Analysis 3

Andreas Kriegl

1. Februar 2005

Dies ist das Skriptum zu meiner gleichnamigen Vorlesung im Wintersemester 2004/2005. Darin wird die Integration von Funktionen in mehrdimensionalen Variablen behandelt.

Viele der dabei verwendeten Ideen sind uns bereits in der Analysis 1 und 2 begegnet, die natürlich Voraussetzung zum Verständnis dieser Vorlesung sind.

Im Kapitel (7) werden wir Funktionen zuerst über mehrdimensionale kompakte Intervalle und dann über allgemeine beschränkte (meßbare) Teilmengen des $\mathbb{R}^p$ integrieren und neben Existenzaussagen wie dem Lebesgue'schen Integrabilitätskriterium (7.1.7) und (7.2.7) Methoden zur Berechnung des Integrals behandeln, wobei vor allem der Satz (7.1.9) von Fubini und die Substitutionsformel (7.4.7) zu nennen sind. Wir werden auch die Existenz von glatten Partitionen der Eins in (7.5.1), den Satz (7.5.5) von Sard und den Brouwer'sche Fixpunktsatz (7.5.8) beweisen. Schließlich werden wir noch Integrale über offene (unbeschränkte) Teilmengen behandeln.

Im Kapitel (8) Teil werden wir den Hauptsatz (5.2.2) und (5.6.17) der Analysis zum Stokes'schen Integralsatz und dessen Spezialfälle verallgemeinern und Anwendungen dieser Resultate im Kapitel (9) geben.

Links auf (gif-)Animationen und solche auf interaktive (Java-)Animationen sind wieder durch nebenstehende Symbole gekennzeichnet:

Ich habe diejenigen Teile, die über diese Vorlesung hinausgehen, die ich auf Wunsch im Repetitorium behandelt habe und die für jene gedacht sind, die keine Angst haben zeitweilig ein wenig den Boden unter den Füßen zu verlieren und in höhere Sphären aufzusteigen, durch linkseitiges Symbol eines Hängegleiters gekennzeichnet. Insbesonders habe ich mich bemüht, an den adäquaten Stellen einige Ausblicke auf andere mathematische Gebiete zu geben, die eine natürliche Fortsetzung der hier vorgestellten Konzepte bilden.

EXAM Weitere Resultate oder Beweise, die zwar für die Vorlesung relevant sind, aber auf Grund ihrer Komplexität nicht zur Prüfung kommen, habe ich mit linksseitigem Symbol gekennzeichnet.

Sicherlich wird die aufmerksame LeserIn (Tipp-)Fehler finden können. Ich möchte folglich wie immer die Bitte aussprechen, mir diese mitzuteilen (geteiltes Leid ist halbes Leid). Ich werde diese in der redigierten Version natürlich berücksichtigen.

Andreas Kriegl, Wien im September 2004

Zahlreiche neue Korrekturen verdanke ich Helge Krüger. Auf seine Anregung hin habe ich auch in (8.3.13) eine Interpretation der Memotechniken, welche wir für Differentialquotienten verwendet haben, als exakte Rechnung mit 1-Formen hinzugefügt.

Andreas Kriegl, Wien im Jänner 2005

Inhaltsverzeichnis

7 Volumina

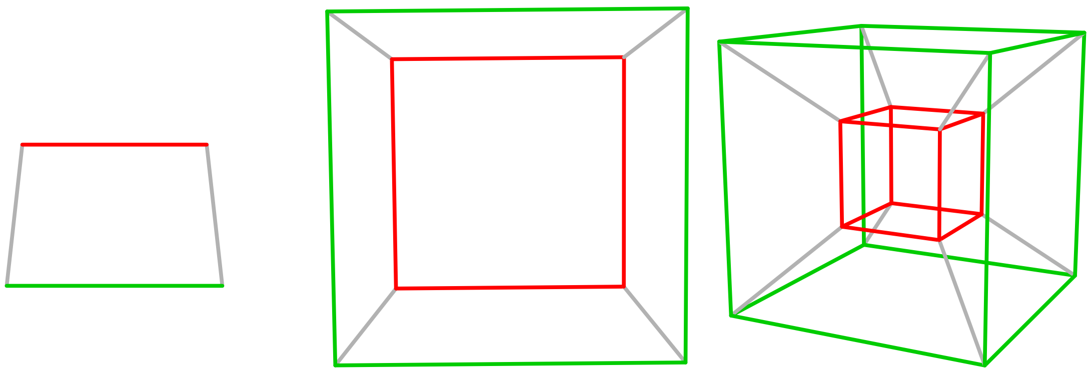
Wir wollen nun Volumina und höher-dimensionale Pendants studieren, d.h. Integrale von Funktionen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mit $p > 1$. Im 1-dimensionalen war dabei der Ausgangspunkt die Länge von Intervallen $I = [a, b]$ die wir als $|I| := (b-a)$ gesetzt haben. Darauf aufbauend war die Idee bei der Flächenberechnung für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diese durch Rechtecke zu approximieren und die Fläche eines Rechtecks $I_1 \times I_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ als $|I_1 \times I_2| := |I_1| \cdot |I_2| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$ (also Länge mal Breite) zu setzen. Ganz analog gehen wir nun auch im höherdimensionalen vor und definieren (induktiv) Volumina als Grundfläche mal Höhe.

7.1 Integration über kompakte Intervalle

7.1.1 Definition. Darboux-Integrierbarkeit.
Unter einem p-DIMENSIONALEN KOMPAKTEN INTERVALL (einem achsenparallelen Rechteck ($p = 2$), Quader ($p = 3$) oder Hyper-Quader ($p > 3$)) verstehen wir eine Menge der Form

$$I = I_1 \times \ldots \times I_p = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p : a_j \le x_j \le b_j \text{ für alle } 1 \le j \le p\}$$

mit $I_1 = [a_1, b_1]$,...,$I_p = [a_p, b_p]$.



Perspektivische Bilder von Rechteck, Quader und Hyper-Quader

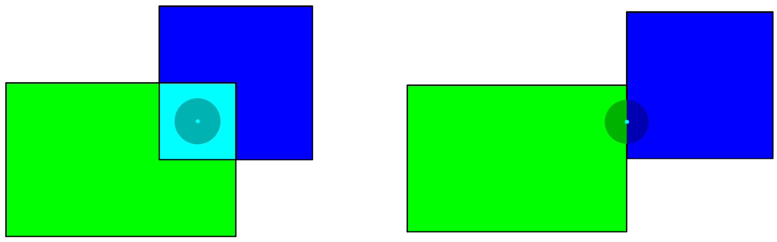
Sein (p-dimensionales) VOLUMEN definieren wir als

$$|I| := \prod_{j=1}^{n} |I_j| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Unter einer ZERLEGUNG EINES p-DIMENSIONALEN INTERVALLS Z von I verstehen wir eine endliche Familie von Teilintervallen J deren Vereinigung I ist, und die NICHT ÜBERLAPPENDE INTERVALLE sind, d.h. für je zwei Teilintervalle $J_1, J_2 \in I$ liegt kein Punkt gleichzeitig im Inneren von J_1 und im Inneren von J_2. Das INNERE EINER TEILMENGE X^o einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^p$ ist definiert als

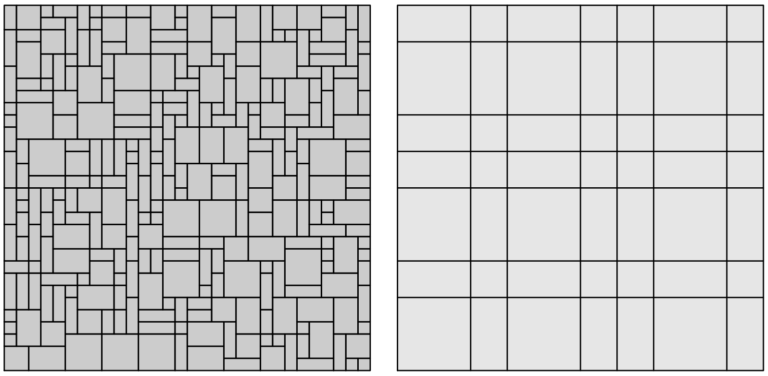
$$X^o := \{x \in \mathbb{R}^p : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq X\},$$

es ist die größte offene Teilmenge die in X enthalten ist. Für ein Intervall $I = \prod_{j=1}^{p} [a_j, b_j]$ ist das Innere $I^o = \prod_{j=1}^{p} (a_j, b_j)$.



überlappende und nicht überlappende Intervalle

Spezielle Zerlegungen eines Intervalls I sind sogenannte PRODUKTZERLEGUNGen, die dadurch erhalten werden, daß wir Zerlegungen Z_j von I_j für alle $j \in \{1, \ldots .p\}$ wählen und Z dann aus allen Intervallen $J_1 \times \ldots \times J_p$ mit $J_i \in Z_i$ besteht. Wir schreiben (etwas mißbräuchlich) $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_p$ in dieser Situation



Zerlegung und Produkt-Zerlegung

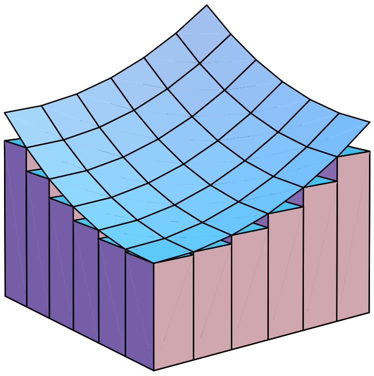
Es sei $f : \mathbb{R}^p \supseteq I \to \mathbb{R}$ beschränkt, wobei I ein p-dimensionales kompaktes Intervall ist. Analog zum 1-dimensionalen Fall definieren wir wie in (5.1.1) die OBERSUMME und UNTERSUMME der Funktion f bzgl. einer Zerlegung Z als

$$O(f, Z) := \sum_{J \in Z} \sup(f(J))\, |J|$$
$$U(f, Z) := \sum_{J \in Z} \inf(f(J))\, |J|$$

Das obere und das untere Integral von f ist dann als

$O(f) := \inf\{O(f, Z) : Z\}$ und $U(f) := \sup\{U(f, Z) : Z\}$

definiert, wobei Z durch alle Zerlegungen des Intervalls I läuft.



Eine Untersumme

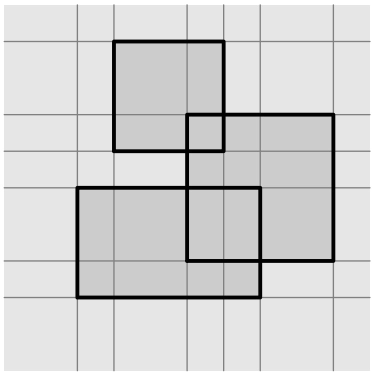
Die Funktion f heißt DARBOUX-INTEGRIERBAR und $\int_I f$ das DARBOUX-INTEGRAL von f (über I), falls oberes und unteres Integral übereinstimmen und man setzt dann

$$\int_I f(x_1, \ldots, x_p)\, d(x_1, \ldots, x_p) := \int_I f(x)\, dx := \int_I f := O(f) = U(f).$$

Eine Zerlegung Z' heißt VERFEINERUNG EINER ZERLEGUNG von Z falls jedes Teilintervall J' von Z' ganz in einem Teilintervall J von Z enthalten ist. In dieser Situation ist für $J \in Z$ dann $\{J' \in Z' : J' \subseteq J\}$ eine Zerlegung von J.

7.1.2 Lemma. Produktverfeinerung.
Zu jeder endliche Menge Z von Teilintervallen eines Intervalls I existiert ein Produktzerlegung Z', s.d. jedes $J \in Z$ durch $\{J' \in Z' : J' \subseteq J\}$ (Produkt-)zerlegt wird.

Ist insbesonders Z eine Zerlegung von I, so ist Z' eine Verfeinerung und $|I| = \sum_{J \in Z} |J|$.



Die Produktverfeinerung einer endlichen Menge von Intervallen

Beweis.

Wir führen den Beweis nur in dem Fall, wo Z keine degenerierten Teilintervalle (d.h. keine deren Seiten hat Länge 0)) enthält, da diese bei den Ober-, Unter- und auch den noch zu definierenden Riemannsummen keinen Beitrag liefern.

Es sei Z_j jene Zerlegung der j-ten Seite von I, welche als Teilungspunkte alle Randpunkte der j-ten Seiten J_j aller Intervalle $J = J_1 \times \ldots \times J_p$ von Z besitzt. Dann ist $Z' := Z_1 \times \ldots \times Z_p$ die gesuchte Produktzerlegung: Sei nämlich $x \in J \in Z$ (und J nicht degeneriert). Dann existiert ein $x' \in J$ s.d. für jedes $j \in \{1, \ldots, p\}$ zwischen x_j und x'_j keiner der endlich vielen Teilungspunkte von Z_j liegt und x_j selbst auch keiner ist. Es liegt x' somit im Inneren eines Intervalls $J' \in Z'$ und damit liegt auch $x \in J'$, d.h. J und J' sind überlappend.

