegen den selben Grenzwert). Dabei wird eine UMORDNUNG durch eine bijektive Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beschrieben.

2.5.18 Riemann'scher Umordnungssatz.
Eine Reihe ist genau dann absolut konvergent, wenn sie unbedingt konvergiert.

EXAM

Beweis. Sei zuerst $\sum_n a_n$ absolut konvergent mit Partialsummen s_n. Es sei $\sum_k a_{n_k}$ ein Umordnung mit Partialsummen s'_k. Wegen dem Cauchy-Kriterium existiert zu $\varepsilon > 0$ ein N mit $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \le \varepsilon$. Nun wählen wir ein K mit $n_k \ge N$ für alle $k \ge K$. Dann ist $\sum_{k=K}^{K+n} |a_{n_k}| \le \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \le \varepsilon$, also ist die umgeordnete Reihe nach dem Cauchy-Kriterium absolut konvergent.
Wir zeigen mehr noch: Die umgeordnete Reihe besitzt die gleiche Summe $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Für $m \ge K$ ist

$$\sum_{k=0}^{m} a_{n_k} - \sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n \ge N} \delta_n a_n$$

mit $\delta_n \in \{-1, 0, +1\}$. Also gilt für die Partialsummen

$$|s'_m - s_m| \le \sum_{n \ge N} |a_n| < \varepsilon$$

und somit konvergiert s'_m und s_m gegen den gleichen Grenzwert s.

Umgekehrt sei nun $\sum_k a_k$ zwar konvergent aber nicht absolut konvergent Wir zerlegen $a_k = a_k^+ - a_k^-$ mit $a_k^{\pm} := \max\{\pm a_k, 0\} \ge 0$. Dann ist $|a_k| := a_k^+ + a_k^-$. Beide Reihen $\sum_k a_k^{\pm}$ müssen gegen $+\infty$ divergieren, denn andernfalls wäre auch die andere konvergent. Mit $\sum_k p_k$ bezeichnen wir die Reihe die aus $\sum_k a_k^+$ durch Streichen aller 0-er entsteht, und mit $\sum_k q_k$ bezeichnen wir die Reihe die aus $\sum_k a_k^-$ durch Streichen aller $a_k^-(= 0)$ entsteht, für welche $a_k^+ \neq 0$ ist. Dann gilt $p_k \to 0$ und $q_k \to 0$ aber $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = +\infty = \sum_{k=0}^{\infty} q_k$. Wir wählen nun rekursive minimale Indizes $n_0 < n_1 < \dots$ und $m_0 < m_1 < \dots$ mit

$$\begin{aligned}
S &< \sum_{k=0}^{n_0} p_k \\
S &> \sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{m_0} -q_k \\
S &< \sum_{k=0}^{n_1} p_k + \sum_{k=0}^{m_0} -q_k \\
S &> \sum_{k=0}^{n_1} p_k + \sum_{k=0}^{m_1} -q_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die so entstehende Reihe

$$p_0 + \dots + p_{n_0} - q_0 - \dots - q_{m_0} + p_{n_0+1} + \dots + p_{n_1} - q_{m_0+1} - \dots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \dots$$

ist dann eine Umordnung der ursprünglichen Reihe, die gegen S konvergiert. □

Mit absolut konvergenten Reihen kann man recht ungestraft rechnen, wie folgende Resultate zeigen.

2.5.19 Lemma. Rechnen mit absolut konvergenten Reihen.
Falls $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ absolut konvergieren, so auch $\sum_k (a_k + \lambda\, b_k)$.
Ist $\sum_k a_k$ absolut konvergent und $k \mapsto b_k$ beschränkt, so ist auch $\sum_k a_k\, b_k$ absolut konvergent.

Der 2.Teil stimmt nicht für konvergente Reihen wie das Beispiel $\sum_k (-1)^k \frac{1}{k}$ und $(-1)^k$ zeigt.

Beweis. Der 1.Teil folgt sofort aus $\sum_{k\le n} |a_k + \lambda\, b_k| \le \sum_{k\le n} |a_k| + \lambda \sum_{k\le n} |b_k|$.
Der 2.Teil mittels (2.3.9) aus $\sum_{k\le n} |a_k\, b_k| \le \max\{|b_k| : k \le n\} \cdot \sum_{k\le n} |a_k| \le \sup\{|b_k| : k\} \cdot \sum_{k=0}^\infty |a_k|$. □

2.5.20 Proposition. Konvergenz von Doppelreihen.
Es seien $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ absolut konvergent. Sei $(p_0, p_1, \dots)$ eine Anordnung der Produkte $(a_j b_k)_{j,k\in\mathbb{N}}$. Dann konvergiert $\sum_j p_j$ absolut und zwar gegen $\left(\sum_{j=0}^\infty a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^\infty b_k\right)$.

Beweis. Wegen $\sum_{(j,k)\le(n,m)} a_j\, b_k = \sum_{j\le n} a_j \sum_{k\le m} b_k \to \sum_{j=0}^\infty a_j \sum_{k=0}^\infty b_k$ konvergiert die spezielle Anordnung der Produkte in stufenweise wachsenden Quadraten gegen die behauptete Größe. Für jede Anordnung ist

$$\sum_{j=1}^n |p_j| \le \sum_{j\le m} |a_j| \sum_{j\le m} |b_j| \le \sum_{j=0}^\infty |a_j| \cdot \sum_{j=0}^\infty |b_j| < \infty$$

für hinreichend groß gewähltes m in Abhängigkeit von n, also absolut konvergent, und somit unabhängig von der Anordnung gegen $\sum_{j=0}^\infty a_j \sum_{k=0}^\infty b_k$ konvergent. □

2.5.21 Folgerung. Cauchy-Produkt.
Sind die Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ absolut konvergent so auch das Cauchy-Produkt $\sum_n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right)$. □

2.5.22 Bemerkung.
Wir wollen nun Reihen der Form $\sum_k a_k\, b_k$ untersuchen, also solche die aus den komponentenweisen Produkt zweier Reihen entstehen.

2.5.23 Abel'sche partielle Summation.
Es sei $A_k := \sum_{j<k} a_j$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, b_k = A_n\, b_n + \sum_{k=0}^{n} A_k\, (b_{k-1} - b_k).$$

Beweis. Es ist $a_k = A_{k+1} - A_k$ und somit

$$\begin{aligned}\sum_{k<n} a_k\, b_k &= \sum_{k<n} (A_{k+1} - A_k)\, b_k = \sum_{k<n} A_{k+1}\, b_k - \sum_{k<n} A_k\, b_k \\ &= \sum_{k\le n} A_k\, b_{k-1} - \sum_{k<n} A_k\, b_k = \sum_{k\le n} A_k\, (b_{k-1} - b_k) + A_n\, b_n \quad \square\end{aligned}$$

2.5.24 Folgerung. Konvergenz von $\sum_k a_k\, b_k$.
Ist sowohl die Folge $A_n\, b_n$ also auch die Reihe $\sum_{k=0}^n A_k\, (b_{k-1} - b_k)$ konvergent, so auch die Reihe $\sum_k a_k\, b_k$. □

2.5.25 Dirichlet'sche Test.
Es sei A_n beschränkt und b_n konvergiere monoton gegen 0. Dann ist $\sum_k a_k\, b_k$ konvergent.

Beweis. Da A_n beschränkt ist und $b_n \to 0$ konvergiert, gilt gleiches auch für $A_n\, b_n$ und die Teleskopreihe $\sum_k (b_{k-1} - b_k)$ konvergiert (absolut). Somit konvergiert auch $\sum_k A_k (b_{k-1} - b_k)$ absolut. Das Resultat folgt nun mittels (2.5.24). □

2.5.26 Abel'sche Test.
Es sei $\sum_k a_k$ konvergent und (b_k) monoton und beschränkt. Dann konvergiert $\sum_k a_k\, b_k$.

Beweis. Nach Voraussetzung sind (A_k) und (b_k) konvergent, also auch $(A_k\, b_k)$. Weiters ist die Teleskopreihe $\sum_k (b_{k-1} - b_k)$ (absolut) konvergent und da A_k beschränkt ist auch $\sum_k A_k (b_{k-1} - b_k)$ (absolut) konvergent. Das Resultat folgt nun mittels (2.5.24). □

Auch für Produkte können wir unendliche Versionen behandeln. Diese spielen aber keine so entscheidende Rolle.

2.5.27 Definition. Konvergente Produkte.
Eine Produkt $\prod_k a_k$ heißt KONVERGENT, wenn die Folge der Partialprodukte $n \mapsto \prod_{k=0}^n a_k$ konvergiert.

Sobald wir die Logarithmusfunktion zur Verfügung haben, können die Konvergenz des Produkts mit Faktoren $x_k > 0$ wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned}
&\exists \prod_{k=0}^{\infty} x_k \\
\Leftrightarrow\quad &\text{Die Folge } \Big(\prod_{k=0}^{n} x_k\Big)_n \text{ konvergiert} \\
\Leftrightarrow\quad &\text{Die Folge } n \mapsto \log\Big(\prod_{k=0}^{n} x_k\Big) = \sum_{k=0}^{n} \log(x_k) \text{ konvergiert} \\
\Leftrightarrow\quad &\exists \sum_{k=0}^{\infty} \log(x_k).
\end{aligned}$$

2.5.28 Bemerkung. Dezimalbruchentwicklung.
Es sei $b = 10$ und eine Folge $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ von natürlichen Zahlen $0 \le z_k < b$ vorgegeben. Dann ist die Reihe $\sum_{k\ge 1} \frac{z_k}{b^k}$ monoton wachsend und wegen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{b^k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{b-1}{b^k} < (b-1)\, b \sum_{k\ge 0} \left(\frac{1}{b}\right)^k = (b-1)\, b\, \frac{1}{1-1/b} = 1,$$

existiert die Summe $0 \le \zeta := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{b^k} \le 1$.

Sei nun umgekehrt $0 < \zeta \le 1$. Dann existiert ein $z_1 \in \{0, \dots, b-1\}$ mit $\frac{z_1}{b^1} < \zeta \le \frac{z_1+1}{b^1}$. Somit ist $0 < \zeta\, b - z_1 \le 1$ und es existiert analog ein $z_2 \in \{0, \dots, b-1\}$ mit $\frac{z_2}{b^1} < \zeta\, b - z_1 \le \frac{z_1+1}{b^1}$. also

$$\frac{z_1}{b^1} + \frac{z_2}{b^2} < \zeta \le \frac{z_1}{b^1} + \frac{z_2+1}{b^2}$$

Mittels Rekursion erhalten wir $z_k \in \{0, \dots, b-1\}$ mit

$$\frac{z_1}{b^1} + \dots + \frac{z_k}{b^k} < \zeta \le \frac{z_1}{b^1} + \dots + \frac{z_k}{b^k} + \frac{1}{b^k}.$$

Die linke Seite ist in k monoton wachsend, die rechte monoton fallend und der Abstand $\frac{1}{b^k}$ konvergiert gegen 0. Also konvergieren beide Seiten gegen ζ und man spricht von einer Intervallschachtelung. Beachte, daß die Folge z_k nicht schließlich 0 sein kann, da die linke Seite immer echt kleiner als ζ gewählt wurde. Reelle Zahlen werden also auf diese Weise durch nicht abbrechende Dezimalbrüche dargestellt. Insbesonders erhalten wir für $1/2$ den Dezimalbruch $0.499999\dots$ und nicht $0.50000\dots$.

Für $\zeta > 0$ existiert ein $z_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_0 < \zeta \le z_0 + 1$ und somit ist $\zeta - z_0$ in einen Dezimalbruch $0.z_1 z_2 \dots$ entwickelbar und wir schreiben $\zeta = z_0, z_1 z_2 \dots$.

Die Darstellung ist eindeutig, denn wenn $\zeta := z_0, z_1 z_2 \dots = w_0, w_1 w_2 \dots$ zwei verschiedene Darstellungen in nicht-abbrechende Dezimalbrüche sind, so sei $n \ge 0$ minimal gewählt mit $z_k \ne w_k$. Es ist $n > 0$ da $z_0 = w_0$ und o.B.d.A. $z_k + 1 \le w_k$. Dann ist $\zeta \le \sum_{j=1}^{k} \frac{z_j}{b^j} + \frac{1}{b^k} \le \sum_{j=1}^{k} \frac{w_j}{b^j} < \zeta$, ein Widerspruch.

Für negative Zahlen ζ entwickelt man $-\zeta$ in einen Dezimalbruch $-\zeta = z_0, z_1 z_2 \dots$ und schreibt $\zeta = -z_0, z_2 z_2 \dots$.

Die Zahl 0 können wir allerdings auf diese Weise nur durch den abbrechenden Dezimalbruch $0 = 0, 00 \dots$ darstellen.

Beachte die Schwierigkeiten die wir haben wenn wir die Grundrechnungsarten über die Dezimalbruchentwicklung einführen müßten.

Es folgen einige Beispiele die zeigen, daß es beim Rechnen mit (positiven) Dezimalzahlen besser ist die nicht abbrechende Variante (d.h. mit möglicherweise schließlich lauter 9'er) anstelle der abbrechenden Variante (d.h. schließlich lauter 0'er) zu verwenden. Selbst im Fall periodischer Dezimalbrüche ist es kein triviales Problem all die auftretenden Überträge zu berücksichtigen, denn dazu müßten wir ganz rechts mit dem Rechnen beginnen, ein ganz rechts gibt es aber bei den nicht abbrechenden Dezimalbrüchen nicht.

```
 0.3333333333...    (=1/3)
+0.6666666666...    (=2/3)
----------------
=0.9999999999...    (=3/3=1)
```

```
 0.4545454545...    (=5/11)
+0.5454545454...    (=6/11)
------------------
=0.9999999999...
(=11/11=1)
```

```
 0.3333333333... × 3
------------------
=0.9999999999...
```

```
0.3333333333...  ×  0.3333...
------------------
0.09999999999...
0.009999999999...
0.0009999999999...
0.00009999999999...
 ⋮
------------------
0.109999999999...
0.0009999999999...
0.00009999999999...
 ⋮
------------------
0.1109999999999...
0.00009999999999...
 ⋮
------------------
0.11109999999999...
 ⋮
------------------
 ⋮
==================
0.11111111111111...
```

```
1.2222222222...  ×  0.8181...
------------------
0.9777777777...
0.012222222222...
0.0097777777777...
0.00012222222222...
 ⋮
------------------
0.989999999999...
0.0098999999999...
0.00009899999999...
 ⋮
------------------
0.9998999999999...
0.00009899999999...
 ⋮
------------------
0.99999899999999...
 ⋮
------------------
 ⋮
==================
0.99999999999999...
```

3 Stetige Funktionen

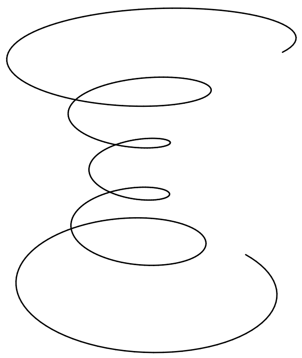
3.1 Stetigkeit

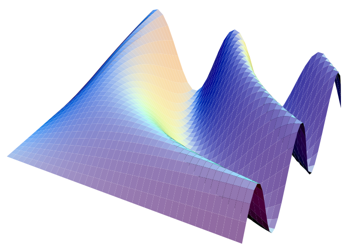
3.1.1 Bemerkung. Mehrdimensionale Abbildungen.
Wir wollen nun vor allem Abbildungen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ studieren. Im Falle $p = q = 1$ sind das die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die wir aus der Schule kennen. Man nennt die dadurch beschriebenen Teilmenge $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ auch KURVE in $\mathbb{R}^2$.

Den Einheitskreis $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ können wir nur mittels zwei Funktionen $x \mapsto \pm\sqrt{1 - x^2}$, $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschreiben. Natürlicher ist allerdings die Parameterdarstellung $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$. Dies führt zu folgendem:

Falls $p = 1$ aber $q > 1$ ist, so können wir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ als PARAMETRISIERTE KURVE im $\mathbb{R}^q$ bezeichnen. Im Unterschied zu vorigen Fall ist also vorgegeben wie schnell die Kurve $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ durchlaufen wird. Da $f(t) \in \mathbb{R}^q$ liegt, können wir diesen Vektor in seine Koordinaten zerlegen, d.h. $f(t) = (f_1(t), \dots, f_q(t))$, wobei $f_1, \dots, f_q$ Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind. Wir schreiben kurz $f = (f_1, \dots, f_q)$, und nennen $f_1, \dots, f_q$ die Komponenten von f.

Andererseits für $p \geq 1$ und $q = 1$ können wir eine Abbildung $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ als Art Gebirge über $\mathbb{R}^p$ auffassen. Im Falle $p = 2$ spricht man von einer FLÄCHE in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.





In der Physik lernt man, daß wenn man den Ort und die Geschwindigkeit eines Körpers zu einem Zeitpunkt $t_0 (= 0)$ kennt, so läßt sich der Ort des Körpers zu jedem beliebigen Zeitpunkt t bestimmen. Es existiert also eine Funktion die zu dem Anfangsdaten Ort $o = (o_1, o_2, o_3) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ und einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ den Aufenthaltsort $f(o, v, t)$ des Körpers zu diesem Zeitpunkt liefert, also eine Funktion $f : \mathbb{R}^7 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist.

Wenn wir somit die Anfangsdaten eines Meteors (genau) kennen, können wir im (Prinzip) berechnen, ob er zu irgendeinem Zeitpunkt t genau auf die Erde trifft. In der Praxis werden wir allerdings die Anfangsdaten nur näherungsweise bestimmen können und auch nur daran interessiert sein, ob er irgendwo auf die Erde trifft (also Abstand Erdradius ε vom Erdmittelpunkt m hat). Unser Problem besteht also darin für die gegebene Funktion f einen maximalen Fehler δ anzugeben, so daß für jeden Anfangswert $x = (o, v, t)$, welcher von den gemessenen Anfangswert höchstens δ entfernt ist der Aufenthaltsort $f(x)$ vom Erdmittelpunkt m höchstens den Erdradius als Abstand hat. Wenn dies für jedes $\varepsilon > 0$ möglich ist, dann nennen wir die Funktion f stetig.

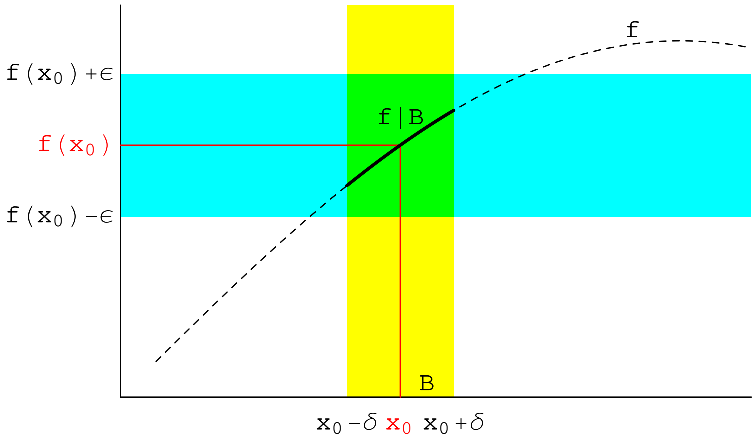
3.1.2 Definition. Stetigkeit.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt STETIG bei $x_0 \in X$, wenn

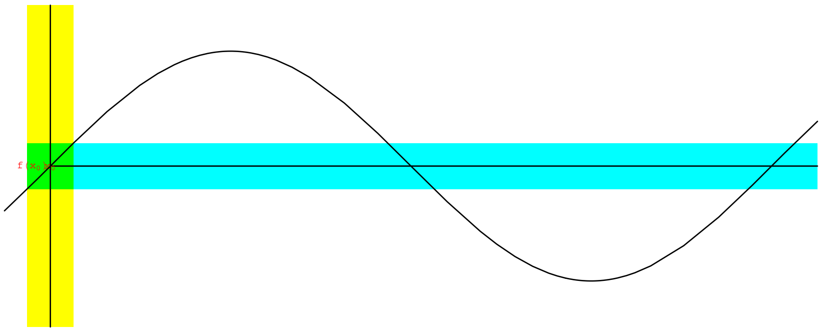
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

d.h. zu jedem ε-Ball um den Bildpunkt $f(x_0)$ ein δ-Ball um x_0 existiert, der durch f ganz in den ε-Ball abgebildet wird, oder äquivalent der ganz im Urbild des ε-Balls unter f enthalten ist, symbolisch:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : f\Big(U_\delta(x_0)\Big) \subseteq U_\varepsilon\Big(f(x_0)\Big)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}\Big(U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)\Big)$$

Die Idee dahinter ist, daß man mittels δ die Argumente so gut kontrollieren kann, daß sich die Werte nicht viel vom Bildpunkt entfernen. Graphisch bedeutet dies, daß wir einen beliebig schmalen horizontalen Streifen oder Schlauch um $f(x_0)$ vorgeben können und dann dazu einen Ball B um x_0 finden, s.d. $f|_B$ ganz im horizontalen Schlauch zu liegen kommt.





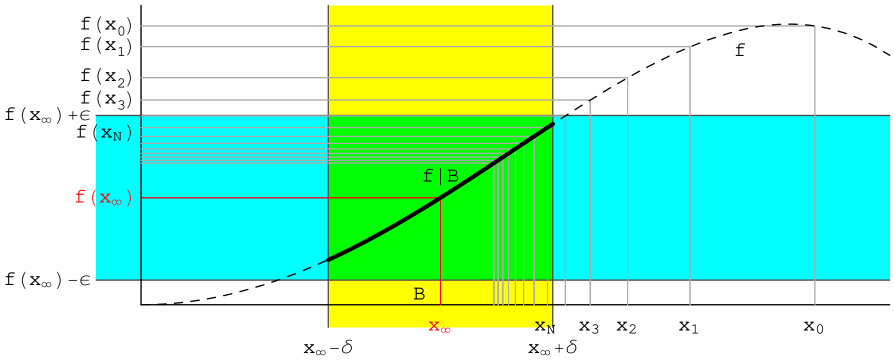
Die Negation von stetig heißt UNSTETIG.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt STETIG (auf X), wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.

Stetigkeit läßt sich nun mittels der zuvor behandelten Konvergenz von Folgen beschreiben:

3.1.3 Lemma. Stetigkeit via Folgen.
Eine Abbildung f ist genau dann stetig bei x_∞, wenn für jede gegen x_∞ konvergente Folge x_n die Folge der Bilder $f(x_n)$ gegen $f(x_\infty)$ konvergiert.

Also ist $f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n)$ für stetiges f falls die linke Seite existiert. Die stetigen Abbildungen sind somit gerade die Konvergenz-erhaltenden Abbildungen, so wie z.B. die linearen Abbildungen die Vektorraumoperationen-erhaltenden Abbildungen sind.



Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f stetig bei x_∞ und $x_n \to x_\infty$. Für $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$ mit $d(x, x_\infty) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_\infty)) < \varepsilon$. Wegen der Konvergenz von (x_n) existiert ein N mit $d(x_n, x_\infty) < \delta$ für alle $n \geq N$ und somit $d(f(x_n), f(x_\infty)) < \varepsilon$. Also konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x_\infty)$.

($\Leftarrow$) Indirekt:

$$\begin{aligned}
&f \text{ ist nicht stetig bei } x_\infty \\
\Leftrightarrow\ &\neg\Big(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X : d(x, x_\infty) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_\infty)) \leq \varepsilon\Big) \\
\Leftrightarrow\ &\exists\, \varepsilon > 0 : \neg\Big(\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X : d(x, x_\infty) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_\infty)) \leq \varepsilon\Big) \\
\Leftrightarrow\ &\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0 : \neg\Big(\forall\, x \in X : d(x, x_\infty) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_\infty)) \leq \varepsilon\Big) \\
\Leftrightarrow\ &\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in X : \neg\Big(d(x, x_\infty) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_\infty)) \leq \varepsilon\Big) \\
\Leftrightarrow\ &\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in X : d(x, x_\infty) \leq \delta \text{ und } d(f(x), f(x_\infty)) > \varepsilon
\end{aligned}$$

Nun setze $\delta := 1/n$ um eine Folge $(x_n)_n$ in X zu erhalten mit $d(x_n, x_\infty) < \frac{1}{n} \to 0$ und $d(f(x_n), f(x_\infty)) > \varepsilon$. □

Beispiele.
Laut (2.3.5) und (3.1.3) sind $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig, und allgemeiner $(x, y) \mapsto x \pm y$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ sowie $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.

In den Aufgaben wird gezeigt, daß folgende Funktionen stetig sind:

- $x \mapsto |x|$ (Aufgabe (2.13))
- $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ (Aufgabe (2.14))
- $x \mapsto x^+$ (Aufgabe (2.15))
- $x \mapsto \sqrt{x}$ (Aufgabe (2.16))
- $x \mapsto \sqrt[p]{x}$ (Aufgabe (2.17))
- $x \mapsto x^r$ für $r \in \mathbb{Q}$ (Aufgabe (2.18))

3.1.4 Lemma. Komponentenweise Stetigkeit.
Eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_q) : X \to \mathbb{R}^q$ ist genau dann stetig, wenn die Komponenten $f_k : X \to \mathbb{R}$ stetig sind für alle k.

Beweis. Da wir Stetigkeit mit konvergenten Folgen testen können folgt dies sofort aus dem entsprechenden Resultat (2.3.4) für Folgen. $\square$

3.1.5 Lemma. Projektionsfunktionen.
Die durch $\operatorname{pr}_k(x_1, \dots, x_p) := x_k$ gegebenen PROJEKTIONSFUNKTIONEN $\operatorname{pr}_k : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *sind stetig.*

Beweis. Die folgt sofort aus $|\operatorname{pr}_k(x) - \operatorname{pr}_k(x')| = |x_k - x'_k| \le |x - x'|$.

Ein anderer Beweis wäre: Die Identität id ist offensichtlich stetig und pr_k sind ihre Komponenten, also nach (3.1.4) stetig. $\square$

3.1.6 Proposition. Rechnen mit stetigen Funktionen.
Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig. Die Summe, Differenz und Produkte stetiger Funktionen sind stetig. Quotienten stetiger Funktionen sind stetig (und dort definiert, wo der Nenner nicht verschwindet).

Beweis. Es sei $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig wegen (3.1.3), denn für $x_n \to x_\infty$ in X gilt $f(x_n) \to f(x_\infty)$ in Y (da f stetig ist) und somit $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_\infty)) = (g \circ f)(x_\infty)$ in Z (da g stetig ist).

Es sei $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f + g : X \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ ist: In der Tat sei $x_n \to x_\infty$ in X, dann gilt $f(x_n) \to f(x_\infty)$ und $g(x_n) \to g(x_\infty)$ und somit $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_\infty) + g(x_\infty) = (f + g)(x_\infty)$ nach (2.3.5).

Eine zweite Art dies zu zeigen ist: $f+g$ ist die Zusammensetzung $X \overset{(f,g)}{\to} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \overset{+}{\to} \mathbb{R}$. Nach (3.1.4) ist (f, g) stetig und nach obigen Beispiel auch die Addition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, also auch die Zusammensetzung $f + g$.

Völlig analog zeigt man die Stetigkeit von $f - g$, $f \cdot g$ und von f/g. $\square$

3.1.7 Folgerung. Polynome sind stetig.
Alle Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig.

Beweis. Jedes Polynom p ist von der Form $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k$ mit $p_k \in \mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$). Offensichtlich sind konstante Funktionen $x \mapsto c$ stetig und ebenso die Identität $x \mapsto x$, also auch die Produkte $x \mapsto p_k \cdot x \cdot \dots \cdot x = p_k\, x^k$ und schließlich die Summen $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k$. $\square$

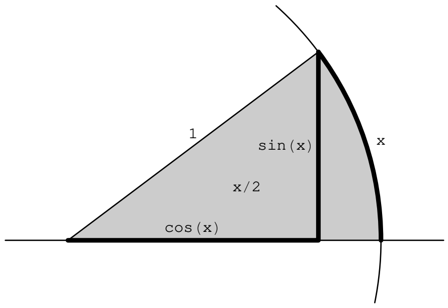
Als Folgerung sind auch alle rationalen Funktionen $x \mapsto \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k}{\sum_{k=0}^{m} q_k\, x^k}$ stetig dort wo sie definiert sind, also auf $\{x : \sum_{k=0}^{m} q_k\, x^k \ne 0\}$.

In Punkten x_0, in denen eine Funktion f nicht definiert ist, macht es keinen Sinn die Frage nach der Stetigkeit zu stellen, denn dazu müßte man $f(x_0)$ bilden können. Es ist somit ein Unsinn zu sagen, daß $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ unstetig ist, denn der Satz "Die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist unstetig bei 0." ist Abkürzung für einen in dieser Situation syntaktisch inkorrekten Satz:

> "Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, s.d. der Abstand von $f(x)$ zu $\underline{f(0)}$ kleiner als ε ist, wenn nur x von 0 weniger als δ entfernt ist."

Siehe in diesen Zusammenhang jedoch (3.2.1).

3.1.8 Beispiel. Winkelfunktionen sind stetig.
Wir werden eine exakte Definition der Winkelfunktionen erst in (4.2.6) geben und müssen vorerst die geometrischen Beschreibung verwenden. Danach sind $\cos(x)$ und $\sin(x)$ die Koordinaten jenes Punktes des Einheitskreises, dessen zugehöriger Kreisektor die Fläche $x/2$ oder auch die Länge des Bogen x besitzt.



Die (geometrisch definierten) Winkelfunktionen $\sin : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ haben folgende Eigenschaften:

(1) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ für $x, y \geq 0$;

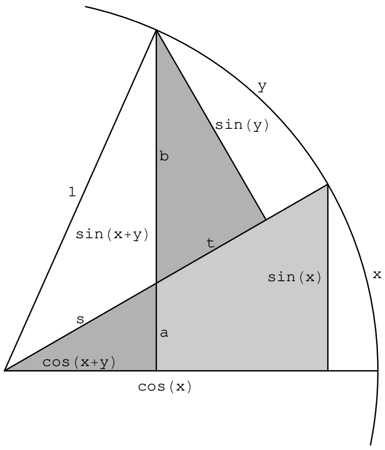
(2) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ für $x, y \geq 0$;

(3) $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ für $x \geq 0$.

Die Gleichung (3) folgt direkt aus dem Satz von Pythagoras. Für die anderen beiden verwenden wir die Ähnlichkeit der Dreiecke folgender Zeichnung und erhalten:

$$
\begin{aligned}
&1 : \sin(x) : \cos(x) = s : a : \cos(x+y) = b : t : \sin(y) \\
&\Rightarrow a = s\ \sin(x), \quad b = \frac{\sin(y)}{\cos(x)}, \quad t = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ \sin(y) \\
&\Rightarrow s = \cos(y) - t = \frac{\cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)}{\cos(x)} \\
&\Rightarrow \cos(x+y) = s\ \cos(x) = \cos(x)\ \cos(y) - \sin(x)\ \sin(y) \\
\text{und } &\sin(x+y) = a + b = s\ \sin(x) + \frac{\sin(y)}{\cos(x)} \\
&= \frac{\cos(y)\cos(x)\sin(x) - \sin(y)\sin^2(x) + \sin(y)}{\cos(x)} \\
&= \sin(x)\ \cos(y) + \cos(x)\ \sin(y),
\end{aligned}
$$

da wegen Pythagoras $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ist.



Für $x = y = 0$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(1)\ &\Rightarrow\ \sin(0) = 2\sin(0)\cos(0)\ \Rightarrow\ \sin(0) = 0 \text{ oder } \cos(0) = \frac{1}{2}\\
(2)\ &\Rightarrow\ \cos(0) = \cos(0)^2 - \sin(0)^2\ \Rightarrow\ \cos(0)(\cos(0)-1) = \sin(0)^2 \geq 0\\
&\Rightarrow\ \cos(0) \neq \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \sin(0) = 0\\
(3)\ &\Rightarrow\ \cos(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Wir hätten gerne die Gültigkeit obiger Gleichungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Setzen wir dann insbesonders $y = -x$ in (1) und (2) so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
0 = \sin(0) = \sin(x - x) = \sin(x)\cos(-x) + \cos(x)\sin(-x)\\
1 = \cos(0) = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x).
\end{aligned}
$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\cos(x)$ und der zweiten mit $-\sin(x)$ ergibt in Summe

$$-\sin(x) = \underbrace{\left(\cos(x)^2 + \sin(x)^2\right)}_{=1}\sin(-x) = \sin(-x).$$

Und Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sin(x)$ und der zweiten mit $\cos(x)$ ergibt in Summe

$$\cos(x) = \underbrace{\left(\sin(x)^2 + \cos(x)^2\right)}_{=1}\cos(-x) = \cos(-x).$$

Also sollte sin eine sogenannte ungerade (d.h. $\forall x : f(-x) = -f(x)$) und cos eine sogenannte gerade Funktion (d.h. $\forall x : f(-x) = f(x)$) sein. Darum erweitern wir sin zu einer (ungeraden) Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\sin(-x) := -\sin(x) \text{ für } x \geq 0$$

und cos zu einer (geraden) Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cos(-x) := \cos(x) \text{ für } x \geq 0.$$

Offensichtlich gilt dann (3) für alle $x \in \mathbb{R}$. Gleiches gilt für die Additionstheoreme (1) und (2), wie wir nun durch Fallunterscheidungen zeigen:

Für $x, y \le 0$ folgt dies indem wir $x' := -x \ge 0$ und $y' := -y \ge 0$ setzen:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(-x'-y') = -\sin(x'+y') \\
&= -\sin(x')\cos(y') - \cos(x')\sin(y') \\
&= \sin(-x')\cos(-y') + \cos(-x')\sin(-y') \\
&= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(-x'-y') = \cos(x'+y') \\
&= \cos(x')\cos(y') - \sin(x')\sin(y') = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).
\end{aligned}$$

Ist andererseits $x \ge 0 \ge y$ und $|x| \ge |y|$ dann setzen wir $y' := -y \ge 0$ und $z' := x + y \ge 0$ und erhalten $x = y' + z'$. Aus

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin(y'+z') = \sin(y')\cos(z') + \cos(y')\sin(z') \\
\cos(x) &= \cos(y'+z') = \cos(y')\cos(z') - \sin(y')\sin(z')
\end{aligned}$$

erhalten wir wie zuvor

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(z') = \cos(y')\sin(x) - \sin(y')\cos(x) = \cos(y)\sin(x) + \sin(y)\cos(x) \\
\cos(x+y) &= \cos(z') = \sin(y')\sin(x) + \cos(y')\cos(x) = -\sin(y)\sin(x) + \cos(y)\cos(x).
\end{aligned}$$

Ist für $x \ge 0 \ge y$ nun $|x| < |y|$, dann ist $x' := -y \ge 0 \ge y' := -x$ und $|x'| \ge |y'|$, also nach dem zuvor gesagten

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= -\sin(-y-x) = -\sin(x'+y') = -\Big(\sin(x')\cos(y') + \cos(x')\sin(y')\Big) \\
&= \sin(-x')\cos(-y') - \cos(-x')\sin(-y') = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(-y-x) = \cos(x'+y') = \cos(x')\cos(y') - \sin(x')\sin(y') \\
&= \cos(-x')\cos(-y') - \sin(-x')\sin(-y') = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).
\end{aligned}$$

Ist schließlich $x \le 0 \le y$ so setzen wir $x' := y$ und $y' = x$ und erhalten nach dem zuvor gesagten

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x'+y') = \sin(x')\cos(y') + \cos(x')\sin(y') \\
&= \sin(y)\cos(x) + \cos(y)\sin(x) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x'+y') = \cos(x')\cos(y') - \sin(x')\sin(y') \\
&= \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).
\end{aligned}$$

Also gelten die Additionstheoreme nun für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Beachte auch, daß aus den Symmetrieeigenschaften von sin und cos und den Additionstheorem für alle $x, y \in \mathbb{R}$ umgekehrt $1 = \cos(0) = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$ folgt.