Beh.: Wenn $J \in Z$ und $J' \in Z'$ überlappend sind, dann ist $J' \subseteq J$.
Andernfalls würde ein Randpunkt einer Seite von J zwischen den Randpunkten der entsprechenden Seite von J' liegen was nach Konstruktion von Z' unmöglich ist.

Sei nun Z eine Zerlegung und $J' = \prod_{j=1}^{p}[t_j, s_j]$ ein Intervall von $Z' = Z_1 \times \ldots \times Z_p$ und $x \in J'$ im Inneren von J'. Weil Z eine Zerlegung ist, existiert ein Intervall $J = J_1 \times \ldots \times J_p$ von Z mit $x \in J$ also auch im Inneren von J. Somit ist nach obiger Behauptung $J' \subseteq J$, also Z' eine Verfeinerung von Z.

Für Produktzerlegungen $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_n$ ist

$$\begin{aligned}\sum_{J\in Z} |J| &= \sum_{J_1\in Z_1} \cdots \sum_{J_p\in Z_p} |J_1 \times \ldots \times J_p| = \sum_{J_1\in Z_1} \cdots \sum_{J_p\in Z_p} |J_1| \cdot \cdots \cdot |J_p| \\ &= \sum_{J_1\in Z_1} |J_1| \cdot \cdots \cdot \sum_{J_p\in Z_p} |J_p| = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_j - a_j) = |I|.\end{aligned}$$

Für beliebige Zerlegungen Z existiert eine Produktzerlegung Z' als Verfeinerung. Jedes Intervall J von Z wird durch $\{J' \in Z' : J' \subseteq J\}$ produktzerlegt, also ist $|J| = \sum_{\substack{J'\in Z' \\ J'\subseteq J}} |J'|$ und somit ist

$$\sum_{J\in Z} |J| = \sum_{J'\in Z'} \sum_{J'\subseteq J} |J'| = \sum_{J'\in Z'} |J'| = |I|.$$

$\square$

Mit Hilfe des Lemmas können wir folgern, daß wir uns o.B.d.A. bei der Definition der Darboux-Integrierbarkeit auf Produktzerlegungen einschränken können:

7.1.3 Folgerung. Integrierbarkeit via Produktzerlegungen.
Eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^p \supseteq I \to \mathbb{R}$ ist genau dann D-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine (Produkt-)Zerlegung Z von I existiert mit $O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon$.

Beweis. Es sei Z eine Zerlegung und Z' eine Verfeinerung. Dann ist $U(f,Z) \le U(f,Z')$ und $O(f,Z') \le O(f,Z)$, denn für $J \in Z$ ist $\{J' \in Z' : J' \subseteq J\}$ eine Verfeinerung von J und somit $|J| = \sum_{\substack{J' \in Z' \\ J' \subseteq J}} |J'|$ nach (7.1.2),

also

$$\begin{aligned} U(f,Z') &= \sum_{J' \in Z'} \inf(f(J'))\,|J'| = \sum_{J \in Z} \sum_{J' \in Z'.J' \subseteq J} \inf(f(J'))\,|J'| \\ &\ge \sum_{J \in Z} \sum_{J' \in Z'.J' \subseteq J} \inf(f(J))\,|J'| = \sum_{J \in Z} \inf(f(J)) \sum_{J' \in Z'.J' \subseteq J} |J'| \\ &= \sum_{J \in Z} \inf(f(J))|J| = U(f,Z) \end{aligned}$$

und analog für O.

($\Rightarrow$) Zu $\varepsilon > 0$ existieren Zerlegungen Z_1 und Z_2 mit $\int f - \varepsilon < U(f,Z_1)$ und $O(f,Z_2) < \int f + \varepsilon$. Nach (7.1.2) existiert eine Produktzerlegung Z zu $\{J_1 \cap J_2 : J_1 \in Z_1, J_2 \in Z_2\}$ also eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Somit erhalten wir

$$\int f - \varepsilon < U(f,Z_1) \le U(f,Z) \le O(f,Z) \le O(f,Z_2) < \int f + \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Angenommen $\sup\{U(f,Z) : Z\} \ne \inf\{O(f,Z) : Z\}$. Da nach der vorigen Überlegung $U(f,Z_1) \le U(f,Z) \le O(f,Z) \le O(f,Z_2)$ für alle Z_1 und Z_2 ist, steht $\varepsilon := \inf\{O(f,Z) : Z\} - \sup\{U(f,Z) : Z\} > 0$ im Widerspruch zur Existenz einer (Produkt-)Zerlegung Z mit $\varepsilon > O(f,Z) - U(f,Z) \ge O(f) - U(f) = \varepsilon$. □

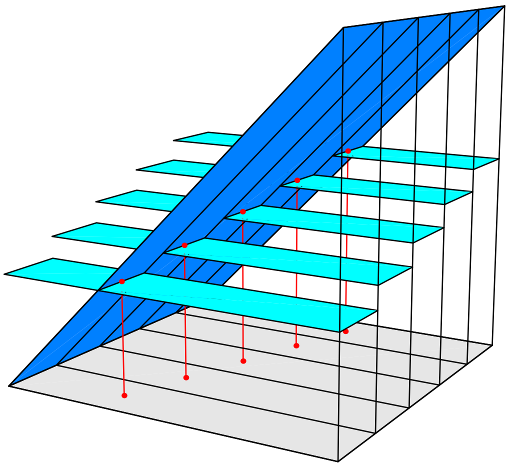
7.1.4 Definition. Riemann-Integrierbarkeit.
Es sei I ein p-dimensionales kompaktes Intervall. Unter einer PUNKTIERTEN ZERLEGUNG von I verstehen wir eine Zerlegung Z in Teilintervalle wie in (7.1.1) zusammen mit einem Zwischenvektor $\xi = (\xi_J)_{J \in Z}$ von Punkten $\xi_J \in J \subseteq \mathbb{R}^p$ für alle $J \in Z$. Die RIEMANN-SUMME einer Funktion $f : \mathbb{R}^p \supseteq I \to \mathbb{R}$ ist dann

$$S(f,Z,\xi) := \sum_{J \in Z} |J| \cdot f(\xi_J).$$

Das Feinheitsmaß einer Zerlegung Z definieren wir als

$$|Z| := \max\Big\{|J_j| : J = J_1 \times \ldots \times J_p \in Z, 1 \le j \le p\Big\}.$$

Beachte, daß dies nicht $\max\{|J| : J \in Z\}$ ist. Das ist auch gut so, denn das Volumen $|J|$ der Teilintervalle kann sehr wohl gegen 0 gehen, ohne daß wir erwarten dürfen, daß die zugehörigen Riemann-Summen das Integral approximieren: Sei z.B. $f(x_1,x_2) := x_1$ und betrachte für $n \ge 1$ die Produktzerlegungen $Z^n := \{0,1\} \times \{\frac{j}{n} : 0 \le j \le n\}$. Die Flächen ihrer Intervalle $J^n_j := [0,1] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ sind $|J^n_j| = \frac{1}{n} \to 0$ und die Riemannsummen $S(f,Z^n,\xi^n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi^n_j)$ was je nach Wahl des Zwischenvektors jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann.



Beliebige Riemannsummen zwischen 0 und 1/2

Wenn wir nun wie in (5.6.3) den Raum aller Zerlegungen zusammen mit einer unendlich feinen Zerlegung ∞ mit der Metrik $d(Z,Z') := |Z| + |Z'|$ falls $Z \ne Z'$ versehen, so können wir die Frage nach der Existenz von $\lim_{|Z|\to 0} S(f,Z,\xi)$ stellen.

Wir nennen f Riemann-integrierbar falls der Limes

$$\lim_{|Z|\to 0} S(f,Z,\xi)$$

existiert. Der Wert dieses Limes heißt dann Riemann-Integral von f über I.

Beachte, daß zwar Verfeinerungen auch kleineres Feinheitsmaß haben, aber umgekehrt eine in dem Sinn feinere Zerlegung, daß ihr Feinheitsmaß kleiner ist, nicht eine Verfeinerung zu sein braucht!

Es gilt nun das Pendant zu (5.6.7) zusammen mit (5.6.5) mit kaum modifizierten Beweisen:

7.1.5 Proposition. Riemann- versus Darboux-Integrierbarkeit.
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^p \supseteq I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt und Darboux-integrierbar ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Beh.: f ist beschränkt.
Bew. wie in (5.6.5) (Beweisidee: Durch passende Wahl des Zwischenvektors für ein Teilintervall, wo f unbeschränkt ist, kann die Riemannsumme beliebig groß gemacht werden): Andernfalls gibt es für jede Zerlegung Z mindestens ein Intervall I_0, auf welchem f nicht beschränkt ist. Dann sind auch die Riemann-Summen $\xi \mapsto S(f,Z,\xi)$ unbeschränkt (und folglich nicht konvergent), denn dazu wähle zu $G>0$ die ξ_I für $I \neq I_0$ beliebig und ξ_{I_0}, so daß

$$\begin{aligned} &|I_0|\cdot|f(\xi_{I_0})| \geq G + \sum_{I\neq I_0} |I|\cdot|f(\xi_I)| \\ \Rightarrow\qquad &|S(f,Z,\xi)| = \Big|\sum_I |I|\,f(\xi_I)\Big| \geq |I_0|\cdot|f(\xi_{I_0})| - \sum_{I\neq I_0}|I|\cdot|f(\xi_I)| \geq G. \end{aligned}$$

Beh.: f ist D-integrierbar.
Bew. wie in (5.6.7): Nach Voraussetzung existiert zu $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, s.d. $|S(f,Z,\xi)-\int f| < \varepsilon$ aus $d((Z,\xi),\infty)<\delta$ folgt. Da (Produkt-)Zerlegungen Z mit $|Z|<\delta$ existieren (man teile die Seiten von J in hinreichend viele gleich große Intervalle) ist f $D-integrierbar$ wegen (7.1.3).

($\Leftarrow$) Beweisidee: Zerlegungen mit hinreichend kleinen Feinheitsnmaß sind bis auf Intervalle mit kleinem Gesamtvolumen Verfeinerungen einer gegebenen Zerlegung.
Wie in (5.6.6) gilt für Verfeinerungen Z' von Zerlegungen Z eines Intervalls I und beschränktes $f: I\to\mathbb{R}$ die Abschätzung

$$|S(f,Z,\xi)-S(f,Z',\xi')| \leq |I|\cdot\Omega_f(Z),$$

wobei $\Omega_f(Z) := \max\{\Omega(f|_J) : J\in Z\}$.

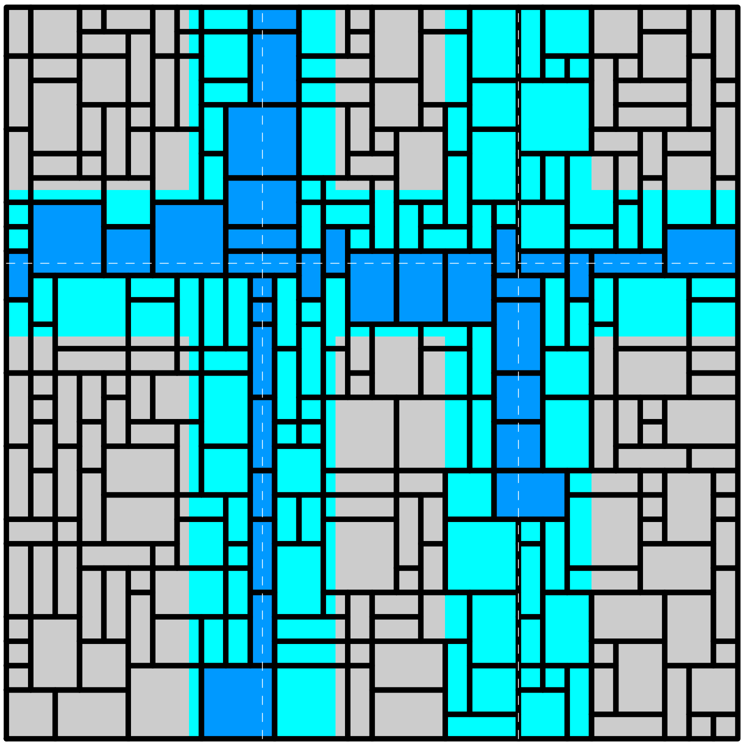
Für $\varepsilon>0$ sei Z_0 eine (Produkt-)Zerlegung wie in (7.1.3). Wir müssen ein $\delta>0$ finden, s.d. für jede beliebige punktierte Zerlegung Z_1 mit $|Z_1|<\delta$ die Ungleichung $|S(f,Z_1)-\int_I f| < 2\,\varepsilon$ gilt. Sei Z_{01} die gemeinsame Verfeinerung $\{J_0\cap J_1 : J_0\in Z_0, J_1\in Z_1\}$ von Z_0 und Z_1. Sei ξ_1 der Zwischenvektor von Z_1 und ξ_{01} ein Zwischenvektor von Z_{01} der für alle $J\in Z_1$ die durch Z_0 nicht unterteilt werden mit ξ_1 übereinstimmt. Dann ist nach Voraussetzung $|S(f,Z_{01},\xi_{01})-\int_I f| < \varepsilon$. Bleibt zu zeigen, daß $|S(f,Z_1,\xi_1)-S(f,Z_{01},\xi_{01})| < \varepsilon$ ist. Dazu müssen wir nur jene Intervalle $J\in Z_1$ betrachten wie durch Z_0 zerteilt werden, d.h. von einer Hyperebene durch einen Teilungspunkt von Z_0 auf einer Kante von I. Nach obiger Abschätzung ist für jedes solche Intervall

$$|S(f|_J,Z_1,\xi_1)-S(f|_J,Z_{01},\xi_{01})| \leq |J|\,\Omega_{f|_J}(Z_1) \leq |J|\cdot\Omega_(f) \leq |J|\,2\,\|f\|_\infty.$$

Das Gesamtvolumen aller Intervalle J_1 von Z_1 die durch eine Hyperebene durch einen Teilungspunkt der j-ten Kante geteilt werden ist höchstens $|I_1|\cdot\ldots|I_{j-1}|\cdot\delta\cdot|I_{j+1}|\cdot\dots\cdot|I_p|$. Wenn also N_i die Anzahl der Teilungspunkte von Z_0 auf der i-te Kante bezeichnet so ist

$$|S(f,Z_1,\xi_1)-S(f,Z_{01},\xi_{01})| \leq \delta\,\underbrace{\Big(\sum_{j=1}^p N_j\cdot|I_1|\cdot\ldots|I_{j-1}|\cdot|I_{j+1}|\cdot\dots\cdot|I_p|\Big)}_{=:N}\,\Omega(f) < \varepsilon$$

falls wir $\delta < \frac{\varepsilon}{N\,\Omega(f)}$ setzen.



Die zerteilten Teilintervalle der Zerlegung Z_1

□

Wir werden in Hinkunft also folglich nur mehr von Integrierbarkeit und Integral sprechen, wenn wir Darboux-Integrierbarkeit=Riemann-Integrierbarkeit oder D-Integral=R-Integral meinen. Man sollte dabei allerdings beachten, daß es sehr wohl nicht äquivalente Integrationskonzepte gibt, wobei vor allem Lebesgue- und Kurzweil-Henstock-Integrierbarkeit zu nennen sind.

7.1.6 Elementares über das Integral Für (R-)Integrierbarkeit zeigt man leicht wie im 1-dimensionalen die folgenden Resultate, denn für die Riemann-Summen gilt:

- $S(f+\lambda\, g, Z, \xi) = S(f, Z, \xi) + \lambda\, S(g, Z, \xi)$.
- $S(f, Z, \xi) \leq S(g, Z, \xi) \Leftarrow f \leq g$.
- $S(f, Z, \xi) = S(g, Z, \xi)$ falls $f(\xi_i) = g(\xi_i)$ für alle i.

Proposition. Elementare Eigenschaften des Integrals.

1. *f, g integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f + \lambda g$ integrierbar, vgl. mit (5.1.7).*
2. *f, g integrierbar, $f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$, vgl. mit (5.1.10).*
3. *f, g integrierbar, $\{x : f(x) = g(x)\}$ dicht in $I \Rightarrow \int_I f = \int_I g$, vgl. mit Aufgabe* $\boxed{\mathbf{5.3}}$.

Beweis. (1) und (2) folgt nun durch Grenzwertbildung.

(3) Hiezu wähle man bei gegebener Zerlegung Z den Zwischenvektor ξ in der dichten Teilmenge $\{x : f(x) = g(x)\}$. □

7.1.7 Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium.
Eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem mehrdimensionalen Intervall I ist genau dann integrierbar, wenn f fast überall stetig auf I ist.

Analog zu (5.1.4) nenne wir eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^p$ eine LEBESGUE-NULLMENGE, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele p-dimensionale Intervalle $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existieren, s.d. $M \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ und $\sum_{i=0}^\infty |I_i| < \varepsilon$ ist, d.h. M kann durch abzählbar viele Intervalle mit Gesamtvolumen kleiner als ε überdeckt werden.

Jede (achsenparallele) Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^p$ ist eine Lebesgue-Nullmenge, denn sei o.B.d.A. $H := \mathbb{R}^{p-1} \times 0$ und $\varepsilon > 0$, dann überdecken die Intervalle $I_n := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R} : \|x\|_\infty \le n,\ |t| \le \frac{1}{2^n n^{p-1}}\}$ mit Gesamtvolumen $< \varepsilon$ die Menge H.

Beweis. Der Beweis verläuft analog wie in (5.1.4).

($\Rightarrow$) Beweisidee: Da Ober- und Untersumme nahe beieinander liegen müssen diejenigen Teilungsintervalle wo f stark oszilliert kleines Volumen haben. Nach (3.2.9) ist $\Delta(f) := \{x : f \text{ ist unstetig bei } x\} = \bigcup_{r>0} \Delta_r$, wo $\Delta_r := \{x : \omega_f(x) > r\}$ und $\omega_f(x) := \inf_{U \ni x} \Omega_f(U)$ mit $\Omega_f(U) := \sup(f(U)) - \inf(f(U))$. Es genügt also z.z. , daß Δ_r eine L-Nullmenge ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ und Z eine Zerlegung mit $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon r$ nach (7.1.1). Die Vereinigung H all jener Hyperebenen, die durch Teilungspunkte von Z gehen, ist eine L-Nullmenge. Also genügt es zu zeigen, daß $\Delta_r \setminus H$ eine solche ist. Es sei $Z_0 := \{J \in Z : \emptyset \ne J \cap (\Delta_r \setminus H) = J \cap \Delta_r \cap (I \setminus H) = (J \setminus H) \cap \Delta_r\}$. Für $J \in Z_0$ existiert somit ein $\exists \xi \in (J \setminus H) \cap \Delta_r$ und somit eine Umgebung U von ξ mit

$$r \le \omega_f(\xi) \le \Omega_f(U) \le \Omega_f(J) = \sup(f(J)) - \inf(f(J)).$$

Also ist

$$r \sum_{J\in Z_0} |J| \le \sum_{J \in Z_0} \Big(\sup(f(J)) - \inf(f(J))\Big)\, |J| \le O(f,Z) - U(f,Z) < r\varepsilon$$

und damit

$$\sum_{J\in Z_0} |J| < \varepsilon$$

also $\Delta_r \setminus H$ eine L-Nullmenge.

($\Leftarrow$) Beweisidee: Diejenigen Teilintervalle, wo Unter- und Obersumme sich stark unterscheiden, d.h. f stark oszilliert, sind nach Voraussetzung klein. Für $\varepsilon > 0$ sei $\Delta(f) \subseteq \bigcup_k J_k$ mit $\sum_k |J_k| < \varepsilon$ und o.B.d.A. J_k offen. Für $\xi \notin \Delta(f)$ ist $\omega_f(\xi) = 0$, d.h. $\exists U_\xi \ni \xi$ mit $\Omega_f(U_\xi) < \varepsilon$. Also ist $\mathcal{U} := \{J_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{U_\xi : \xi \notin \Delta(f)\}$ eine offene Überdeckung. Nach (5.1.4a) existiert eine Lebesgue-Zahl und somit eine (äquidistante) Produktzerlegung Z mit $J \in Z \Rightarrow J \subseteq U$ für ein $U \in \mathcal{U}$. Dann ist

$$\begin{aligned} O(Z) - U(Z) &= \sum_J \Big(\sup(f(J)) - \inf(f(J))\Big)\, |J| \le \sum_{J:\ \exists k: J \subseteq J_k} + \sum_{J:\ \exists \xi: J \subseteq U_\xi} \\ &\le 2\varepsilon \|f\|_\infty + \sum_{J:\ \exists \xi: J\subseteq U_\xi} \varepsilon |J| \le (2\|f\|_\infty + |I|)\, \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f integrierbar nach (7.1.3). □

Wie im 1-dimensonalen in (5.1.5) hat das Lebesgue'sche Integrabilitätskriterium folgende einfache Konsequenzen mit gleichem Beweis:

7.1.8 Folgerung. Stabilität der integrierbaren Funktionen.

1. *f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar.*
2. *$g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, $f : g(I) \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt $\Rightarrow$ $f \circ g$ integrierbar.*
3. *f, g integrierbar $\Rightarrow$ $|f|$, f^+, f^-, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f \cdot g$ integrierbar und $\left|\int_I f\right| \le \int_I |f|$. Ist zusätzlich $\gamma := \inf\{|g(x)| : x \in I\} > 0$ so ist f/g integrierbar.*

Beweis. (1) und (2) folgt direkt aus (7.1.7). (3) Aus (2) folgt $|f| := |\_| \circ f$ integrierbar. Wegen $\max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ und $\min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ sind $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ integrierbar und somit auch $f^+ := \max\{f,0\}$ und $f^- := -\min\{f,0\}$. Wegen $\Delta(f\cdot g) \subseteq \Delta(f) \cup \Delta(g)$ ist $f \cdot g$ integrierbar und wegen $\Delta(1/g) \subseteq \Delta(g)$ und wegen $g(x) \geq \gamma \Rightarrow 1/g$ ist beschränkt ist auch f/g integrierbar. □

7.1.9 Iterierte Integrale Das folgende zentrale Resultat erlaubt uns schließlich (unter passenden Voraussetzungen) mehrdimensionale Integrale rekursiv durch 1-dimensionale zu berechnen.

Zuerst eine Motivation: Es sei $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ integrierbar und Z_j Zerlegungen von I_j mit Zwischenvektoren ξ_j für $j \in \{1,2\}$. Dann ist $Z_1 \times Z_2 := \{J_1 \times J_2 : J_i \in Z_i \text{ für } i \in \{1,2\}\}$ eine Zerlegung von $I_1 \times I_2$ mit Zwischenvektor $\xi_1 \times \xi_2 = \{(\xi_1)_{J-1}, (\xi_2)_{J_2}) : J_1 \in Z_1, J_2 \in Z_2\}$ und

$$\begin{aligned}
\int_{I_1\times I_2} f \approx S(f, Z_1 \times Z_2, \xi_1 \times \xi_2) &= \sum_{J_1\times J_2 \in Z_1 \times Z_2} f((\xi_1 \times \xi_2)_{J_1\times J_2})\,|J_1 \times J_2| \\
&= \sum_{J_1 \in Z_1}\left(\sum_{J_2\in Z_2} f((\xi_1)_{J_1}, (\xi_2)_{J_2})\,|J_2|\right)|J_1| \\
&= \sum_{J_1\in Z_1} S(x_2 \mapsto f(\xi_1)_{J_1}, x_2), Z_2, \xi_2)\,|J_1| \\
&\approx \sum_{J_1\in Z_1} \int_{I_2} f((\xi_1)_{J_1}, x_2)\,dx_2\,|J_1| = S(x_1 \mapsto \int_{I_2} f(x_1,x_2)\,dx_2, Z_1, \xi_1) \\
&\approx \int_{I_1}\Big(\int_{I_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\Big)\,dx_1 = \int_{I_1}\int_{I_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1.
\end{aligned}$$

Die daraus resultierende Idee ist, daß Riemann- oder Darboux'sche Ober- und Untersummen näherungsweise rekursiv berechnet werden können und somit gleiches auch für das Integral gelten sollte.

Satz von Fubini.
Es seien $I_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $I_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ zwei kompakte Intervalle und $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ integrierbar. Für $x_1 \in I_1$ sei $f_{x_1} : I_2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2)$.