Es gelten weiters folgende Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\sin(x) - \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right),
\end{aligned}$$

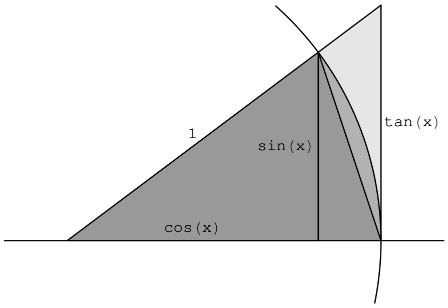
denn sei $x = a + b$ und $y = a - b$, also $a := \frac{x+y}{2}$ und $b := \frac{x-y}{2}$, dann ist

$$\begin{aligned}
\sin(x) - \sin(y) &= \sin(a+b) - \sin(a-b) \\
&= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) - (\sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b)) \\
&= 2\sin(b)\cos(a) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
\cos(x) - \cos(y) &= \cos(a+b) - \sin(a-b) \\
&= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) - (\cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)) \\
&= -2\sin(a)\sin(b) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

Für die (geometrisch definierten) Winkelfunktionen gilt $\lim_{x\to 0+}\cos(x) = 1$ und $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, denn ein Flächenvergleich des Kreissektors mit Dreiecken liefert

$$0 \le \frac{1}{2}|\sin(x)| \le \frac{1}{2}|x| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right|$$

und somit ist $\lim_{x\to 0+}\sin(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+}\cos(x) = \lim_{x\to 0+}\sqrt{1-\sin^2(x)} = 1$ und $\cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1$ für x nahe 0, also $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.



Wenn wir nun zusätzlich die Aussage

(4) $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

verwenden, dann gilt auch

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x'\to 0+}\frac{\sin(-x')}{-x'} = \lim_{x'\to 0+}\frac{\sin(x')}{x'} = 1$$

und somit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Wir haben noch keine exakte Definition der Winkelfunktionen zur Verfügung, darum gehen wir vorerst axiomatisch vor und bezeichnen mit sin und cos zwei Funktionen, die die Eigenschaften (1), (2), (3) und (4) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen. Die Existenz und Eindeutigkeit dieser Funktionen werden wir erst später beweisen.

Insbesonders ist $\lim_{x\to 0}\sin(x) = \lim_{x\to 0} x\,\frac{\sin(x)}{x} = 0\cdot 1 = 0$. Damit sind sin und cos (gleichmäßig) stetig, denn wegen $\sin(t)^2 + \cos^2(t) = 1$ folgt $|\sin(t)| \le 1$ und $|\cos(t)| \le 1$. Wählen wir für $\varepsilon > 0$ also ein $\delta > 0$ mit $|\sin(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}$ für $|t| \le \frac{\delta}{2}$, so ist

$$|\sin(x) - \sin(y)| \le 2\frac{\varepsilon}{2}1 = \varepsilon \text{ für } |x-y| \le \delta \text{ und}$$
$$|\cos(x) - \cos(y)| \le 2\frac{\varepsilon}{2}1 = \varepsilon \text{ für } |x-y| \le \delta.$$

Wenn wir $|\sin(t)| \le |t|$ verwenden, so sehen wir, daß wir sogar $\delta := \varepsilon$ wählen können, d.h.

$$|\sin(x) - \sin(y)| \le |x-y| \text{ und } |\cos(x) - \cos(y)| \le |x-y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

gilt. Die Stetigkeit von tan und cot auf $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ bzw. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ergibt sich damit aus (3.1.6).

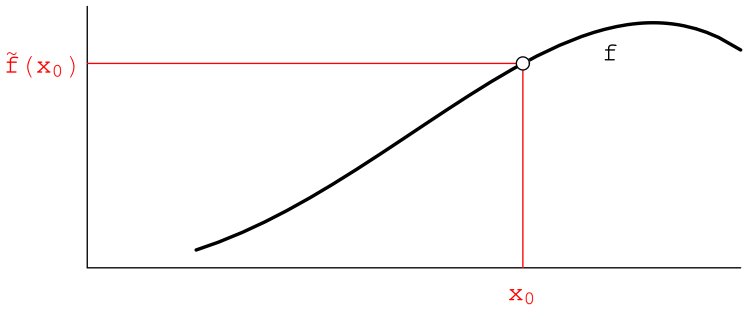
3.2 Unstetigkeitsstellen

Wir wollen nun untersuchen woran es liegen kann, wenn eine Abbildung $f : X \to Y$ bei x_0 nicht stetig ist. Beachte, daß wir nur für x_0 im Definitionsbereich von f die Frage nach der Stetigkeit von f bei x_0 stellen können. Die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{x}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist also weder stetig noch unstetig bei 0. Für $x_0 \notin X$ können wir wie folgt vorgehen.

3.2.1 Definition. Stetige Fortsetzbarkeit.
Eine Abbildung $f : X \setminus \{x_0\} \to Y$ heißt stetig zu x_0 ERWEITERBAR, falls ein $y_0 \in Y$ existiert, s.d. die Abbildung

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ y_0 & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

stetig bei x_0 ist. Dieses f heißt dann auch stetige Fortsetzung von f.



Beispiel.
Es sei $f(x) := \frac{x^2-1}{x-1}$. Dann ist $f(x)$ wohldefiniert für alle $x \neq 1$ und somit ist f dort stetig. Für $x = 1$ erhalten wir den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Wenn wir allerdings beachten, daß $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ ist für $x \neq 1$, so ergibt sich $1 \mapsto 1+1 = 2$ als vernünftige Ergänzung für f, d.h. Die Funktion

$$\tilde{f} : x \mapsto x+1 = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ist eine stetige Erweiterung von f.

Beispiel.
Wir werden in (3.4.10)-(3.4.13) zeigen, daß die Exponential-Funktion $f : x \mapsto a^x$ welche wir bislang nur für rationale x (und $a > 0$) kennen zu einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.

Beispiel.
Was ist eine vernünftige Definition für 0^0? Wegen $\prod_{i \in \emptyset} x := 1$ (für $x \neq 0$) ist

es vernünftig $x^0 := 1$ zusetzen. Die stetige (weil konstante) Erweiterung dieser Funktion $x \mapsto x^0 = 1$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist also durch $0 \mapsto 1$ gegeben. Dies spricht für die Definition $0^0 := 1$.

Andererseits ist $0^x = 0$ für $0 < x \in \mathbb{Q}$, denn $0^n = 0$ für $0 \neq n \in \mathbb{N}$. Also ist die stetige (weil konstante) Erweiterung von $x \mapsto 0^x = 0$, $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$ durch $0 \mapsto 0$ gegeben. Dies spricht nun für die Definition $0^0 := 0$.

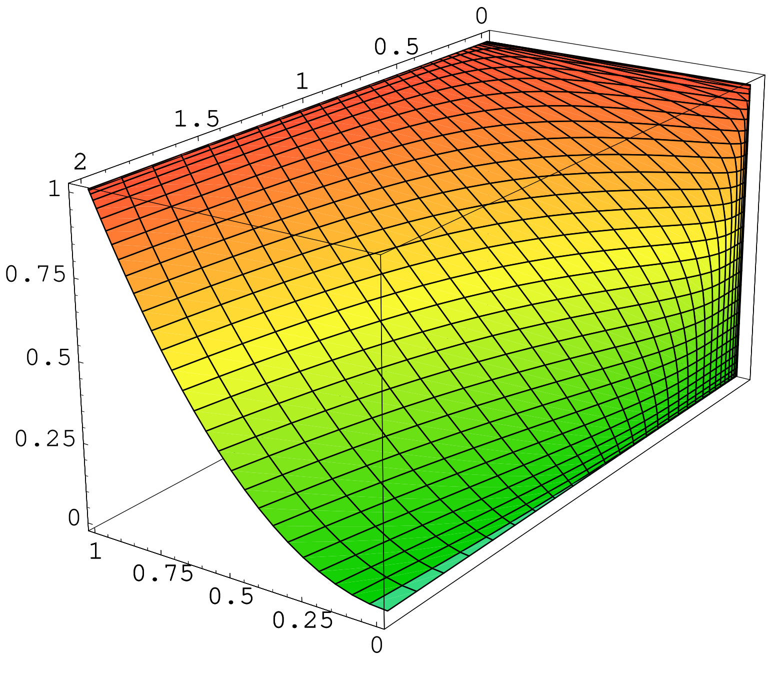
Das Problem hier ist, daß die Funktion $(x, y) \mapsto x^y$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, (x, y) \neq (0, 0)\}$ nicht stetig fortsetzbar zu $(0, 0)$ ist, denn dazu müßte es ein $t \in \mathbb{R}$ geben, s.d. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$: $|(x, y)| < \delta \Rightarrow |x^y - t| < \varepsilon$. Für $\varepsilon = 1/2$ ist dies nicht möglich, denn $0^y = 0$ und $x^0 = 1$ für alle (beliebig kleinen) $x > 0$ und $y > 0$. Es hängt also ganz davon ab in welcher Reihenfolge wir mit x und y gegen 0 gehen, d.h.

$$\lim_{x \to 0+} \lim_{y \to 0+} x^y = 1 \neq 0 = \lim_{y \to 0+} \lim_{x \to 0+} x^y.$$

Für fixes $0 < t < 1$ sei $y(x) = \frac{\ln(t)}{\ln(x)}$. Dann ist $y(x) > 0$ für $0 < x < 1$ und $\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(t)}{\ln(x)} = \frac{\ln(t)}{-\infty} = 0$ und

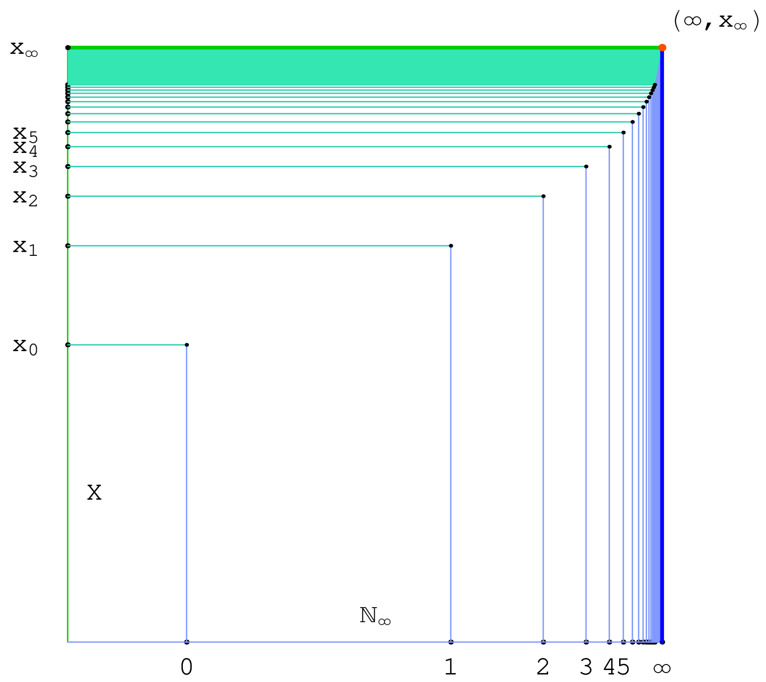
$$\lim_{x \to 0+} x^{y(x)} = \lim_{x \to 0+} x^{\ln(t)/\ln(x)} = \lim_{x \to 0+} e^{\ln(x)\,\ln(t)/\ln(x)} = \lim_{x \to 0+} e^{\ln(t)} = \lim_{x \to 0+} t = t.$$

Wenn wir also mit (x, y) längs der Kurve $y = y(x)$ gegen 0 gehen, so bleiben wir auf konstanter Höhe t.



Mit (3.2.1) können wir auch Konvergenz von Folgen als eine Stetigkeitaussage formulieren und somit die Schreibweise x_∞ für den Grenzwert der Folge x nachträglich begründen.

3.2.2 Lemma. Konvergenz von Folgen als Stetigkeit.
Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *kann genau dann zu einer stetigen Abbildung* $\mathbb{N}_\infty \to X$ *erweitert werden, wenn sie konvergiert. Die Metrik auf* $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *ist dabei die Metrik der uneigentlichen Konvergenz aus (2.3.15).*



Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $x : \mathbb{N}_\infty \to X$ stetig mit $x(n) := x_n$. Dann konvergiert $x_n = x(n) \to x(+\infty) =: x_\infty$ nach (3.1.3), denn $n \to +\infty$ in $\mathbb{N}_\infty$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt sei $x_\infty := \lim_n x_n$ dann definieren wir $x : \mathbb{N}_\infty \to X$ durch $x(n) := x_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x(+\infty) := x_\infty$. Diese Abbildung ist stetig bei $+\infty$, denn zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x(n) - x(+\infty)| = |x_n - x_\infty| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Setzen wir $\delta := d(N, \infty) > 0$, so ist $n \geq N$ genau dann, wenn $d(n, +\infty) \leq \delta$ ist.

Die Stetigkeit in den Punkten $n \in \mathbb{N}$ ist automatisch gegeben, da diese in $\mathbb{N}_\infty$ isoliert sind, siehe nachfolgende Bemerkung. □

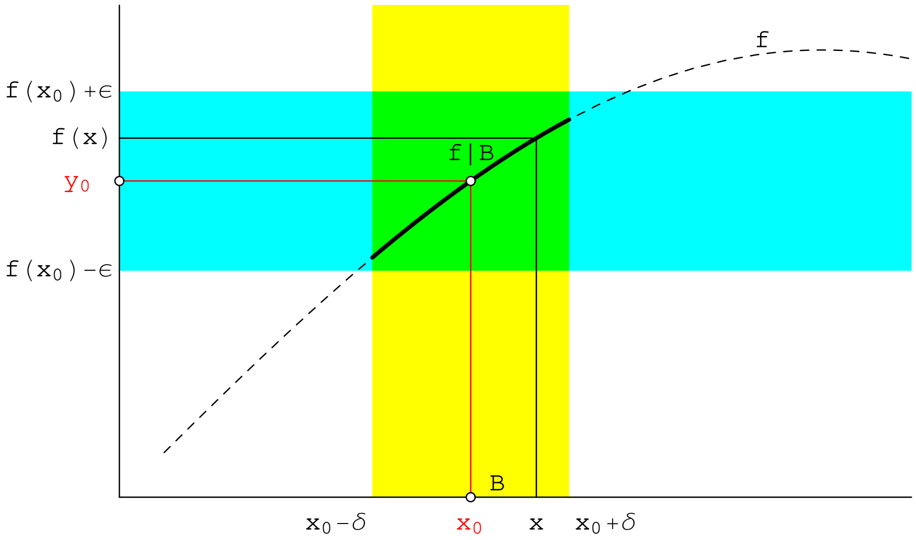
Beachte, daß in ISOLIERTEN PUNKTEN $x_0 \in X$, d.h. solchen für welche eine δ-Umgebung existiert, die nur x_0 aus X enthält, jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig ist, denn für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir genau das wegen der Isoliertheit von x_0 gegebene $\delta > 0$ und dann gilt für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$, daß $x = x_0$ ist, also $d(f(x), f(x_0)) = d(f(x_0), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$ ist.

Die nicht-Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ in einem nicht-isolierten Punkt $x_0 \in X$ kann verschiedene Gründe haben. Einerseits kann es daran liegen, daß nur der Funktionswert $f(x_0)$ bei x_0 einen ungeeigneten Wert hat. Dies führt zu:

3.2.3 Definition. $\lim_{x \to x_0} f(x)$**.**
Es sei $x_0 \in X$ kein isolierter Punkt, d.h. in jedem Ball um x_0 liegen andere Punkte aus X und sei $f : X \setminus \{x_0\} \to Y$ eine Abbildung. Dann verstehen wir unter $\lim_{x \to x_0} f(x)$ jenen Punkt y_0 von Y (sofern er existiert), s.d.

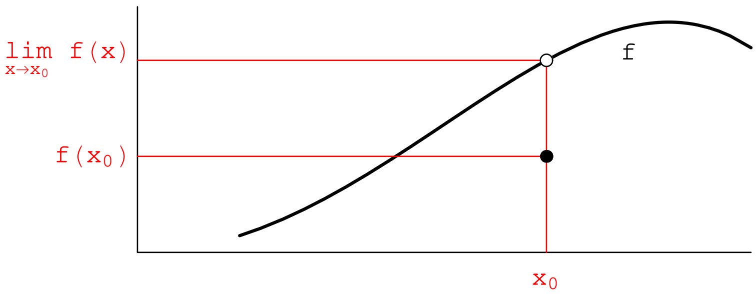
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X \setminus \{x_0\} : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Offensichtlich ist f genau dann stetig zum Punkt x_0 fortsetzbar, wenn der Limes $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert. Weiters ist $f : X \to Y$ genau dann stetig bei $x_0 \in X$ wenn $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.



Beachte, daß die Definition $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda$ ein Spezialfall dieser Definition ist, wobei $X = \mathbb{N}_\infty$ mit der Metrik der uneigentlichen Konvergenz, $x_0 := \{+\infty\} \in \mathbb{N}_\infty$, weiters $\mathbb{N} = \mathbb{N}_\infty \setminus \{+\infty\}$ sowie f die Funktion auf $\mathbb{N}$ ist, welche durch $f(n) := x_n$ gegeben ist, und schließlich $y_0 := \lambda$ ist.

3.2.4 Bemerkung. Hebbare Unstetigkeitsstelle.
Es sei x_0 nicht isoliert in X und $f : X \to Y$ nicht stetig bei x_0. Dann heißt x_0 behebbare oder kurz HEBBARE UNSTETIGKEITSSTELLE, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, d.h. f durch Abänderung auf x_0 zu einer bei x_0 stetigen Funktion gemacht werden kann.



Zum Beispiel ist 0 eine hebbare Unstetigkeitsstelle der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Denn

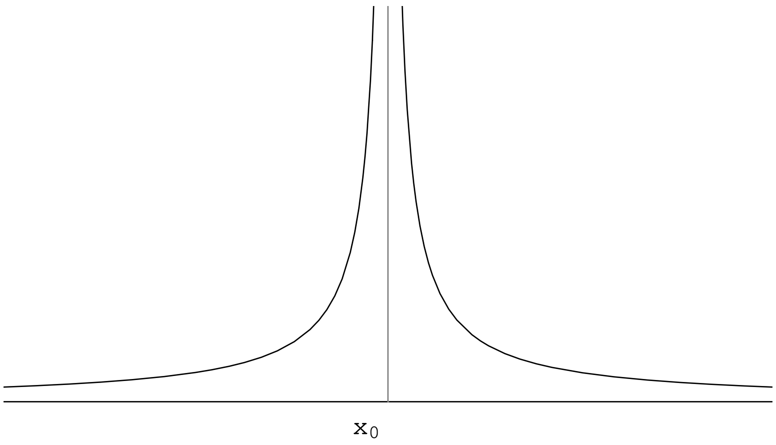
$$f(x) = \begin{cases} \lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 & \text{für } x \neq 0 \\ \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

also erhalten wir durch Abänderung an der Stelle 0 zu $0 \mapsto 1$ die konstante und somit stetige Funktion $x \mapsto 1$.

Hingegen ist 0 eine unhebbare Unstetigkeitsstelle der Signumfunktion

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

3.2.5 Bemerkung. Unbeschränktheit an einer Stelle.



Wenn eine nicht hebbare Unstetigkeitsstelle x_0 von $f : X \to \mathbb{R}$ vorliegt, so kann das daran liegen, daß f bei x_0 unbeschränkt ist, d.h.

$$\forall N\ \exists x_N \in X \setminus \{x_0\} \text{ mit } d(x_N, x_0) < \frac{1}{N} \text{ und } |f(x_N)| \geq N.$$

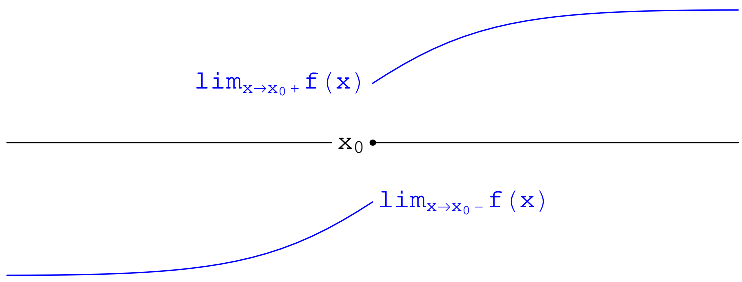
Oder aber es gibt Folgen $x_n \to x_0$ mit verschiedenen Limiten $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Für $X \subseteq \mathbb{R}$ kann dies insbesonders verschiedene Werte liefern, wenn wir uns von links oder von rechts an x_0 annähern. Also definieren wir:

3.2.6 Links- und rechtsseitige Grenzwerte.
Für Funktionen $f : \mathbb{R} \supseteq X \to Y$ können wir auch die EINSEITIGEN GRENZWERTE $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ betrachten, d.h. die Grenzwerte der Funktionen $f|_{X_<}$ und $f|_{X_>}$ für $x \to x_0$, wobei $X_< := \{x : x < x_0\}$ und $X_> := \{x : x > x_0\}$ sei.

Proposition. Stetigkeit via einseitiger Stetigkeit.
Es sei $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ *nicht isoliert und* $f : X_0 := X \setminus \{x_0\} \to Y$ *gegeben. Dann existiert* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *genau dann, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte* $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ *und* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *existieren und gleich sind. In diesem Fall ist* $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Insbesonders ist eine Funktion $f : X \to Y$ *genau dann stetig bei* x_0, *wenn die beiden einseitigen Grenzwerte existieren und gleich dem Funktionswert* $f(x_0)$ *sind.*

Falls zwar die einseitigen Grenzwerte existieren aber ungleich sind, so spricht man von einer SPRUNGSTELLE x_0 von f.



Beachte, daß falls x_0 ein isolierter Punkt von $X_<$ ist, so macht die Definition von $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ nicht viel Sinn, da jedes $y_0 \in Y$ Grenzwert ist. Da aber x_0 als nicht isoliert in X vorausgesetzt wurde, ist es dann im anderen Teil $X_>$ auch nicht isoliert. Und in diesen Fall können wir die rechte Seite derart interpretieren, daß $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ existiert und auch EIN Grenzwert von $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) ist offensichtlich.

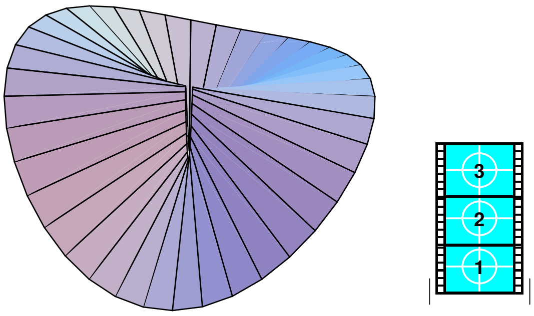
($\Leftarrow$) Sei $y_0 := \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$. Für $\varepsilon > 0$ existieren somit positive $\delta_<$ und $\delta_>$ s.d. $d(f(x), y_0) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $x_0 - \delta_< < x < x_0$ und auch für alle $x \in X$ mit $x_0 < x < x_0 + \delta_>$. Wir setzen $\delta := \min\{\delta_<, \delta_>\}$ und erhalten $d(f(x), y) < \varepsilon$ für alle $x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$. □

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ haben wir die Stetigkeit auf jene der Komponenten $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zurückführen können. Im Fall $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ können wir die PARTIELLEN FUNKTIONEN betrachten: Für $p = 2$ und fixes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir $f_{y_0}, f_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_{y_0}(x) := f(x, y_0)$ sowie $f_{x_0}(y) := f(x_0, y)$. D.h. man hält alle bis auf eine Variable fest und läßt nur diese in $\mathbb{R}$ laufen.

3.2.7 Beispiel. Partielle Stetigkeit.
Es ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(0,0) := 0$ und $f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$ sonst, nicht stetig bei 0, aber dennoch PARTIELL STETIG, d.h. $x \mapsto f(x,y)$ und $y \mapsto f(x,y)$ sind stetig. Um das einzusehen schreiben wir (x,y) mittels Polarkoordinaten als

$$(x,y) - (x_0,y_0) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \text{ mit } r > 0 \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi].$$

Die Stetigkeit bei (x_0, y_0) bedeutet nun, daß $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ für $r \to 0$ beliebig klein gemacht werden kann, unabhängig vom Winkel φ. In unserem Beispiel ist $(x_0, y_0) = 0$ und $f(x,y) = \frac{r\cos(\varphi) r\sin(\varphi)}{r^2\sin(\varphi)^2 + r^2\cos(\varphi)^2} = \sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$ und das geht nicht gegen 0.



3.2.8 Proposition. Partielle Stetigkeit.
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ partiell stetig auf $\mathbb{R}^2$ und zwar in einer Variable sogar GLEICHMÄSSIG BEZÜGLICH DER ANDEREN, *d.h. δ in der Definition der Stetigkeit kann unabhängig von der anderen Variable gewählt werden, symbolisch*

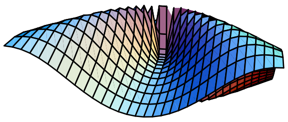
$$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,y)| < \varepsilon.$$

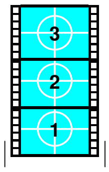
Dann ist f stetig.

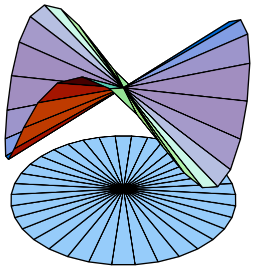
Beweis. Wir betrachten

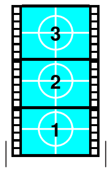
$$|f(x,y) - f(a,b)| \le |f(x,y) - f(a,y)| + |f(a,y) - f(a,b)|$$

Nach Voraussetzung existiert ein $\alpha > 0$ mit $|f(x,y) - f(a,y)| < \varepsilon$ für alle $|x-a| < \alpha$ und beliebigen y. Weiters existiert ein $\beta > 0$ mit $|f(a,y)-f(a,b)| < \varepsilon$ für alle $|y-b| < \beta$. Somit ist $|f(x,y) - f(a,b)| < 2\varepsilon$ falls $|(x,y) - (a,b)| < \delta := \min\{\alpha, \beta\}$. □









Im folgenden seien X, Y und Z metrische Räume, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ nicht isoliert und $X_0 := X \setminus \{x_0\}$ sowie $Y_0 := Y \setminus \{y_0\}$ und $f : X_0 \times Y_0 \to Z$ eine Abbildung.

Als Metrik auf $X \times X$ können wir $d((x,y),(x',y')) := \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$ verwenden, oder genausogut auch $d((x,y),(x',y')) := d(x,x') + d(y,y')$ oder $d((x,y),(x',y')) := \sqrt{d(x,x')^2 + d(y,y')^2}$.

Wir wollen nun Zusammenhänge zwischen folgenden Limiten herstellen:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \qquad \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

herstellen.

Insbesonders können wir das dann auf Doppelfolgen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ anwenden, wo $X = Y = \mathbb{N}_\infty$ und $x_0 = y_0 = \{+\infty\}$ ist.

Lemma.
Es existiere $\gamma := \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Sei weiters vorausgesetzt, daß die 'Zeilenlimiten' $g(y) := \lim_{x\to x_0} f(x,y)$ für alle $y \in Y_0$ existiert.

Dann existiert auch $\lim_{y\to y_0} g(y)$ und ist γ, d.h.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $d(f(x,y),\gamma) \le \varepsilon$ für alle $(x,y) \in X_0 \times Y_0$ mit $d((x,y),(x_0,y_0)) := \max\{d(x,x_0), d(y,y_0)\} \le \delta$. Da $g(y) := \lim_{x\to x_0} f(x,y)$ existiert, gilt somit $d(g(y),\gamma) \le \varepsilon$ für alle y mit $d(y,y_0) < \delta$, d.h. $\lim_{y\to y_0} g(y) = \gamma$.

Hier haben wir verwendet, daß $d(\_,\gamma) : X \to \mathbb{R}$ stetig ist, denn $|d(x,y) - d(x',y)| \le d(x,x')$.

Weiters ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig, denn

$$|d(x,y) - d(x',y')| \le |d(x,y) - d(x',y)| + |d(x',y) - d(x',y')| \le d(x,x') + d(y,y').$$

□

Beispiel für die Notwendigkeit der zweiten Voraussetzung.
Die Funktion

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

ist stetig bei $(0,0)$, dennoch existiert $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ für kein $x \neq 0$.

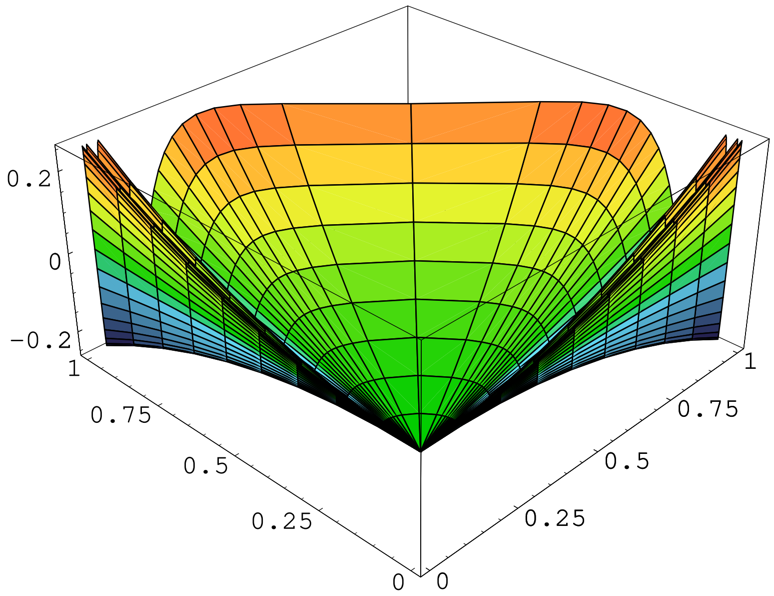
Die Funktion

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0.0) \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

ist stetig bei $(0,0)$, d.h.

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

hingegen existiert für kein $x \neq 0$ der Limes $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ und auch für kein $y \neq 0$ der Limes $\lim_{x\to 0} f(x,y)$.



Lemma.
Es existiere der 'Zeilenlimes' $g(y) := \lim_{x\to x_0} f(x,y)$ und zwar gleichmäßig bzgl. $y \in Y_0$. Weiters möge $\gamma := \lim_{y\to y_0} g(y)$ existieren.

Dann existiert auch $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ und ist gleich γ, d.h.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta_1 > 0$ s.d. $d(f(x,y), g(y)) \leq \varepsilon$ für alle $x \in X_0$ mit $d(x,x_0) \leq \delta_1$ und alle $y \in Y_0$. Weiters existiert ein $\delta_2 > 0$ mit $d(g(y),\gamma) \leq \varepsilon$ für alle $y \in Y_0$ mit $d(y,y_0) < \delta_2$. Somit ist

$$d(f(x,y),\gamma) \leq d(f(x,y),g(y)) + d(g(y),\gamma) \leq 2\varepsilon$$

für alle x, y mit $d((x,y),(x_0,y_0)) \leq \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $\square$

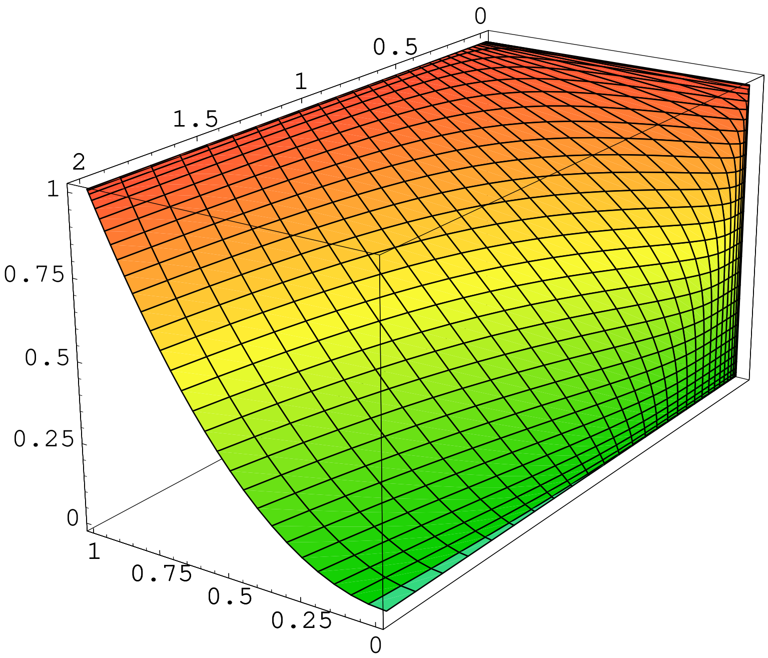
Beispiele.