Dann sind $x_1 \mapsto U(f_{x_1})$ und $x_1 \mapsto O(f_{x_1})$ integrierbar auf I_1 und es gilt:

$$\int_{I_1\times I_2} f(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2) = \int_{I_1} U(f_{x_1})\,dx_1 = \int_{I_1} O(f_{x_1})\,dx_1.$$

Beweis. Es sei $g(x_1) := U(f_{x_1})$ (oder $O(f_{x_1})$) und Z_1 bzw. Z_2 Zerlegungen von I_1 bzw. I_2. Dann ist $U(f_{x_1}, Z_2) \leq g(x_1) \leq O(f_{x_1}, Z_2)$ und somit

$$\begin{aligned}
O(g, Z_1) &= \sum_{J_1\in Z_1} \sup(g(J_1))\,|J_1| = \sum_{J_1\in Z_1} \sup\{g(x_1) : x_1 \in J_1\}\,|J_1| \\
&\leq \sum_{J_1\in Z_1} \sup\Big\{O(f_{x_1}, Z_2) : x_1 \in J_1\Big\}\,|J_1| \\
&= \sum_{J_1\in Z_1} \sup\Big\{\sum_{J_2\in Z_2} \sup(f(x_1, J_2))\,|J_2| : x_1 \in J_1\Big\}\,|J_1| \\
&\leq \sum_{J_1\in Z_1}\sum_{J_2\in Z_2} \sup\Big\{\sup(f(x_1,J_2)) : x_1 \in J_1\Big\}\,|J_2|\,|J_1| \\
&= \sum_{J_1\in Z_1}\sum_{J_2\in Z_2} \sup(f(J_1\times J_2))\,|J_2|\,|J_1| = O(f, Z_1 \times Z_2)
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
U(g, Z_1) &= \sum_{J_1 \in Z_1} \inf(g(J_1))\,|J_1| = \sum_{J_1 \in Z_1} \inf\Big\{g(x_1) : x_1 \in J_1\Big\}\,|J_1| \\
&\geq \sum_{J_1 \in Z_1} \inf\Big\{U(f_{x_1}, Z_2) : x_1 \in J_1\Big\}\,|J_1| \\
&= \sum_{J_1 \in Z_1} \inf\Big\{\sum_{J_2 \in Z_2} \inf(f(x_1, J_2))\,|J_2| : x_1 \in J_1\Big\}\,|J_1| \\
&\geq \sum_{J_1 \in Z_1} \sum_{J_2 \in Z_2} \inf\Big\{\inf(f(x_1, J_2)) : x_1 \in J_1\Big\}\,|J_2|\,|J_1| \\
&= \sum_{J_1 \in Z_1} \sum_{J_2 \in Z_2} \inf(f(J_1 \times J_2))\,|J_2|\,|J_1| = U(f, Z_1 \times Z_2).
\end{aligned}$$

Da f integrierbar ist, existiert nach (7.1.3) zu $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z_1 \times Z_2$ mit $\varepsilon > O(f, Z_1 \times Z_2) - U(f, Z_1 \times Z_2) \geq O(g, Z_1) - U(g, Z_1)$, also ist g integrierbar und

$$\int_{I_1 \times I_2} f = \int_{I_1} g. \quad \square$$

7.1.10 Folgerung. Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge.
Es seien $I_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $I_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ zwei kompakte Intervalle und $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ integrierbar. Weiters sei $\forall x_1 \in I_1 : x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ auf I_2 integrierbar. Dann ist

$$\int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 = \int_{I_1 \times I_2} f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2).$$

Ist zusätzlich auch $\forall x_2 \in I_2 : x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ auf I_1 integrierbar. so ist

$$\int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 = \int_{I_1 \times I_2} f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2. \quad \square$$

7.1.11 Folgerung. Rekursive Berechnung des Integrals stetiger Funktionen.

$$f : I := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \Rightarrow \int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_p}^{b_p} f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_p \ldots dx_1. \quad \square$$

7.1.11a Bemerkung.
Wir haben in Aufgabe (5.26) die Formel $\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$ für das Volumen eines Körpers der bei Rotation einer Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ um die x-Achse entsteht hergeleitet. Dies ist ein Spezialfall des Satzes von Fubini, denn dieser Körper wird durch $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ beschrieben. Sein Volumen ist also

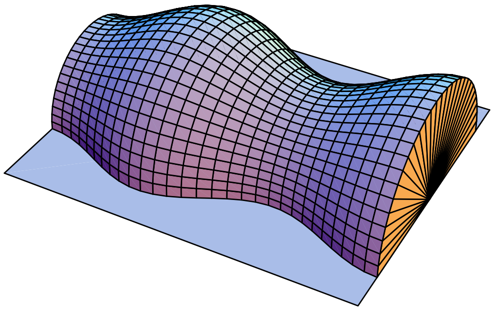
$$2 \int_{[a,b] \times [-\|f\|_\infty, +\|f\|_\infty]} g(x, y)\, d(x, y),$$

mit

$$g(x, y) := \begin{cases} \sqrt{f(x)^2 - y^2} & \text{für } y^2 \leq f(x)^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Satz von Fubini ist dies

$$\begin{aligned}
2 \int_a^b \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} g(x, y)\, dy\, dx &= 2 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \sqrt{f(x)^2 - y^2}\, dy\, dx \\
&= 2 \int_a^b f(x)^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - v^2}\, dv\, dx = 2 \int_a^b f(x)^2 \frac{\pi}{2}\, dx = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.
\end{aligned}$$

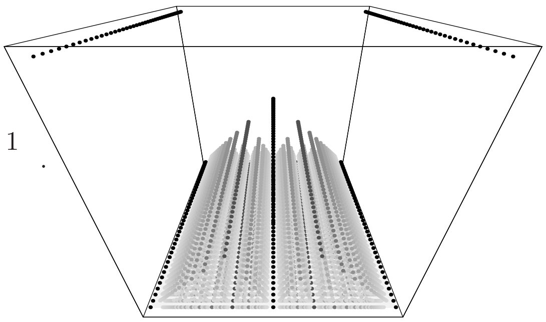


7.1.13 Beispiel.
Wir verwenden den Satz von Fubini um für $I := [0,\pi/2]^2$ folgendes Integral zu berechnen:

$$\begin{aligned}\int_I \sin(x+y)\,d(x,y) &\overset{(7.1.11)}{=\!=} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy\,dx\\ &= \int_0^{\pi/2} -\cos(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\pi/2} dx\\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x)-\cos(x+\pi/2)\,dx\\ &= \sin(x)-\sin(x+\pi/2)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}\\ &= \sin(\pi/2)-\sin(\pi)-\sin(0)+\sin(\pi/2)=2\end{aligned}$$

Daß die Voraussetzung über die Existenz des inneren Integrals in (7.1.10) wirklich nötig ist, zeigt folgendes

7.1.12 Gegenbeispiel.



Es sei $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } y\in\mathbb{Q},\ x=\frac{p}{q} \text{ mit } \operatorname{ggT}(p,q)=1\\ 0 & \text{andernfalls}\end{cases}.$$

Dann ist f integrierbar nach (7.1.7), denn $\Delta(f) = (\mathbb{Q}\cap[0,1])\times[0,1]$ ist eine Nullmenge. Weiters ist

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = 0 \text{ für alle } y\in[0,1]$$

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Jedoch gilt:

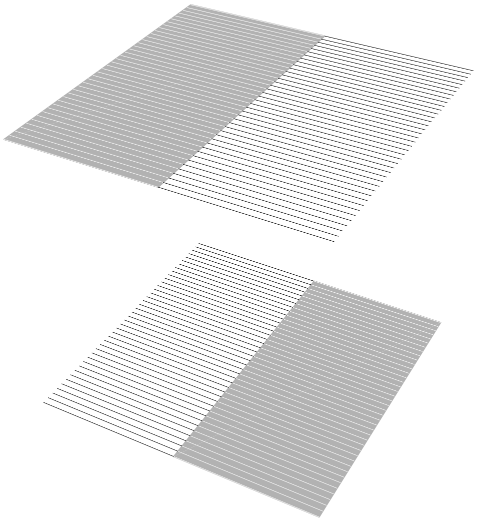
$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{für alle } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\\ \text{existiert nicht} & \text{für alle } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1].\end{cases}$$

Umgekehrt können wir aus der Existenz des iterierten Integrals nicht auf die Integrierbarkeit von f schließen. Dies wird gezeigt durch folgendes

Gegenbeispiel.

Es sei

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls entweder } y \in \mathbb{Q} \text{ oder } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ & \qquad \text{(Ausschließendes Oder)} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$



Offensichtlich existiert $\int_0^1 f(x,y)\,dx$ für alle $y \in [0,1]$ und ist

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{1/2}^1 1 = \frac{1}{2} & \text{für } y \in \mathbb{Q} \\ \int_0^{1/2} 1 = \frac{1}{2} & \text{für } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Also existiert $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}$. Hingegen ist $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ nicht integrierbar, denn $\Delta(f) = [0,1]^2$.

Für weitere Beispiele siehe (7.3.4).

7.2 Integration über meßbare Mengen

7.2.0 Topologische Operationen.
Wir wollen nun Funktionen über allgemeinere Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^p$ als Intervalle integrieren. Dazu benötigen wir einige topologische Konzepte für solche Teilmengen. Es sei dazu X ein metrischer Raum (in der Topologie behandelt man dies für allgemeinere Räume als es die metrischen sind), $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Mit $\sim A := X \setminus A$ bezeichnen wir das Komplement von A in X. Dann versteht man unter

- dem Inneren einer Teilmenge A^o von A die größte offene Teilmenge von A;
- dem Abschluss einer Teilmenge $\overline{A}$ von A die kleinste abgeschlossene Obermenge von A;
- dem Rand einer Teilmenge ∂A (oder auch engl: the boundary $\mathrm{bd}(A)$) die Differenz $\partial A := \overline{A} \setminus A^o$.

Es gilt folgendes:

- A ist genau dann abgeschlossen, wenn $\sim A$ offen ist, siehe Aufgabe $\boxed{\mathbf{3.36}}$.
- $A^o = \{x \in X : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq A\}$:
  Es ist $B := \{x \in X : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq A\}$ offen, denn zu $x \in B$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A$ also gilt wegen der Dreiecksungleichung $U_{\varepsilon/2}(y) \subseteq U_\varepsilon(x) \subseteq A$ für alle $y \in U_\varepsilon(x)$, d.h. $U_{\varepsilon/2}(x) \subseteq B$. Sei nun $B' \subseteq A$ offen, dann ist $B' \subseteq B$, also B die größte offene Teilmenge von A, d.h. $B = A^o$, denn $x \in B' \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \subseteq B \subseteq A \Rightarrow x \in B$.
- $\overline{A} = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$:
  Übergang zu Komplement macht aus offen abgeschlossen, aus Teilmenge Obermenge und aus größte kleinste, also ist $\sim \overline{A} = (\sim A)^o$, d.h.

  $$\overline{A} = \sim(\sim A)^o = \{x : \not\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq \sim A\} = \{x : \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \not\subseteq \sim A\} = \{x : \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

- $\partial A = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap \sim A\}$:
  In der Tat ist

$$\begin{aligned}\partial A &= \overline{A} \sim A^o = \overline{A} \cap (\sim A^o) = \overline{A} \cap \overline{\sim A}\\ &= \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } \forall \varepsilon > 0 U_\varepsilon(x) \cap \sim A \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

- Es ist $A^o \subseteq A \subseteq \overline{A} = A^o \sqcup \partial A$.

7.2.1 Definition. Integration über beschränkte Mengen.
Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem metrischen Raum X. Unter dem TRÄGER von f versteht man die Menge jener Punkte $x \in X$, die keine Umgebung besitzen auf welcher f gleich 0 ist, also

$$\operatorname{trg}(f) := \{x \in X : \nexists\, \varepsilon > 0 : f|_{U_\varepsilon(x)} = 0\}.$$

Dies ist der Abschluß der Teilmenge $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$, denn genau dann existiert kein $\varepsilon > 0$ mit $f|_{U_\varepsilon(x)} = 0$, wenn $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$, d.h. x liegt im Abschluß von $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{x : f(x) \neq 0\}$.

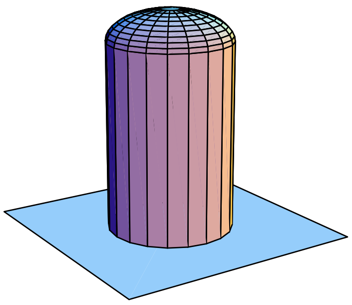
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger (da dieser immer abgeschlossen ist, ist dies zu seiner Beschränktheit äquivalent) heißt INTEGRIERBARE FUNKTION MIT KOMPAKTEN TRÄGER, falls ein kompaktes Intervall $I \supseteq \operatorname{trg}(f)$ existiert, s.d. $f|_I$ integrierbar ist und man schreibt $\int_{\mathbb{R}^p} f := \int_I f$. Diese Definition hängt nicht von der Wahl des Intervalls I ab, denn wenn I_1 und I_2 zwei Intervalle mit $\operatorname{trg}(f) \subseteq I_i$ sind, dann ist auch $I := I_1 \cap I_2$ ein solches Intervall und $\int_I f = \int_{I_i} f$, denn $f|_{I_i \setminus I} = 0$, wegen $\operatorname{trg}(f) \subseteq I$.

Sei nun $B \subseteq \mathbb{R}^p$ beschränkt. Dann heißt $f : B \to \mathbb{R}$ RIEMANN-INTEGRIERBAR (auf B) :⇔ die Fortsetzung $\tilde{f}^B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ von f, die durch

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

definiert ist Riemann-integrierbar. Man setzt

$$\int_B f := \int_{\mathbb{R}^p} \tilde{f}^B.$$



Integral über beschränkte Teilmenge

Eine beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt JORDAN-MESSBAR :⇔ die konstante Funktion $1 : B \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar über B, d.h. die charakteristische Funktion χ_B ist Riemann-integrierbar über $\mathbb{R}^p$. Das (p-dimensionale) VOLUMEN oder auch MASS einer J-meßbaren Menge definiert man als $|B| := \int_B 1$.

Beachte, daß diese Definition wesentlich von p abhängt: So ist das (1-dimensionale) Volumen $|B|$ von $B := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ zwar 1 aber für $B \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ aufgefaßt als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist das (2-dimensionale) Volumen $|B| = 0$.

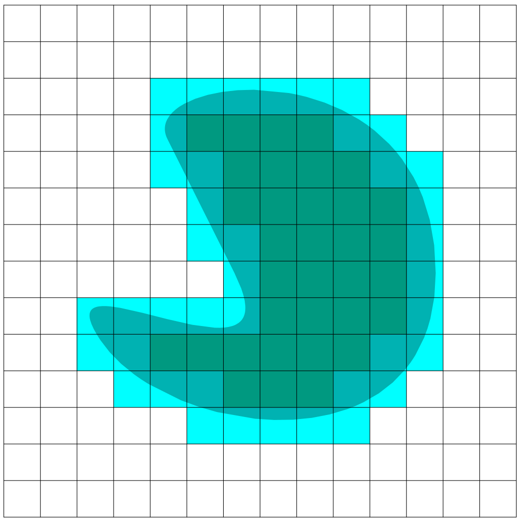
Beachte weiters, daß die Menge der Unstetigkeitspunkte $\Delta(\chi_B)$ der charakterischen Funktion χ_B von B gerade der RAND ∂B von B ist, denn genau für Punkte nicht im Rand ist χ_B lokal konstant (gleich 0 oder gleich 1).

Für die ober- und unter-Summen von χ_B erhalten wir (für jede Zerlegung Z eines beliebigen kompakten Intervalls welches B enthält):

$$O(\chi_B, Z) = \sum_{J\in Z} |J| \sup(\chi_B(J)) = \sum_{J\in Z, J\cap B\neq\emptyset} |J|$$

$$U(\chi_B, Z) = \sum_{J\in Z} |J| \inf(\chi_B(J)) = \sum_{J\in Z, J\subseteq B} |J|.$$

Entsprechend nennt man $O(\chi_B)$ den ÄUSSEREN INHALT von B und $U(\chi_B)$ den INNEREN INHALT von B. Eine beschränkte Menge ist somit genau dann meßbar, wenn äußerer und innerer Inhalt gleich sind.



Eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt JORDAN'SCHE-NULLMENGE (kurz: J-Nullmenge) $:\Leftrightarrow$ B ist J-meßbar und $|B| = 0$.

7.2.2 Proposition. Elementares über Nullmengen.
Für beschränkte $B \subseteq \mathbb{R}^p$ gilt:

1. *B ist J-Nullmenge $\Leftrightarrow$ $O(\chi_B) = 0$.*
2. *B ist J-Nullmenge $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists I_j$ Intervalle mit $B \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_j$ und $\sum_{j=1}^n |I_j| < \varepsilon$.*
3. *Endliche Mengen sind J-Nullmengen sowie endliche Vereinigungen von J-Nullmengen und alle Teilmengen von J-Nullmengen sind J-Nullmengen.*
4. *Der Abschluß jeder J-Nullmenge ist eine J-Nullmenge.*
5. *B J-Nullmenge $\Rightarrow$ B Nullmenge.*
6. *B kompakte Nullmenge $\Rightarrow$ B J-Nullmenge.*
7. *B ist J-Nullmenge $\Leftrightarrow$ der Abschluß von B ist eine beschränkte(=kompakte) Nullmenge.*

Lebesgue-Nullmenge zu sein vererbt sich nicht auf den Abschluß wie $\mathbb{Q}$ zeigt.

Abzählbare Mengen sind nicht notwenig J-Nullmengen, wie das Beispiel $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ zeigt: Sonst wäre auch $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ eine J-Nullmenge.

Beweis. (1) Da $0 \leq U(\chi_B) \leq O(\chi_B)$ ist B genau dann J-Nullmenge, wenn der äußere Inhalt $O(\chi_B) = \inf_Z O(\chi_B, Z)$ gleich 0 ist.

(2) Es ist $O(\chi_B) = 0$ genau dann, wenn $\forall\varepsilon > 0\ \exists Z$ Zerlegung mit $\sum_{I\cap B\neq\emptyset} |I| \leq \varepsilon$. Nach (7.1.2) ist dies genau dann der Fall, wenn endlich viele Intervalle $J_1, \dots, J_n$ existieren mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n J_i$ und $\sum_{i=1}^n |J_i| \leq \varepsilon$.

(3) und (5) sind offensichtlich gültig.

(4) Für den Abschluß verwenden wir, daß mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ auch $\overline{B} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n I_i} \overset{!}{=} \bigcup_{i=1}^n I_i$ gilt.

(6) Sei nun B eine kompakte Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Dann existieren Intervalle I_j mit $B \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ und $\sum_{j=0}^\infty |I_j| \leq \varepsilon/2$. Ersetzen wir nun I_j durch die offenen Intervalle $I'_j := \{x : d(x, I_j) < \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} \subseteq I_j$, so ist $|I'_j| \leq |I_j| + \frac{2\varepsilon}{2^{j+2}}$ und somit $\sum_{j=0}^\infty |I'_j| \leq \sum_{j=0}^\infty |I_j| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j} \leq \varepsilon$. Da B kompakt ist, reichen endlich viele dieser Intervalle aus um B zu überdecken. Also ist B eine J-Nullmenge.

(7) Es sei B eine J-Nullmenge. Dann ist der Abschluß $\overline{B}$ ebenfalls J-Nullmenge und somit beschränkt, also kompakt und damit eine Nullmenge.

Umgekehrt sei der Abschluß von B eine beschränkte Nullmenge. Dann ist der Abschluß von B kompakt und somit sogar eine J-Nullmenge, also auch die Teilmenge B. □

7.2.3 Bemerkung.
Wir haben also mehrere Begriffe welche die Kleinheit von Mengen B ausdrücken sollen:

- Endliche Mengen.
- Abzählbare Mengen.
- J-Nullmengen.
- L-Nullmengen.
- Nirgends dichte Mengen, d.h. der Abschluß enthält keine inneren Punkte, oder äquivalent $B \cap U$ ist nicht dicht in U für jede offene Menge $U \neq \emptyset$.
- Magere Mengen, d.h. abzählbare Vereinigungen nirgends dichter Mengen.

Dabei sind die ersten beiden Begriffe mengentheoretischer Natur, die nächsten beiden maßtheoretischer und die beiden letzten topologischer Natur.

Es gelten nur folgende Implikationen:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{endlich} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
\text{J-Nullmenge} \arrow[d] \arrow[drr] & \text{abzählbar} \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
\text{L-Nullmenge} & & \text{nirgends dicht} \arrow[d] \\
 & & \text{mager}
\end{tikzcd}$$

Jede J-Nullmenge B ist nirgends dicht, denn andernfalls existiert ein offenes Intervall $I \neq \emptyset$ mit $B \cap I$ dicht in I, also ist I im Abschluß der J-Nullmenge $\overline{B}$ enthalten, eine Widerspruch.

Ein nirgends dichte Teilmenge muß nicht L-Nullmenge sein, wie das Komplement der untenstehend definierten Menge A_2 zeigt.

Einige Beispiele sind:

	abzb.	J-Nullmenge	L-Nullmenge	nirgends dicht	mager
$\mathbb{Q} \cap [0,1]$	+	−	+	−	+
$\{\frac{1}{n} : 0 \neq n \in \mathbb{N}\}$	+	+	+	+	+
Cantor-Diskontinuum	−	+	+	+	+
A	−	−	+	−	−
$[0,1] \setminus A_2$	−	−	−	+	+
$[0,1]$	−	−	−	−	−

wobei A wie folgt erhalten wird: Es sei $\{a_1, a_2, \dots\}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, weiters $A_j := \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i - \frac{1}{2^{i+j}}, a_i + \frac{1}{2^{i+j}})$ und schließlich $A := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$. Wegen $|A_j| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{j-1}}$ ist A eine Nullmenge. Weiters ist A_j offen und dicht in $[0,1]$, also ist $[0,1] \setminus A_j$ nirgends dicht und somit ist $[0,1] \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} [0,1] \setminus A_i$ mager. Dies zeigt, daß wir $[0,1]$ in zwei disjunkte Teilmengen A und $[0,1] \setminus A$ zerlegen können wobei die erste als Nullmengen im maßtheoretischen klein ist und die zweite als magere Menge im topologischen Sinn klein ist.

7.2.4 Proposition. J-Meßbarkeit.
Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^p$ ist genau dann J-meßbar, wenn B beschränkt und der Rand ∂B von B eine Lebesgue-Nullmenge (oder äquivalent eine J-Nullmenge) ist.

Beweis. Für beschränktes B gilt: B J-meßbar $:\Leftrightarrow \chi_B$ integrierbar $\Leftrightarrow$ die Menge $\Delta(\chi_B) = \partial B$ der Unstetigkeitspunkte ist eine Lebesgue-Nullmenge (nach (7.1.7)). $\square$

7.2.5 Folgerung. Additivität des Inhalts.
Es seien A und B J-meßbar. Dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ J-meßbar und

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Falls zusätzlich A und B nicht überlappend sind, dann ist $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen dabei NICHT ÜBERLAPPEND, wenn A und B keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Dies verallgemeinert den entsprechenden Begriff für Intervalle.

Beweis. Wegen $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ ist $A \cap B$ J-meßbar nach (7.1.8.3). Wegen $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ ist $A \cup B$ J-meßbar und $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ nach (7.1.6.1). Wegen $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$ ist $A \setminus B$ J-meßbar ebenfalls nach (7.1.6.1).

Nach Definition sind A und B nicht überlappend, wenn $A^o \cap B^o = \emptyset$. Dies ist äquivalent zu $A \cap B \subseteq \partial A \cup \partial B$:
($\Rightarrow$) Indirekt: Sei $x \in A \cap B \setminus (\partial A \cup \partial B)$. Dann ist $x \in A \setminus \partial A = A^o$ und $x \in B \setminus \partial B = B^o$, ein Widerspruch.
($\Leftarrow$) Indirekt: Sei $x \in A^o \cap B^o$, also $x \in A^o = A \setminus \partial A$ und $x \in B^o = B \setminus \partial B$, d.h. $x \in A \cap B \setminus (\partial A \cup \partial B)$, ebenfalls ein Widerspruch.

Für meßbares A und B ist dies weiter äquivalent dazu, daß $A \cap B$ eine J-Nullmenge ist:
($\Rightarrow$) Nach (7.2.4) sind ∂A und ∂B J-Nullmengen, also auch $A \cap B \subseteq \partial A \cup \partial B$.
($\Leftarrow$) Angenommen $A^o \cap B^o \neq \emptyset$. Dann existiert ein nicht-generiertes kompaktes Intervall in der offenen Menge $A^o \cap B^o \subseteq A \cap B$, also ist $A \cap B$ keine J-Nullmenge.

Der letzte Teil der Folgerung ergibt sich also daraus, daß $A \cap B$ eine J-Nullmenge ist. $\square$

7.2.7 Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium.
Es sei B J-meßbar. Dann ist eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, falls f beschränkt und fast überall stetig auf B ist.

Beweis. Es sei I ein Intervall, welches B im Inneren enthält und f sei beschränkt. Dann ist $f : B \to \mathbb{R}$ integrierbar $:\Leftrightarrow \tilde{f}^B : I \to \mathbb{R}$ ist integrierbar $\Leftrightarrow$ die Menge $\Delta(\tilde{f}^B)$ ist eine Lebesgue-Nullmenge (nach (7.1.7)) $\Leftrightarrow \Delta(\tilde{f}^B) \cup \partial B = \Delta(f) \cup \partial B$ ist eine Lebesgue-Nullmenge wegen (7.2.4) $\Leftrightarrow \Delta(f)$ ist Lebesgue-Nullmenge. $\square$

Bemerkung.
Damit eine gegebene (positive) Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ über eine beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^p$ integrierbar ist, muß B nicht notwenig J-meßbar sein: Sei z.B. $B := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ und $f(\frac{p}{q}) := \frac{1}{q}$. Dann ist $\tilde{f}^B$ beschränkt und stetig in allen irrationalen Punkten, also integrierbar und somit f integrierbar auf B. Andererseits ist B nicht J-meßbar, denn χ_B ist nicht integrierbar.

Aus den entsprechenden Sätzen (7.1.6.1) und (7.1.8.3) für Integrale über kompakte Intervalle (bzw. $\mathbb{R}^p$) folgt nun

7.2.8 Folgerung. Integrieren ist u.a. linear.
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ J-meßbar und f und g integrierbar auf B und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $f + \lambda g$ integrierbar auf B und $\int_B (f + \lambda g) = \int_B f + \lambda \int_B g$.

Weiters sind $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und $f \cdot g$ allesamt integrierbar auf B.

$$\left| \int_B f \right| \leq \int_B |f|.$$

Falls zusätzlich $\gamma := \inf\{|g(x)| : x \in X\} > 0$, so ist auch f/g integrierbar auf B.

Schließlich folgt $\int_B f \leq \int_B g$ aus $f \leq g$. $\square$

7.2.9 Mittelwertsatz.
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ J-meßbar und f integrierbar auf B. Dann ist

$$|B| \inf(f(B)) \leq \int_B f \leq |B| \sup(f(B)).$$

Beweis. Folgt aus der Monotonieaussage in (7.2.8), denn $\inf(f(B)) \leq f \leq \sup(f(B))$. $\square$

7.2.10 Folgerung. Integral über J-Nullmengen.
Es sei N eine J-Nullmenge. Dann ist jede beschränkte Funktion $f : N \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $\int_N f = 0$.