1. Wir betrachten die Funktion $f : (x,y) \mapsto x^y$, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Q}_+ \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ und $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$ ist. Für jedes $x > 0$ existiert $\lim_{y \to 0+} f(x,y) = 0 = f(0,y)$ und für jedes $y > 0$ existiert $\lim_{x \to 0+} f(x,y) = 1 = f(x,0)$. Also existieren auch die iterierten Limiten

$$\lim_{x \to 0+} \lim_{y \to 0+} f(x,y) = \lim_{x \to 0+} 0 = 0$$
$$\lim_{y \to 0+} \lim_{x \to 0+} f(x,y) = \lim_{y \to 0+} 1 = 1$$

sind also verschieden und somit existiert $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ nicht, und wir haben keine optimale Möglichkeit $f(0,0)$ sinnvoll zu definieren.

In der Tat ist $t = f(x,y) = x^y = e^{y \ln(x)}$ für $0 < t \leq 1$ genau dann, wenn $y \ln(x) = \ln(t)$ ist, d.h. $y = \frac{\ln(t)}{\ln(x)}$ ist. Wir setzen $x_n := e^{-n}$ und $y_n := \frac{\ln(t)}{\ln(x_n)} = \frac{-\ln(t)}{n}$. Dann gilt $0 < x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $0 < y_n \to 0$ aber $x_n^{y_n} = t$.



2. Die Funktion $f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Also existieren für alle $x \neq 0$ der Limes $\lim_{y \to 0} f(x,y) = f(x,0) = 0$ und für alle $y \neq 0$ der Limes $\lim_{x \to 0} f(x,y) = f(0,y) = 0$. Somit existieren auch die iterierten Limiten und sind gleich:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$
$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

Dennoch existiert $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ nicht.

Betrachten wir als Spezialfall Doppelreihen $\sum_{k,n} a_{k,n}$ (genauer $\sum_{(k,n)} a_{k,n}$). Diese heißen konvergent, wenn die Doppelfolge $(s_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ der Doppelpartialsummen

$$s_{k,n} := \sum_{\substack{0\leq i\leq k\\ 0\leq j\leq n}} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{i,j}$$

konvergiert, d.h.

$$\lim_{(k,n)\to(\infty,\infty)} s_{k,n}$$

existiert, wobei wir auf $\mathbb{N}_\infty$ die Metrik der uneigentlichen Konvergenz verwenden, und auf $\mathbb{N}_\infty \times \mathbb{N}_\infty$ das Maximum der Metriken der beiden Koordinaten. Man schreibt dann $\sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}$ für diesen Grenzwert.

Wie für einfache Reihen sieht man, daß *wenn alle Glieder $a_{i,j} \geq 0$ sind, so ist die Doppelreihe genau dann konvergent, wenn die Partialdoppelsummen $s_{k,n}$ nach oben beschränkt sind.*

($\Rightarrow$) Für $k \leq k'$ und $n \leq n'$ ist

$$s_{k',n'} = s_{k,n} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{k'}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} + \sum_{i=k+1}^{k'}\sum_{j=n+1}^{n'} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=n+1}^{n'} a_{j,k}}_{\geq 0} \geq s_{k,n}$$

und somit ist

$$s_{k,n} \leq \lim_{(k',n')\to(\infty,\infty)} s_{k',n'} =: \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n},$$

denn aus $d((k',n'),(\infty,\infty)) \leq \delta := \min\{d(k,\infty), d(n,\infty)\}$ folgt $k,n \leq \max\{k,n\} \leq k', n'$.

($\Leftarrow$) Sei γ das Supremum. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ ein Index (k,n) mit $s_{k,n} \geq \gamma - \varepsilon$ und somit ist für $d((k',n'),(\infty,\infty)) \leq \delta := \min\{d(k,\infty), d(n,\infty)\}$ jedenfalls $k' \geq k$ und $n' \geq n$, und somit

$$\gamma - \varepsilon \leq s_{k,n} \leq s_{k',n'} \leq \gamma.$$

Weiters ist jede absolut konvergente Doppelreihe auch konvergent:

Sei nämlich $\sum_{k,n} |a_{k,n}|$ konvergent und $a^{\pm}_{k,n} := \max\{\pm a_{k,n}, 0\}$. Dann ist $a_{k,n} = a^{+}_{k,n} - a^{-}_{k,n}$ und $|a_{k,n}| = a^{+}_{k,n} + a^{-}_{k,n} \geq a^{\pm}_{k,n}$. Somit sind die Reihen $\sum_{k,n} a^{\pm}_{k,n}$ (absolut) konvergent und damit auch $\sum_{k,n} a_{k,n} = \sum_{k,n}(a^{+}_{k,n} - a^{-}_{k,n})$. Wir haben hier nicht wie für gewöhnliche Reihen eine Cauchy-Kriterium zur Verfügung (gestellt).

3.2.17 Cauchy'scher Doppelreihensatz.
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{k,n}| < \infty$. Dann konvergiert die Doppelreihe sowie alle Zeilen- und alle Spaltensummen $\sum_k a_{k,n}$ und $\sum_n a_{k,n}$ (absolut) und ebenso konvergieren die iterierten Reihen $\sum_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}$ und $\sum_k \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}$ und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}$$

$$
\begin{array}{cccccccccc|c}
 & \overset{0}{\blacktriangledown} & & \overset{1}{\blacktriangledown} & & \overset{2}{\blacktriangledown} & & \overset{n}{\blacktriangledown} & & & \overset{\infty}{\blacktriangledown} \\
0 \blacktriangleright & a_{0,0} & + & a_{0,1} & + & a_{0,2} & +\ldots+ & a_{0,n} & + & \ldots & \sum_{n=0}^\infty a_{0,n} \\
 & + & & + & & + & & + & & & + \\
1 \blacktriangleright & a_{1,0} & + & a_{1,1} & + & a_{1,2} & +\ldots+ & a_{1,n} & + & \ldots & \sum_{n=0}^\infty a_{1,n} \\
 & + & & + & & + & & + & & & + \\
2 \blacktriangleright & a_{2,0} & + & a_{2,1} & + & a_{2,2} & +\ldots+ & a_{2,n} & + & \ldots & \sum_{n=0}^\infty a_{2,n} \\
 & + & & + & & + & & + & & & + \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 & + & & + & & + & & + & & & + \\
2 \blacktriangleright & a_{k,0} & + & a_{k,1} & + & a_{k,2} & +\ldots+ & a_{k,n} & + & \ldots & \sum_{n=0}^\infty a_{k,n} \\
 & + & & + & & + & & + & & & + \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
\hline
\infty \blacktriangleright & \sum_{k=0}^\infty a_{k,0} & + & \sum_{k=0}^\infty a_{k,1} & + & \sum_{k=0}^\infty a_{k,2} & +\ldots+ & \sum_{k=0}^\infty a_{k,n} & + & \ldots & \sum_{k,n=0}^\infty a_{k,n}
\end{array}
$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{\substack{0\le i\le k\\ 0\le j\le n}} |a_{i,j}| = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n} |a_{i,j}| \le \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty,$$

die Doppelreihe also (absolut) konvergent, folglich existiert $\lim_{(k,n)\to(\infty,\infty)} s_{k,n}$. Gleiches gilt für die Spalten- und Zeilenreihen, denn

$$\sum_{j=0}^{n} |a_{i,j}| \le \sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$$

$$\sum_{i=0}^{k} |a_{i,j}| \le \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty.$$

Somit existieren

$$\lim_{n\to\infty} s_{k,n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{k} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{k,n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n} \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}.$$

Wegen (3.2.8) existieren somit die iterierten Limiten

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{k,n} = \lim_{k,n\to\infty} s_{k,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} s_{k,n}$$

□

Beispiel.
Wir haben bereits gezeigt, daß $\zeta(k) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k} \in \mathbb{R}$ existiert für alle $k >$

1. Dadurch wird die sogenannte Riemann'sche Zeta-Funktion definiert. In der Zahlentheorie lernt man die äquivalente Beschreibung als Produkt:

$$\zeta(k) = \prod_{p\in \mathrm{PZ}} \frac{1}{1-(\frac{1}{p})^k},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen p, d.h. für $p \in PZ := \{q : q \text{ ist Primzahl}\}$ zu nehmen ist. Intuitiv sieht man das ein, wenn man den Index n in der obigen Summe in Primfaktoren zerlegt, dann ist nämlich obige Summe als Summe über alle möglichen endlichen Folgen von Exponenten der auftretenden Primfaktoren $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$ schreibbar, d.h.

$$\begin{aligned}\zeta(k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n_0,n_1,\dots=0}^{\infty} \frac{1}{(p_0^{n_0}\, p_1^{n_1} \dots)^k}\\ &= \Big(\sum_{n_0=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{p_0^k}\Big)^{n_0}\Big) \cdot \Big(\sum_{n_1=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{p_1^k}\Big)^{n_1}\Big) \cdot \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{p_0^k}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_1^k}} \cdot \dots\\ &= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_j^k}} = \prod_{p\in \mathrm{PZ}} \frac{1}{1-(\frac{1}{p})^k}.\end{aligned}$$

Diese Rechnung muß man natürlich in der Zahlentheorie erst exakt begründet werden. Die Riemann'sche Zetafunktion hat somit eine große Bedeutung für die Primzahlverteilung und ist auch mit der berühmten Riemann'schen Vermutung verbunden, die eine Aussage über die Lage der Nullstellen (der komplexen Erweiterung) dieser Funktion ist.

Mathematica liefert uns $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$. Dies werden wir erst später nachrechnen können. Für $\zeta(2n+1)$ liefert auch Mathematica keine expliziten Werte, da diese nicht mit bekannten Größen ausgedrückt werden können.

Trotzdem wollen wir nun $\zeta(k)$ für alle $k \geq 2$ aufsummieren. Da $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \geq 1$ ist, liefert dies natürlich $\sum_{k=2}^{\infty} \zeta(k) = +\infty$. Darum vermindern wir alle ζ-Werte um 1 und versuchen statt dessen

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

zu bestimmen. Obwohl wir nicht wissen, ob dieser Reihe wirklich konvergiert, rechnen wir vorerst mal lustig drauf los, und überlegen uns erst im nachhinein eine Rechtfertigung für unser Tuen:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}\Big) \stackrel{?}{=} \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n}\Big)^k\Big) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1,$$

wobei wir einerseits die Summenformel für die geometrische Reihe und andererseits die Summe der Teleskopreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1$ benutzt haben.

Nun die Rechtfertigung. Wenn wir die Gleichungskette von rechts nach links lesen, so konvergieren die auftretenden (Doppel-)Reihen sogar absolut, und insbesonders gilt dies somit auch für die ganz links stehende Reihe nach (3.2.17) und auch die Gleichheit $\stackrel{?}{=}$ ist richtig.

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
 & \overset{2}{\blacktriangledown} & & \overset{3}{\blacktriangledown} & & \overset{4}{\blacktriangledown} & & & & \overset{n}{\blacktriangledown} & & & \overset{\infty}{\blacktriangledown} \\
2 \blacktriangleright & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{3^2} & + & \frac{1}{4^2} & + & \dots & + & \frac{1}{n^2} & + & \dots & \zeta(2)-1 \\
 & + & & + & & + & & & & + & & & + \\
3 \blacktriangleright & \frac{1}{2^3} & + & \frac{1}{3^3} & + & \frac{1}{4^3} & + & \dots & + & \frac{1}{n^3} & + & \dots & \zeta(3)-1 \\
 & + & & + & & + & & & & + & & & + \\
4 \blacktriangleright & \frac{1}{2^4} & + & \frac{1}{3^4} & + & \frac{1}{4^4} & + & \dots & + & \frac{1}{n^4} & + & \dots & \zeta(4)-1 \\
 & + & & + & & + & & & & + & & & + \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
 & + & & + & & + & & & & + & & & + \\
k \blacktriangleright & \frac{1}{2^k} & + & \frac{1}{3^k} & + & \frac{1}{4^k} & + & \dots & + & \frac{1}{n^k} & + & \dots & \zeta(k)-1 \\
 & + & & + & & + & & & & + & & & + \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
\hline
\infty \blacktriangleright & \frac{1}{1\cdot 2} & + & \frac{1}{2\cdot 3} & + & \frac{1}{3\cdot 4} & + & \dots & + & \frac{1}{(n-1)n} & + & \dots & 1
\end{array}
$$

Beispiel.
Wir kennen die Summe der (absolut konvergenten) geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.

Nun wollen wir $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,x^k$ für ebendiese $|x| < 1$ bestimmen. Bekanntlich ist $k+1$ definiert als Summe von $k+1$-vielen 1'ern, d.h. $k+1 = \sum_{n=0}^{k} 1$. Wir können also die Summe als $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} x^k$ schreiben. Um den Cauchy'schen Doppelreihensatz anzuwenden müssen wir die innere Summe durch eine unendliche Summe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}$ ersetzen, also

$$
a_{k,n} := \begin{cases} x^k & \text{für } n < k \\ 0 & \text{für } n \geq k \end{cases}
$$

setzen. Nun ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,x^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \\
&\overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} x^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^{n+j} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{j=0}^{\infty} x^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.
\end{aligned}
$$

Die Rechtfertigung für diese Rechnung ist wieder die absolute Konvergenz der rechten Seite von $\overset{?}{=}$.

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
 & \overset{0}{\blacktriangledown} & & \overset{1}{\blacktriangledown} & & \overset{2}{\blacktriangledown} & & & & \overset{n}{\blacktriangledown} & & & \overset{\infty}{\blacktriangledown} \\
0 \blacktriangleright & x^0 & & & & & & & & & & & (0+1)\,x^0 \\
 & + & & & & & & & & & & & + \\
1 \blacktriangleright & x^1 & + & x^1 & & & & & & & & & (1+1)\,x^1 \\
 & + & & + & & & & & & & & & + \\
2 \blacktriangleright & x^2 & + & x^2 & + & x^2 & & & & & & & (2+1)\,x^2 \\
 & + & & + & & + & & & & & & & + \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
 & + & & + & & + & & & & & & & + \\
k \blacktriangleright & x^k & + & x^k & + & x^k & + & \dots & + & x^k & & & (k+1)\,x^k \\
 & + & & + & & + & & & & + & & & + \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\
\hline
\infty \blacktriangleright & \frac{1}{1-x} & + & \frac{x}{1-x} & + & \frac{x^2}{1-x} & + & \dots & + & \frac{x^k}{1-x} & + & \dots & \frac{1}{(1-x)^2}
\end{array}
$$

Als Folgerung ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty}((k+1)\,x^k - x^k) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Oszillation

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Unter der Oszillation von f verstehen wir

$$\Omega(f) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\} = \sup\, f(X) - \inf\, f(X).$$

Die Oszillation von f bei ξ ist

$$\omega_f(\xi) := \inf\Big\{\Omega(f|_{U_\delta(x)}) : \delta > 0\Big\} \geq 0.$$

3.2.9 Lemma. Stetigkeit via Oszillation.
Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte reell-wertige Funktion. Dann ist f genau dann bei $\xi \in X$ stetig, wenn die Oszillation $\omega_f(\xi) = 0$ ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, s.d. $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ für $|x - \xi| < \delta$. Damit ist $\Omega(f|_{U_\delta(\xi)}) \leq 2\varepsilon$ und somit $\omega_f(\xi) \leq 2\varepsilon$. ($\Leftarrow$) Es sei $\omega_f(\xi) = 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\Omega(f|_{U_\delta(\xi)}) < \varepsilon$, also ist $|f(x) - f(y)| \leq \Omega(f|_{U_\delta(\xi)}) < \varepsilon$ für alle $x, y \in U_\delta(\xi) \cap X$ und insbesonders für $y = \xi$ und $|x - \xi| < \delta$. Folglich ist f stetig bei ξ. $\square$

3.2.10 Bemerkung. Menge der Unstetigkeitspunkte.
Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einen Kompaktum X und $\Delta(f)$

die Menge der Unstetigkeitspunkte. Nach (3.2.9) ist $\Delta(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_{1/n}(f)$, wobei $\Delta_\varepsilon(f) := \{\xi : \omega_f(\xi) \geq \varepsilon\}$. Die Mengen $\Delta_\varepsilon(f)$ sind abgeschlossen, denn sei $\xi \notin \Delta_\varepsilon(f)$, also $\omega_f(\xi) < \varepsilon$. Dann ist für hinreichend kleine δ auch $\Omega(f|_{U_\delta(\xi)}) < \varepsilon$ (beachte die Monotonie von Ω bzgl. δ). Somit ist auch $\omega_f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in U_\delta(\xi)$, d.h. $x \notin \Delta_\varepsilon(f)$.

3.3 Kompaktheit, Gleichmäßige Stetigkeit

3.3.1 Definition. Gleichmäßige Stetigkeit.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt GLEICHMÄSSIG STETIG, wenn das δ in der Definition der Stetigkeit unabhängig von x_0 gewählt werden kann, d.h.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall x_0 \in X\ \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Vergleiche dies mit der Stetigkeit von f auf X, d.h.

$$\forall x_0 \in X\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Es dürfen zwar zwei All-Quantoren, z.B. $\forall\varepsilon$ und $\forall x_0$ (Oder auch zwei Existenz-Quantoren) miteinander vertauscht werden ohne den Wahrheitsgehalt der Aussage zu verändern. All-Quantoren und Existenz-Quantoren wie z.B. $\forall x_0$ und $\exists\,\delta$ dürfen jedoch nicht miteinander vertauscht werden. Dies zeigt auch folgende einfachere Aussage über ganze Zahlen: $\forall n\ \exists\, m : n+m = 0$ ist wahr, wohingegen $\exists\, m\ \forall n : n + m = 0$ falsch ist.

Wenn wir diesen Begriff der "gleichmäßigen Stetigkeit" mit jenen der "Stetigkeit in einer Variable und zwar gleichmäßig in der anderen" aus (3.2.8) vergleichen so sehen wir, daß wenn wir die Funktion $g(x, y) := f(x + y)$ betrachten, so ist die gleichmäßige Stetigkeit von f, d.h.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall y \in Y\ \forall|x| < \delta : d(g(x, y), g(0, y)) < \varepsilon,$$

gleichbedeutend zur partiellen Stetigkeit von g in der ersten Variable und zwar gleichmäßig in der zweiten.

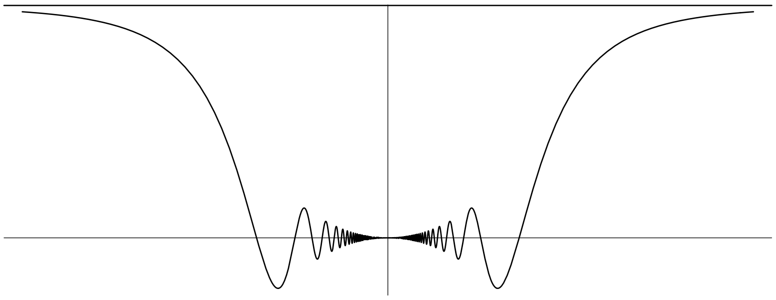
In diesem Sinn ist also die nun gegebene Definition der gleichmäßigen Stetigkeit ein Spezialfall von jener aus (3.2.8).

Eine stetige Funktion $f : X \to Y$ besitzt nach Voraussetzung für alle $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ passende $\delta > 0$, s.d. $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt. Es sei $\delta(x_0, \varepsilon) := \sup\{\delta > 0 : \ \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0) < \varepsilon)\}$, also der Radius des "größten" offenen Balls um x_0 der noch in $\{x \in X : d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\} = f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ enthalten ist. Die Funktion f ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ das Infimum $\delta := \inf\{\delta(x, \varepsilon) : x \in X\}$ größer als 0 ist.

Gleichmäßige Stetigkeit hat offensichtlich etwas damit zu tuen, daß die Funktion nicht steil ansteigt. Dies ist aber nur eine hinreichend Bedingung, denn die Umkehrung ist falsch wie folgendes Beispiel zeigt:
Es sei $f(x) := x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ für $x \neq 0$ und $f(0) := \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Dann ist f stetig und auch differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - 2x^2 \frac{1}{x^3} \cos(\frac{1}{x^2})$ für $x \neq 0$ und $f'(0) = 0$. Die Ableitung ist offensichtlich unbeschränkt nahe 0. Dennoch ist diese Funktion gleichmäßig stetig, denn

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{y\to 0+} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$$

also kann f zu einer stetige Funktion $\mathbb{R}_{\pm\infty} \to \mathbb{R}$ erweitert werden, und da $\mathbb{R}_{\pm\infty} \cong [-1,1]$ kompakt ist, ist nach (3.3.5) diese Erweiterung und damit auch die Einschränkung $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_{\pm\infty} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\pm\infty}$ es ist.



3.3.2 Beispiele (nicht) gleichmäßig stetiger Funktionen.
Nach obigen Beweis in (3.1.8) ist Sinus und damit auch Cosinus gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, Es ist sin und cos gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, denn wir können $\delta := \varepsilon$ in der Definition der Stetigkeit wählen, da

$$|\sin(x) - \sin(x')| = \left|2\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right| \le 2\cdot|\frac{x-x'}{2}|\cdot 1 = |x-x'|$$

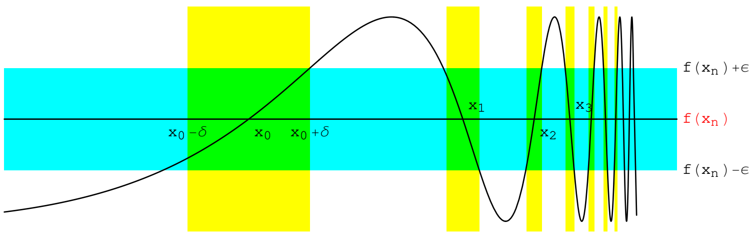
ist.

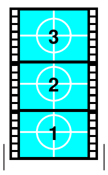
Jede Gerade $f : x \mapsto k\,x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, denn $|f(x) - f(x')| = |k\,x + d - (k\,x' + d)| = |k|\,|x - x'|$, also können wir $\delta := \frac{\varepsilon}{|k|}$ unabhängig von x' wählen.

Hingegen sind Polynome vom Grad größer als 1 nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. Z.B. ist $f : x \mapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig, denn wenn wir $f(x') = f(x)+\varepsilon$ lösen, dann ist $x' = \sqrt{x^2+\varepsilon}$ eine Lösung, und $|x'-x| = \sqrt{x^2+\varepsilon} - x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+\varepsilon}+x} \to 0$ für $x \to +\infty$ bei fixen $\varepsilon > 0$. Also finden wir beliebig nahe aneinander liegende Punkte x und x' mit $|f(x') - f(x)| = \varepsilon \ge \varepsilon$.

Die Funktion $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ ist ebenfalls nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, denn nahe 0 werden die Werte $+1$ und -1 immer wieder angenommen. Genauer sei $\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ und $\frac{1}{x'_k} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $f(x_k) = 1$ und $f(x'_k) = -1$, also $|f(x) - f(x')| = 2$ aber

$$\begin{aligned}|x_k - x'_k| &= \left|\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} - \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left|\frac{2}{1+4k} - \frac{2}{-1+4k\pi}\right| \to 0 \text{ für } k \to +\infty.\end{aligned}$$





3.3.3 Definition. Kompakt.
Ein metrischer Raum X heißt KOMPAKT oder auch KOMPAKTUM, wenn jede Folge $x : \mathbb{N} \to X$ einen Häufungswert $x_\infty \in X$ besitzt.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raumes heißt ABGESCHLOSSEN, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ in X die in X konvergiert, der Grenzwert $\lim_n x_n$ in A liegt. Beachte, daß dies in Einklang mit der Definition des abgeschlossenen Balls $B_r(a)$ (mit $r \geq 0$, $a \in X$) steht: Sei nämlich $(x_n)_n$ eine Folge in $B_r(a)$ welche in X gegen ein $x_\infty \in X$ konvergiert. Dann ist $d(x_n, a) \leq r$ und da $x \mapsto d(x, a)$ eine stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ ist, gilt $\exists \lim_n d(x_n, a) = d(\lim_n x_n, a) = d(x_\infty, a)$ und somit ist auch $d(x_\infty, a) = \lim_n d(x_n, a) \leq r$, d.h. $x_\infty \in B_r(a)$.

3.3.4 Proposition. Bolzano-Weierstraß für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.
Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^p$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. ($\Leftarrow$) Es sei (x_n) eine Folge in A. Nach dem Satz (2.4.5) von Bolzano & Weierstraß besitzt x_n einen Häufungswert x_∞. Also existiert eine gegen x_∞ konvergente Teilfolge von x_n und wegen der Abgeschlossenheit von A liegt $x_\infty \in A$.

($\Rightarrow$) Falls A unbeschränkt ist, so existieren $x_n \in A$ mit $|x_n| \geq n$. Diese Folge kann dann keinen Häufungswert besitzen, ein Widerspruch. Falls A nicht abgeschlossen ist, so existieren $x_n \in A$ mit $x_n \to x_\infty \notin A$. Wegen Kompaktheit existiert ein Häufungswert in A von x_n. Für diesen kommt aber nur x_∞ in Frage. $\square$

3.3.5 Proposition. Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta.
Es sei $f : X \to Y$ stetig und X kompakt. Dann ist f auf X gleichmäßig stetig und $f(X)$ ist kompakt.

Beweis. Andernfalls gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in X$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ aber $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Nach Definition (3.3.3) hat (x_n) einen Häufungswert x_∞ und wegen der Stetigkeit von f bei x_∞ existiert ein $\delta > 0$ mit $d(f(x), f(x_\infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $d(x, x_\infty) < \delta$. Wir wählen ein $n > 2/\delta$ mit $d(x_n, x_\infty) < \frac{\delta}{2}$ und somit ist

$$d(y_n, x_\infty) \leq \underbrace{d(y_n, x_n)}_{< \frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}} + \underbrace{d(x_n, x_\infty)}_{< \frac{\delta}{2}} < \delta$$

und erhalten $\varepsilon \leq d(f(x_n), f(y_n)) \leq d(f(x_n), f(x_\infty)) + d(f(x_\infty), f(y_n)) < \varepsilon$, einen Widerspruch.

Nun zeigen wir, daß das Bild $f(X)$ kompakt ist. Sei also $(y_n)_n$ eine Folge in $f(X)$. Dann existieren $x_n \in X$ mit $f(x_n) = y_n$. Da X kompakt ist besitzt $(x_n)_n$ einen Häufungswert x_∞ und somit eine gegen x_∞ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Da f stetig ist konvergiert die Bildfolge $k \mapsto f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ gegen $f(x_\infty)$. Da diese Folge aber eine Teilfolge von $(y_n)_n$ ist, besitzt letztere einen Häufungswert $f(x_\infty) \in f(X)$. $\square$

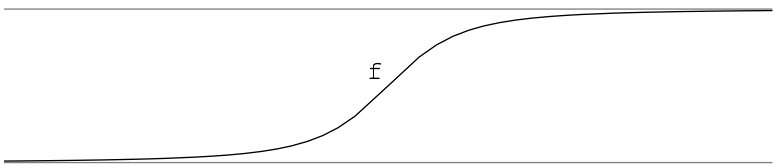
3.3.6 Proposition. Existenz von Maxima.
Es sei $Y \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann existieren $\min(Y)$ *und* $\max(Y)$.

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und X kompakt. Dann existieren $\min(f(X))$ *und* $\max(f(X))$.

Beweis. Es sei $Y \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Nach (3.3.4) ist Y beschränkt und abgeschlossen. Somit existiert $\inf(Y) \in \mathbb{R}$ und folglich eine Folge $(y_n)_n$ in Y mit $\lim_n y_n = \inf(Y)$. Da Y abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert $\inf(Y) \in Y$, also ist $\inf(Y) = \min(Y)$. Die entsprechende Aussage für $\max(Y) = \sup(Y)$ zeigt man analog.

Sei nun $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und X kompakt. Nach (3.3.5) ist das Bild $f(X)$ ebenfalls kompakt und besitzt somit ein Minimum $\min(f(X))$ und ein Maximum $\max(f(X))$. □

Beispiel.
Für nicht kompaktes X muß dies nicht mehr stimmen, wie z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ oder auch $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2) \subseteq \mathbb{R}$ zeigt.



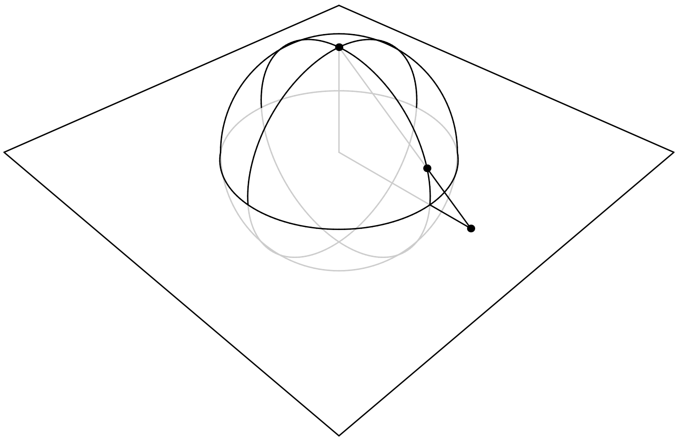
Fundamentalsatz der Algebra

3.4.5 Lemma. Verhalten bei unendlich.
Es sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann ist $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.

Für $f : \mathbb{C} \to Y$ verstehen wir dabei unter $\lim_{|z|\to 0} f(z) = \eta$ die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k > 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq K \Rightarrow d(f(z), \eta) < \infty.$$

Bemerkung.
Dies entspricht der Konvergenz im Sinne von (3.2.3) für $z \to \infty$ in $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bezüglich der Metrik, die wir von der Euklid'ischen Distanz auf der Sphäre $S^2 := \{(z,t) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \sqrt{|z|^2 + t^2} =: |(z,t)| = 1\}$ durch stereographische Projektion auf $\mathbb{C}$ erhalten. Die stereographische Projektion ist dadurch gegeben, daß jeder Punkte (z,t) der Sphäre auf den Durchstoßpunkt der Gerade durch den Nordpol $(0,1)$ und (z,t) mit der Ebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{0\}$ abgebildet wird. Ein Parametrisierung der Gerade ist durch $s \mapsto (0,1) + s(x, t-1) = (s\,x, 1 + s\,(t-1))$ gegeben und der Schnittpunkt $(y, 0)$ mit $\mathbb{C} \times \{0\}$ durch $1 + s\,(t-1) = 0$, d.h. $s = \frac{1}{1-t}$ und somit durch $y = \frac{1}{1-t}\,x$.



Beweis. Es sei $f(z) = \sum_{k \leq n} a_k z^k$ mit $a_k \neq 0$. Dann gilt

$$|f(z)| = \underbrace{|a_n|}_{\neq 0} \underbrace{|z|^n}_{\to\infty} \left(\underbrace{\frac{a_0}{a_n z^n}}_{\to 0} + \cdots + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n z}}_{\to 0} + 1 \right) \to \infty. \quad \square$$

3.4.6 Lemma. Infimum wir angenommen.
Es sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann $\exists\, z_\infty \in \mathbb{C}$ mit $|f(z_\infty)| = \inf\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$.

Beweis. Es sei $\gamma := \inf\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$. Dann existieren $z_n \in \mathbb{C}$ mit $|f(z_n)| \to \gamma$. Wegen Lemma (3.4.5) ist $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschänkt, hat also nach den Satz von Bolzano-Weierstrass (2.4.5) einen Häufungswert. O.B.d.A. können wir also annehmen, daß $\exists\, z_\infty := \lim_{n\to\infty} z_n$. Da f stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}|f(z_\infty)| &:= |f(\lim_{n\to\infty} z_n)| = |\lim_{n\to\infty} f(z_n)| = \lim_{n\to\infty} |f(z_n)| \\ &= \gamma = \inf\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}. \quad \square\end{aligned}$$

3.4.7 Lemma. Existenz einer Nullstelle.
Es sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$.

Beweis. Es sei z_∞ wie in Lemma (3.4.6). Wir ersetzen f durch das verschobene Polynom $z \mapsto f(z - z_\infty)$. Dieses neue f erfüllt $|f(0)| = \inf\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$. Angenommen $\inf\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\} > 0$.

Falls $f(z) = a_0 + a_n z^n$ mit $a_n \neq 0$, so ist $f(z_0) = 0$ für z_0 mit $z_0^n = -\frac{a_0}{a_n}$. So ein z_0 existiert, denn sei $-\frac{a_0}{a_n} = r(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))$ die Polarzerlegung (1.7.2) mit $r = |-\frac{a_0}{a_n}| \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist $z_0 := \sqrt[n]{r}\,\left(\cos(\frac{\varphi}{n}) + i \sin(\frac{\varphi}{n})\right)$ die gesuchte Lösung nach der Formel (1.7.3) von Moivre.

Sei nun f ein beliebiges Polynom vom Grad n. Dann ist

$$f(z) = a_0 + a_m z^m + g(z)\, z^{m+1}$$

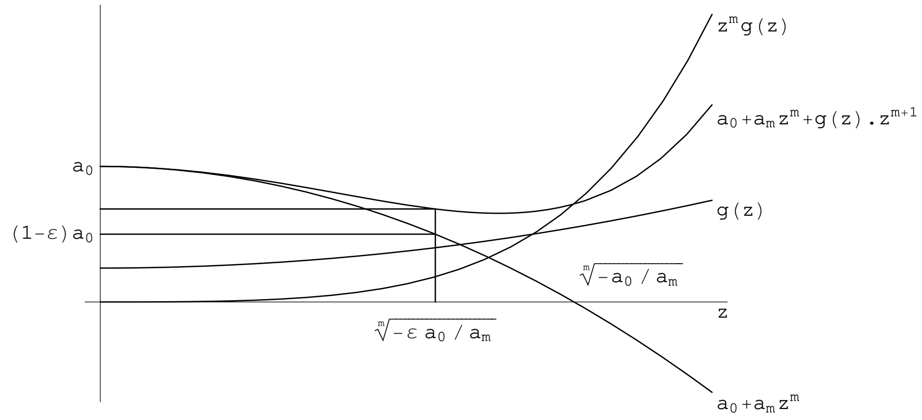
mit einem Polynom g und $a_m \neq 0$. Für z mit $z^m = -\frac{a_0}{a_m}\,\varepsilon$ und $0 < \varepsilon \leq 1$ so klein, daß

$$|z^{m+1}\, g(z)| = |z^m|\,|z\, g(z)| = \varepsilon\,\frac{|a_0|}{|a_m|}\,|z\, g(z)| < \varepsilon\,\frac{|a_0|}{2},$$

gilt

$$|f(z)| \leq |a_0 + a_m z^m| + |z^{m+1}\, g(z)| = |a_0|(1-\varepsilon) + |z^{m+1}\, g(z)| < |a_0| = |f(0)|,$$

ein Widerspruch dazu, daß $|f(0)| = \inf\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$. □



3.4.8 Fundamentalsatz der Algebra.
Zu jedem Polynom f vom Grad n existieren Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und $c \in \mathbb{C}$ s.d. $f(z) = c\,(z-\alpha_1)\cdot\dots\cdot(z-\alpha_n)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Es sei f ein Polynom vom Grad n. Nach Lemma (3.4.7) existiert eine Nullstelle α_1 von f. Folglich ist $f(z) = (z-\alpha_1)\,f_1(z)$ für ein Polynom f_1 vom Grad $n-1$ nach (1.4.14).