Beweis. Wegen $\Delta(f) \subseteq N$ ist f integrierbar nach dem Lebesgue'schen Integrabilitätskriterium (7.2.7). Wegen dem Mittelwertsatz (7.2.9) ist $0 = \inf(f(N))\,|N| \leq \int_N f \leq \sup(f(N))\,|N| = 0$, also $\int_N f = 0$. $\square$

7.2.11 Folgerung. Einschränkung integrierbarer Funktionen.
$f : B \to \mathbb{R}$ integrierbar, $A \subseteq B$ beide J-meßbar $\Rightarrow$ $f|_A : A \to \mathbb{R}$ integrierbar.

Beweis. Folgt wegen $\Delta(f|_A) \subseteq \Delta(f)$ aus (7.2.7). $\square$

7.2.12 Proposition. Additivität des Integrals bzgl. des Bereichs.
Es sei $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ integrierbar auf den J-meßbaren Mengen A und B. Dann ist

$$\int_A f + \int_B f = \int_{A\cup B} f + \int_{A\cap B} f.$$

Beweis. (7.2.5) $\Rightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$ J-meßbar; f ist beschränkt auf A und B also auf $A \cup B$. $\Delta(f) \subseteq \Delta(f|_A) \cup \Delta(f|_B) \cup \partial A \cup \partial B$. (7.2.7) $\Rightarrow$ f integrierbar auf $A \cup B$; (7.2.11) $\Rightarrow$ f integrierbar auf $A \cap B$.

Wegen

$$\tilde{f}^A + \tilde{f}^B = \tilde{f}^{A\cup B} + \tilde{f}^{A\cap B}$$

(Beweis mittels Fallunterscheidung: $x \in A \cap B$, $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, $x \notin A \cup B$) ist

$$\begin{aligned}\int_A f + \int_B f &= \int_{\mathbb{R}^p} \tilde{f}^A + \int_{\mathbb{R}^p} \tilde{f}^B \overset{(7.1.6.1)}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^p} (\tilde{f}^A + \tilde{f}^B) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} (\tilde{f}^{A\cup B} + \tilde{f}^{A\cap B}) \overset{(7.1.6.1)}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^p} \tilde{f}^{A\cup B} + \int_{\mathbb{R}^p} \tilde{f}^{A\cap B} = \int_{A\cup B} f + \int_{A\cap B} f. \quad \square\end{aligned}$$

7.2.13 Folgerung.
Es seien A und B nicht überlappende J-meßbare Mengen. Dann ist $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Leftrightarrow$ $f|_A$ und $f|_B$ sind integrierbar. Unter diesen äquivalenten Bedingungen gilt:

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Beweis. ($\Rightarrow$) folgt aus (7.2.11).

($\Leftarrow$) folgt aus (7.2.12) .

Nach (7.2.5) (bzw. Aufgabe $\boxed{\mathbf{2}}$) ist $A \cap B$ eine J-Nullmenge, also nach (7.2.10) $\int_{A\cap B} f = 0$ und somit $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$ nach (7.2.12).

$\square$

7.2.14 Proposition.
B J-meßbar, $N \subseteq B$ J-Nullmenge, $f : B \to \mathbb{R}$ integrierbar, $g : B \to \mathbb{R}$ beschränkt, $f = g$ auf $B \setminus N \Rightarrow$ g integrierbar,

$$\int_B f = \int_B g.$$

Vergleiche dies mit Aufgabe $\boxed{\mathbf{5}}$, wo g ebenfalls als integrierbar vorausgesetzt wird, aber Gleichheit nur bis auf eine L-Nullmenge verlangt wird.

Beweis. Nach (7.2.5) ist $B \setminus N$ ebenfalls J-meßbar und somit

$$\int_B f \overset{(7.2.13)}{=\!=} \int_{B\setminus N} f + \int_N f \overset{(7.2.10)}{=\!=} \int_{B\setminus N} f + 0 = \int_{B\setminus N} g + 0 \overset{(7.2.10)}{=\!=} \int_{B\setminus N} g + \int_N g \overset{(7.2.13)}{=\!=} \int_B g. \qquad \square$$

7.2.15 Satz. Vertauschen von Integrieren und Differenzieren.
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und J-meßbar, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \supseteq U \times B \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert $F(x) := \int_B f(x, y)\, dy$ für $x \in U$ eine stetige Funktion $F : U \to \mathbb{R}$.

Falls $\partial_1 f$ auf $U \times B$ existiert und stetig ist, so ist F differenzierbar auf U und

$$\frac{d}{dx}\int_B f(x, y)\, dy = F'(x) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Beweis. Der Beweis verläuft wie jener von (6.1.22). Wegen dem Exponentialgesetz (6.1.16) und der Kompaktheit von B ist $f^\vee : U \to C(B, \mathbb{R})$ stetig. Wegen (6.1.21a) und der Stetigkeit von $\partial_1 f$ ist $f^\vee$ C^1 mit Ableitung $(f^\vee)'(x)(y) = \partial_1 f(x, y)$. Nach dem Mittelwertsatz (7.2.9) ist die Operatornorm der nach (7.2.8) linearen Abbildung $\int_B : C(B, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ höchstens $|B| < \infty$, also $\int_B$ stetig. Nach dem Spezialfall (6.1.6a) der Kettenregel (6.1.5) ist somit $\int_B \circ f^\vee : U \to C(B, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ C^1 mit Ableitung

$$F'(x) = \Big(\int_B \circ f^\vee\Big)'(x) = \int_B \Big((f^\vee)'(x)\Big) = \int_B \Big((f^\vee)'(x)\Big)(y)\, dy = \int_B \partial_1 f(x, y)\, dy. \qquad \square$$

Bemerkung.
Dieses Resultat stimmt auch wenn $U \subseteq E$ offen in einem Banach-Raum E ist (und f Werte in einem Banach-Raum F hat). Im Beweis geht man dabei ebenfalls wie in (6.1.22) vor:
Wegen dem Exponentialgesetz (6.1.16) und der Kompaktheit von B ist $f^\vee : U \to C(B, F)$ stetig. Wegen (6.1.21) und der Stetigkeit von $\partial_1 f : U \times B \to L(E, F)$ also nach (6.1.16) jener von $(\partial_1 f)^\vee : U \to C(B, L(E, F))$ und nach (6.1.19) auch als Abbildung $U \to L(E, C(B, F))$ ist $f^\vee : U \to C(B, F)$ C^1 mit Ableitung $(f^\vee)'(x)(v)(y) = \partial_1 f(x, y)(v)$ für alle $x \in U$, $y \in B$ und $v \in E$. Für $F = \mathbb{R}$ ist nach dem Mittelwertsatz (7.2.9) die Operatornorm der nach (7.2.8) linearen Abbildung $\int_B : C(B, F) \to F$ höchstens $|B| < \infty$, also $\int_B$ stetig. Für allgemeines F müßten wir das vektorwertige Riemann-Integral erst definieren, und die entsprechenden Resultate nachweisen. Da wir es nicht weiter benötigen haben wir davon Abstand genommen. Nach dem Spezialfall (6.1.6) der Kettenregel (6.1.5) ist somit $\int_B \circ f^\vee : U \to C(B, F) \to F$ C^1 mit Ableitung

$$F'(x)(v) = \Big(\int_B \circ f^\vee\Big)'(x)(v) = \int_B \Big((f^\vee)'(x)(v)\Big) = \int_B \Big((f^\vee)'(x)(v)\Big)(y)\, dy = \int_B \partial_1 f(x, y)(v)\, dy$$

Will man in dieser Formel noch das v loswerden, so muß man es wie in (6.1.22) aus dem Integral ziehen um schließlich

$$F'(x) = \int_B \partial_1 f(x, y)\, dy$$

zu erhalten.

Banach-Tarski Paradoxon

Nach ‘The Banach-Tarski Paradox’ von Francis Eduard Su, siehe
`http://www.math.hmc.edu/~su/papers.dir/banachtarski.pdf`.

7.2.16 Definition. Zerlegungs-Äquivalenz und paradoxe Mengen.
Beim Paradoxon von Banach und Tarski geht es darum Teilmengen $A \subseteq X := \mathbb{R}^3$ in Teile A_i zu zerlegen und diese Teile herumzubewegen, also Elemente g_i der Gruppe G_3 der Bewegungen (d.h. orientierungserhaltenden Isometrien) des $\mathbb{R}^3$ darauf anzuwenden um anderer Teilmengen $\bigsqcup_i g_i A_i \subseteq X$ zu erhalten. Beispiele von Bewegungen sind die Translationen $x \mapsto x + v$ für fixe $v \in \mathbb{R}^3$ und die Drehungen A um eine Achse $v \in \mathbb{R}^3$ und einen Winkel $\varphi \in S^1$. Letztere haben als Matrixdarstellung gerade die orthogonalen Matrizen mit Determinante $+1$. Man zeigt in der linearen Algebra, daß jede Bewegung geschrieben werden kann als $x \mapsto A \cdot x + v$ mit einer Rotation A und einer Translation $y \mapsto y + v$. Dies benötigen wir hier allerdings nicht. Die Komposition zweier solcher Abbildungen ist dann $x \mapsto A_2 \cdot (A_1 \cdot x + v_1) + v_2 = (A_2 \cdot A_1) \cdot x + (A_2\, v_1 + v_2)$, und damit G_3 ein sogenanntes SEMIDIREKTES PRODUKT der Gruppe $SO(\mathbb{R}^3)$ der Drehungen mit $\mathbb{R}^3$, der Abel’schen Gruppe der Translationen am $\mathbb{R}^3$.

Es erweist sich als praktisch dies etwas allgemeiner anzugehen und WIRKUNGEN EINER GRUPPE G auf einer nicht-leeren Menge X zu betrachten, d.h. ein Gruppen-Homomorphismen $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X) := \{f : X \to X | f \text{ ist bijektiv}\}$ in die Gruppe der Bijektionen von X bzgl. der Komposition. Man schreibt in dieser Situation $g \cdot x := \varphi(g)(x)$ für die Wirkung von $g \in G$ aufgefaßt als Bijektion $\varphi(g) : X \to X$ auf den Punkt $x \in X$. Für Teilmengen $A \subseteq X$ setzt man wie üblich $g \cdot A := \{g \cdot a : a \in A\}$ bzw. für $H \subseteq G$ setzt man $H \cdot x := \{h \cdot x : h \in H\}$ und schließlich ist $H \cdot A := \{h \cdot x : h \in H, x \in A\}$.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ soll G-PARADOX heißen, wenn endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen $A_i \subseteq A$ für $i \in \{-n, -n+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, m-1, m\}$ existieren sowie zugehörige $g_i \in G$ s.d. $\bigcup_{i<0} g_i A_i = A = \bigcup_{i>0} g_i A_i$.
Beachte, daß wir die $g_i A_i$ für $i > 0$ (und analog auch für $i < 0$) als paarweise disjunkt voraussetzen können, indem wir A_i durch

$$A_i \setminus g_i^{-1}\Big(\bigcup_{0<j<i} g_j A_j\Big)$$

ersetzen. Wir werden in (7.2.18) zeigen, daß wir auch $A = \bigcup_i A_i$ annehmen dürfen.

Wir nennen zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ ZERLEGUNGS-ÄQUIVALENT (bzgl. G) (und schreiben $A \sim B$) falls endliche Zerlegungen $A = \bigsqcup_i A_i$ und $B = \bigsqcup_i B_i$ existieren und $g_i \in G$ mit $g_i A_i = B_i$ für alle i.

Wir schreiben $A \preceq B$ (und sagen A ist ZERLEGUNGS-KLEINER als B), falls eine Teilmenge $B' \subseteq B$ existiert mit $A \sim B'$.

In dieser Terminologie ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann G-paradox, wenn zwei disjunkte Teilmengen $A_\pm \subseteq A$ existieren mit $A_- \sim A \sim A_+$.
($\Rightarrow$) $A_\pm := \bigsqcup_{\pm i>0} A_i$ und somit ist $A_\pm \sim \bigsqcup_{\pm i>0} g_i A_i = A$.
($\Leftarrow$) $A_\pm \sim A \Rightarrow\ \exists A_i : A_\pm = \bigsqcup_{\pm i>0} A_i$ und $\exists g_i \in G : A = \bigsqcup_i g_i A_i$.

Analog wie bei der Mächtigkeit von Mengen zeigt man:

7.2.17 Banach-Schröder-Bernstein Theorem.
Es wirke G auf X und es sei $A, B \subseteq X$ mit $A \preceq B$ und $B \preceq A$. Dann ist $A \sim B$.