Ein anderer Art dies zu sehen ist die folgende:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k\, y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-y) \sum_{j=0}^{k} x^j y^{k-j} = (x-y) \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} x^j y^{k-j} \end{aligned}$$

Ersetzen wir hierin y durch eine Nullstelle α_1 so erhalten wir $f(x) = (x-\alpha)\,f_1(x)$, wobei $f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} x^j \alpha_1^{k-j}$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Mittels Induktion erhalten wir $f(z) = \prod_{k\leq n}(z-\alpha_k)\,f_n(z)$ mit einem Polynom f_n vom Grad $n-n=0$, also einer Konstante. □

3.4.9 Reelle Version des Fundamentalsatzes der Algebra.
Es sei f ein Polynom mit ausschließlich reellen Koeffizienten. Dann ist

$$f(z) = c \prod_{k \leq m} (x^2 + \beta_k x + \gamma_k) \cdot \prod_{k \leq n-2m} (z - \alpha_k)$$

mit reellen Zahlen $c, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ und $2m \leq n$ und $\beta_k^2 < 4\gamma_k$.

Beweis. Falls $f(z_0) = 0$ für $z_0 = b + i\,c$ mit $c \neq 0$ ist, so ist auch $0 = \overline{0} = \overline{\sum_k a_k\,(b+i\,c)^k} = \sum_k a_k\,(b - i\,c)^k = f(\overline{z_0})$. Es ist

$$\begin{aligned}(z - z_0) \cdot (z - \overline{z_0}) &= (z - b - i\,c) \cdot (z - b + i\,c) = (z-b)^2 - i^2\,c^2 \\ &= z^2 - 2bz + b^2 + c^2 =: z^2 + \beta\,z + \gamma\end{aligned}$$

mit $\beta = -2b$ und $\gamma = b^2 + c^2$, also $\beta^2 = 4b^2 < 4(b^2 + c^2) = 4\gamma$. Also ist die komplexen Zerlegung

$$f(z) = c \prod_k (z - \alpha_k) = c \prod_{k \leq m} (z^2 + \beta_k\,z + \gamma_k) \cdot \prod_{k \leq n-2m} (z - \alpha_k),$$

wobei die α_k mit $k \leq n - 2m$ die reellen Nullstellen sind. □

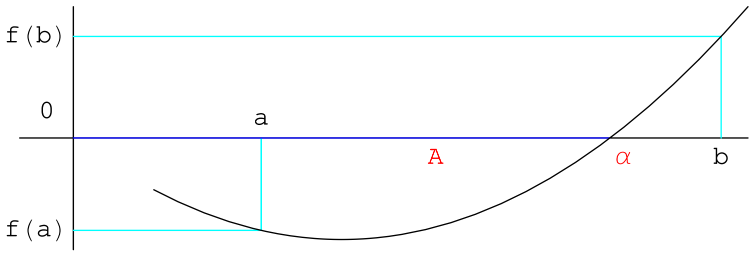
3.4 Stetige Gleichungen

Wir greifen nun das Problem auf (nicht-lineare) Gleichungen der Form $f(x) = y$ nach x aufzulösen. Für quadratische und für polynomiale Gleichungen haben wir dies bereits getan.

Allgemein können wir O.B.d.A. $y = 0$ voraussetzen, indem wir f durch die Funktion $x \mapsto f(x) - y$ ersetzen. Die Existenz einer Lösung in gewissen Fällen liefert folgende

3.4.1 Proposition. Nullstellensatz von Bolzano.
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann existiert ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$.

Beweis. Wir betrachten die Menge $A := \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$. Diese ist beschränkt, besitzt also ein Supremum $\alpha := \sup(A)$. Da f stetig ist und $f|_A \leq 0$ gilt ist $f(\alpha) = \lim_{A \ni x \to \alpha-} \leq 0$ und somit $\alpha < b$. Weiters ist $f|_{(\alpha,b]} \geq 0$, also $f(\alpha) = \lim_{x \to \alpha+} f(x) \geq 0$ und somit $f(\alpha) = 0$. □



3.4.2 Folgerung. Zwischenwertsatz.
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird jeder Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen werden.

Beweis. Falls $f(a) = f(b)$ so ist nichts zu zeigen. Sei also y echt zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann betrachten wir $g(x) := \frac{f(x)-y}{f(b)-f(a)}$. Es ist $g(b) > 0$ und $g(a) < 0$

also existiert nach dem Nullstellensatz (3.4.1) von Bolzano ein $x \in [a, b]$ mit $g(x) = 0$, d.h. $f(x) = y$. □

Regula falsi zur Nullstellenberechnung..
Wir können den Zwischenwertsatz (3.4.2) dazu verwenden, Nullstellen von Funktionen näherungsweise zu berechnen. Sei dazu x_0 und x_1 mit $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, d.h. $f(x_0)$ und $f(x_1)$ haben verschiedenes Vorzeichen. Wenn f stetig ist, so existiert nach dem Nullstellensatz von Bolzano (3.4.1) eine Nullstelle x_∞ zwischen x_0 und x_1. Um einen Näherungswert zu erhalten halbieren wir das Intervall und erhalten $x_2 := (x_0 + x_1)/2$. Falls $f(x_2) = 0$ so sind wir fertig. Andernfalls fahren wir wie zuvor mit x_2 und x_0 oder x_1 fort, je nachdem ob $f(x_2) \cdot f(x_0) < 0$ oder $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$. Die so erhaltene Folge $(x_0, x_1, \dots)$ konvergiert dann (da $|x_n - x_{n+1}| = |x_{n-1} - x_n|/2$) gegen eine Nullstelle x_∞ von f.

Ein etwas ausgefeiltere Methode ist die Nullstelle der Sehne von f als neuen Wert x_2 zu nehmen, d.h. die Lösung von $\frac{0-f(x_0)}{x_2-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, also

$$x_2 := x_0 - f(x_0)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Und ansonsten wie zuvor vorzugehen. Die Konvergenz von x_n ist nun aber nicht mehr so leicht einzusehen:

Wir konstruieren also rekursive zwei Folgen von Punkten

$$a = a_0 \le a_1 \le \dots \le a_k \le a_{k+1} \le \dots \le b_{k+1} \le b_k \le \dots b_1 \le b_0 := b$$

mit $f(a_k)\, f(b_k) < 0$ wie folgt: Es sei a_k und b_k bereits gewählt und x_{k+1} der Schnittpunkt der Sehne durch $(a_k, f(a_k))$ und $(b_k, f(b_k))$ mit der x-Achse, d.h. die Lösung der Gleichung

$$\frac{0 - f(a_k)}{x_{k+1} - a_k} = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k},$$

also

$$x_{k+1} := a_k - f(a_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}.$$

Falls $f(x_{k+1}) = 0$ ist, so haben wir eine Nullstelle gefunden. Andernfalls setzen wir

$$\begin{cases} a_{k+1} := a_k, & b_{k+1} = x_{k+1} \quad \text{falls } f(a_k)\, f(x_{k+1}) < 0 \\ a_{k+1} := x_{k+1}, & b_{k+1} = b_k \quad \text{falls } f(b_k)\, f(x_{k+1}) < 0 \end{cases}$$

Da (a_k) und (b_k) monoton und beschränkt sind existieren $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\beta := \lim_{n\to\infty} b_n$ mit $\alpha \le \beta$. Falls $\alpha = \beta$, so ist $0 \le f(\alpha)^2 = f(\alpha)\, f(\beta) \le 0$, also $\alpha = \beta$ eine Nullstelle.

Falls $f(x_k)$ schließlich konstantes Vorzeichen hat und somit eine der beiden Folgen (a_k) bzw. (b_k) schließlich konstant ist, so konvergiert die andere gegen eine Nullstelle: In der Tat sei das Vorzeichen von $f(x_{k+1})$ gleich jenes von $f(b_k)$ also verschieden von jenem von $f(a_k)$, dann ist $a_{k+1} = x_{k+1}$ und $b_{k+1} = b_k$. Ist nun z.B. $f(a_k) > 0$, so ist $f(\alpha) \ge 0$. Angenommen $f(\alpha) > 0$. Dann ist $f(a_k) > \frac{f(\alpha)}{2}$ für fast alle k und somit liegt der Schnittpunkt $a_{k+1} = x_{k+1}$ der Sehne von $(a_k, f(a_k))$ und $(b_k, f(b_k)) = (\beta, f(\beta))$ rechts von α (denn $x_{k+1} - a_k = -f(a_k)\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} = \frac{\beta - a_k}{\frac{f(-\beta)}{f(a_k)} + 1} \ge \frac{\beta - \alpha}{1 + \frac{-2f(\beta)}{f(\alpha)}}$) für hinreichend große k, ein Widerspruch.

Andernfalls ist $\alpha < \beta$. Falls x_n fast immer die linke (oder die rechte) Grenze ist, so ist sie ebenfalls konvergent. Andernfalls seien $n_0 < n_1 < \dots$ die Stellen nach denen x_n die Seite wechselt, d.h. $x_m = a_m$ für $m \in \{n_{2k-1}+1, \dots, n_{2k}\}$ und somit b_m konstant für $m \in \{n_{2k-1}, \dots, n_{2k}\}$, bzw. $x_m = b_m$ für $m \in \{n_{2k}+1, \dots, n_{2k+1}\}$ und somit a_m konstant für $m \in \{n_{2k}, \dots, n_{2k+1}\}$. Es sei $y_k := x_{n_k}$. Für $m = n_{2k+1}$ ist

$$\alpha > a_{m+1} = x_{m+1} = a_m - f(a_m)\frac{b_m - a_m}{f(b_m) - f(a_m)} = a_m + \frac{b_m - a_m}{1 - f(b_m)/f(a_m)}$$

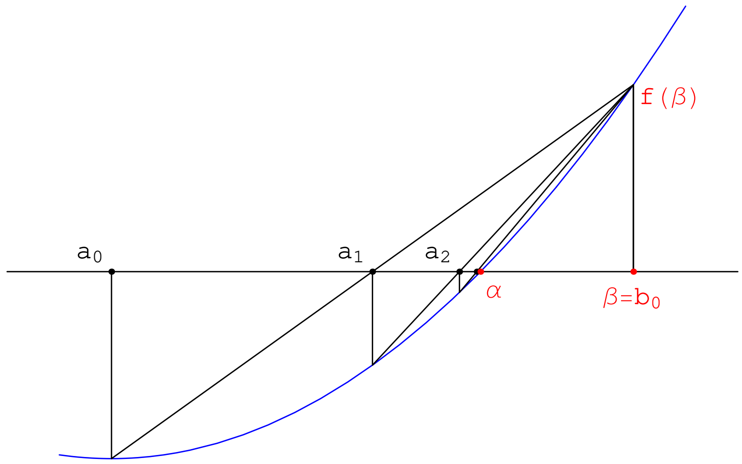
also

$$\frac{|f(b_m)|}{|f(a_m)|} = \frac{f(b_m)}{-f(a_m)} \geq \frac{b_m - a_m}{\alpha - a_m} - 1 = \frac{b_m - \alpha}{\alpha - a_m} > \frac{\beta - \alpha}{\alpha - a_m} \to +\infty \text{ für } m \to \infty.$$

Nach obigen ist $b_m = x_m = y_{2k+1}$ und $a_m = a_{n_{2k+1}} = \dots = a_{n_{2k}} = x_{n_{2k}} = y_{2k}$. Also ist $|f(y_{2k+1})| > 2\,|f(y_{2k})|$ für fast alle k. Analog zeigt man

$$\frac{|f(y_{2k})|}{|f(y_{2k-1})|} \geq \frac{\beta - \alpha}{b_{n_{2k-1}} - \beta} \to +\infty,$$

also ebenfalls $|f(y_{2k})| \geq 2|f(y_{2k-1})|$ für fast alle k. Dies zeigt die Unbeschränktheit von f.



3.4.3

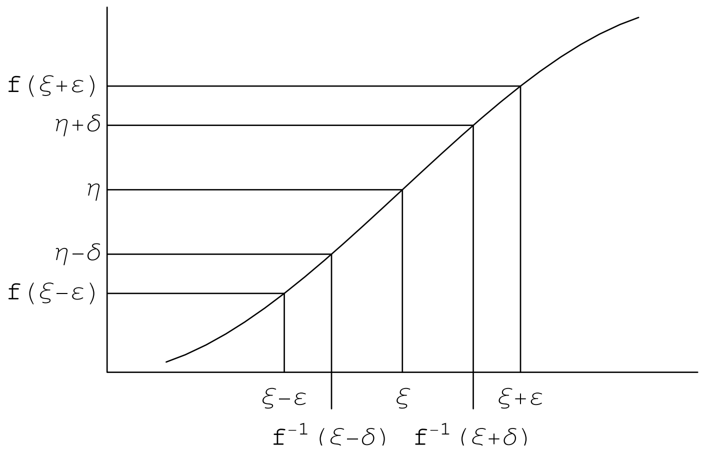
Eine andere Möglichkeit Gleichungen der Form $f(x) = y$ zu lösen, ist inverse Funktionen f^{-1} zu finden und damit die Lösung als $x = f^{-1}(y)$ erhalten. Wir wollen nun dieses Problem der Invertierbarkeit (nicht-linearer) Funktionen $f : \mathbb{R}^p \supseteq X \to \mathbb{R}^q$ in Angriff nehmen. Dazu beginnen wir vorerst im Fall $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall ist. Falls f injektiv ist, so muß f streng monoton sein, denn andernfalls sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ weder monoton wachsend noch monoton fallend, d.h. $\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in [a, b]$: $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$, $x_3 < x_4$, $f(x_3) < f(x_4)$. Die Menge $X := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ besteht aus mindestens 3 Punkten und längs aufeinanderfolgender Punkte in X ist f nicht durchgehend monoton wachsend und auch nicht durchgehend monoton fallend, also existieren 3 aufeinanderfolgende Punkte, wo f am mittleren den kleinsten oder größten Wert hat. O.B.d.A. seien dies $x_1 < x_2 < x_3$ in I und es liege $f(x_1)$ näher an $f(x_2)$ als $f(x_3)$. Dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein y_0 zwischen x_2 und x_3 mit $f(y_0) = f(x_1)$, ein Widerspruch zur Injektivität von f.

Wir können uns in unseren Überlegungen also auf streng monotone Funktionen beschränken. Beachte jedoch, daß dies nur für Intervalle gilt, denn $x \mapsto 1/x$ ist bijektiv $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber nicht streng monoton.

Theorem über die Inverse monotoner Funktionen.
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend auf einem Intervall I. Dann ist $f : I \to f(I)$ bijektiv mit streng monotoner und stetiger Inversen f^{-1}. Ist f zusätzlich stetig, so ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall.

Klarerweise heißt f STRENG MONOTON WACHSEND, wenn $f(x) < f(y)$ aus $x < y$ folgt.

Beweis.



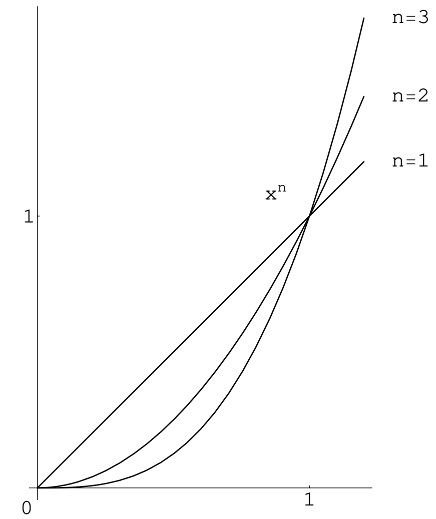
Offensichtlich ist f bijektiv und die Inverse f^{-1} streng monoton wachsend.

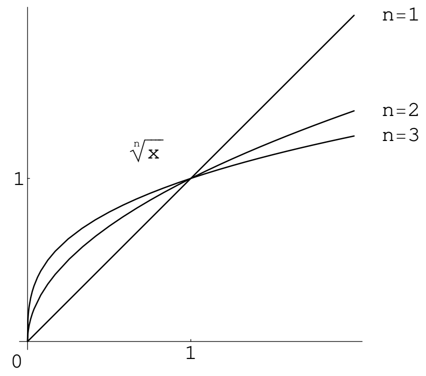
Nun zur Stetigkeit: Sei $f(\xi) = \eta$. Wir betrachten zuerst den Fall wo ξ ein innerer Punkt von I ist. Für (kleine) $\varepsilon > 0$ ist $\xi \pm \varepsilon \in I$ und somit $f(\xi - \varepsilon) < f(\xi) = \eta < f(\xi + \varepsilon)$. Nun wählen wir ein $\delta > 0$ mit $f(\xi - \varepsilon) < \eta - \delta < \eta + \delta < f(\xi + \varepsilon)$ und somit ist für $|y - \eta| < \delta$ auch $\xi - \varepsilon = f^{-1}(f(\xi - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(\xi + \varepsilon)) = \xi + \varepsilon$, d.h. $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| < \varepsilon$.

Falls ξ ein Randpunkt von I ist (z.B. der linke), so gehen wir genauso vor, benötigen allerdings nur die Hälfte der Ungleichungen: Es ist $\xi + \varepsilon \in I$ für kleine $\varepsilon > 0$ und somit $f(\xi) = \eta < f(\xi + \varepsilon)$. Nun wählen wir ein $\delta > 0$ mit $f(\xi) < \eta + \delta < f(\xi + \varepsilon)$ und somit ist für $|y - \eta| < \delta$ auch $\xi = f^{-1}(f(\xi)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(\xi + \varepsilon)) = \xi + \varepsilon$, d.h. $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| < \varepsilon$.

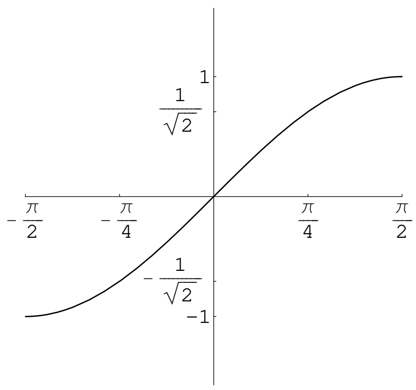
Sei nun f stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall, denn nach dem Zwischenwertsatz wird jeder Wert $\inf(f(I)) < y < \sup(f(I))$ angenommen. $\square$

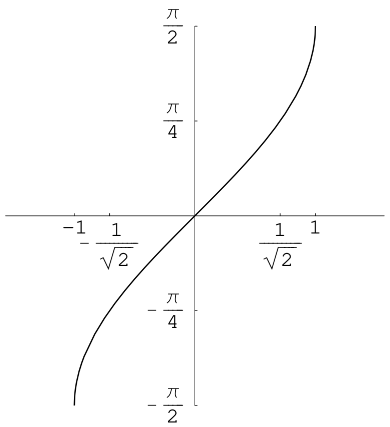
3.4.4 Beispiele. Wurzel und trigonometrische Funktionen.
Die Funktion $f : x \mapsto x^n$, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ ist für $0 \neq n \in \mathbb{N}$ streng monoton wachsend und injektiv. Also ist nach dem Satz über inverse Funktionen (3.4.3) die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wohldefiniert, stetig und streng monoton wachsend und $f(\mathbb{R})$ ein Intervall. Da $0^n = 0$ und $\lim_{k\to\infty} k^n = +\infty$ ist, ist $\min(f(\mathbb{R})) = 0$ und $\sup(f(\mathbb{R})) = +\infty$, also $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ und somit die n-TE WURZEL als Umkehrfunktion $y \mapsto \sqrt[n]{y}$ auf ganz $\mathbb{R}^+$ definiert. Beachte wie einfach dies nun geworden ist im Vergleich mit den Aufgaben (2.16) und (2.17).

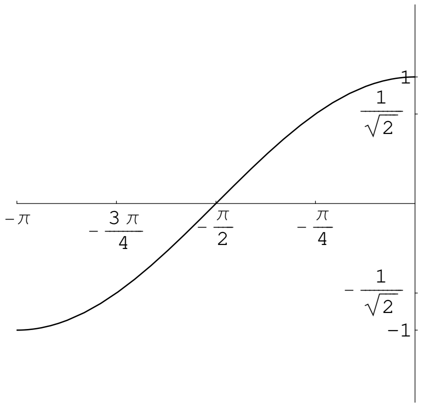


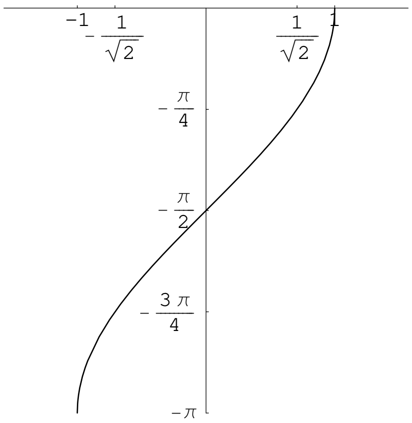


Entsprechend folgt auch die Existenz einer stetigen, monoton wachsenden Umkehrfunktion $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos : [-1,1] \to [-\pi, 0]$ und $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen









Wir haben hierbei verwendet, daß eine kleinste positive Nullstelle von cos existiert und diese gerade (pre Definition) $\frac{\pi}{2}$ ist (siehe Aufgabe (3.32)). Daraus folgt in Aufgabe (3.33) mittels der Additionssätze, daß $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend und $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend ist und da cos gerade ist $\cos : [-\pi, 0] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend ist. Wegen $\sin(\pm\pi/2) = \pm 1$, $\cos(0) = 1$, $\cos(\pm\pi) = -1$ ist das Bild dieser Funktionen $[-1, 1]$ und somit die Umkehrfunktionen $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ und $\arccos : [-1, 1] \to [-\pi, 0]$ streng monoton wachsend und stetig. Wegen $\cos(-x) = \cos(x)$ kann man arccos besser als Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ definieren und hat den Vorteil, daß diese dann nur Werte in $\mathbb{R}^+$ annimmt.

Um ein entsprechendes Resultat auch für $\tan := \frac{\sin}{\cos} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ zu erhalten müssen wir wieder die Monotonie und dafür ein Additionstheorem zeigen:

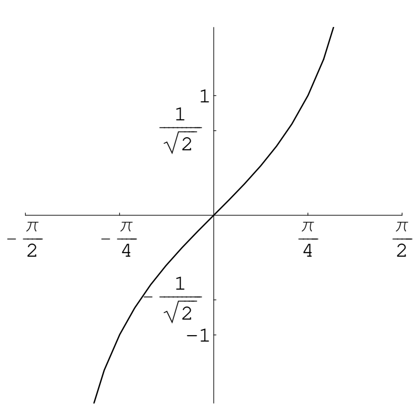
$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\
&= \frac{\frac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)},
\end{aligned}$$

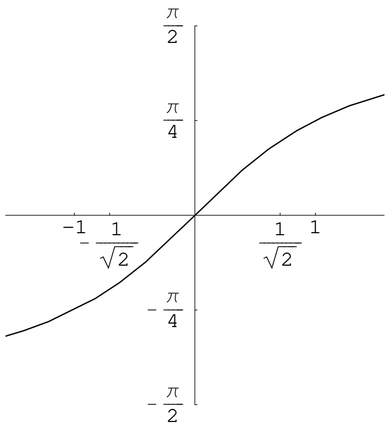
falls $\cos(x), \cos(y), \cos(x+y) \neq 0$ ist.

Somit ist $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$ und $\tan(x) - \tan(y) = \tan(x-y)\,(1 + \tan(x)\tan(y)) > 0$ für x nahe y mit $x > y$, also tan streng monoton wachsend auf $(-\pi/2, \pi/2)$ und wegen

$$\lim_{x \to \pm\pi/2 \mp} \tan(x) = \lim_{x \to \pm\pi/2 \mp} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\pm 1}{+0} = \pm\infty$$

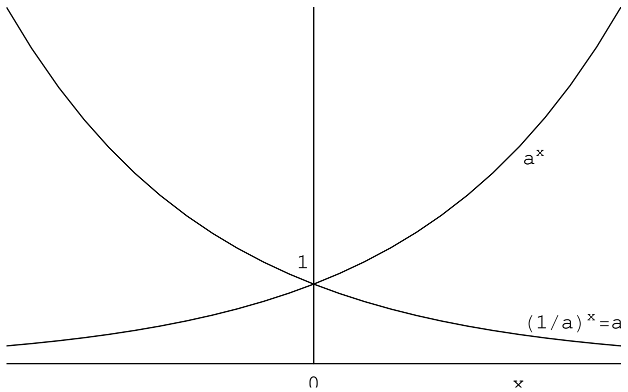
ist die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ stetig und streng monoton wachsend.





Allgemeine Potenz

3.4.10 Bemerkung.
Bislang haben wir a^x eine Bedeutung gegeben, falls $x \in \mathbb{Q}$ und $a > 0$ ist. Wir wollen diese Definition nun auf $x \in \mathbb{R}$ ausdehnen. In (5.2.4) werden wir eine elegantere Definition behandeln.



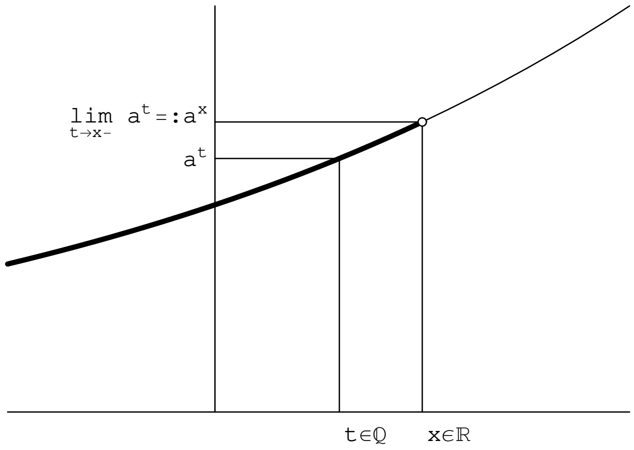
3.4.11 Lemma. Stetigkeit der Exponentialfunktion auf $\mathbb{Q}$.
Die allgemeine Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ ist stetig $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ und für $a \geq 1$ monoton wachsend.

Ist $a := e$ die Euler'sche Konstante so spricht man kurz von der EXPONENTIALFUNKTION $\exp : x \mapsto e^x$.

Beweis. Es ist $x \mapsto x^n$ streng monoton wachsend für $0 \neq n \in \mathbb{N}$ und somit auch die Umkehrfunktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ und ebenso die Zusammensetzung $x \mapsto x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ für $0 < \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Damit ist $1 = 1^t < a^t$ für alle $0 < t \in \mathbb{Q}$ und somit $a^{x'} = a^{x'-x} \cdot a^x > 1 \cdot a^x = a^x$ für $x' > x$ und $a > 1$ (und $t := x' - x > 0$).

Es konvergiere $x_n \to x_\infty$ in $\mathbb{Q}$. Da ist $\lim_{n\to\infty} x_n - x_\infty = 0$ und $a^{x_n} = a^{x_n - x_\infty} a^{x_\infty}$ nach (1.3.13). Es genügt also $x_\infty = 0$ anzunehmen und $\lim_n a^{x_n} = 1$ zu zeigen. Wegen $a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$ und der Stetigkeit von $x \mapsto 1/x$ bei 1 dürfen wir $a \geq 1$ annehmen. Da $x \mapsto a^x$ für $a \geq 1$ wachsend ist, genügt es dies für die Folgen $x_n := \pm\frac{1}{n}$ zu zeigen. Nach (2.3.13) ist dies der Fall. □

3.4.12 Definition. a^x **mit** $x \in \mathbb{R}$.
Für $a \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $a^x := \sup\{a^t : t \in \mathbb{Q}, t < x\} = \lim_{\mathbb{Q}\ni t\to x-} a^t > 0$. Dieses Supremum existiert, da ein $N \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ existiert mit $x \leq N$ und somit ist $a^t \leq a^N$ für alle $t < x \leq N$. Dies ist konsistent mit der Definition von a^x für $x \in \mathbb{Q}$ nach (3.4.11).



Für $0 < a < 1$ setzen wir $a^x := \frac{1}{(1/a)^x}$.

Lemma.
Es seien $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}_+$ *beschränkt. Dann ist* $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Beweis. Für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt $0 \leq a \leq \sup(A)$ und $0 \leq b \leq \sup(B)$, also ist $0 \leq a \cdot b \leq \sup(A) \cdot \sup(B)$ und somit $\sup(A) \cdot \sup(B)$ eine obere Schranke von $A \cdot B$.

Angenommen es gäbe ein $\delta > 0$, s.d. $\gamma := \sup(A) \cdot \sup(B) - \delta > 0$ eine kleinere obere Schranke von $A \cdot B$ wäre. Wir wählen $a \in A$ und $b \in B$ mit $a \geq \sup(A) - \delta' \geq 0$ und $b \geq \sup(B) - \delta' \geq 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} a \cdot b &\geq (\sup(A) - \delta') \cdot (\sup(B) - \delta') \\ &= \sup(A) \cdot \sup(B) - \delta' \cdot (\sup(A) + \sup(B)) + (\delta')^2 \\ &> \sup(A) \cdot \sup(B) - \delta = \gamma, \end{aligned}$$

einen Widerspruch, wobei $\delta' \cdot (\sup(A) + \sup(B)) < \delta$ gewählt war. $\square$

Laut (1.3.13) gelten die Potenzregeln für natürliche Zahlen als Exponenten. Mittels der Definition $a^{-n} := 1/a^n$ für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ erweitert sich die Gültigkeit auf alle ganzen Zahlen als Exponenten. Z.B. ist

$$a^n \cdot a^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{n+(-m)}.$$

Für rationale Exponenten und Basen ≥ 0 folgen mittels der Definition $a^{p/q} := \sqrt[q]{a^p}$ die Potenzregeln nun wie folgt: Wegen der Injektivität von $a \mapsto a^q$ für $0 < q \in \mathbb{N}$ genügt es die Potenzregeln nach Potenzierung mit geeignet gewählten

q zu verifizieren, also gilt

$$\begin{aligned}
a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} &= a^{\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}} = a^{\frac{p_1\,q_2+p_2\,q_1}{q_1\,q_2}}, \text{ da}\\
\left(a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{q_1\,q_2} &= \left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{q_1\,q_2} \cdot \left(a^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{q_1\,q_2} = \left(\left(\sqrt[q_1]{a^{p_1}}\right)^{q_1}\right)^{q_2} \cdot \left(\left(\sqrt[q_2]{a^{p_2}}\right)^{q_2}\right)^{q_1}\\
&= (a^{p_1})^{q_2} \cdot (a^{p_2})^{q_1} = a^{p_1\,q_2} \cdot a^{p_2\,q_1} = a^{p_1\,q_2+p_2\,q_1}\\
&= \left(\sqrt[q_1\,q_2]{a^{p_1\,q_2+p_2\,q_1}}\right)^{q_1\,q_2} = \left(a^{\frac{p_1\,q_2+p_2\,q_1}{q_1\,q_2}}\right)^{q_1\,q_2}\\
\left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{p_2}{q_2}} &= a^{\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}} = a^{\frac{p_1\,p_2}{q_1\,q_2}}, \text{ da}\\
\left(\left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{q_1\,q_2} &= \left(\sqrt[q_2]{\left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{p_2}}\right)^{q_1\,q_2} = \left(\left(\sqrt[q_2]{\left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{p_2}}\right)^{q_2}\right)^{q_1}\\
&= \left(\left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{p_2}\right)^{q_1} = \left(a^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{p_2\,q_1} = \left(\left(\sqrt[q_1]{a^{p_1}}\right)^{q_1}\right)^{p_2}\\
&= (a^{p_1})^{p_2} = a^{p_1\,p_2} = \left(\sqrt[q_1\,q_2]{a^{p_1\,p_2}}\right)^{q_1\,q_2} = \left(a^{\frac{p_1\,p_2}{q_1\,q_2}}\right)^{q_1\,q_2}\\
(a\cdot b)^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}, \text{ da}\\
\left((a\cdot b)^{\frac{p}{q}}\right)^q &= \left(\sqrt[q]{(a\cdot b)^p}\right)^q = (a\cdot b)^p\\
&= a^p \cdot b^p = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q \cdot \left(\sqrt[q]{b^p}\right)^q = \left(a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}\right)^q
\end{aligned}$$

3.4.13 Lemma. Stetigkeit der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$.
Für $a > 0$ hat die Funktion $x \mapsto a^x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften:

1. *Sie ist monoton und für $a \neq 1$ streng monoton.*
2. *Sie ist stetig.*
3. *$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.*
4. *$(a^x)^y = a^{x\cdot y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.*
5. *$(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis.
(1) Aus $x < y$ folgt $\{t : t < x\} \subseteq \{t : t < y\}$ und für $a \geq 1$ somit $a^x \leq a^y$. Für $a > 1$ und $x < y$ existiert ein rationales t mit $x < t < y$ und somit ist $a^x \leq a^t, \sup\{a^s : t < s < y\} = a^y$. Für $0 < a < 1$ ist schließlich $a^x = 1/(1/a)^x > 1/(1/a)^y = a^y$.