Beweis. Es sei $A \xrightarrow{f} B' \subseteq B$ eine Bijektion, s.d. $\forall C \subseteq A$: $C \sim f(C)$ und $B \xrightarrow{g} A' \subseteq A$ eine Bijektion, s.d. $\forall C \subseteq B$: $B \sim g(C)$. Nun definiere $C_0 := A \setminus A'$ und $C_{n+1} = g(f(C_n))$. Dann ist $A \setminus C = g(B \setminus f(C))$ und somit $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$. In der Tat folgt aus $x \in A \setminus C \subseteq A \setminus C_0 = A' = g(B)$ die Existenz eines $y \in B$ mit $g(y) = x$. Angenommen $y \in f(C)$, also $y \in f(C_n)$ für ein $n \geq 0$, dann wäre $x = g(y) \in g(f(C_n)) = C_{n+1} \subseteq C$, ein Widerspruch. Andererseits folgt aus $x = g(y)$ mit $y \in B \setminus f(C)$, daß $x \in g(B) = A' = A \setminus C_0$. Angenommen $x \in C$, dann wäre $x \in C_n$ für ein $n > 0$ und somit $g(y) = x \in C_n = g(f(C_{n-1}))$, also da g injektiv ist $y \in f(C_{n-1}) \subseteq f(C)$, ein Widerspruch.

Somit ist $A = C \sqcup (A \setminus C) \sim f(C) \sqcup (B \setminus f(C)) = B$. □

7.2.18 Folgerung. Zerlegung in Zerlegungs-äquivalente Teilmengen.
Es wirke G auf X. Dann ist $A \subseteq X$ genau dann G-paradox, wenn Teilmengen $A_-, A_+ \subseteq A$ existieren mit $A = A_1 \sqcup A_2$ und $A_1 \sim A \sim A_2$.

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß die disjunkten $A_\pm \subseteq A$ mit $A_- \sim A \sim A_+$ so gewählt werden können, daß $A = A_- \cup A_+$. Dazu ersetzen wir A_+ durch $A'_+ := A \setminus A_-$ und erhalten $A \sim A_+ \subseteq A \setminus A_- = A'_+ \subseteq A \sim A$, also nach (7.2.17) $A'_+ \sim A$. □

7.2.19 Proposition. Paradoxe Mengen liefern paradoxe Gruppen.
Es sei X G-paradox. Dann ist G als Menge auf welcher die Gruppe G durch Linksmultiplikation wirkt G-paradox und wir sagen kurz die Gruppe G ist paradox.

Beweis. Es seien $\{A_i : i\}$ paarweise disjunkt mit $X = \bigsqcup_i A_i$ und und $g_i \in G$ mit $\bigcup_{\pm i>0} g_i A_i = X$. Sei $x_0 \in X$ und $f : G \to X$ gegeben durch $g \mapsto g \cdot x_0$. Dann bilden die Urbilder $G_i := f^{-1}(A_i) = \{g \in G : g \cdot x_0 \in A_i\}$ eine Partition von G und

$$\bigcup_{\pm i>0} g_i G_i = \bigcup_{\pm i>0} \{g_i\, g : g\, x_0 \in A_i\} = \bigcup_{\pm i>0} \{g_i\, g : g_i\, g\, x_0 \in g_i\, A_i\} = \{g : g x_0 \in \bigcup_{\pm i>0} g_i\, A_i = X\} = G.$$

□

7.2.20 Proposition. Paradoxe Gruppen liefern paradoxe Mengen.
Es sei G paradox und wirke fixpunktfrei auf X, d.h. aus $g \cdot x = x$ folgt $g = e$. Dann ist X G-paradox.

Beweis. Es seien $\{G_i : i\}$ paarweise disjunkt und $g_i \in G$ mit $\bigcup_{\pm i>0} g_i G_i = G$. Es sei $M \subseteq X$ eine Menge, die mit jeder Äquivalenzklassen von $\sim_G$ (wobei $x_0 \sim_G x_1 :\Leftrightarrow \exists g \in G : g x_0 = x_1$) genau einen Punkt gemeinsam hat. Für deren Existenz verwenden wir das Auswahlaxiom um aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten auszuwählen. Sei weiters $A_i := G_i M$. Dann sind die A_i paarweise disjunkt, denn aus $G_i M \cap G_j M \neq \emptyset$ folgt die Existenz von $x_i, x_j \in M$ sowie $g_i \in G_i$ und $g_j \in G_j$ mit $g_i\, x_i = g_j\, x_j$, also $x_j = g_j^{-1} g_i\, x_i$, d.h. $x_j \sim x_i$ mit $x_i, x_j \in M$, also ist $x_j = x_i$ ein Fixpunkt von $g_j^{-1}\, g_i$, d.h. $g_j^{-1} g_i = e$, also $g_j = g_i \in G_i \cap G_j$ und somit $i = j$. Weiters ist

$$\bigcup_{\pm i>0} g_i\, A_i = \bigcup_{\pm i>0} g_i\, G_i\, M = G\, M = X. \quad \square$$

7.2.21 Folgerung. Obergruppen paradoxer Gruppen sind paradox.
Es sei H eine Untergruppe von G. Falls H paradox ist, so auch G.

Beweis. Es wirkt G fixpunktfrei auf G durch Linksmultiplikation, somit auch H auf G. Nach (7.2.20) ist somit G H-paradox und damit trivialerweise auch G-paradox. Nach (7.2.19) ist damit auch die Gruppe G paradox. □

7.2.22 Proposition. Paradoxe freie Gruppen.
Die freie Gruppe mit zwei Erzeugern ist paradox.

Dabei heißt eine Gruppe G von einer Teilmenge $S \subseteq G$ ERZEUGTE GRUPPE, wenn die kleinste Untergruppe von G welche S enthält G selbst ist. Die kleinste Untergruppe die S enthält wird durch alle endlichen Worte im Alphabet $S \cup S^{-1} := \{g, g^{-1} : g \in S\}$ gebildet. Dabei haben manche Worte die selbe Bedeutung wie z.B. $g\, g^{-1}$, e und $g^{-1}\, g$, wobei e für das leere Wort (das neutrale Element) steht. Eine FREIE GRUPPE G mit Erzeugern S ist eine von S erzeugte Gruppe, bei welcher zwei Worte nur dann das selbe Gruppenelement repräsentieren, wenn dies durch die allgemeinen Gruppenaxiome erzwungen ist, also die Worte äquivalent bzgl. der durch $w\,g\,g^{-1}\,w' \sim w\,w' \sim w\,g^{-1}\,g\,w$ mit $g \in S$ und beliebigen Worten w, w' erzeugten Äquivalenzrelation sind.

Beweis. Es sei G die freie Gruppe mit zwei Erzeugern g und h. Für $x \in \{g, g^{-1}, h, h^{-1}\}$ sei $G(x)$ die Teilmenge von G der Worte die in reduzierter Darstellung mit x enden. Dann sind $G(g), G(g^{-1}), G(h), G(h^{-1})$ offensichtlich paarweise disjunkt (mit Vereinigung $G \setminus \{e\}$) und $G(g) \cup gG(g^{-1}) = G = G(h) \cup hG(h^{-1})$. □

7.2.23 Proposition. Freie Gruppe von Drehungen.
Es existiert eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugern der Gruppe $SO(\mathbb{R}^3)$ der Drehungen im $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Wir betrachten zwei Rotationen um einen (modulo 2π) irrationalen Winkel (z.B. $\arctan(4/3)$) um verschiedene Achsen, also z.B.

$$g^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 3/5 & \mp 4/5 & 0 \\ \pm 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & \mp 4/5 \\ 0 & \pm 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Wir behaupten, daß die von g und h erzeugte Untergruppe der Bewegungsgruppe frei ist. Dazu müssen wir zeigen, daß kein reduziertes nicht-leeres Wort w, welches wir mit g, g^{-1}, h, h^{-1} bilden können die Identität beschreibt. Es genügt dies für Worte die mit $g^{\pm 1}$ enden zu zeigen, denn für andere Worte w können wir dann $g^{-1}wg$ betrachten, welches nach Reduktion nach wie vor mit g endet, also nicht die Identität beschreibt, und damit auch w nicht die Identität beschreibt. Wir zeigen mittels Induktion nach der Länge ℓ von w, daß $w \cdot (1,0,0) = (a,b,c)/5^\ell$ mit $a,b,c \in \mathbb{Z}$ und b nicht teilbar durch 5 ist, also $w \cdot (1,0,0) \neq (1,0,0)$.

($\ell = 1$) Dann ist $w = g^{\pm 1}$, also $w(1,0,0) = (3, \pm 4, 0)/5$.

($\ell > 1$) Dann ist $w = g^{\pm 1}w'$ oder $w = h^{\pm 1}w'$ mit einem Wort w' kleinerer Länge $\ell - 1$, also $w'(1,0,0) = (a',b',c')/5^{\ell-1}$ mit $a', b, c' \in \mathbb{Z}$ und b' nicht teilbar durch 5. Also ist $w(1,0,0) = (a,b,c)/5^\ell$ mit

$$\begin{gathered} a = 3a' \mp 4b', \quad b = 3b' \pm 4a', \quad c = 5c' \quad \text{für } w = g^{\pm 1}w' \text{ oder} \\ a = 5a', \quad b = 3b' \mp 4c', \quad c = 3c' \pm 4b' \quad \text{für } w = h^{\pm 1}w' \end{gathered}$$

Bleibt zu zeigen, daß b nicht durch 5 teilbar ist. Dies ergibt sich aus folgenden Darstellungen:

- $b = 3b' \pm 4a'$ mit a' teilbar durch 5, falls $w = g^{\pm 1}h^{\pm 1}w''$ oder $w = g^{\pm 1}h^{\mp 1}w''$.
- $b = 3b' \mp 4c'$ mit c' teilbar durch 5, falls $w = h^{\pm 1}g^{\pm 1}w''$ oder $w = h^{\pm 1}g^{\mp 1}w''$.
- $b = 6b' - 25b''$, falls $w = g^{\pm 1}g^{\pm 1}w''$ oder $w = h^{\pm 1}h^{\pm 1}w''$.

Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich. Die letzte folgt für $w = g^{\pm 1}g^{\pm 1}w''$ aus

$$\begin{aligned} b &= 3b' \pm 4a' = 3b' \pm 4(3a'' \mp 4b'') = 3b' + 9b'' \pm 12a'' - 16b'' - 9b'' \\ &= 3b' + 3(3b'' \pm 4a'') - 25b'' = 6b' - 25b'', \end{aligned}$$

und völlig analog für $w = h^{\pm 1}h^{\pm 1}w''$ aus

$$\begin{aligned} b &= 3b' \mp 4c' = 3b' \mp 4(3c'' \pm 4b'') = 3b' + 9b'' \mp 12c'' - 16b'' - 9b'' \\ &= 3b' + 3(3b'' \mp 4c'') - 25b'' = 6b' - 25b''. \quad \square \end{aligned}$$

7.2.24 Folgerung. Die Sphäre ist fast paradox.
Es gibt eine abzählbare Teilmenge $D \subseteq S^2$, s.d. $S^2 \setminus D$ $S(\mathbb{R}^3)$-paradox ist.

Beweis. Es sei G die (abzählbare) freie Untergruppe die von den beiden Rotationen g und h erzeugt wird. Es sei D die (dichte) Menge der Fixpunkte in S^2 all dieser Rotationen. Dann wirkt G auf $S^2 \setminus D$ fixpunktfrei also folgt das Resultat aus (7.2.23) und (7.2.20). □

7.2.25 Lemma.
Es sind $S^1 \setminus \{1\}$ und S^1 $SO(\mathbb{R}^2)$-Zerlegungs-äquivalent.

Beweis mittels Hilbert's Hotel. Es sei $A := \{e^{\sqrt{-1}n} : n \geq 0\}$ und $B := S^1 \setminus A$. Dann ist $S^1 = A \cup B \sim \rho A \cup B = S^1 \setminus \{0\}$, wobei wir die Multiplikation mit der komplexen Zahl $e^{\sqrt{-1}}$ als Drehung $\rho \in SO(\mathbb{R}^2)$ um den Winkel 1 (in Radianten gemessen) auffassen können, welche $\rho(e^{n\sqrt{-1}}) = e^{\sqrt{-1}} \cdot e^{n\sqrt{-1}} = e^{(n+1)\sqrt{-1}}$ erfüllt. □

7.2.26 Proposition. Die Sphäre ist paradox.
Für abzählbares $D \subseteq S^2$ ist S^2 und $S^2 \setminus D$ $SO(\mathbb{R}^3)$-Zerlegungs-äquivalent.

Beweis mittels Hilbert's Hotel. Es sei $w \in S^2 \setminus D$. Wir betrachten die abzählbar vielen Rotationen mit Achse w die mindestens einen Punkt aus D nach D abbilden (zu jeden Paar $d, d' \in D$ gibt es höchstens eine Rotation mit Achse w die d auf d' abbildet). Zu jeder dieser Rotationen g gibt es höchstens abzählbar viele Rotationen ρ mit Achse w und $\rho^n = g$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, denn das n-fache des zugehörige Rotationswinkel muß dann jener von g bis auf ein ganzahlinges Vielfaches von 2π sein (also $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-viele). Sei ρ eine Rotation mit Achse w die verschieden von all diesen ist. Dann ist $\rho^n D \cap \rho^m D = \emptyset$ für alle $m, n \geq 0$ mit $m \neq n$. Es sei $A = \bigcup_{n\geq 0} \rho^n D$ und $B := S^2 \setminus A$. Dann ist

$$S^2 = A \cup B \sim \rho A \cup B = S^2 \setminus D.$$

□

7.2.27 Banach-Tarski Paradoxon, schwache Variante.
Der abgeschlossene Ball $B^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ ist G_3-paradox, wobei G_3 die Gruppe der Bewegungen von $\mathbb{R}^3$ ist.