(3) Es ist

$$\begin{aligned}
a^x \cdot a^y &= \lim_{\mathbb{Q}\ni t\to x-} a^t \cdot \lim_{\mathbb{Q}\ni s\to y-} a^s\\
&\stackrel{!}{=} \lim_{\mathbb{Q}^2\ni(t,s)\to(x-,y-)} a^t\cdot a^s = \lim_{\mathbb{Q}^2\ni(t,s)\to(x-,y-)} a^{t+s} = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to(x+y)-} a^r\\
&= a^{x+y}.
\end{aligned}$$

(2) Wegen der Potenzregel (3) genügt es die Stetigkeit von $a \mapsto a^x$ bei $x = 0$ zu zeigen. Es sei $\varepsilon > 0$. Wegen (3.4.11) ist $\lim_{\mathbb{Q}\ni t\to 0} a^t = a^0 = 1$, also existiert ein $0 < \delta \in \mathbb{Q}$ mit $|1 - a^{\pm\delta}| < \varepsilon$. Dann ist für $x \in \mathbb{R}$ mit $-\delta < x < \delta$:

$$1 - \varepsilon < a^{-\delta} < a^x < a^\delta < 1 + \varepsilon,$$

also $|1-a^x| < \varepsilon$.

(5) Wegen (2) ist

$$(a\cdot b)^r = \lim_{\mathbb{Q}\ni t\to r}(a\cdot b)^t = \lim_{\mathbb{Q}\ni t\to r} a^t\cdot b^t = \lim_{\mathbb{Q}\ni t\to r} a^t \cdot \lim_{\mathbb{Q}\ni t\to r} b^t = a^r\cdot b^r.$$

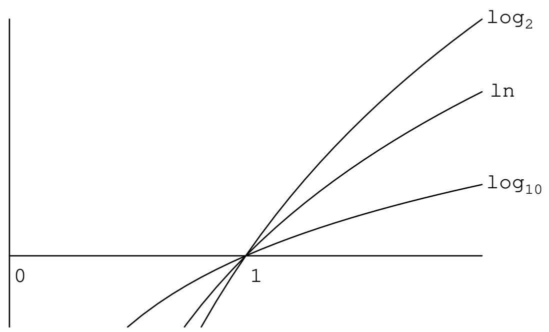
(4) Für $y=0$ ist dies offensichtlich, da $(a^x)^0 = 0 = a^{x\cdot 0}$ ist. Sein nun vorerst $0\neq y\in\mathbb{Q}$. Aus $a^x = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to x} a^r$ folgt mittels der Stetigkeit von $x\mapsto x^y$ für $y\in\mathbb{Q}$ aus (3.4.4), daß

$$(a^x)^y = (\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to x} a^r)^y = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to x}(a^r)^y = \lim_{\mathbb{Q}\ni r\to x} a^{r\cdot y} = \lim_{\mathbb{Q}\ni s\to x\cdot y} a^s = a^{x\cdot y}.$$

Schließlich ist für $y\in\mathbb{R}$:

$$(a^x)^y = \lim_{\mathbb{Q}\neq s\to y}(a^x)^s = \lim_{\mathbb{Q}\neq s\to y} a^{x\cdot s} = \lim_{\mathbb{Q}\neq r\to x\cdot y} a^r = a^{x\cdot y}. \quad \square$$

3.4.14 Definition. Logarithmus.
Es sei $b>1$. Dann besitzt die Funktion $x\mapsto b^x$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ eine stetige monoton wachsende Umkehrfunktion nach dem Satz über inverse Funktionen. Diese wird mit $\log_b$ (den LOGARITHMUS ZUR BASIS b bezeichnet). D.h. Für jedes $y>0$ existiert eine eindeutige Lösung $x=\log_b(y)$ der Gleichung $b^x=y$.



3.4.15 Lemma. Rechenregeln des Logarithmus.
Es gilt:

- $\log(x\cdot y) = \log(x)+\log(y)$ *für alle* $x,y>0$.
- $\log(x^y) = y\cdot\log(x)$ *für* $x>0$ *und* $y\in\mathbb{R}$

Beweis. Da $x\mapsto b^x$ injektiv ist genügt es die exponenzierten Gleichungen zu verifizieren:

$$b^{\log_b(x\cdot y)} = x\cdot y = b^{\log_b(x)}\cdot b^{\log_b(y)} = b^{\log_b(x)+\log_b(y)};$$
$$b^{\log_b(x^y)} = x^y = (b^{\log_b(x)})^y = b^{y\,\log_b(x)}. \quad \square$$

In Aufgabe (3.69) zeigen wir $\log_a(b)\cdot\log_b(a) = 1$ für $a,b>0$. Weiters ist $\log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x)\cdot\log_b(a)$, also alle Logarithmenfunktionen proportional zueinander (mit Proportionalitätsfaktor $\log_b(a)$).

Bemerkung.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(x) = f(1)\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Es ist $f(0+0) = f(0) + f(0)$, also $f(0) = 0$. Mittels Induktion folgt $f(n\,x) = n\,f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Weiters ist $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, also $f(-x) = -f(x)$ und somit $f(k\,x) = k\,f(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$. Somit ist

$$f(\frac{k}{n}) = k\,f(\frac{1}{n}) = \frac{k}{n}\,n\,f(\frac{1}{n}) = \frac{k}{n} f(1)$$

und damit

$$f(x) = \lim_{\mathbb{Q}\ni t\to x} f(t) = \lim_{\mathbb{Q}\ni t\to x} t\,f(1) = x\,f(1).$$

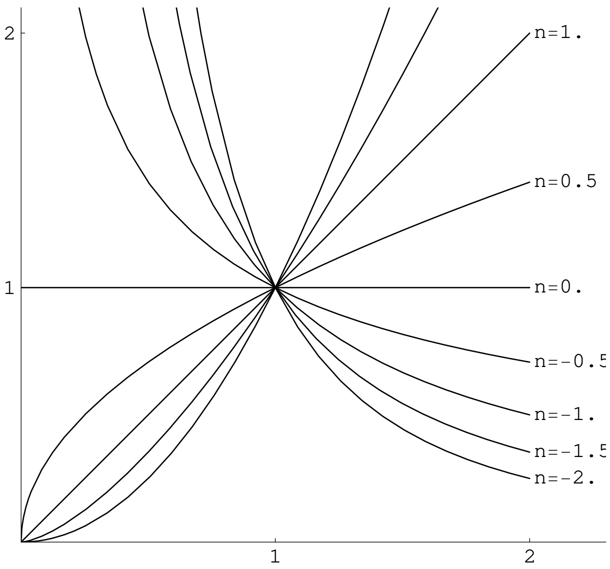
Folgerung.
Es sie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x\,y) = f(x) + f(y)$, dann ist $f(y) = f(0)\,\ln(y)$.

Beweis. Dann erfüllt $g := f \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x\,e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y),$$

also ist $f(e^x) = g(x) = x\,g(1) = x\,f(0)$ und somit $f(y) = f(0)\,\ln(y)$ □

3.4.16 Folgerung. Stetigkeit der Potenzfunktion.
Für $p \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto x^p$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ stetig.



Beweis. Es ist $x^p = b^{\log_b(x^p)} = b^{p\cdot\log_b x}$ und somit stetig in x, denn $\log_b$, die Multiplikation mit p und $y \mapsto b^y$ sind stetig. □

3.4.17 Banach'scher Fixpunktsatz.

Der Satz (3.4.3) über inverse Funktionen funktioniert bestens um Umkehrfunktionen von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu erhalten. Wir haben dabei wesentlich von der Ordnung auf $\mathbb{R}$ Gebrauch gemacht. Da wir aber eigentlich Gleichungen $f(x) = y$ bei vorgegebenen y nach x auflösen wollen wenn f nicht nur von einem reellen Parameter x abhängt, sondern von $x \in \mathbb{C}$ oder allgemeiner $x \in \mathbb{R}^n$. Dort haben wir aber keine vernünftige Ordnung mehr zu Verfügung. Also müssen wir anders vorgehen.

Anstelle einer Gleichung der Form $f(x) = y$ können wir äquivalent auch die Fixpunkt-Gleichung $x = g(x) := x + y - f(x)$ lösen. Wenn x_0 nicht ein Fixpunkt von g ist, dann betrachten wir x_n rekursiv definiert durch $x_{n+1} := g(x_n)$. Wir hätten gerne, daß $x_\infty := \lim_n x_n$ existiert, da dann $g(x_\infty) = g(\lim_n x_n) = \lim_n g(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x_\infty$, d.h. x_∞ ein Fixpunkt wäre. Dazu brauchen wir, daß $d(x_{n+1}, x_\infty) = d(g(x_n), g(x_\infty)) \to 0$, oder besser $d(g(x), g(y)) < d(x, y)$, oder sogar $d(g(x), g(y)) \le q d(x, y)$ mit $q < 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(g^n(x_1), g^n(x_0)) \le q^n d(x_1, x_0) \quad \text{und somit} \\ d(x_{n+m}, x_n) &\le \sum_{k=0}^{m-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \le \sum_{k=0}^{m-1} q^k\, d(x_{n+1}, x_n) \\ &\le \sum_{k=0}^{m-1} q^{n+k} d(x_1, x_0) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \to 0, \end{aligned}$$

daher ist x_n eine Cauchy-Folge und konvergiert also zu einem Fixpunkt x_∞. Wenn x ein weiterer Fixpunkt ist, dann ergibt $d(x, x_\infty) = d(g(x), g(x_\infty)) < d(x, x_\infty)$ einen Widerspruch. Beachte, daß

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) \le \sum_{k=0}^{m-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \le \\ \le \sum_{k=0}^{m-1} q^{k+1} d(x_n, x_{n-1}) \le \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1}) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

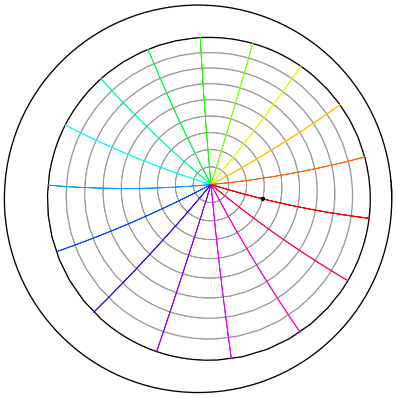
und daher

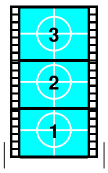
$$d(x_\infty, x_n) \le \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1}) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Dies zeigt:

Banach'scher Fixpunkt-Satz.
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $g : X \to X$ eine Kontraktion, d.h. ein $q < 1$ existiert mit $d(g(x), g(y)) \le q\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Dann gibt es einen eindeutigen Fixpunkt $x_\infty \in X$ von g, welcher als Limes der rekursiv definierten Folge $x_{n+1} := g(x_n)$ mit beliebigen Startwert x_0 erhalten werden kann. Weiters gelten die Abschätzungen

$$d(x_\infty, x_n) \le \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1}) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \quad \square$$





3.4.18 Beispiel.
In (2.20) haben wir gezeigt, daß

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots+\sqrt{6}}}}}$$

gegen 3 konvergiert. Dabei haben wir wesentlich die Monotonie von $x \mapsto \sqrt{6+x}$ verwendet. Wenn wir eine entsprechende Rekursionsvorschrift $f : x \mapsto \sqrt{a+x}$ für komplexe $a \in \mathbb{C}$ auf Startwerte $x_0 \in \mathbb{C}$ anwenden, können wir nicht mehr so argumentieren. Also versuchen wir den Banach'schen Fixpunktsatz anzuwenden:

Die Quadratwurzel(n) $\alpha + i\,\beta$ eine komplexen Zahl $z = a + i\,b$ können wir wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
& a + i\,b = (\alpha + i\,\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\,\alpha\,\beta\,i \\
\Leftrightarrow\quad & a = \alpha^2 - \beta^2 \text{ und } b = 2\,\alpha\,\beta \\
\Leftrightarrow\quad & (\alpha^2)^2 - \alpha^2\,a - \frac{b^2}{4} \text{ und } b = 2\,\alpha\,\beta \\
\Leftrightarrow\quad & \alpha^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} \text{ und } b = 2\,\alpha\,\beta \\
\Leftrightarrow\quad & \alpha = \pm\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \text{ und } \beta = \frac{b}{2\,\alpha} \\
\Leftrightarrow\quad & \alpha = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \text{ und} \\
& \beta = \frac{b}{\pm 2\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} = \pm\frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2b^2}} = \pm\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}
\end{aligned}$$

Allerdings stimmt diese Formel nicht im Fall $b = 0$ und $a < 0$. Andernfalls verwenden wir die Lösung mit $+$, und setzen somit

$$\sqrt{a + i\,b} := \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\;\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Insbesonders ist

$$\Re e(\sqrt{a+i\,b}) = \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \geq \sqrt{a} = \sqrt{\Re e(a+i\,b)}.$$

Wir sehen hier auch, daß die komplexe Wurzelfunktion sich nicht stetig zur negativen x-Achse erweitern läßt, denn für $a < 0$ ist

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0\pm}\sqrt{a+i\,b} &= \lim_{b\to 0\pm}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\lim_{b\to 0\pm}\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{|a|+a}{2}} + i\lim_{b\to 0\pm}\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|a|-a}{2}} = \pm i\sqrt{|a|}.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun voraus, daß $\Re e(a) \geq 0$ ist. Dann gilt für $x, x' \in \mathbb{C}$ mit $\Re e(x), \Re e(x') \geq 1$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| &= |\sqrt{a+x} - \sqrt{a+x'}| = \frac{|x-x'|}{|\sqrt{a+x} + \sqrt{a+x'}|} \\
&\leq \frac{|x-x'|}{|\Re e(\sqrt{a+x} + \sqrt{a+x'})|} \leq \frac{|x-x'|}{2},
\end{aligned}$$

da $\mathfrak{Re}(f(x)) = \mathfrak{Re}(\sqrt{a+x}) \geq \sqrt{\mathfrak{Re}(a+x)} = \sqrt{\mathfrak{Re}(a)+\mathfrak{Re}(x)} \geq \sqrt{0+1} = 1$ und analog $\mathfrak{Re}(\sqrt{a+x'}) \geq 1$ ist.

Also ist $f : X \to X := \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) \geq 1\}$ eine Kontraktion mit Faktor $q := \frac{1}{2}$.

Es ist $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ vollständig, denn für jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^2$ sind die Koordinaten Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ also konvergent in $\mathbb{R}$ und somit die Folge selbst konvergent nach (2.3.4). Weiters ist $X \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, denn aus $z_n \to z_\infty$ und $z_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mathfrak{Re}(z_n) \geq 1$ folgt $\mathfrak{Re}(z_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{Re}(z_n) \geq 1$. Somit ist auch X vollständig, denn jede Cauchy-Folge in X ist auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert also gegen ein $z_\infty \in \mathbb{C}$ welches aber wegen der Abgeschlossenheit in X liegen muß.

Wir können also den Banach'schen Fixpunktsatz (3.4.17) anwenden und erhalten, daß die rekursiv definierten Folgen $n \mapsto f^n(x_0)$ für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}(x_0) \geq 0$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x_\infty \in X$ konvergieren.

Dieser Fixpunkt x_∞ muß $x_\infty = f(x_\infty) = \sqrt{a+x_\infty}$, also $x_\infty^2 - x_\infty - a = 0$ erfüllen, d.h. $x_\infty = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+a}$. Allerdings ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+a}\Big) &= \frac{1}{2} - \mathfrak{Re}\Big(\sqrt{\frac{1}{4}+a}\Big) \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{4}+a\Big)}\\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+\mathfrak{Re}(a)} \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,\end{aligned}$$

somit muß der Fixpunkt $x_\infty := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+a}$ sein.

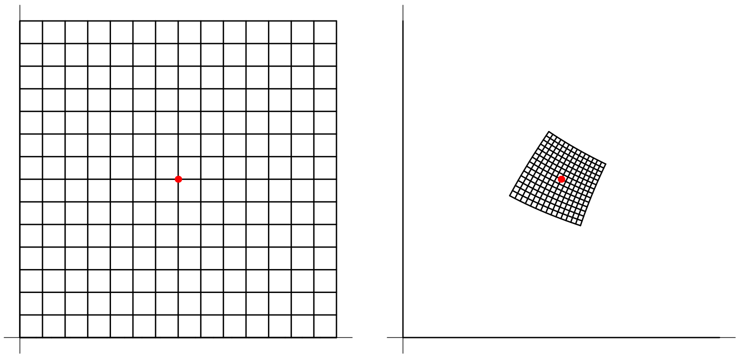
Für $a = 1 + 3\,i$ z.B. ist der Fixpunkt

$$x_\infty = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}+3\,i} = \frac{1}{2} + \Big(\frac{3}{2}+i\Big) = 2+i,$$

denn die Wurzel $\alpha + i\,\beta = \sqrt{\frac{5}{4}+3\,i}$ ist

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{25}{16}+9}+\frac{5}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{4}+\frac{5}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{8}} = \frac{3}{2}\\ \beta &= \operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{4}-\frac{5}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{8}} = 1\end{aligned}$$

Wie kann man sich geometrische Bilder von Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ machen? Der Graph solcher Funktionen liegt in $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ ist also schwer zu visualisieren. Aber man kann einen Ausschnitt des Definitionsbereichs $\mathbb{C}$ und daneben eine Ausschnitt des Wertebereichs $\mathbb{C}$ zeichnen und angeben wie Punkte x des Definitionsbereichs auf welche Punkte $f(x)$ des Wertebereichs abgebildet werden. Am anschaulichsten erreicht man das dadurch, daß man ein (farbiges) Gitter/Netz über den Definitionsbereich legt und die Bilder der Gitterlinien im Wertebereich einzeichnet. Mittels Mathematica kann man das durch die Funktionen PolarMap und CartesianMap aus dem Package Graphics‘ComplexMap‘ machen:



4 Differenzierbare Funktionen

4.1 Differenzierbarkeit

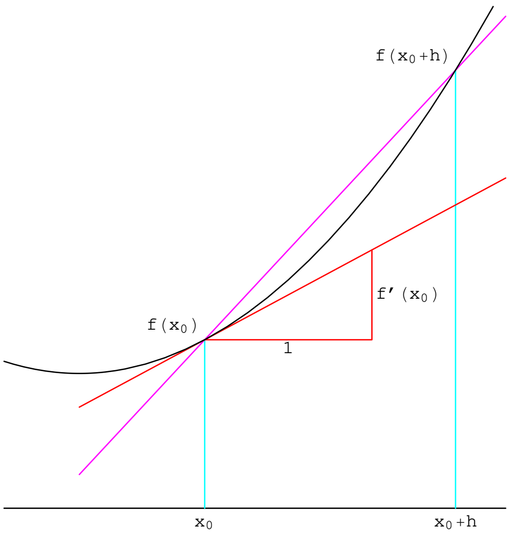
Wir wollen nun die Ableitung von Abbildungen $f : E \to F$ zwischen endlich dimensionalen reellen Vektorräumen E und F behandeln. Sei dazu vorerst $E = F = \mathbb{R}$. In den motivierenden Beispielen in (2.1.1) und (2.1.4) war uns bereits die geometrische Idee der Ableitung als Tangente an f in einem Punkt begegnet. Um diese Gerade zu beschreiben benötigen wir neben dem Berührpunkt auch ihren Anstieg. Dieser sollte offensichtlich der Grenzwert der Anstiege von Sehnen benachbarter Punkte sein.

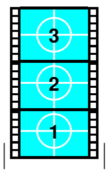
4.1.1 Definition. Ableitung von Kurven.
Es sei $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung auf einem Intervall I. Die Ableitung von f bei $x_0 \in I$ ist dann definiert als

$$f'(x_0) := \lim_{I \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{v \to 0} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v}.$$

Man schreibt auch $\frac{df(x)}{dx}$ oder uneindeutiger $\frac{df}{dx}$ für diesen Grenzwert und sagt Differentialquotient dafür. Falls dieser Grenzwert existiert, so heißt f differenzierbar an der Stelle x_0. Damit dieser Grenzwert existiert muß, da der Nenner gegen 0 geht, auch der Zähler gegen 0 gehen also f stetig bei x_0 sein Falls f in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar ist, so heißt f differenzierbar und die Abbildung $f' : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \mapsto f'(x_0)$ heißt dann Ableitung von f.

Die Tangente an eine im Punkte x_0 differenzierbare Abbildung f ist nun der affine 1-dimensionale Teilraum $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



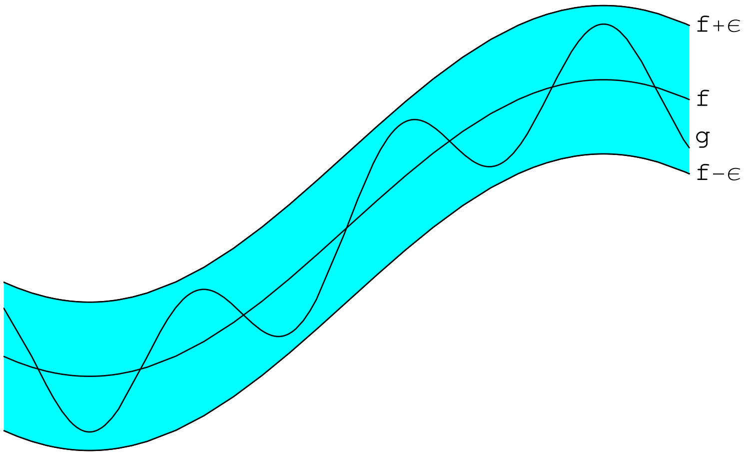


Für $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^q$ macht obige Definition von $f'(x_0)$ ebenfalls Sinn. Allerdings ist $f(x) - f(x_0) \in \mathbb{R}^q$, $x - x_0 \in \mathbb{R}$ und somit $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und $f'(x_0)$ in $\mathbb{R}^q$. Die Tangente ist dann entsprechend der affine 1-dimensionale Teilraum $\{(x, y) : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\}$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$.

4.1.2 Bemerkung. Ableiten durch Zoomen.
Wir definieren den Abstand zweier beschränkter Funktionen $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ als

$$d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty := \sup\Big\{|f(x) - g(x)| : x \in [-1, 1]\Big\}.$$

Die ε-Umgebung von g besteht also aus allen Abbildungen f deren Graph im $\pm\varepsilon$-Streifen $\{(x,y) : |y-g(x)| < \varepsilon\}$ um g liegen.



Die Tangente einer Kurve können wir nun wie folgt beschreiben: Sie ist jene Gerade, die, wenn man zu jedem $\varepsilon > 0$ den Teil der Kurve auf $\{x : x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon\}$ so affin skaliert, daß daraus das Intervall $[-1,1]$ wird, dann der Abstand d_∞ zur Geraden gegen 0 geht für $\varepsilon \to 0$.

In der Tat sei O.B.d.A. $x_0 = 0$ und $y_0 := f(x_0) = 0$. Sei weiters $g : x \mapsto k\,x$ eine Gerade durch 0. Die mit $1/\varepsilon$ gezoomte Funktion ist

$$f_\varepsilon : x \mapsto \varepsilon\,x \mapsto f(\varepsilon\,x) \mapsto \frac{f(\varepsilon\,x)}{\varepsilon}$$

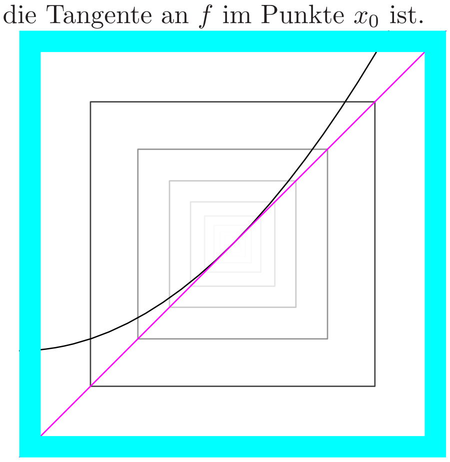
und entsprechend $g_\varepsilon(x) = \frac{g(\varepsilon\,x)}{\varepsilon} = g(x)$, da g homogen ist. Der Abstand von f_ε zu g_ε auf dem Intervall $[-1,1]$ ist somit

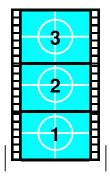
$$\begin{aligned}
\|(f_\varepsilon - g_\varepsilon)|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\|_\infty &= \sup\{|f_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)| : -1 \le x \le 1\} \\
&= \sup\left\{\left|\frac{f(\varepsilon\,x)}{\varepsilon} - k\,x\right| : -1 \le x \le 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\left(\frac{f(x_0+\varepsilon\,x) - f(x_0)}{\varepsilon\,x} - k\right)x\right| : -1 \le x \le 1\right\}
\end{aligned}$$

und dieses Supremum geht genau dann gegen 0 für $\varepsilon \to 0$, wenn

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

gilt, also g die Tangente an f im Punkte x_0 ist.





4.1.3 Beispiele differenzierbarer Funktionen.

(1) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ konstant.
Dann ist f differenzierbar und $f'(x_0) = \lim_{v\to 0} \frac{0}{v} = 0$.

(2) Sei nun $f := \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Dann ist f differenzierbar und $f'(x_0) = \lim_{v\to 0} \frac{v}{v} = 1$.

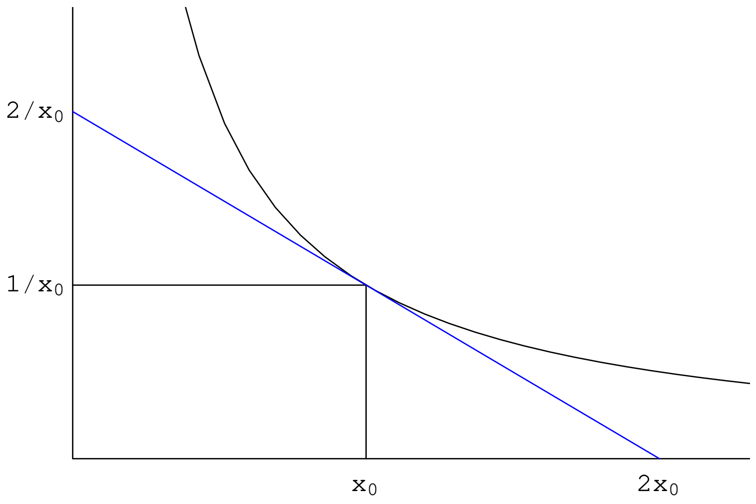
(3) Sei schließlich $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ eine Gerade gegeben durch $f(x) := x\,a + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^q$.
Dann ist f differenzierbar und $f'(x_0) = \lim_{v\to 0} \frac{a\,v+b-b}{v} = a$ und somit stimmt die Tangente mit der Gerade überein. Siehe auch (4.1.18).

(4) Sei $f(x) := |x|$, dann ist f nicht differenzierbar bei $x := 0$, denn

$$\lim_{v\to 0+} \frac{f(x+v) - f(x)}{v} = +1 \text{ aber } \lim_{v\to 0-} \frac{f(x+v) - f(x)}{v} = -1.$$

(5) Es sei $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann ist $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$ wie eine direkte Berechnung des Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ zeigt:

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\frac{1}{xa} \to -\frac{1}{a^2}.$$



(6) Sei $f(x) := \sin(x)$. Dann ist f differenzierbar bei 0 mit Ableitung 1, denn durch Flächenvergleich (siehe (3.1.8)) erhalten wir $\sin(t) \le t \le \tan(t)$ für $t > 0$ und somit $\cos(t) \le \frac{\sin(t)}{t} \le 1$ und $\lim_{t\to 0}\cos(t) = 1$. Weiters ist f differenzierbar bei jedem $x \in \mathbb{R}$ mit Ableitung $\sin'(x) = \cos(x)$, denn

$$\frac{\sin(x+v) - \sin(x)}{v} = \frac{\cos(x+v/2)\sin(v/2)}{v/2} \to \cos(x)\,1.$$

Die Ableitung des Cosinus erhalten wir analog, oder auch mittels:

$$\begin{aligned} \sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \sin(x)\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(x)\sin(\frac{\pi}{2}) = \cos(x) \\ \Rightarrow \quad \cos'(x) &= \sin'(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(x)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(x)\sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \end{aligned}$$

Beachte, daß folglich die Tangente an einen Kreis $\{(\cos(t), \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ normal auf den Radiusvektor $(\cos(t), \sin(t))$ steht, denn der Richtungsvektor der Tangente ist $\frac{d}{dt}(\cos(t), \sin(t)) = (-\sin(t), \cos(t))$ und $\langle(-\sin(t), \cos(t)), (\cos(t), \sin(t))\rangle = 0$.

4.1.18 Lemma. Komponentenweise Ableitung.
Es sei $f = (f^1, \dots, f^m) : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ und $x \in U$. Dann ist f genau dann differenzierbar x, wenn die Komponenten $f^j : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei x sind für alle j. Es gilt dann

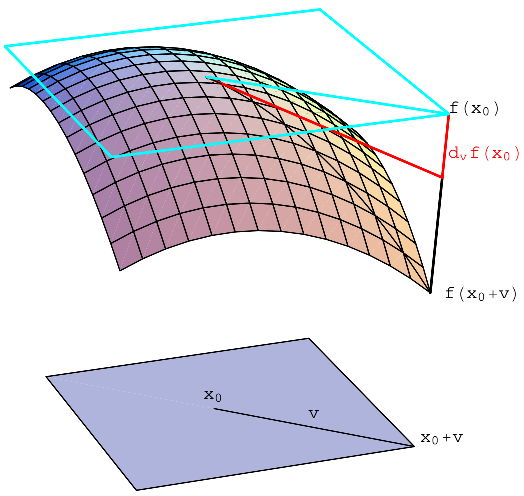
$$f'(x) = ((f^1)'(x), \dots, (f^m)'(x)).$$

Beweis. Es ist wegen (2.3.4) oder (3.1.4)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x+h) - f(x)\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f^1(x+h) - f^1(x), \dots, f^m(x+h) - f^m(x)\Big) \\
&= \lim_{h\to 0}\Big(\frac{f^1(x+h) - f^1(x)}{h}, \dots, \frac{f^m(x+h) - f^m(x)}{h}\Big) \\
&= \Big(\lim_{h\to 0}\frac{f^1(x+h) - f^1(x)}{h}, \dots, \lim_{h\to 0}\frac{f^m(x+h) - f^m(x)}{h}\Big) \\
&= \Big((f^1)'(x), \dots, (f^m)'(x)\Big). \quad \square
\end{aligned}$$

4.1.13 Definition. Richtungsableitung.

Da wir eigentlich an Funktionen f in mehreren Variablen, also Abbildungen $f : E \to F$ zwischen allgemeinen endlich dimensionalen Vektorräumen E und F interessiert sind, wäre wir gerne in der Lage auch diese zu Differenzieren. Dabei können wir aber nicht mehr $\frac{f(x_0+v)-f(x_0)}{v}$ bilden, da wir Vektoren nicht dividieren können. Solang wir die Variable x in $f(x)$ allerdings von x_0 aus nur in eine fixe Richtung $v \in E$ variieren, d.h. nur Argumente der Form $x = x_0 + t\,v$ mit $t \in \mathbb{R}$ betrachten, also die Zusammensetzung von f mit der affinen Gerade $t \mapsto x_0 + t\,v$, dann können wir sehr wohl den Differenzenquotient $\frac{f(x_0+t\,v)-f(x_0)}{t} \in F$ betrachten und wir bezeichnen dessen Grenzwert als Richtungsableitung $d_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\,v)-f(x_0)}{t} \in F$ von f an der Stelle x_0 in Richtung v.



Wählen wir als Richtungen insbesonders die Koordinaten-Richtungen $e_1, e_2, \dots$ so spricht man anstelle von Richtungsableitungen auch von den PARTIELLEN ABLEITUNGEN und bezeichnet sie mit

$$\partial_1 f := d_{e_1} f, \quad d_2 f := d_{e_2} f, \dots$$

oder auch als

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} := \partial_1 f(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} := \partial_2 f(x_1, \dots, x_n), \dots$$

Die partielle Ableitung $\partial_i f$ nach der i-te Variable erhalten wir also dadurch, daß wir in $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ alle Variablen bis auf x_i festhalten und den resultierenden Term nach der verbliebenen Variable x_i differenzieren.

Beispiel.
Es sei $f(x, y, z) := x \cdot y^2 + \sin(z)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= \partial_1 f(x,y,z) = y^2 \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= \partial_2 f(x,y,z) = 2xy \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \partial_3 f(x,y,z) = \cos(z)
\end{aligned}$$

Beispiel.
Es sei $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ die Multiplikation. Die partiellen Ableitungen sind

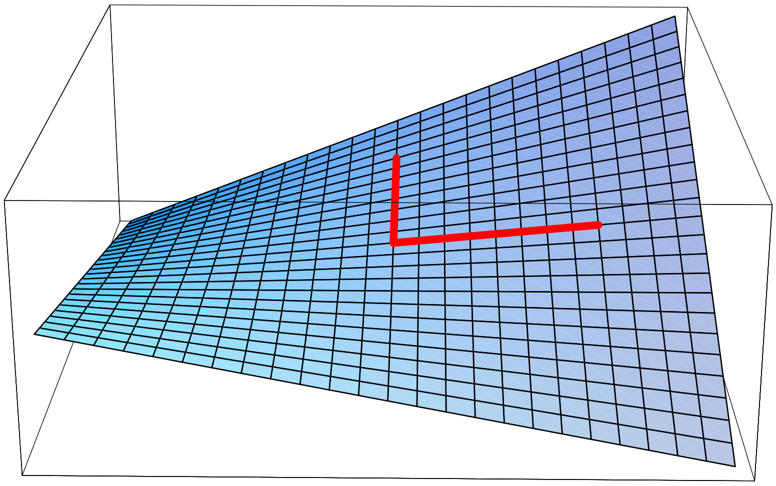
$$\begin{aligned}
\partial_1 m(x,y) &= \lim_{t \to 0} \frac{m(x+t, y) - m(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} y = y \\
\partial_2 m(x,y) &= \lim_{t \to 0} \frac{m(x, y+t) - m(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} x = x
\end{aligned}$$

und die Richtungsableitung in Richtung (v, w) ist

$$d_{(v,w)}m(x,y) = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{m(x+tv, y+tw) - m(x,y)}{t}}_{=x\,w+y\,v+t\,v\,w}$$
$$= x\,w + y\,v = v \cdot \partial_1 m(x,y) + w \cdot \partial_2 m(x,y).$$

Beachte, daß die Richtungsableitung an der Stelle (x, y) in (v, w) linear ist und somit durch die partiellen Ableitungen $\partial_i m = d_{e_i} m$ vollständig beschrieben ist: $d_{(v,w)}m = v\cdot\partial_1 m + w\cdot\partial_2 m$. Die Ableitung $f'(x)$ einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ sollte also keine Zahl sondern durch die (lineare) Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto d_v f(x)$ gegeben sein. Etwas allgemeiner sollte die Ableitung $f'(x)$ einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ kein Vektor in $\mathbb{R}^m$ sondern durch die (lineare) Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto d_v f(x)$ gegeben sein. Wie wir aus der linearen Algebra wissen, können wir lineare Abbildungen durch Matrizen beschreiben deren Spalten gerade die Bilder der (Standard-)Basisvektoren sind. In unserem Fall sind das gerade die Richtungsableitungen in die Koordinatenrichtungen, also die partiellen Ableitungen.

Für eine genauere Analyse dieser Situation siehe Analysis 2.



Beispiel.
Es sei $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ die Addition. Die Richtungsableitung in Richtung (v, w) ist

$$d_{(v,w)}a(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{a(x+tv, y+tw) - a(x,y)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}(v + w) = v + w = a(v, w).$$

Die Ableitung $a'(x, y)$ der linearen Funktion a an der Stelle (x, y) sollte also gerade durch die lineare Funktion a gegeben sein.

4.1.14 Kettenregel.
Es sei $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x \in I$ und $g : \mathbb{R} \supseteq J \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $f(x)$ und $f(I) \subseteq J$. Dann ist $g \circ f : \mathbb{R} \supseteq I \to J \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei x und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Beweis. Es bezeichne

$$\begin{aligned} r(v) &:= f(x+v) - f(x) - f'(x) \cdot v \\ s(w) &:= g(f(x)+w) - g(f(x)) - g'(f(x)) \cdot w \end{aligned}$$

dann ist $\lim_{v\to 0} r(v)/v = 0$ und $\lim_{w\to 0} s(w)/w = 0$ wegen der Differenzierbarkeit von f und g und mit $w := f(x+v) - f(x) = r(v) + f'(x)v$ gilt somit

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x+v) - (g\circ f)(x) &= g(f(x)+w) - g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot w + s(w) \\ &= g'(f(x)) \cdot (f'(x)\cdot v + r(v)) + \\ &\qquad + \frac{s(f(x+v)-f(x))}{f(x+v)-f(x)} \cdot (f(x+v)-f(x)). \end{aligned}$$

Nach Division mit v konvergiert die rechte Seite (für $v \to 0$) gegen

$$g'(f(x)) \cdot (f'(x) + 0) + 0 \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \quad \square$$

$\square$

Wir wissen noch nicht genau was Differenzierbarkeit von Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bedeutet, wollen aber dennoch eine entsprechende Version der Kettenregel erahnen. Seien also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder auch $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) beide differenzierbar (was immer das für g heißen möge). Falls f eine Gerade beschreibt, also $f(x) := a + x\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist, so ist

$$\begin{aligned} (g\circ f)'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{(g\circ f)(t) - (g\circ f)(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{g(a+t\,b) - g(a)}{t} =: d_b g\,(a) = d_{f'(0)} g\,(f(0)). \end{aligned}$$

Also dürfen wir für allgemeines differenzierbares f (und $h(t) := f(x) + t\,f'(x)$ die Tangente)

$$(g\circ f)'(x) = (g\circ h)'(0) = d_{h'(0)} g\,(h(0)) = d_{f'(x)} g\,(f(x))$$

erwarten, also mit der Bezeichnung $g'(y) : v \mapsto d_v g\,(y)$ die Identität

$$(g\circ f)'(x) = d_{f'(x)} g\,(f(x)) = g'(f(x))\,(f'(x)).$$

Allgemeiner, wenn $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ beide differenzierbar sind, $x, v \in \mathbb{R}^k$ sind und $h(t) := x + t\,v$ ist, dann wäre

$$f'(x)\,(v) = d_v f\,(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\,v) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(h(t)) - f(h(0))}{t} = (f\circ h)'(0)$$

und somit

$$\begin{aligned} (g\circ f)'(x)\,(v) &= d_v(g\circ f)\,(x) = ((g\circ f)\circ h)'(0) = (g\circ(f\circ h))'(0) \\ &= g'((f\circ h)(0))\,(f\circ h)'(0) = g'(f(x))\,(f'(x)\,(v)) \\ &= (g'(f(x)) \circ f'(x))\,(v) \end{aligned}$$

und für die Ableitungen schließlich

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ g'(x).$$

4.1.15 Produktregel von Leibniz.
Es sei $f, g : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}$ bei $a \in U$ differenzierbar. Dann ist auch $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ bei a differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} &= f(x) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) \\ &\to f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a),\end{aligned}$$

da f nach (4.1.1) bei a stetig ist. □

Die Stetigkeit des Produkts $f \cdot g$ zweier stetiger Funktionen haben wir in (3.1.6) aus jener der Zusammensetzung mit der Multiplikation $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und der komponentenweisen Stetigkeit von $(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gefolgert. Man könnte für die Differenzierbarkeit genauso vorgehen, müßte dazu allerdings die Differenzierbarkeit der Multiplikation kennen um

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) &= (m \circ (f, g))'(x) = m'((f, g)(x))\,(f, g)'(x) \\ &= m'(f(x), g(x))\,(f'(x), g'(x)) = g'(x)\,f(x) + f'(x)\,g(x)\end{aligned}$$

schließen zu können.

Beispiel.
Insbesonders gilt $\frac{d}{dx} f(x)^2 = 2 f(x)\, f'(x)$ und somit $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$ (für $f = \mathrm{id}$) mittels (4.1.3.2).

Mittels Induktion erhalten wir:

$$\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1} \text{ für alle } 0 < n \in \mathbb{N}.$$

In der Tat ist

$$\frac{d}{dx} x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x^n \cdot x) = x \frac{d}{dx} x^n + x^n \frac{d}{dx} x = x\, n\, x^{n-1} + x^n\, 1 = (n+1)\, x^n.$$

Eine Spezialfall der Produktregel ist, wenn ein Faktor (sagen wir f) konstant (sagen wir λ) ist. Dann ist $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0 \cdot g(x) + \lambda\, g'(x) = \lambda\, g'(x)$.

4.1.17 Quotientenregel.
Es seien $f, g : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}$ bei $a \in U$ differenzierbar und $g(a) \neq 0$. Dann ist auch $\frac{f}{g} : U \to \mathbb{R}$ bei a differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)\, f'(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}.$$

Beweis. Es ist $\frac{f}{g} = f \cdot (i \circ g)$, wobei i die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist. Also folgt aus (4.1.2.5), (4.1.14) und (4.1.15):

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= (f \cdot (i \circ g))'(a) = f'(a) \cdot (i \circ g)(a) + f(a) \cdot (i \circ g)'(a) \\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\, \frac{-1}{g(a)^2} \cdot g'(a) = \frac{g(a)\, f'(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$ □

Beispiel.
Es ist $\tan := \frac{\sin}{\cos}$ auf $\mathbb{R} \setminus \cos^{-1}(0)$ definiert. Nach der Quotientenregel ist somit

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos(x)\sin'(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}.\end{aligned}$$

4.1.19 Linearität des Differenzierens.
Es seien $f, g : \mathbb{R} \supseteq U \to F$ differenzierbar bei $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist auch $f + \lambda g$ differenzierbar bei x und es gilt $(f + \lambda g)'(x) = f'(x) + \lambda g'(x)$.

Beweis. Dies gilt, da der Differenzenquotient einer Linearkombination die entsprechende Linearkombination der Differenzenquotienten ist. □

Die Stetigkeit der Summe $f + g$ zweier stetiger Funktionen haben wir in (3.1.6) aus jener der Zusammensetzung mit der Addition $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und der komponentenweisen Stetigkeit von $(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gefolgert. Man könnte für die Differenzierbarkeit genauso vorgehen, müßte dazu allerdings die Differenzierbarkeit der Addition kennen um

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= (a \circ (f,g))'(x) = a'((f,g)(x))\,(f,g)'(x) \\ &= a'(f(x), g(x))\,(f'(x), g'(x)) = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

zu schließen.

Beispiel.
Es sei $p(x) := \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k$ ein Polynom vom Grad n , d.h. $p_n \neq 0$. Dann ist die Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}p(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx}p_k\, x^k = \sum_{k=0}^{n} p_k\, \frac{d}{dx}x^k \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n} p_k\, k\, x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\, p_{j+1}\, x^j\end{aligned}$$

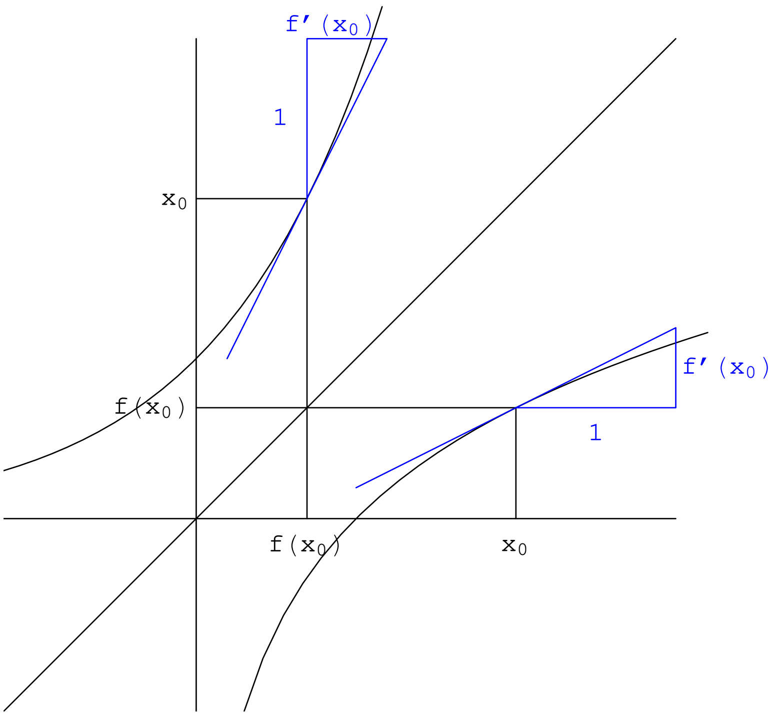
ein Polynom vom Grad $n - 1$.

Bemerkung.
Gewisse Eigenschaften der Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ lassen sich in Eigenschaften der Ableitung f' übersetzen. Ist z.B. f monoton wachsend, d.h. $f(x) \leq f(y)$ für $x \leq y$, so ist der Differenzenquotient $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ für alle $x \neq y$ und somit auch $f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. Um die Umkehrung zu zeigen benötigen wir folgende Resultate:

4.1.20 Proposition. Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung.
Es sei $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf dem Intervall I. Sei $\xi \in I$ und f sei differenzierbar bei ξ mit Ableitung $f'(\xi) \neq 0$. Dann ist die

Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \supseteq f(I) \to \mathbb{R}$ *bei* $f(\xi)$ *differenzierbar und ihre Ableitung ist*

$$(f^{-1})'(f(\xi)) = \frac{1}{f'(\xi)}.$$



Beweis. Nach dem Satz über inversen Funktionen (3.4.3) ist $f(I)$ ein Intervall. Falls f^{-1} bei $f(\xi)$ differenzierbar ist, so folgt aus der Kettenregel (4.1.14), daß $f'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) = \mathrm{id}'(\xi) = 1$ ist. Wir wollen also zeigen, daß f^{-1} bei $\eta := f(\xi)$ differenzierbar mit Ableitung $1/f'(\xi)$ ist. Sei y_n eine Folge in $f(I)$ welche gegen $f(\xi)$ konvergiert. Da f^{-1} nach (3.4.3) stetig ist konvergiert $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen $f^{-1}(f(\xi)) = \xi$. Somit konvergiert

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} = \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(\xi)}{x_n-\xi}} \to \frac{1}{f'(\xi)}. \qquad \square$$

4.1.21 Beispiele inverser Abbildungen.

(0) Für fixes $0 < n \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^n$ mit Ableitung $f'(x) = n\,x^{n-1}$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : y \mapsto \sqrt[n]{y}$ und ihre Ableitung somit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy} y^{\frac{1}{n}} = (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{y})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

Weiters ist nach der Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} x^{-n} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{x^n\,0 - 1\,n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\,x^{-n-1}$$

oder auch nach der Kettenregel mit $i(x) := \frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{d}{dx}i(x^n) = i'(x^n)\cdot n\,x^{n-1} = -\frac{1}{(x^n)^2}\cdot n\,x^{n-1} = -n\,x^{-n-1}$$

oder auch

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{d}{dx}i(x)^n = n\,i(x)^{n-1}\cdot i'(x) = n\,x^{1-n}\,\frac{-1}{x^2} = -n\,x^{-n-1}.$$

Allgemeiner sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. Dann ist nach der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{1}{q}\,(x^p)^{\frac{1}{q}-1}\cdot p\,x^{p-1} = \frac{p}{q}\,x^{p(\frac{1}{q}-1)+p-1} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$$

.

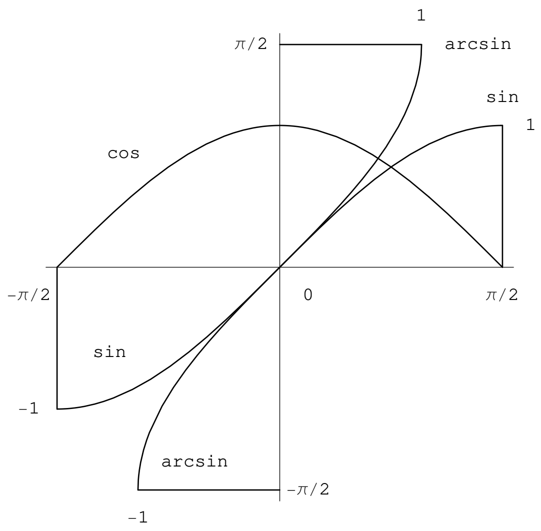
Für alle rationalen Exponenten $\alpha \neq 0$ haben wir also

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha\,x^{\alpha-1}$$

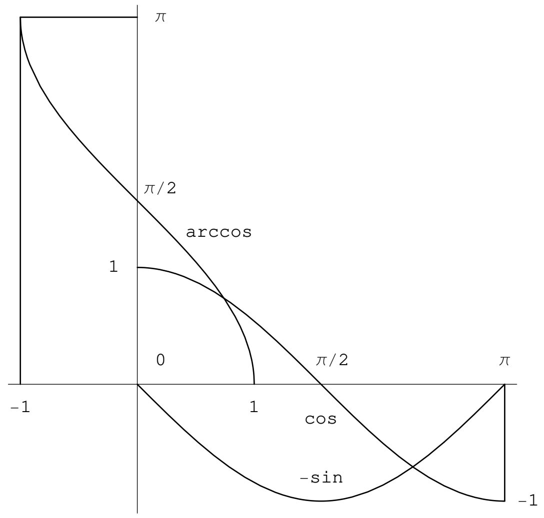
erhalten.

(1) Es ist $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend mit Ableitung $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$. Also existiert für $|y| < 1$ nach (4.1.20) die Ableitung der Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ bei y und zwar ist

$$\begin{aligned}\arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}$$



Beachte, daß arcsin nur auf dem Bild $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ definierbar ist, und $x = \arcsin(y)$ nur eine (die absolut kleinste) Lösung von $\sin(x) = y$ liefert. Analog zeigt man für $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, daß $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ist. Wieder ist arccos nur auf dem Bild $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ definiert und $x = \arccos(y)$ ist die kleinste positive Lösung von $\cos(x) = y$.



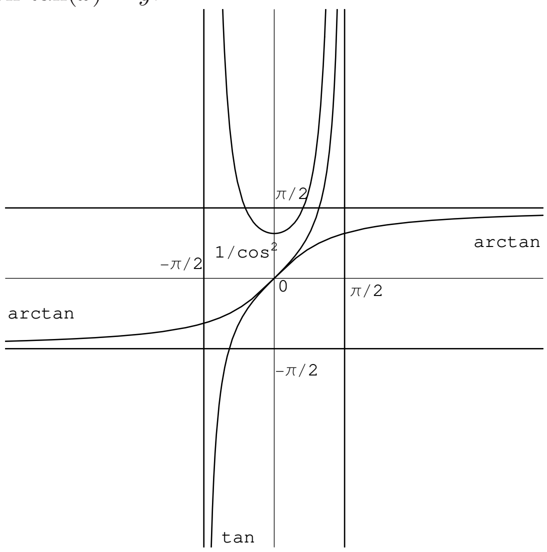
(2) Es ist $\tan : (-\pi/4, \pi/4) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit Ableitung

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\cos(x)\sin'(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2} \geq 1\end{aligned}$$

für alle x. Also existiert nach (4.1.20) die Ableitung der Umkehrfunktion arctan und zwar ist

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(y))^2} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Im Unterschied zu den vorigen Beispiel ist diese Umkehrfunktion nun auf $\mathbb{R} = \text{Bild}(\tan)$ definiert und $x = \arctan(y)$ ist wieder nur eine Lösung diesmal von $\tan(x) = y$.



(3) Wir wollen nun die Ableitung von $x \mapsto e^x$ und von $x \mapsto \ln(x)$ bestimmen.

Betrachten wir vorerst folgenden Spezialfall:

$$\ln'(1) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - \overbrace{\ln(1)}^{=0}}{t} = \lim_{t\to 0} \ln\Big((1+t)^{1/t}\Big).$$

Da ln stetig ist genügt es den Limes $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$ auszurechnen.

Den Spezialfall wo t die Folge $(\frac{1}{n})$ durchläuft haben wir in (2.5.5) als

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

bestimmt. Leider können wir zur Zeit noch nicht die Monotonie von $x \mapsto (1+x)^{1/x}$ für $x > 0$ zeigen um daraus $\lim_{t\to 0+}(1+t)^{1/t} = e$ schließen zu können.

Dennoch gibt es zu $0 < t \le 1$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n+1} < t \le \frac{1}{n}$ und somit ist

$$\begin{aligned}
&\overbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}}^{\to e\cdot 1} = \\
&\qquad = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < (1+t)^{1/t} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\
&\qquad\qquad = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to e\cdot 1}.
\end{aligned}$$

Da für $t \to 0$ das zugehörige $n \to \infty$, ist

$$\lim_{t\to 0+}(1+t)^{1/t} = e.$$

Weiters ist

$$\lim_{t\to 0-}(1+t)^{1/t} = \lim_{s\to 0+}(1-s)^{-1/s} = \lim_{s\to 0+}\left(\frac{1}{1-s}\right)^{1/s} = \lim_{r\to 0+}(1+r)^{1+\frac{1}{r}} = 1\cdot e,$$

wobei $s = -t$ und $1+r = \frac{1}{1-s}$, d.h. $r = \frac{1}{1-s} - 1 = \frac{s}{1-s}$ und $s = 1 - \frac{1}{1+r} = \frac{r}{1+r}$ ist. Also ist

$$\ln'(1) = \lim_{t\to 0} \ln\Big((1+t)^{1/t}\Big) = \ln\Big(\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\Big) = \ln(e) = 1.$$

Für die Umkehrfunktion $x \mapsto e^x$ erhalten wir somit

$$\exp'(0) = \exp'(\ln(1)) = \frac{1}{\ln'(1)} = 1$$

und allgemein

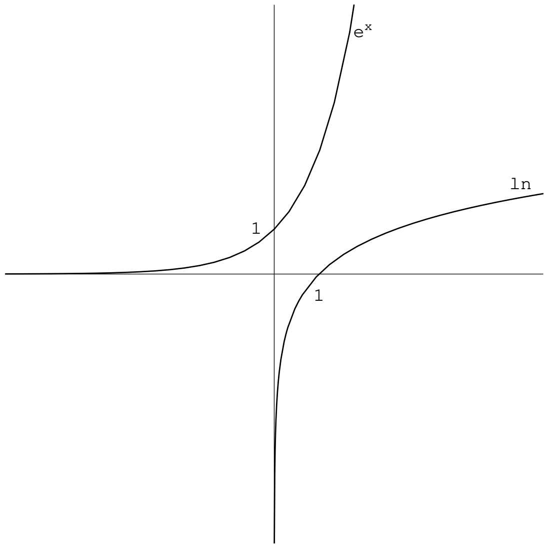
$$\exp'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{x+t}-e^x}{t} = \lim_{t\to 0} e^x\,\frac{e^t-1}{t} = e^x \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = e^x\,1 = e^x = \exp(x).$$

Schließlich gilt nun für die Umkehrfunktion

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y} \text{ für } y > 0.$$

Mittels der Formeln $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\,\ln(a)}$ und $\log_a(y) = \log_a(e^{\ln(y)}) = \ln(y)\,\log_a(e)$ erhalten wir auch die Ableitung aller Exponential und aller Logarithmen-Funktionen:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\,\ln(a)} = e^{x\,\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a)\,a^x$$
$$\frac{d}{dy}\log_a(y) = \frac{d}{dy}\ln(y)\,\log_a(e) = \frac{1}{y}\,\log_a(e) = \frac{1}{y\ln(a)}, \text{ da}$$
$$1 = \log_a(a) = \log_a\left(b^{\log_b(a)}\right) = \log_b(a)\cdot\log_a(b).$$



Folgerung.
Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion $x \mapsto x^r$ mit $0 \neq r \in \mathbb{R}$ ist für $x > 0$ gegeben durch

$$\frac{d}{dx}x^r = r\,x^{r-1}.$$

Beweis.

$$\frac{d}{dx}x^r = \frac{d}{dx}e^{r\,ln(x)} = e^{r\,ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}r\,ln(x) = x^r \cdot \frac{r}{x} = r\,x^{r-1}.$$

□

Bemerkung.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = a\,f(x)$ für alle x. Wir betrachten $g(x) := f(x)\,e^{-ax}$. Dann ist

$$g'(x) = f'(x)\,e^{-ax} + f(x)\,(-a)\,e^{-ax} = (f'(x) - a\,f(x))\,e^{-ax} = 0$$

und somit ist g konstant, also $f(x)\,e^{-ax} = g(x) = g(0) = f(0)\,e^0 = f(0)$, also $f(x) = f(0)\,e^{ax}$.

4.1.22 Definition. Höhere Ableitungen.
Rekursiv nennen wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq U \to F$ $n+1$-mal differenzierbar, wenn sie auf U differenzierbar ist und ihre Ableitung $f' : U \to F$ seinerseits

n-mal differenzierbar ist. Dabei soll die Eiggenschaft 0-mal differenzierbar zu sein immer erfüllt sein.

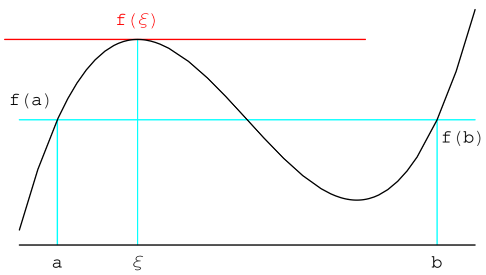
Die $n+1$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ ist dann als

$$f^{(n+1)} := (f')^{(n)}$$

definiert.

Schließlich heißt eine Funktion unendlich oft (oder genauer beliebig oft) differenzierbar, wenn sie n-mal differenzierbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$.

4.1.4 Satz von Rolle.
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie auf (a,b) differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



Beweis. Falls f konstant ist, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls nimmt f sein Minimum an einer Stelle $\xi_1 \in [a,b]$ an und sein Maximum an einer Stelle $\xi_2 \in [a,b]$. Wegen $\xi_1 \neq \xi_2$ liegt mindestens eines der beiden ξ im Inneren (a,b) des Intervalls $[a,b]$ und für dieses gilt $f'(\xi) = 0$, denn aus $f(x) \geq f(\xi)$ für alle x folgt $f'(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ und ebenso $f'(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$, und ähnlich für $f(x) \leq f(\xi)$. □

4.1.5 Mittelwertsatz.
Es sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi),$$

oder einprägsamer

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

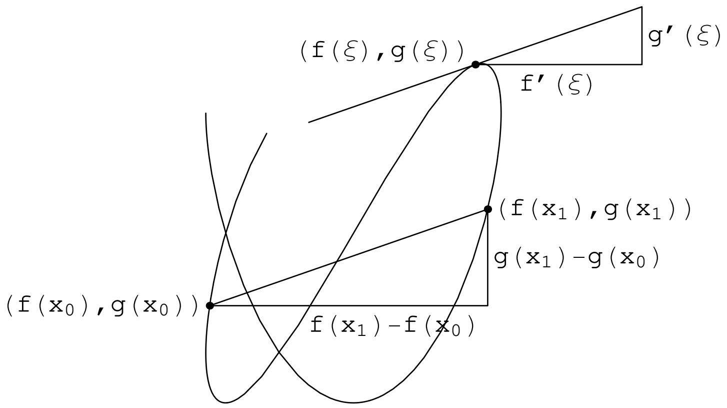
falls $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Ist speziell $g = \mathrm{id}$ so besagt diese Gleichung folgendes:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis. Wir erhalten das Resultat direkt, wenn wir den Satz von Rolle auf $h(x) := (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$ anwenden. □

Beachte, daß wir im Beweis von (4.1.5) gezeigt haben, daß $f'(x_0) = 0$ an jeder Stelle $x_0 \in I$, die ein lokales Extremum einer bei x_0 differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist.



4.1.6 Folgerung. Monotonie via Ableitung.
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann ist f genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Ebenso ist f genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis. Aus $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \leq y$ folgt $f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$.

Umgekehrt folgt aus dem $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) \geq 0$, daß f monoton wachsend ist. □

Folgerung.
Es sei $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung 0. Dann ist f konstant.

Beachte jedoch, daß dies nur für Intervalle als Definitionsbereich gilt. Z.B. ist $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{x\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot 2x - \sqrt{x^2} \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - (\sqrt{x^2})^2}{\sqrt{x^2}\,x^2} = 0$$

aber $f(x) = \pm 1$ für alle $\pm x > 0$.

Beweis. Wegen $f' = 0$ ist f sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend, also konstant. □

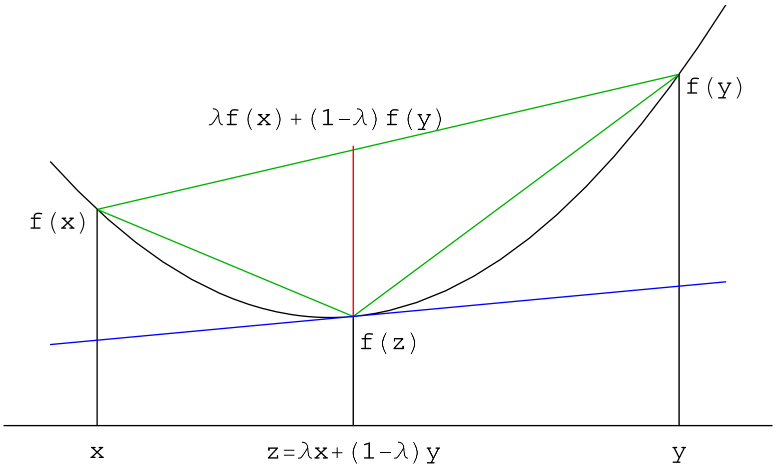
Konvexität

4.1.7 Definition. Konvexität.
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn sie nirgends über einer ihrer Sehnen liegt, d.h.

$$f(\lambda\, b + (1-\lambda)a) \leq \lambda\, f(b) + (1-\lambda)\, f(a) \text{ für alle } a < b \text{ und } 0 < \lambda < 1.$$

Konvexität bedeute also, daß der Graph der Funktion eine Linkskurve macht.

Eine Funktion f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist, die Funktion f also eine Rechtskurve macht.



Offensichtlich ist Konvexität äquivalent zu

$$f\Big(\sum_i \lambda_i\, x_i\Big) \le \sum_i \lambda_i\, f(x_i) \text{ für endlich viele } x_i \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda_i \ge 0 \text{ mit } \sum_i \lambda_i = 1.$$

($\Downarrow$) Beweis mittels Induktion.
(n=1) nichts zu zeigen, da dann $\lambda = 1$.
(n+1) $x = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k\, x_k$. Setze $b := x_{n+1}$, $\lambda := \lambda_{n+1}$. Falls $\lambda = 1$ ist, so ist $\lambda_k = 0$ für alle $k \le n$ und nichts zu zeigen. Sei also $0 \le \lambda < 1$. Dann ist $1-\lambda = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k$ und wir setzen $a := \frac{1}{1-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, x_k$. Somit ist $x = \lambda\, b + (1-\lambda)\, a$ und somit

$$f(x) \le \lambda\, f(b) + (1-\lambda)\, f(a) \le \lambda_{n+1}\, f(x_{n+1}) + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda}\, f(x_k) = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k\, f(x_k)$$

nach Induktionsvoraussetzung.

($\Uparrow$) Setze $x_1 := a$, $x_2 := b$, $\lambda_2 := \lambda$, $\lambda_1 := (1-\lambda)$.

4.1.8 Proposition. Charakterisierung konvexer Funktionen.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

(1) f ist konvex;

(2) Für alle $x < z < y$ gilt $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$;

$\Leftrightarrow$*(3) f' ist monoton wachsend;*

$\Leftrightarrow$*(4) $f'' \ge 0$.*

Beweis. (1$\Leftrightarrow$2)

$$\begin{aligned} f \text{ konvex} \Leftrightarrow \Big(&x < y,\ 0 < \lambda < 1,\ z := x + \lambda(y-x) \Rightarrow \\ &f(z) \le \lambda\, f(y) + (1-\lambda)\, f(x) \quad (\lambda = \frac{z-x}{y-x},\ 1-\lambda = \frac{y-z}{y-x})\Big) \\ \Leftrightarrow \Big(&x < z < y \Rightarrow \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\Big) \end{aligned}$$

(2⇒3) Aus (2) folgt

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\underbrace{\frac{y-z}{y-x}}_{=1-\lambda} + \underbrace{\frac{f(z)-f(x)}{z-x}}_{\leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}}\underbrace{\frac{z-x}{y-x}}_{=\lambda}$$

$$\leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\underbrace{((1-\lambda)+\lambda)}_{=1} \text{ und analog}$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

also ist $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ monoton wachsend und somit

$$f'(x) = \lim_{y\to x+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \lim_{x\to y-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(y)$$

(2⇐3) $x < y < z \Rightarrow$

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(x') < f'(z) < f'(y') = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

(3⇔4) folgt aus (4.1.6) für f'. □

Bemerkung.
Beachte, daß der Beweisschritt (2 ⇒ 3) zeigt, daß konvexe Funktionen oberhalb jeder ihrer Tangenten liegt.

Um Ableitungen zu bestimmen müssen wir Grenzwerte $\lim_{t\circ 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ berechnen die auf unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ führen. Umgekehrt können wir Differentialrechnung benutzen um Grenzwerte die auf unbestimmte Ausdrücke $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ führen zu bestimmen:

4.1.11 Regel von De L'Hospital.
Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf (a,b) mit $g'(x)\neq 0$ für alle x. Weiters sei $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) \in \{-\infty, 0, +\infty\}$. Dann ist

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Limes auf der rechten Seite im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert.

Beweis. Es sei $\lambda := \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ s.d. $f'(x)/g'(x) \in U_\varepsilon(\lambda)$ für alle $x \in U_\delta(a)$. Für $x, y \in U_\delta(a)$ mit $x \neq y$ ist nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

für ein $\xi \in \overline{xy} \subseteq U_\delta(a)$, also auch

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \in U_\varepsilon(\lambda).$$

Betrachten wir vorerst den Fall, wo $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ ist:
Bei fixen $y \in U_\delta(a)$ liefert der Grenzübergang $x \to a+$ somit

$$\frac{f(y)}{g(y)} \in B_\varepsilon(\lambda),$$

also ist auch $\lim_{y\to a+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lambda$.

Nun der Fall, wo $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$ ist:
Wenn wir obige Gleichung

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit

$$\frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{g(x)-g(y)}{f(x)-f(y)} = \frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)}$$

multiplizieren, so erhalten wir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,\frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)}.$$

Die Idee ist folglich die Stetigkeit der Multiplikation $m : (x,y) \mapsto x\cdot y$ bei $(\lambda,1)$, d.h. die Existenz eines $\delta' > 0$ mit

$$U_{\delta'}(\lambda)\cdot U_{\delta'}(1) := m(U_{\delta'}(\lambda)\times U_{\delta'}(1)) \subseteq U_\varepsilon(\lambda\cdot 1) = U_\varepsilon(\lambda).$$

Beachte, daß dies auch für $\lambda = \pm\infty$ geht. Weiters existiert ein $0 < \delta \le \delta'$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in U_{\delta'}(\lambda) \text{ für alle } \xi \in U_\delta(a).$$

Sei nun $y \in U_\delta(\lambda)$ fix gewählt. Wegen

$$\lim_{x\to a+} \frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)} = 1$$

existiert ein $0 < \delta'' \le \delta$ mit

$$\frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)} \in U_{\delta'}(1) \text{ für alle } x \in U_{\delta''}(\lambda).$$

Somit ist für $x \in U_{\delta''}(\lambda) \subseteq U_\delta(\lambda)$ auch $\xi \in U_\delta(\lambda)$ und somit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}_{\in U_{\delta'}(\lambda)} \cdot \underbrace{\frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)}}_{\in U_{\delta'}(1)} \in U_{\delta'}(\lambda)\cdot \in U_{\delta'}(1) \subseteq U_\varepsilon(\lambda).$$

Also konvergiert $\frac{f(x)}{g(x)}$ gegen λ für $x \to a+$. □

4.1.12 Beispiel.

- Nach der Regel (4.1.11) von De L'Hospital ist

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)}{1} = \cos(0) = 1.$$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, sowie $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$ für $a > 0$

- Als weitere Konsequenz erhalten wir folgende Wachstumsvergleiche:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!x^0}{e^x}=\frac{n!}{\infty}=0 \text{ für alle } n\in\mathbb{N}$$

sowie

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x^a}&=\lim_{y\to+\infty}\frac{\log(y^{1/a})}{y}=\frac{1}{a}\lim_{y\to+\infty}\frac{\log(y)}{y}\\&=\frac{1}{a}\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{1}{y}}{1}=\frac{1}{a}\frac{1}{+\infty}=0 \text{ für alle } n>0\end{aligned}$$

4.1.25 Lemma.
Es sei $f:\mathbb{R}\supseteq I\to\mathbb{R}$ stetig, $a\in I$ und f differenzierbar auf $I\setminus\{a\}$. Weiters existiere $\lim_{x\to a}f'(x)$. Dann ist f auch differenzierbar bei a und $f'(a)=\lim_{x\to a}f'(x)$.

Beweis. Wir können die Regel von De L'Hospital auf

$$f'(a):=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

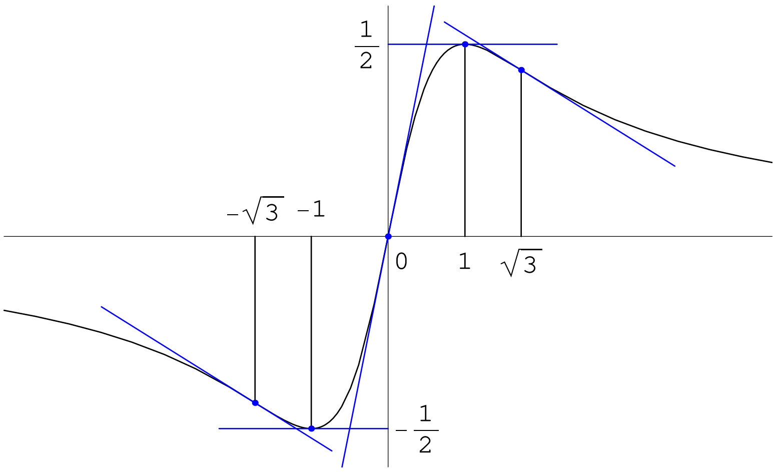
anwenden und erhalten somit die Existenz dieses Limes und die Identität

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\mathrm{id}'(x)}=\lim_{x\to a}f'(x). \qquad \square$$

4.1.26 Beispiel.
Es sei $f(x):=e^{-1/x^2}$ für $x\neq 0$. Wegen $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{y\to\infty}e^{-y}=0$ setzen wir $f(0):=0$ und erhalten eine stetige und auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbare Funktion mit Ableitung $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$. Wegen $\lim_{y\to+\infty}y^{3/2}\,e^{-y}=0$ ist $\lim_{x\to 0}f'(x)=0$, also f auch bei 0 differenzierbar mit Ableitung $f'(0)=0$.

4.1.9 Kurvendiskussionen.
Mit den nun gewonnen Wissen können wir weitgehende Aussagen über uns vorgelegte (hinreichend differenzierbare) Kurven machen. Neben Grenzwertaussagen für $x\to a$ mit Randpunkten a des Definitionsbereichs können wir das Monotonie-Verhalten und das Konvexitäts-Verhalten durch Lösen der Ungleichungen $f'\geq 0$ bzw. $f''\geq 0$ erhalten. Schnittpunkte mit parallelen Geraden $y=c$ (und insbesonders Nullstellen) erhalten wir durch das Lösen der Gleichung $f(x)=c$. Wir können Tangenten an beliebigen Stellen bestimmen und insbesonders durch Lösen der Gleichung $f'(x)=0$ alle waagrechten Tangenten und somit die Kandiaten für lokale Extrema bestimmen. Aus den Monotonie oder Konvexitätsverhalten nahe dieser Stellen können wir zumeist entscheiden, ob es sich wirklich um lokale Minima oder Maxima handelt. Schließlich können wir auch die Punkte wo sich daß Konvitätsverhalten ändert finden, indem wir Lösungen der Gleichung $f''(x)=0$ als einzig mögliche Kandidaten untersuchen.

Beispiel.
Es sei $f(x):=\frac{x}{x^2+1}$.



Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ global definiert und beliebig oft differenzierbar mit Ableitungen

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)1 - x\,2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2x) - (1-x^2)2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = 2x\,\frac{(x^2-3)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$
$$= 2x\,\frac{x^2-3}{(1+x^2)^3}.$$

Das Verhalten bei $\pm\infty$ ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{0}{0+1} = 0,$$

oder kürzer mit L'Hospital

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

man sagt die x-Achse $y = 0$ ist eine zweiseitige Asymptote.

Einzige Nullstelle ist $x = 0$.

Als Funktion $f : [-\infty, +\infty] \to \mathbb{R}$ (mit $f(\pm\infty) := 0$) ist f stetig (bzg. der Metrik der uneigentlichen Konvergenz) und das Intervall $[-\infty, +\infty]$ ist kompakt bzgl. dieser Metrik, also existieren Extrema auf $\mathbb{R}^+$ und auf $\mathbb{R}^-$.

Kandidaten von Extrema sind alle x mit $f'(x) = 0$, also $x^2 = 1$, d.h. $x = \pm 1$. Wegen dem Zwischenwertsatz ist f streng monoton wachsend auf $[-1, 1]$ und streng monoton fallend auf $\{x : x \le -1\}$ und ebenso auf $\{x : x \ge 1\}$. Wegen $f(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$ ist $+1$ die Maximalstelle und -1 die Minimalstelle von f.

Das Konvexitätsverhalten ergibt sich aus der zweiten Ableitung. Diese verschwindet bei $x = 0$ und bei allen x mit $x^2 - 3 = 0$, d.h. $x = \pm\sqrt{3}$. Wegen dem Zwischenwertsatz hat f'' dazwischen konstantes Vorzeichen, d.h. wegen $f''(\pm 1) = \pm\frac{-1}{2}$

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \sqrt{3} \\ < 0 & \text{für } \sqrt{3} > x > 0 \\ > 0 & \text{für } 0 > x > -\sqrt{3} \\ < 0 & \text{für } -\sqrt{3} > x \end{cases}$$

Insbesonders sind 0 und $\pm\sqrt{3}$ Wendepunkte (d.h. das Verhalten wechselt dort zwischen konvex und konkav) und f hat bei -1 ein (globales) Minimum und bei $+1$ ein (globales) Maximum.

4.1.10 Extremalprobleme.

Am wichtigsten in der Realität ist es wohl (lokale) Extremwerte von Funktionen zu bestimmen. Das werden im allgemeinen Funktionen $f : \mathbb{R}^m \supseteq X \to \mathbb{R}$ sein. Falls X offen ist, so ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum $x_0 \in X$, daß die Richtungs-Ableitung $d_v f(x_0)$ für alle Richtungen v verschwindet. Zumeist wird allerdings X nicht offen sein, sondern die X durch gewissen Restriktionen (Nebenbedingungen) eingeschränkt sein. Wir können im Moment nur den Fall, wo diese Nebenbedingungen eine 1-dimensionale Teilmenge X (also eine parametrisierte Kurve) beschreiben behandeln. Sei also $X = \{x(t) : t \in I\}$ eine differenzierbare Parametrisierung von X durch $x : \mathbb{R} \supseteq I \to X$. Gesucht sind die Parameter t für welche $f \circ x : I \to \mathbb{R}$ ein lokales Extremum besitzt. Dies können wir wie zuvor mit Differentialrechnung behandeln.

Zumeist wird die Menge X nicht in parametrisierter Form vorliegen, sondern in impliziter Form und dann müssen wir im ersten Schritt versuchen diese implizite Gleichung(en) in eine explizite Umzuwandeln.

Sei also z.B. jendes Rechteck mit maximaler Fläche bei gegebenen Umfang 4 gesucht. Es bezeichne x und y die Seiten des Rechtecks die zu maximierende Fläche ist dann durch $f(x, y) = x \cdot y$ gegeben. Die Nebenbedingung ist $2x+2y = 4$, also können wir x als Parameter t verwenden und $y = 2 - x = 2 - t$ setzen. Die Parametrisierung ist also $t \mapsto (t, 2 - t)$ und die zu minimierende Funktion ist $t \mapsto f(t, 2 - t) = t(2 - t) = 1 - (t - 1)^2$, nimmt ihr Maximum also bei $t = 1$ und somit $x = 1 = y$ an.

Beachte, daß wir das entsprechende Problem für Dreiecke so nicht lösen können. Denn das Dreieck wird durch die Längen der 3 Seiten x, y und z beschreiben. Die Fläche ist durch die Heron'sche Formel mit $\sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$, wo $s := \frac{x+y+z}{2}$, gegeben. Die Nebenbedingung ist $x + y + z = U$ und daraus können wir nur eine Seite aus den beiden anderen ausrechnen, es bleibt also eine Funktion in zwei Variablen übrig, die wir noch nicht gut behandeln können.

Das selbe Problem tritt auf, wenn wir den Quader mit maximalen Volumen $x \cdot y \cdot z$ bei gegebener Oberfläche $O = 2(x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x)$ bestimmen wollen.

Gesucht sei also jener Quader mit Seitenlängen x, y und z und fixer Oberfläche $2(x\,y + y\,z + z\,x)$ (sagen wir =6) mit maximalen Volumen $x\,y\,z$. Aus der Bedingung über die Oberfläche können wir $z := (3 - x\,y)/(x + y)$ ausrechnen, und suchen folglich ein Extremumg der Funktion

$$f : (x, y) \mapsto x\,y\,\frac{3 - x\,y}{x + y} \text{ auf } X := \{(x, y) \neq (0, 0) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x\,y \leq 3\}.$$

Für die partiellen Ableitungen ergibt sich:

$$\partial_x f(x, y) = y^2 \frac{3 - x^2 - 2x\,y}{(x + y)}^2 \text{ und } \partial_y f(x, y) \qquad = x^2 \frac{3 - y^2 - 2x\,y}{(x + y)}^2.$$

Eine innere Extremalstelle (x, y) muß $\partial_x f(x, y) = 0 = \partial_y(x, y)$ erfüllen. Die einzige Lösung dieses Gleichungssystems im Inneren von X ist $(x, y) = (1, 1)$ (und somit auch $z = (3 - 1)/2 = 1$). Am Rand von X, wenn also $x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$ ist, ist das Volumen 0, also kann höchstens im Inneren eine Maximalstelle existieren. Allerdings ist X nicht kompakt, also nicht völlig klar ob auch wirklich ein Maximum existiert.

4.2 Potenzreihen

4.2.1 Lemma.
Es sei $p : x \mapsto \sum_k p_k x^k$ ein Polynom. Dann sind seine Koeffizienten gegeben durch $p_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$.

Beweis. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k\geq 0} p_k\, x^k \\ p'(x) &= \sum_{k\geq 1} p_k\, k\, x^{k-1} \\ &\vdots \\ p^{(n)}(x) &= \sum_{k\geq n} p_k\, k(k-1)\cdot(k-n+1)\, x^{k-n} \end{aligned}$$

und Einsetzen von $x = 0$ ergibt

$$p^{(n)}(0) = p_n\, n! + p_{n-1}\,(n+1)\cdot 2\cdot 0 + \cdots = p_n\, n!. \quad \square$$

Wir können natürlich auch für allgemeine hinreichend differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das (sogenannte Taylor-Polynom) $\sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ betrachten. Allerdings muß die Folge $f^{(k)}(0)$ nicht mehr abbrechen, und wir erhalten erst dann ein Polynom, wenn wir nur über endlich viele k mit $f^{(k)}(0) \neq 0$ summieren. Es stellt sich somit die Frage, was diese Polynome mit f zu tuen haben. Es sei x_0 und x_1 vorgegeben und ρ durch

$$\rho\, \frac{(x_1 - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} := f(x_1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x_1 - x_0)^k$$

bestimmt. Dann ist die Funktion φ gegeben durch

$$\varphi(x) := f(x_1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\,(x_1 - x)^k - \frac{(x_1 - x)^{n+1}}{(n+1)!}\,\rho$$

stetig und differenzierbar zwischen x_0 und x_1 und verschwindet bei x_0 und x_1. Nach dem Satz von Rolle existiert somit ein ξ zwischen x_0 und x_1 mit

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(\xi) &= 0 - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}\,(x_1-\xi)^k - \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}\,k\,(x_1-\xi)^{k-1}\right) + (n+1)\,\frac{(x_1-\xi)^n}{(n+1)!}\,\rho \\ &= -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}\,(x_1-\xi)^k - \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}\,(x_1-\xi)^{k-1}\right) + (n+1)\,\frac{(x_1-\xi)^n}{(n+1)!}\,\rho \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,(x_1-\xi)^n + \frac{(x_1-\xi)^n}{n!}\,\rho, \end{aligned}$$

also

$$\rho = f^{(n+1)}(\xi).$$

4.2.2 Taylor-Formel mit Restglied von Lagrange.
Es besitze f auf einen kompakten Intervall mit Randpunkten x_0 und x_1 stetige

Ableitungen bis zur Ordnung n und $f^{(n+1)}$ existiere im Inneren des Intervalls. Dann existiert eine Zahl ξ im Inneren des Intervalls, s.d.

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x_1 - x_0)^k + f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{|x_1 - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ist. □

Beispiel.
Das Lagrange Restglied für $f = \sin$ und für $f = \cos$ konvergiert gegen 0, denn $|f^n(\xi)| \le 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{(x_1-x_0)^n}{n!} = 0$, da $\sum_n \frac{(x_1-x_0)^n}{n!}$ wegen dem Quotiententest konvergiert.

Die Taylor-Reihe von sin an der Stelle 0 ist

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

denn

$$\underbrace{\sin(0)}_{=0}, \quad \underbrace{\sin'(0)}_{=\cos(0)=1}, \quad \underbrace{\sin''(0)}_{=-\sin(0)=0}, \quad \underbrace{\sin'''(0)}_{=-\cos(0)=-1}, \quad \underbrace{\sin''''(0)}_{=\sin(0)=0}, \dots$$

Und analog ist

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

4.2.3 Folgerung.
Besitzt f auf einen kompakten Intervall Ableitungen beliebiger Ordnung und gibt es Konstanten a und b mit $\|f^{(n)}\|_\infty \le a\, b^n$, so konvergiert die Reihe von Funktionen $x \mapsto \sum_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ auf dem Intervall gleichmäßig gegen f.

Beweis. Unter diesen Voraussetzungen gilt für das Restglied

$$|f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}| \le a\,\frac{((x - x_0)b)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

gleichmäßig in x für $n \to \infty$. □

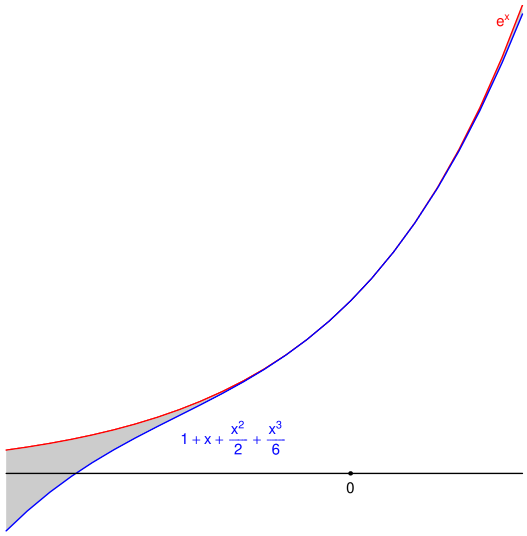
4.2.4 Beispiele von Taylor-Reihen.

1. Die Funktion $\exp : x \mapsto e^x$ ist unendlich oft differenzierbar mit $\exp^{(n)} = \exp$ und für das Restglied gilt:

   $$|\exp^{(n)}(\xi)\frac{(x - x_0)^n}{n!}| = e^\xi \frac{|x - x_0|^n}{n!} \to 0 \text{ glm. auf jedem Kompaktum}$$

   Somit ist

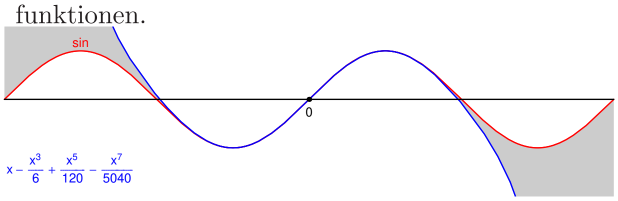
   $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$



2. Analog erhalten wir für die beiden Winkelfunktionen sin und cos und alle $x \in \mathbb{R}$ die Darstellungen

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit der in (3.1.8) axiomatisch definierten Winkelfunktionen.



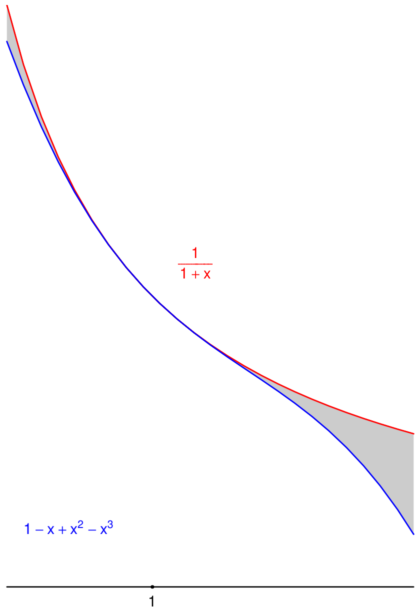
3. Die Funktion $f : x \mapsto 1/x$ ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir können sie jedoch nicht um $x = 0$ entwickeln, aber sehr wohl um $x = 1$, d.h. wir suchen eine Darstellung der Form

$$\frac{1}{1+h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} h^k.$$

Nach der Summenformel für die geometrische Reihe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-h)^k = \frac{1}{1-(-h)} = \frac{1}{1+h} \text{ für } |h| < 1.$$

Nachrechnen zeigt, daß dies genau die Taylor-Reihe von f an der Stelle 1 ist, d.h. $f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$ ist. Allerdings wird $f(1+h)$ nur für $|h| < 1$ durch ihre Taylor-Reihe dargestellt.



4. Allgemeiner sei $f(x) := x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ für $x > 0$. Dann ist $f^{(p)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - p + 1)\, x^{\alpha - p}$, also ist die Taylor-Reihe von f bei 1
$$\sum_i \frac{(\alpha)_i}{i!} x^i = \sum_i \binom{\alpha}{i} x^i$$
und diese konvergiert für $0 \le x < 1$ gegen $f(1+x) = (1+x)^\alpha$, denn das Restglied ist
$$\binom{\alpha}{n} x^n \xi^{\alpha - n}.$$
Nach dem Quotiententest konvergiert $\sum_n \binom{\alpha}{n} x^n$ für $0 < |x| < 1$ und somit strebt $\binom{\alpha}{n} x^n \to 0$ für $|x| < 1$ und somit strebt das Restglied gegen 0 für $0 \le x < 1$, da $0 \le (1 + \vartheta x)^{\alpha - n} \le 1$ für $n > \alpha$, $x > 0$ und $\xi = 1 + \vartheta x$. Wir werden in (4.2.15) zeigen, daß diese Entwicklung für alle $|x| < 1$ gilt.

All diese Reihendarstellungen erlauben uns erstmals transzendente Funktionen wie exp, sin, cos, $x \mapsto x^\alpha$ beliebig genau zu berechnen. Wir sollten also solche Reihen der Form $\sum_i a_i\, x^i$, sogenannte POTENZREIHEN, näher untersuchen.

4.2.5 Proposition. Konvergenzkreis.
Eine Potenzreihe $\sum_i a_i x^i$ konvergiert für alle x mit $|x| < r$ und divergiert falls $|x| > r$, wobei $r := 1/\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$ KONVERGENZRADIUS *der Reihe heißt. Entsprechend heißt $\{x \in \mathbb{C} : |x| = r\}$* KONVERGENZKREIS *der Reihe.*

Dabei dürfen sowohl die Koeffizienten a_n als auch x komplexe Zahlen sein.

Beweis. Nach dem Wurzeltest genügt es den Ausdruck
$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n x|^n} = |x| \,\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}$$
zu betrachten. □

4.2.6 Bemerkung. Komplexe Winkelfunktionen.
Wir dürfen also in die Taylor-Reihen von exp, sin und cos beliebige komplexe Zahlen x einsetzen und definieren für diese

$$\begin{aligned} e^x &:= \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}, \\ \sin(x) &:= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos(x) &:= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Insbesonders erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(it)^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^\infty \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^\infty i(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(t) + i\,\sin(t). \end{aligned}$$

und daraus folgt indem wir auch $-t$ einsetzen

$$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \text{ und } \sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}.$$

In Analogie dazu können wir auch die einfacheren Ausdrücke

$$\begin{aligned} \cosh(x) &:= \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sinh(x) &:= \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \tanh(x) &:= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{aligned}$$

betrachten. Offensichtlich ist cosh gerade (nämliche der gerade Teil $f_g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ von $f = \exp$) und sinh ist ungerade (nämlich der ungerade Teil $f_u : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ von $f = \exp$).

Das Cauchy-Produkt von e^x mit e^y für $x, y \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{j+k=n} \frac{x^j}{j!} \cdot \frac{y^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y} \end{aligned}$$

und daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{2e^x e^{-x}}{4} = 1 \\
\sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
&= \sinh(x)\,\cosh(y) + \cosh(x)\,\sinh(y) \\
\cosh(x+y) &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \cosh(x)\,\cosh(y) + \sinh(x)\,\sinh(y), \\
\sinh'(x) &= \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \cosh(x), \\
\cosh'(x) &= \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \sinh(x).
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x\to\pm\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\infty$ wird der rechts liegende Ast $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 - y^2 = 1\}$ der gleichseitigen Hyperbel durch $t \mapsto (\cosh(t), \sinh(t))$ parameterisiert. Wir werden in (5.2.6) zeigen, daß der Parameter t die Fläche des Hyperbelsektors ist. Folglich bezeichnet man die Umkehrfunktionen als Arsinh $:= \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Arcosh $:= \cosh^{-1} : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ und Artanh $:= \tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Diese können mittels ln ausgedrückt werden, siehe ebenfalls (5.2.6)

Beachte, daß

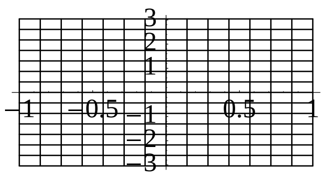
$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\,\sin(x) \text{ und } \cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x),$$

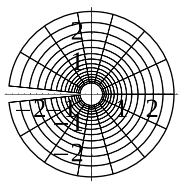
woraus leicht die Additionstheoreme der Winkelfunktionen folgend. Auch die übrigen Axiome der in (3.1.8) axiomatisch definierten Winkelfunktionen rechnen man nun leicht nach und damit ist schließlich die Existenz der Winkelfunktionen vollständig bewiesen.

Untersuchen wir nun die Bijektivität der komplexen Winkelfunktionen:
Es ist $e^{x+i\,y} = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$, also in y 2π-periodisch und somit $z \mapsto e^z$ nur injektiv wenn wir uns auf einen Streifen der Breite 2π beschränken, also z.B. auf $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$. Das Bild sind dann alle komplexen Zahlen ungleich 0 und die Umkehrfunktion $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$, $z \mapsto (\log(|z|), \arg(z))$ ist durch

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{y}\right) - \pi & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

gegeben, und ist stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.





Bemerkung für Interessierte.
Es ist

$$\sin(x + i\,y) = \sin(x)\cos(i\,y) - \cos(x)\sin(i\,y) = \sin(x)\cosh(y) - i\,\cos(x)\sinh(y)$$

mit partiellen Ableitungen

$$\begin{pmatrix} \cos(x)\cosh(y) & \sin(x)\sinh(y) \\ -\sin(x)\sinh(y) & \cos(x)\cosh(y) \end{pmatrix}$$

und deren Determinante

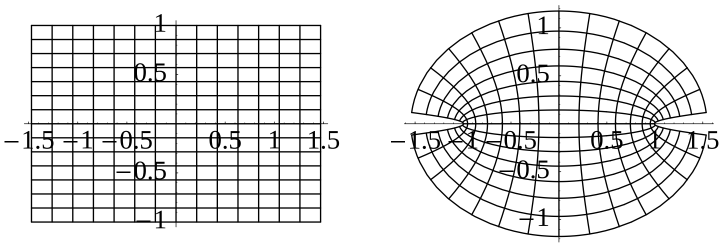
$$\frac{\cos(2x) + \cosh(2y)}{2} > 0 \text{ für } x \notin \pi\,\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2} \text{ oder } y \neq 0,$$

daraus folgt die lokale Invertierbarkeit, wie wir im 2. Semester sehen werden. Für fixes y ist $x \mapsto \sin(x_i\,y)$ 2π-periodisch. Es ist $\sin(\frac{\pi}{2} \pm i\,y) = \cosh(\pm y) = \cosh(y)$ und ebenso $\sin(-\frac{\pi}{2} \pm i\,y) = -\cosh(\pm y) = -\cosh(y)$. Hingegen ist für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ die Abbildung $x + i\,y \mapsto \sin(x + i\,y)$ injektiv, denn aus

$$\begin{aligned} u + i\,v = \sin(x + i\,y) &= \sin(x)\sqrt{1 + \sinh(y)^2} - i\,\sqrt{1 - \sin(x)^2}\,\sinh(y) \\ &= a\,\sqrt{1 + b^2} - i\,b\,\sqrt{1 - a^2} \end{aligned}$$

mit $a := \sin(x)$, $b := \sinh(y)$ folgt

$$\begin{aligned} & u^2 = a^2(1 + b^2) \text{ und } v^2 = b^2(1 - a^2) \\ \Rightarrow\quad & u^2 + v^2 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow\quad & u^2 = a^2(u^2 + v^2 + 1 - a^2) \text{ und } b^2 = u^2 + v^2 - a^2 \\ \Rightarrow\quad & a^2 = \frac{u^2 + v^2 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{u^2 + v^2 + 1}{2}\right)^2 - u^2} \\ & b^2 = \frac{u^2 + v^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{u^2 + v^2 + 1}{2}\right)^2 - u^2} \\ \Rightarrow\quad & x = \arcsin(a) = \arcsin\left(\operatorname{sgn}(u)\sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{u^2 + v^2 + 1}{2}\right)^2 - u^2}}\right) \\ & y = \operatorname{Arsinh}(b) = \operatorname{Arsinh}\left(-\operatorname{sgn}(v)\sqrt{\frac{u^2 + v^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{u^2 + v^2 + 1}{2}\right)^2 - u^2}}\right) \end{aligned}$$



Analog ist

$$\cos(x + i\,y) = \cos(x)\cos(i\,y) - \sin(x)\sin(i\,y) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

injektiv auf $\{(x,y) : 0 < x < \pi\}$, denn aus

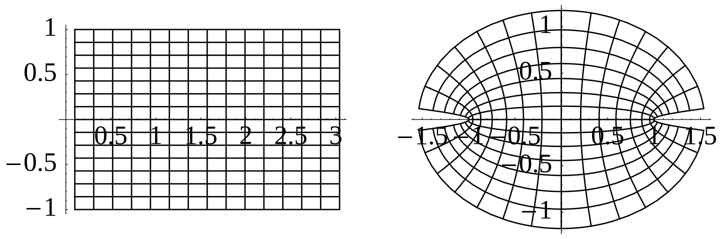
$$\begin{aligned} u + i\,v &= \cosh(x + i\,y) = \cos(x)\sqrt{1+\sinh(y)^2} - i\,\sqrt{1-\cos(x)^2}\,\sinh(y) \\ &= a\,\sqrt{1+b^2} - i\,b\,\sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

mit $a := \cos(x)$, $b := \sinh(y)$ folgt wie oben

$$u^2 = a^2(1+b^2) \text{ und } v^2 = b^2(1-a^2)$$

$$\Rightarrow \quad x = \arccos(a) = \arccos\left(\operatorname{sgn}(u)\sqrt{\frac{u^2+v^2+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{u^2+v^2+1}{2}\right)^2 - u^2}}\right)$$

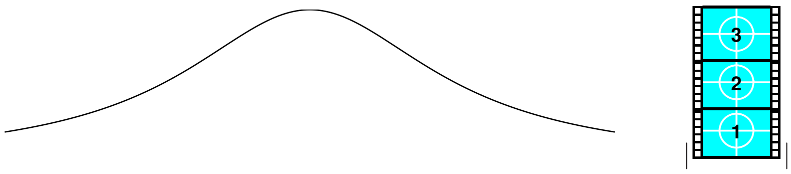
$$y = \operatorname{Arsinh}(b) = \operatorname{Arsinh}\left(-\operatorname{sgn}(v)\sqrt{\frac{u^2+v^2-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{u^2+v^2+1}{2}\right)^2 - u^2}}\right)$$



4.2.7 Definition. Konvergenz von Funktionen.
Es sei X eine Menge, F ein endlich dimensionaler Euklid'ischer Raum und $f_\infty, f_n : X \to F$ Funktionen. Man sagt f_n konvergiert gegen f_∞ punktweise, wenn

$$\forall x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x), d.h.$$
$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |f_\infty(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

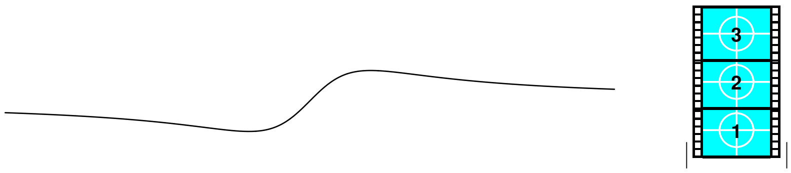
Die Grenzfunktion f_∞ einer punktweisen konvergenten Folge stetiger Funktionen f_n muß jedoch nicht stetig sein, wie das Beispiel $f_1(x) := \frac{1}{1+x^2}$, $f_n(x) := f_1(nx) = \frac{1}{1+(nx)^2} \to 0 =: f_\infty(x)$ zeigt.



Deshalb brauchen wir folgende stärkere Konvergenz, die sogenannte GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ: Man sagt f_n konvergiert gegen f_∞ gleichmäßig auf X, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in X : |f_\infty(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Offensichtlich ist jede gleichmäßig konvergente Folge auch punktweise konvergent. Nicht aber umgekehrt, wie die Abbildungen $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+(nx)^2}$ zeigen.



Sei nun $f(x) := \frac{x}{1+x^4}$ und $f_n(x) := n\, f(nx)$ (dann ist die Fläche unter allen f_n gleich). Wieder konvergiert $f_n \to 0$ punktweise. Der Abstand $d_\infty(f_n, 0) \geq \frac{n}{2}$ geht allerdings gegen ∞.

Wenn wir die Abstandsfunktion $d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ auf der Menge der beschränkten Funktionen $f, g : X \to F$ betrachten, so ist die gleichmäßige Konvergenz gerade die Konvergenz bezüglich dieser Metrik. Für die punktweise Konvergenz existiert nur für endliches X eine sie beschreibende Metrik. Wenn man $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ setzt, so ist $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$.

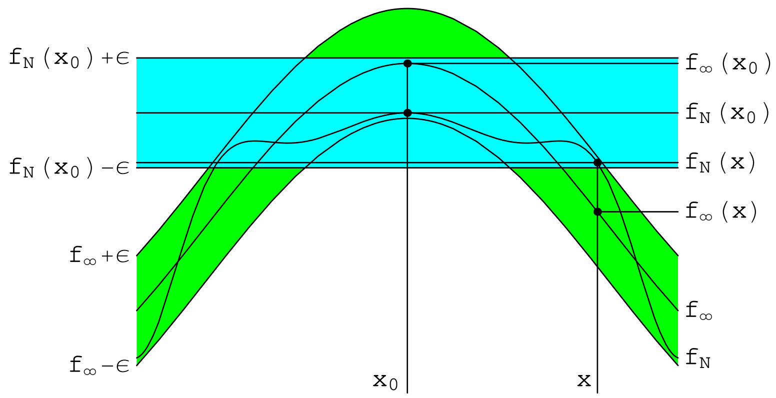
4.2.8 Proposition. Gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen.
Es konvergiere $f_n \to f_\infty$ gleichmäßig auf X und $f_n : X \to Y$ sei stetig für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f_∞ stetig. In dieser Situation gilt also

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{N}_\infty \times X \to Y$ gegeben durch $\varphi(n, x) := f_n(x)$. Nach Voraussetzung konvergiert $\varphi(n, x) \to \varphi(\infty, x)$ für $n \to \infty$ und zwar gleichmäßig bzgl. x und weiters ist $\lim_{x\to x_0} \varphi(n, x) = \varphi(n, x_0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Analog zu (3.2.8) sei n so groß, daß $d(f_n, f_\infty) < \varepsilon$ und $\delta > 0$ so gewählt, daß $(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$. Für diese x ist dann

$$\begin{aligned} &d(\varphi(\infty, x), \varphi(\infty, x_0)) \leq \\ &\quad \leq \underbrace{d(\varphi(\infty, x), \varphi(n, x))}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(\varphi(n, x), \varphi(n, x_0))}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(\varphi(n, x_0), \varphi(\infty, x_0))}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

also ist f_∞ auch stetig und nach (3.2.8) somit φ stetig. □



Die Abbildung $(f, g) \mapsto d_\infty(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$ definiert eine Metrik auf dem Raum $B(X, Y)$ der beschränkten Funktionen $f : X \to Y$, d.h.

$$B(X, Y) := \{f : X \to Y | f(X) \text{ ist beschränkt in } Y\}.$$

Falls Y ein Vektorraum ist, so gilt gleiches auch für $B(X, Y)$, wobei die Vektorraumoperationen punktweise definiert sind:

$$\begin{aligned} f + g &: x \mapsto f(x) + g(x) \\ t \cdot f &: x \mapsto t\, f(x) \end{aligned}$$

4.2.9 Cauchy'sches Konvergenzkriterium für Funktionen.
Es konvergiert eine Folge (f_n) von Funktionen genau dann gleichmäßig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n, m \geq N : d_\infty(f_n, f_m) \leq \varepsilon.$$

Falls Y vollständig ist, so auch $B(X, Y)$.

Beweis. Es sei f_n eine Cauchy-Folge, d.h. $d_\infty(f_n, f_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$. Wegen $d(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m)$ folgt auch $d(f_n, f_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$, d.h. $f_n(x)$ ist eine Cauchy-Folge für jedes $x \in X$ und da Y vollständig ist existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f_\infty(x)$. Bleibt zu zeigen, daß $f_n \to f_\infty$ nicht nur punktweise konvergiert sondern sogar gleichmäßig:

$$d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \underbrace{d(f_n(x), f_m(x))}_{\leq d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon} + \underbrace{d(f_m(x), f_\infty(x))}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon,$$

falls N so gewählt ist, daß $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$ für $n, m \geq N$ und $m > N$ in Abhängigkeit von x so gewählt wird, daß $d(f_m(x), f_\infty(x)) < \varepsilon$.

Die Beschränkheit der Grenzfunktion f_∞ folgt aus

$$d(f_\infty(x), y_0) \leq \underbrace{d(f_\infty(x), f_n(x))}_{\leq d_\infty(f_\infty, f_n) \leq 1} + \underbrace{d(f_n(x), y_0)}_{\leq d_\infty(f_n, y_0)} \leq 1 + d_\infty(f_n, y_0),$$

falls n so groß gewählt wird, daß $d(f_n, f_\infty) \leq 1$ ist. □

4.2.10 Kriterium von Weierstrass für gleichmäßige Konvergenz.
Es konvergiere $\sum_k \|f_k\|_\infty$. Dann konvergiert $\sum_k f_k$ gleichmäßig.

Beweis. Aus $\|\sum_{k=n}^{n+p} f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|f_k\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$ folgt, daß die Partialsummen eine Cauchyfolge bzgl. d_∞ sind und somit nach (4.2.9) konvergiert. □

4.2.11 Proposition. Grenzwerte differenzierbarer Funktionen.
Es sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, f_n konvergiere gegen f_∞ punktweise und f_n' konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion f_∞^1. Dann ist f_∞ differenzierbar und die Ableitung ist $(f_\infty)' = f_\infty^1$, d.h. es gilt

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Beweis. Es sei

$$g_n(x) := \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f_n'(x_0) & \text{für } x \neq x_0 \text{ und } n \neq \infty \\ f_\infty^1(x_0) & \text{für } x \neq x_0 \text{ und } n = \infty \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist g stetig bei $x \neq x_0$, da f_n stetig ist, und auch stetig bei x_0, da f_n dort differenzierbar ist. Punktweise konvergiert g_n gegen g_∞, da $f_n \to f_\infty$ und $f_n' \to f_\infty^1$ punktwweise konvergiert. Weiters ist (g_n) eine Cauchy-Folge bzg. d_∞, denn nach dem Mittelwertsatz angewendet auf $f_n - f_m$ ist

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} = (f_n - f_m)'(\xi) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi)$$

und somit

$$d_\infty(g_n, g_m) \leq d_\infty(f_n', f_m') \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

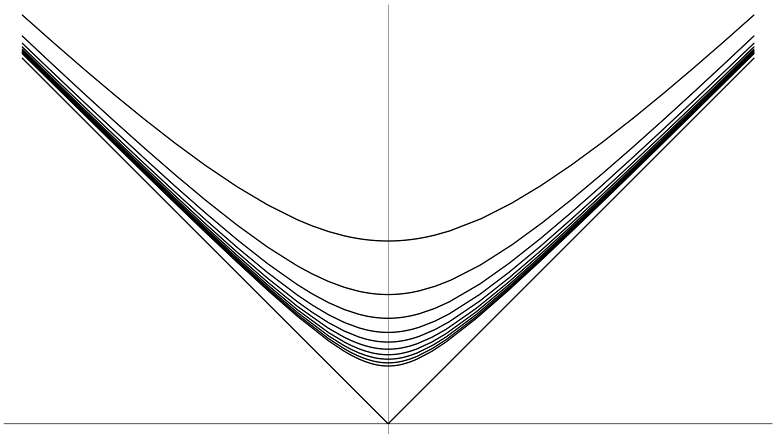
Nach (4.2.9) ist g_n gleichmäßig konvergent gegen eine nach (4.2.8) stetige Funktion, somit auch punktweise gegen diese Funktion, die nach obigen also die Funktion g_∞ sein muß. Die Stetigkeit der Grenzfunktion g_∞ bei x_0 besagt aber gerade, daß f_∞ bei x_∞ differenzierbar mit Ableitung $f^1_\infty(x_0)$ ist. □

Beispiel.
Die Funktion $f_\infty : x \mapsto |x| := \sqrt{x^2}$ ist bei 0 nicht-differenzierbar. Achtung, an dieser Stelle ist (4.1.20) nicht für $\sqrt{}$ anwendbar und somit auch nicht die Kettenregel auf $x \mapsto \times^2 \mapsto \sqrt{x^2}$.

Hingegen ist $f_n : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$ nach den selben Argumenten sehr wohl auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und konvergiert offensichtlich auch punktweise gegen f_∞. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig, denn

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| = \left|\sqrt{\tfrac{1}{n} + x^2} - \sqrt{x^2}\right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also $d_\infty(f_n, f_\infty) \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$. Gleichmäßige Grenzwerte differenzierbarer Funktionen müssen also nicht differenzierbar sein.



4.2.20 Grenzwertsatz von Abel.
Die Potenzreihe $\sum_k a_k\, x^k$ konvergiere für $x = r$. Dann konvergiert sie gleichmäßig auf $[0, r]$ und die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{k=0}^\infty a_k\, x^k$ ist stetig auf $[0, r]$.

Beweis. O.B.d.A. sei $r = 1$ (ersetze x durch $r\,x$ und somit a_k durch $a_k\, r^k$). Es sei $p_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k\, x^k$ und $p_\infty(x) := \sum_{k=0}^\infty a_k\, x^k = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$ für $0 \le x \le r$. O.B.d.A. sei $p_\infty(r) = 0$ (ersetze a_0 durch $a_0 - p_\infty(r)$). Es genügt die gleichmäßige Konvergenz von $p_n \to p_\infty$ zu zeigen, da (4.2.8) die Stetigkeit von p_∞ impliziert. Es sei $s_n := \sum_{k=0}^n a_k = p_n(1)$ Dann ist

$$\begin{aligned} p_\infty(x) - p_n(x) &= \sum_{k=n+1}^\infty a_k\, x^k = \sum_{k=n+1}^\infty (s_k - s_{k-1})\, x^k \\ &= (1-x) \sum_{k=n+1}^\infty s_k\, x^k + s_n\, x^{n+1}. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ sei nun n so groß, daß $|s_k| \le \varepsilon$ und $0 \le x < 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}|p_\infty(x) - p_n(x)| &\le (1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{|s_k|}_{\le\varepsilon}\, x^k + |s_n|\, \underbrace{|x|^{n+1}}_{\le 1} \\ &\le (1-x)\,\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} x^k + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

und klarerweise $|p_\infty(r) - p_n(r)| = |s_n| \le \varepsilon$. □

4.2.12 Lemma. Stetigkeit von Potenzreihen.
Es sei $f(x) = \sum_k a_k\, x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist f stetig bei 0.

Beweis. Es ist

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x^k = x \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\, x^k$$

und somit für $|x| \le s < r$

$$|f(x) - f(0)| \le |x| \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1}|\, s^k \le |x|\, \frac{1}{s} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, s^k}_{<\infty}$$

konvergiert also gegen 0 für $x \to 0$. □

4.2.13 Folgerung. Translation von Potenzreihen.
Es sei $p(x) = \sum_k a_k\, x^k$ eine für $|x| < r$ konvergente Potenzreihe. Dann ist $x \mapsto p(x + x_0)$ in eine für $|x| < r - |x_0|$ konvergente Potenzreihe $\sum_k b_k x^k$ entwickelbar. Dabei sind $b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\, a_n\, (x_0)^{n-k}$.

Beweis. Für $|x| + |x_0| < r$ ist

$$\begin{aligned}p(x + x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (x + x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j\, x_0^{k-j} \\ &\overset{!}{=} \sum_{j=0}^{\infty} x^j \sum_{k\ge j} a_k \binom{k}{j} x_0^{k-j} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \underbrace{\sum_{k\ge 0} a_{k+j} \binom{k+j}{j} x_0^k}_{=:b_j},\end{aligned}$$

wobei wir die Summation nach dem Cauchy'schen Doppelreihensatz vertauschen dürfen, da $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, (|x| + |x_0|)^k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{n} \left|\binom{k}{j}\, x^j\, x_0^{k-j}\right|$ konvergiert. □

Bemerkung.
Beachte, daß der Konvergenzradius der verschobenen Reihe durchaus größer als $r - |x_0|$ sein kann: Sei nämlich $f(x) := \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Dann ist

$$\begin{aligned}f(x - \frac{1}{2}) &= \frac{1}{1 - (x - \frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2} - x} = \frac{2}{3}\, \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x} \\ &= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2x}{3})^k \text{ für } \left|\frac{2x}{3}\right| < 1,\end{aligned}$$

also der Konvergenzradius $\frac{3}{2} > 1 - \frac{1}{2}$.

Bemerkung für Interessierte.
Beachte, daß bei der Limes-Berechnung in (4.2.14) der Parameter $h \to 0$ durchaus auch komplex sein kann. Für Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ können wir also auch eine komplexe Ableitung als $f'(z) := \lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \in \mathbb{C}$ definieren und für konvergente Potenzreihen haben wir eben gezeigt, daß deren Summenfunktion in diesen Sinn komplex differenzierbar sind und die Ableitung wie üblich gliedweise ausgerechnet werden kann. Die komplexe Differenzierbarkeit ist, wie man in der komplexen Analysis lernt eine viel stärkere Eigenschaft, als jene der im nächsten Semester zu behandelnden Differenzierbarkeit als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. In der Tat zeigt man in der komplexen Analysis, daß die auf offenen Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbaren Funktionen genau jene sind, die sich in dort konvergente Potenzreihen entwickeln lassen.

4.2.14 Folgerung. Ableitung von Potenzreihen.
Es sei $p(x) = \sum_k a_k\, x^k$ eine für $|x| < r$ konvergente Potenzreihe. Dann ist f differenzierbar auf $\{x : |x| < r\}$ und die Ableitung kann gliedweise berechnet werden.

Beweis. Mit der Notation von (4.2.13) erhalten wir für den Differenzenquotienten von p

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, h^{k-1} \overset{(4.2.12)}{\to} b_1 = \sum_{j\geq 1} a_j\, j\, x_0^{j-1}.$$

□

Bemerkung für Interessierte.
Beachte, daß bei der Limes-Berechnung in (4.2.14) der Parameter $h \to 0$ durchaus auch komplex sein kann. Für Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ können wir also auch eine komplexe Ableitung als $f'(z) := \lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \in \mathbb{C}$ definieren und für konvergente Potenzreihen haben wir eben gezeigt, daß deren Summenfunktion in diesen Sinn komplex differenzierbar sind und die Ableitung wie üblich gliedweise ausgerechnet werden kann. Die komplexe Differenzierbarkeit ist, wie man in der komplexen Analysis lernt eine viel stärkere Eigenschaft, als jene der im nächsten Semester zu behandelnden Differenzierbarkeit als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. In der Tat zeigt man in der komplexen Analysis, daß die auf offenen Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbaren Funktionen genau jene sind, die sich in dort konvergente Potenzreihen entwickeln lassen.

4.2.15 Beispiel.
Wir zeigen nun, daß die Entwicklung von $(1+x)^\alpha$ aus (4.2.4) für alle $|x| < 1$ gilt:
Es sei $p(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ für $|x| < 1$. Dann ist

$$p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha-1}{k} x^k$$

und somit

$$(1+x)\, p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \left(\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} \right) x^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha\, p(x).$$

Dieselbe Beziehung gilt auch für $x \mapsto (1+x)^\alpha$, also ist

$$\frac{p'(x)}{\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha} = \frac{p(x)}{(1+x)^\alpha}$$

und somit $p'(x)(1+x)^\alpha - p(x)\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha = 0$, also verschwindet die Ableitung von $x \mapsto \frac{p(x)}{(1+x)^\alpha}$ und somit ist diese Funktion konstant und zwar 1 (wenn wir $x = 0$ setzen).

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist die Reihe endlich. Sei also $\alpha \notin \mathbb{N}$. Wir wollen nun die Konvergenz in den Randpunkten ± 1 untersuchen. Es ist

$$\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} = \frac{\alpha - n}{n+1} = \frac{\alpha+1}{n+1} - 1.$$

Für $x = -1$ und $a_n := \binom{\alpha}{n}(-1)^n$ ist somit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} = 1 - \frac{\alpha+1}{n+1}.$$

Sei $\alpha > 0$ und $1 < \beta < \alpha + 1$, dann ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{\alpha+1}{n+1} \le 1 - \frac{\beta}{n}$$

für alle hinreichend großen n, also konvergiert die Reihe $\sum_n a_n$ wegen dem Raabe'schen Test (2.5.15).

Sei andererseits $\alpha < 0$, dann ist $\alpha + 1 < \frac{n+1}{n}$ und somit $a_{n+1}/a_n > 1 - \frac{1}{n}$, also $\sum_n a_n$ divergent wegen dem Raabe'schen Test (2.5.15).

Sei nun $x = 1$ und $a_n = \binom{\alpha}{n}$. Für $\alpha \le -1$ ist $a_{n+1}/a_n \le -1$ also $\sum_n a_n$ divergent nach dem Quotiententest (2.5.11). Für $\alpha > -1$ ist $a_{n+1}/a_n < 0$ für alle hinreichend großen n und somit $\sum_k a_k$ alternierend mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{\alpha+1}{n} < 1,$$

also existiert ein N s.d. $n \mapsto |a_n|$ fallend ist für $n \ge N$. Es ist

$$\frac{|a_n|}{|a_N|} = \prod_{j=N}^{n-1} \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = \prod_{j=N}^{n-1} (1 - \frac{\alpha+1}{j+1}).$$

Es ist $1 + x \le e^x$ für alle x, also ist

$$|a_n| \le |A_N|\, e^{-(\alpha+1)\sum_{j=N+1}^{n} \frac{1}{j}}.$$

Wegen $\sum_j \frac{1}{j} \to \infty$ gilt $a_n \to 0$, also ist $\sum_n a_n$ konvergent nach dem Leibniz-schen Konvergenztest (2.5.12).

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ gilt somit die Formel

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

falls $|x| < 1$, falls $x = -1$ und $\alpha > 0$, und auch falls $x = 1$ und $\alpha > -1$. In allen anderen Fällen divergiert diese Reihe.

4.2.16 Folgerung. Stammfunktion von Potenzreihen.
Es sei $p(x) = \sum_k a_k\, x^k$ *eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius* $r > 0$. *Dann ist* $\sum_k \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1}$ *eine Stammfunktion von* p *auf* $\{x : |x| < r\}$, *d.h. ist differenzierbar mit Ableitung* p.

Beachte, daß je zwei Stammfunktionen φ_1 und φ_2 der selben Funktion sich höchstens um eine additive Konstante unterscheiden können, denn aus $\varphi_1' = f = \varphi_2'$ folgt $(\varphi_1 - \varphi_2)' = 0$ und somit ist $\varphi_1 - \varphi_2$ konstant.

Beweis. Offensichtlich konvergiert mit $\sum_k a_k x^k$ auch $\sum_k \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ absolut und stellt nach dem zuvor Gesagten eine differenzierbare Funktion mit Ableitung p dar. □

4.2.21 Beispiele.

1. Es sei $f(x) := \frac{1}{x^2-3x+2}$. Partialbruchzerlegung (siehe (5.2.8)) liefert

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

Die Taylor-Reihen der beiden Summanden ist

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1$$
$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\, x^k \text{ für } |x| < 2$$

Subtraktion liefert mittels (2.5.19) somit für $|x| < \min\{1,2\} = 1$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^{k+1}})\, x^k.$$

2. Es sei $f(x) := \ln(1+x)$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ und somit erhalten wir für die Stammfunktion $f(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\, x^{k+1}$. Wegen $\ln(1) = 0$ ist $C = 0$, d.h.

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\, x^j \text{ für } |x| < 1.$$

Wegen dem Leibnizschen Test konvergiert diese Reihe auch für $x = 1$. Also ist nach dem Abel'schen Grenzwertsatzes (4.2.20)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1} = \lim_{x\to 1-}\ln(1+x) = \ln(2).$$

3. Auf ganz ähnliche Weise erhalten wir aus der Binomialreihe durch Bildung

der Stammfunktion folgende für $|x|<1$ konvergente Taylor-Reihen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Artanh}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty (x^2)^k \\
\Rightarrow \quad \operatorname{Artanh}(x) + C &= \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty (-x^2)^k \\
\Rightarrow \quad \arctan(x) + C &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\
\operatorname{Arsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^\infty \binom{-1/2}{k} (x^2)^k \\
\Rightarrow \quad \operatorname{Arsinh}(x) + C &= \sum_{k=0}^\infty \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^\infty \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k \\
\Rightarrow \quad \arcsin(x) + C &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}
\end{aligned}
$$

wobei die Konstante C wegen $p(0)=0$ in allen 4 Fällen 0 ist.
Die Existenz und Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion $\operatorname{Artanh} = \tanh^{-1}$ erhalten wir dabei wir folgt: Es ist $\tanh(x) := \frac{\sin(x)}{\cosh(x)}$ also wegen $\cosh(x)^2 = 1+\sinh(x)^2 \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und hat Ableitung

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2}{\cosh(x)^2} = 1 - \tanh(x)^2.$$

Wegen $\tanh(x)^2 = \frac{\sinh(x)^2}{\cosh(x)^2} = \frac{\sinh(x)^2}{1+\sinh(x)^2} < 1$ ist $\tanh'(x) > 0$ und somit tanh streng monoton wachsend. Aus

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\infty$$

folgt

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sgn}(\sinh(x))}{1 + \frac{1}{\sinh(x)^2}} = \pm 1,$$

d.h. $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ ist eine bijektive Funktion und die Umkehrfunktion $\operatorname{Artanh} := \tanh^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{Artanh}(x))} = \frac{1}{1 - \tanh(\operatorname{Artanh}(x))^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Mittels Abel'schen Grenzwertsatzes (4.2.20) können wir noch folgendes schließen:
Es ist für $|x|<1$. Wegen dem Leibnizschen Test konvergiert die Reihe von arctan auch für $x = \pm 1$ also nach (4.2.20) gegen $\arctan(\pm 1)$. Somit ist

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

4.2.17 Theorem. Komposition von Potenzreihen.
Es sei $g(x) := \sum_j b_j\, x^j$ eine für $|x| < r$ konvergente Potenzreihe mit $g(0) = 0$ und $f(y) := \sum_k a_k\, y^k$ ebenfalls eine für $|y| < s$ konvergente Potenzreihe. Dann ist $(f \circ g)(x)$ in eine Potenzreihe entwickelbar, die für kleine $|x|$ konvergiert und deren Koeffizienten aus

$$\sum_k a_k \Big(\sum_j b_j\, x^j\Big)^k$$

durch Auspotenzieren und Sortieren nach Potenzen von x erhalten werden können.

Beweis. Da g auf $\{x : |x| < r\}$ stetig ist und $g(0) = 0$ vorausgesetzt ist, existiert ein $0 < r' \le r$ mit $|g(x)| < s$ für alle $|x| < r'$. Wegen (2.5.21) ist $\Big(\sum_{j=0}^\infty b_j\, x^j\Big)^k$ in eine Potenzreihe $\sum_{j=0}^\infty b_{j,k}\, x^j$ für $|x| < r$ entwickelbar. Für $k = 2$ ist

$$b_{j,2} = \sum_{i=0}^{j} b_i\, b_{j-i} = \sum_{i_1+i_2=j} b_{i_1} \cdot b_{i_2}.$$

Mittels Induktion erhält man

$$b_{j,k} = \sum_{i_1+\dots+i_k=j} b_{i_1} \cdot \dots \cdot b_{i_k}.$$

Wir benötigen die genau Gestalt der $b_{j,k}$ nicht, wohl aber, daß sie endliche Summen von Produkten der b_i sind. Beachte, daß $b_0 = 0$ wegen $g(0) = 0$ gilt, d.h. $g(x) = x \sum_{j=1}^\infty b_j\, x^{j-1}$ ist und somit aus $g(x)^k$ ein x^k herausgehoben werden kann, d.h. $b_{j,k} = 0$ ist für $j \le k$. Somit ist

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sum_{k=0}^\infty a_k\, g(x)^k &= \sum_{k=0}^\infty a_k \Big(\sum_{j=0}^\infty b_j\, x^j\Big)^k = \sum_{k=0}^\infty a_k \sum_{j=0}^\infty b_{j,k}\, x^j \\ &\overset{!}{=} \sum_{j=0}^\infty \Big(\sum_{k=0}^\infty a_k\, b_{j,k}\Big)\, x^j = \sum_{j=0}^\infty \Big(\sum_{k=0}^{j} a_k\, b_{j,k}\Big)\, x^j,\end{aligned}$$

wobei wir bis zum $\overset{!}{=}$ unter der Bedingung $|x| < r$ rechnen können. Dann benötigen wir allerdings die absolute Konvergenz einer der beiden Doppelreihen: Um dies für die linke Seite zu zeigen setzen wir nun o.B.d.A. vorraus, daß $\sum_{j=0}^\infty |b_j|\, |x|^j < s$ ist (Da die Reihe von g absout konvergiert somit stetig ist und den Wert 0 an der Stelle 0 hat, können wir r' so klein wählen, daß dies für $|x| < r'$ gilt). Es seien $\beta_{j,k}$ die Koeffizienten von $\Big(\sum_{j=0}^\infty |b_j|\, x^j\Big)^k$ also auf die selbe Weise aus den $|b_j|$ berechnet, wie die $b_{j,k}$ aus den b_j. Da dies nur Summen von Produkten sind ist $|b_{j,k}| \le \beta_{j,k}$ und somit

$$\sum_{j=0}^\infty |b_{j,k}|\, |x|^j \le \sum_{j=0}^\infty \beta_{j,k}\, |x|^j = \Big(\sum_{j=0}^\infty |b_j|\, |x|^j\Big)^k.$$

Damit ist aber

$$\sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^\infty |a_k|\, |b_{j,k}|\, |x|^j < \infty,$$

und wir dürfen wirklich die unendlichen Summen bei $\overset{!}{=}$ vertauschen. □

Beispiel.
Wir betrachten die durch Zusammensetzung gegebene Funktion

$$f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)$$

Die innere Funktion $x \mapsto 2x/(1-x)$ ist für $|x| < 1$ durch folgende Potenzreihe gegeben:

$$\frac{2x}{1-x} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2\, x^{k+1}.$$

Ihre punktweisen Potenzen sind

$$\left(\frac{2x}{1-x}\right)^n = (2x)^n\,(1-x)^{-n} = 2^n\, x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k \text{ für } |x| < 1.$$

Somit erhalten wir für f:

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{2x}{1-x}\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\, 2^n\, x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} x^m \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\, 2^n \binom{-n}{m-n} (-1)^{m-n} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} x^m \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1}\, 2^n\, \underbrace{\tfrac{1}{n}\, \tfrac{(-n)\cdot(-n-1)\ldots(-n-(m-n)+1)}{(m-n)!}\, (-1)^{m-n}}_{=\frac{(n+1)\cdot\dots\cdot(m-1)\cdot m}{(m-n)!}\,\frac{1}{m}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\, x^m \underbrace{\sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1}\, 2^n \binom{m}{n}}_{=-(1-2)^n+1=1-(-1)^n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\, x^{2k+1} = 2\,\mathrm{Artanh}(x).
\end{aligned}$$

Diese Reihenentwicklung hätten wir aber auch einfacher erhalten:

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, (-x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, (1-(-1)^n)\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\, 2\, x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Die Beziehung zum Artanh folgt auch so:

$$\begin{aligned}
x = \mathrm{Artan}(y) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right).
\end{aligned}$$

4.2.18 Folgerung. Quotienten von Potenzreihen.
Es seien f und g Potenzreihen mit positiven Konvergenzradius und $g(0) \neq 0$. Dann ist auch $1/g$ und f/g in Potenzreihen mit positiven Konvergenzradius entwickelbar.

Beweis. Es ist $1/g$ die Zusammensetzung von g und $i : y \mapsto \frac{1}{y}$. Da wir i um $g(0)$ wie folgt in eine lokal konvergente Potenzreihe entwickeln können, ist auch die Zusammensetzung $i \circ g : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ in eine für kleine $|x|$ konvergente Reihe entwickelbar nach (4.2.17) und ebenso das Produkt $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ nach (2.5.21).

$$\begin{aligned}\frac{1}{y+g(0)} &= \frac{1}{g(0)}\,\frac{1}{1-\frac{-y}{g(0)}} = \frac{1}{g(0)}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{-y}{g(0)}\Big)^k \text{ für } |y| < g(0)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{g(0)^{k+1}}\,y^k z,\\ \text{also}\quad \frac{1}{z} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{g(0)^{k+1}}\,(z-g(0))^k \text{ für } \Big|\frac{z}{g(0)}-1\Big| < 1. \quad \square\end{aligned}$$

Lemma. Prinzip des Koeffizientenvergleichs.
Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Falls eine Folge $x_n \in f^{-1}(0)$ existiert mit $x_n \to 0$, dann ist $f = 0$.

Beweis. Wir zeigen mittels Induktion, daß $f_n = 0$ ist. Aus der Stetigkeit von f folgt $0 = f(x_n) \to f(0) = f_0$, also ist $f_0 = 0$. Sei nun bereits $f_0 = \cdots = f_n = 0$ und $g(x) := \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n+1+k}\, x^k$, also ebenfalls eine konvergente Potenzreihe, die bei allen x_j verschwindet. Somit ist auch $f_{n+1+0} = 0$. $\square$

4.2.19 Beispiel. Taylor-Reihe für Tangens.
Es ist

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\end{aligned}$$

Da nach obigen Theorem auch der Quotient $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ sich in eine konvergente Potenzreihe $\sum_k c_k x^k$ entwickeln läßt, können wir nach dem letzten Lemma Koeffizientenvergleich machen und erhalten aus

$$\begin{aligned}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots)\cdot(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - + \dots) &=\\ = (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - + \dots)&\end{aligned}$$

die Koeffizienten

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{1}{3},\ c_4 = 0,\ c_5 = \frac{2}{15}, \dots.$$

Also ist für x nahe 0:

$$\tan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - + \dots$$

Wir wollen dies Koeffizienten nun anders bestimmen. Die Potenzreihe $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$ besitzt offensichtlich als multiplikative Inverse $\frac{1}{e^x} = e^{-x} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^k}{k!}$ und diese ist nicht nur für x mit $|e^x - 1| < 1$ konvergent, sondern für alle $x \in \mathbb{C}$..

Wenn wir nun $e^x - 1 = \sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k!}$ betrachten, so verschwindet diese an der Stelle 0, und wir können somit nicht den Kehrwert $\frac{1}{e^x-1}$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln, wohl aber wenn wir die stetige Erweiterung von $\frac{e^x-1}{x} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{(k+1)!}$ betrachten, d.h.

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!}\, x^k \text{ für hinreichend kleine } x$$

mit gewissen Koeffizienten B_k, den Bernoullizahlen. Durch Koeffizientenvergleich von

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{j=0}^\infty \frac{x^j}{(j+1)!} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!}\, x^k = \sum_{n=0}^\infty x^n \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{(n-k+1)!\, k!},$$

d.h. $B_0 = 1$ und $\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$ für $n \geq 1$, können wir die Bernoulli-Zahlen B_k rekursiv berechnen. Z.B. ist $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_9 = 0$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, ...

Diese Funktion ist eng verwandt mit coth, denn

$$x \coth(x) = x\, \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x\, \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = x \left(1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}\right) = x + \frac{2x}{e^{2x} - 1}$$

bzw.

$$\frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{1 \neq k = 0}^\infty \frac{B_k}{k!}\, x^k.$$

Da coth ungerade und somit $x \mapsto \frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right)$ gerade ist, muß $B_k = 0$ sein für alle ungeraden $k > 1$ und wir erhalten

$$x \coth(x) = x + \frac{2x}{e^{2x} - 1} = (1 + 2\, B_1)\, x + \sum_{k=0}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2x)^{2k} = \sum_{k=0}^\infty \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

und damit ist

$$x \cot(x) = x\, i\, \coth(ix) = \sum_{k=0}^\infty \frac{2^{2k}\, B_{2k}}{(2k)!} (i\, x)^{2k} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{2^{2k}\, B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Wegen

$$\cot(2x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x)^2}{2 \sin(x) \cos(x)} = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

ist schließlich

$$\tan(x) = \cot(x) - 2 \cot(2x) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}.$$

Es ist

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} = \frac{e^{(n+1)x}-1}{x}\,\frac{x}{e^x-1}$$

und Reihenwentwicklung liefert einerseits

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kx)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{n} k^p\Big) x^p$$

und andererseits

$$\begin{aligned}(n+1)\,\frac{e^{(n+1)x}-1}{(n+1)x}\,\frac{x}{e^x-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!} x^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!}\, x^j \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{p} \frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{B_{p-k}}{(p-k)!}\Big)\, x^p\end{aligned}$$

also mittels Koeffizientenvergleich für alle $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^p = p! \sum_{k=0}^{p} \frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{B_{p-k}}{(p-k)!} = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k+1}(n+1)^{k+1}\, B_{p-k}.$$

Man kann zeigen (siehe [Heu80, 148]), daß für $1 \le p \in \mathbb{N}$ auch folgendes gilt:

$$\zeta(2p) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = (-1)^{p-1}\,\frac{B_{2p}(2\pi)^{2p}}{(2p)!2}.$$

Bemerkung für Interessierte.
Es sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ eine für $|x| < r$ konvergente Potenzreihe mit $f(0) = a_0 = 0$ und $f'(0) = a_1 \neq 0$. Dann ist die lokal existente Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls in eine Potenzreihe um 0 entwickelbar. Deren Koeffizienten können durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Beweisen kann man das allerdings am leichtesten mit komplexer Analysis, sodaß wir hier nur auf diese Vorlesung verweisen.

Einige Taylor-Reihen spezieller Funktionen.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1, \text{ (2.5.4)}$$

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \text{ für } |x| < 1, \text{ (4.2.4) und (4.2.15)}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k \text{ für alle } x, \text{ (4.2.4)}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, x^k \text{ für } |x| \text{ klein, (4.2.19)}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k \text{ für } |x| < 1 \text{ und für } x = 1, \text{ (4.2.21)}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ für alle } x, \text{ (4.2.4)}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ für alle } x, \text{ (4.2.4)}$$

$$\tan(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}\, x^{2k-1} \text{ für } |x| \text{ klein, (4.2.19)}$$

$$x\,\cot(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}\, B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \text{ für } |x| \text{ klein, (4.2.19)}$$

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| \le 1, \text{ (4.2.21)}$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| \le 1, \text{ (4.2.21)}$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ für alle } x, \text{ Aufgabe (4.78)}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ für alle } x, \text{ Aufgabe (4.78)}$$

$$\tanh(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}\, x^{2k-1} \text{ für } |x| \text{ klein, (4.2.19)}$$

$$x\,\coth(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \text{ für } |x| \text{ klein, (4.2.19)}$$

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1, \text{ (4.2.21)}$$

$$\operatorname{Artanh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1, \text{ (4.2.21)}$$

Literatur

[Bla74a] Christian Blatter. *Analysis 1*, volume 151 of *Heidelberger Taschenbücher*. Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[Bla74b] Christian Blatter. *Analysis 2*, volume 152 of *Heidelberger Taschenbücher*. Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[Bla74c] Christian Blatter. *Analysis 3*, volume 153 of *Heidelberger Taschenbücher*. Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[Cou71a] Richard Courant. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 4 edition, 1971.

[Cou71b] Richard Courant. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 2*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 4 edition, 1971.

[Die60] Jean Dieudonné. *Foundations of modern analysis, I.* Academic Press, New York – London, 1960.

[Elc37] Michal Elconin. ??? *Acta Mathematica*, 68:71–107, 1937.

[Heu80] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart, 1980. 187

[Heu81] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 2.* Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart, 1981.

[Kri02a] Andreas Kriegl. Funktionalanalysis 1. Skriptum, 2002.

[Kri02b] Andreas Kriegl. Funktionalanalysis 2. Skriptum, 2002.

[Lan] Serge Lang. *Differentiable Manifolds*.

Liste der Symbole

(α, β)	offenes Intervall, Seite 79
$(\alpha, \beta]$	links-offenes Intervall, Seite 79
$(x_n)_n$	unendliche Folge, Seite 80
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	unendliche Folge, Seite 80
$[\alpha, \beta)$	rechts-offenes Intervall, Seite 79
$[\alpha, \beta]$	abgeschlossenes Intervall, Seite 79
$\lim_{n\to\infty} x_n$	Grenzwert einer Folge (x_n), Seite 80
$\sum_k a_k$	unendliche Reihe der Glieder a_k, Seite 91
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$	Summe der Reihe, Seite 91
$\underline{\lim}$	Limes inferior, der kleinste Häufungswert, Seite 87
$\overline{\lim}$	Limes superior, der größte Häufungswert, Seite 87
$B_r(x_0)$	abgeschlossene Ball um x_0 mit Radius r, Seite 78
c	Raum der konvergenten reellen Folgen, Seite 82
$d(M)$	Durchmesser der Menge M, Seite 80
e	Euler'sche Zahl, Seite 93
I	zumeist ein Intervall, Seite 79
$U_r(x_0)$	r-Umgebung, offene Ball um x_0 mit Radius r, Seite 78
$x_n \to x_\infty$	Konvergenz einer Folge (x_n) gegen x_∞, Seite 80
$x_n \to \pm\infty$	uneigentlich gegen $\pm\infty$ konvergente Folge (x_n), Seite 85
arccos	Arcuscosinus, Umkehrfunktion von cos, Seite 134
arcsin	Arcussinus, Umkehrfunktion von sin, Seite 134
arctan	Arcustangens, Umkehrfunktion von tan, Seite 134
$\lim_{x\to x_0+} f(x)$	rechtsseitige Grenzwert einer Funktion f, Seite 114
$\lim_{x\to x_0-} f(x)$	linksseitige Grenzwert einer Funktion f, Seite 114
$\lim_{x\to x_0} f(x)$	Grenzwert einer Funktion f für $x \to x_0$, Seite 112
pr_k	Projektionsfunktion eines Produkts auf k-ten Faktor, Seite 105
$\sqrt[n]{}$	n-te Wurzelfunktion, Seite 133
arccos	Arcuscosinus, Umkehrfunktion von cos, Seite 155
arcsin	Arcussinus, Umkehrfunktion von sin, Seite 155
arctan	Arcustangens, Umkehrfunktion von tan, Seite 156
exp	Exponentialfunktion zur Basis e, Seite 136

Index