Beweis. Es ist S^2 G-paradox und damit auch $B^3 \setminus \{0\} = \bigcup_{0<r\leq 1} r\, S^2 = (0,1] \cdot S^2$ G-paradox. Denn aus einer paradoxen Zerlegung $\{A_i : i\}$ von S^2 erhalten wir mit den Kugelsektoren $\{(0,1] \cdot A_i : i\}$ eine von $(0,1] \cdot S^2 = B^3$. Weiters ist $B^3 \setminus \{0\} \sim B^3$, denn sei $C \subseteq B^3 \cap \mathbb{R}^2$ ein Kreis durch 0. Dann ist nach (7.2.25)

$$B^3 \setminus \{0\} = (B^3 \setminus C) \sqcup (C \setminus \{0\}) \sim (B^3 \setminus C) \sqcup C = B^3$$

und somit

$$B^3 = (B^3 \setminus \{0\}) \sqcup \{0\} \sim (B^3 \setminus \{0\}) \sqcup (B^3 \setminus \{0\}) \sqcup \{0\} = (B^3 \setminus \{0\}) \sqcup B^3 \sim B^3 \sqcup B^3. \quad \square$$

Bemerkung.
Man kann zeigen, daß man dabei mit einer Zerlegung von B^3 in 5 Teilmengen auskommt.

7.2.28 Banach-Tarski Paradoxon, starke Variante.
Je zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ mit nicht-leeren Inneren sind G_3-Zerlegungs-äquivalent.

Beweis. Es seien A und B zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ mit nicht-leeren Inneren und $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ zwei abgeschlossene Bälle. Dann ist B enthalten in der Vereinigung von endlich vielen Translaten von A' und A in der endlichen Vereinigung von endlich vielen Translaten von B', also $A \subseteq \bigcup_i g_i B' \preceq \bigsqcup_i B' \sim B' \subseteq B$ und $B \subseteq \bigcup_i h_i A' \preceq \bigsqcup_i A' \sim A' \subseteq A$ nach (7.2.27). Also $A \sim B$ nach (7.2.17). □

7.2.29 Résumé.
Das Banach-Tarski Paradoxon widerspricht natürlich stark der Intuition und der Physik, denn die Gesamtmasse sollte sich durch Zerteilen und Bewegen der Teile nicht ändern. Der dahintersteckende Grund, daß dies dennoch möglich ist, liegt darin, daß die Teile nicht meßbar sind, und zwar nicht nur im Jordan'sche Sinne nicht, sondern in keinen vernünftigen Sinn, d.h. wenn wir die Additivität $|A \sqcup B| = |A| + |B|$ und die Invarianz $|g \cdot A| = |A|$ unter Bewegungen g verlangen.

Alternativ zur Akzeptanz des Auswahlaxioms kann man auch das Axiom, daß jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar ist, zu den Axiomen der Mengenlehre hinzunehmen, und, damit man wenigstens Folgen für Stetigkeitsüberlegungen verwenden kann, das Auswahlaxiom für jeweils abzählbar viele nicht-leere Mengen, und darauf die Mathematik aufbauen.

7.3 Integrationsmethoden

Wir verwenden nun den Satz (7.1.9) von Fubini um allgemeinere Volumina und mehrdimensionale Integrale zu bestimmen.

7.3.1 Formel von Cavaleri.
Es sei $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ J-meßbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ sei $B_x := \{y \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in B\} \subseteq \mathbb{R}^p$ J-meßbar. Dann ist $x \mapsto |B_x|$ auf integrierbar und

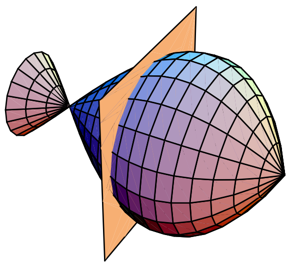
$$|B| = \int_{\mathbb{R}} |B_x|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |B_x|\, dx$$

Beachte, daß $B_x := \mathrm{inj}_x^{-1}(B)$, wobei $\mathrm{inj}_x : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ durch $y \mapsto (x,y)$ gegeben ist, und somit $B_x \cong B \cap \{x\} \times \mathbb{R}^p$ ist.

Falls $B \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^2$ zusätzlich Rotations-symmetrisch bzgl. der Achse $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist, und B_x sternförmig bzgl. $(x,0)$ ist für alle x, so sind die B_x Kreisscheiben mit sagen wir Radius $r(x)$ und somit mit Fläche $|B_x| = r(x)^2\pi$.
Das Volumen von B ist also

$$|B| = \int_a^b |B_x| = \pi \int_a^b r(x)^2\, dx,$$

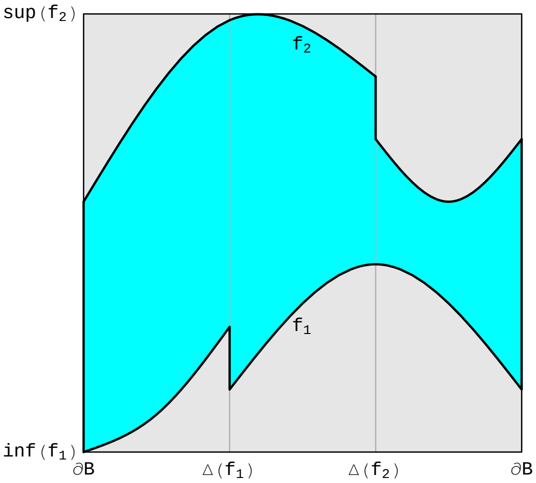
eine Formel die wir in den Aufgaben zur Analysis 2 bereits hergeleitet haben.



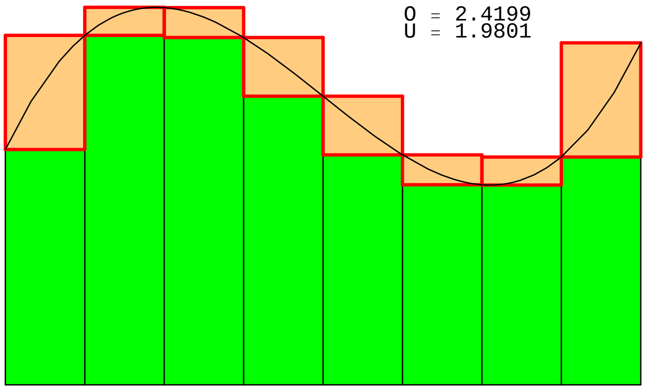
Beweis. Da B beschränkt ist, existiert ein kompaktes Intervall $[a,b] \times J \supseteq B$. Also gilt

$$|B| = \int_{[a,b]\times J} \chi_B \overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_a^b \int_J \chi_B(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b \int_J \chi_{B_x}(y)\, dy\, dx = \int_a^b |B_x|. \qquad \square$$

Wir haben die Fläche gewisser Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ auf zwei gänzlich verschiedene Weisen definiert – einerseits als Fläche zwischen zwei Funktionen in der Analysis 2, und andererseits als das Volumen des Zylinders mit Höhe 1 über der Fläche in (7.2) – und müssen nun zeigen, daß diese Definitionen äquivalent sind. Dazu benötigen wir die Meßbarkeit der betrachtenen Flächen und damit folgende



7.3.2 Proposition. Graphen als J-Nullmenge.
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ J-meßbar und $f : B \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in B\}$ *eine J-Nullmenge in $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$.*



Beweis. O.B.d.A. ist B ein Intervall (dazu ersetze B durch ein kompaktes Intervall $I \subseteq B$ und f durch $\tilde{f}^B$ mit $\operatorname{Graph}(f) \subseteq \operatorname{Graph}(\tilde{f}^B)$). Für $\varepsilon > 0$ sei Z eine Zerlegung von B mit $O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon$. Es liegt $\operatorname{graph}(f)$ in der Vereinigung $\bigcup_{J \in Z} J \times [\inf(f(J)), \sup(f(J))]$ mit

$$\sum_{J \in Z} \Big| J \times \Big[\inf(f(J)), \sup(f(J))\Big] \Big| \leq \sum_{J \in Z} |J| \Big(\sup(f(J)) - \inf(f(J))\Big) = O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon,$$

also ist $\operatorname{graph}(f)$ eine J-Nullmenge. $\square$

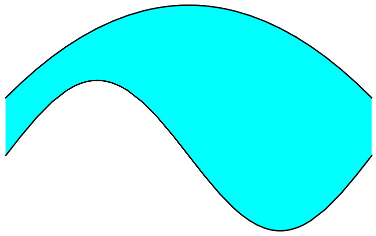
7.3.3 Folgerung. Integral über Ordinatenmenge.

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ J-meßbar, $f_1, f_2 : B \to \mathbb{R}$ integrierbar, $f_1 \leq f_2$. Dann ist die Ordinatenmenge

$$M := M(f_1, f_2) := \{(x,y) : x \in B, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

J-meßbar in $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ und

$$|M(f_1, f_2)| = \int_B (f_2 - f_1).$$



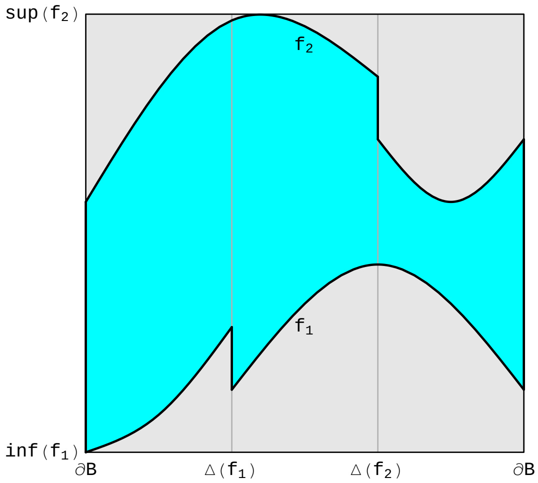
Weiters ist jede stetige und beschränkte Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar auf M und

$$\int_M g(x,y)\, d(x,y) = \int_B \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x,y)\, dy.$$

Dies zeigt, daß die Definition (7.2.1) der Fläche als $|M| := \int_I \chi_M$ mit jener aus (5.1.1) als $\int_B f_2 - \int_B f_1$ verträglich ist.

Beweis.

Wir zeigen zuerst, daß $M(f_1, f_2)$ J-meßbar, also der Rand $\partial M(f_1, f_2)$ eine J-Nullmenge ist. Da $M(f_1, f_2) \subseteq A := \overline{B} \times [\inf f_1, \sup f_2]$, also beschränkt ist, genügt nach (7.2.4) zu zeigen, daß der Rand eine L-Nullmenge ist. Der Rand ist in der abgeschlossenen Menge A enthalten und wir behaupten, daß er ganz in $\Big((\partial B \cup \Delta(f_1) \cup \Delta(f_2)) \times [\inf f_1, \sup f_2]\Big) \cup \operatorname{graph}(f_1) \cup \operatorname{graph}(f_2)$ liegt. Sei nämlich $(x,y) \in \partial M(f_1, f_2) \subseteq A$ nicht in dieser Menge, d.h. $x \in \overline{B} \setminus (\partial B \cup \Delta(f_1) \cup \Delta(f_2))$ und $y \in [\inf f_1, \sup f_2] \setminus \{f_1(x), f_2(x)\}$. Für $y < f_1(x)$ trifft wegen der Stetigkeit von f_1 bei x ein ganze Umgebung von (x,y) die Menge $M(f_1, f_2)$ nicht, und analog für $y > f_2(x)$. Für $f_1(x) < y < f_2(x)$ ist wegen der Stetigkeit von f_1 und f_2 bei x eine ganze Umgebung von (x,y) in $M(f_1, f_2)$ enthalten.



Also ist in allen 3 möglichen Fällen (x,y) kein Randpunkt von $M(f_1, f_2)$. Somit ist $\partial M(f_1, f_2) \subseteq (\partial B \cup \Delta(f_1) \cup \Delta(f_2)) \times [\inf f_1, \sup f_2] \cup \operatorname{graph}(f_1) \cup \operatorname{graph}(f_2)$ eine J-Nullmenge nach (7.2.4), (7.2.7) und (7.3.2). Also ist $M(f_1, f_2)$ J-meßbar.

Es sei $I \supseteq B$ ein kompaktes Intervall, dann ist

$$\begin{aligned}
\int_M g &= \int_{I \times [\inf f_1, \sup f_2]} \tilde{g}^M \overset{\text{Fubini}}{=\!=} \int_I \int_{\inf f_1}^{\sup f_2} \tilde{g}^M(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_I \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x,y)\, dy \right)^{\sim_B} dx = \int_B \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x,y)\, dy\, dx.
\end{aligned}$$

Und speziell für $g = 1$ ist

$$|M(f_1, f_2)| = \int_M 1 = \int_B \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1\, dy\, dx = \int_B f_2 - f_1. \quad \square$$

7.3.4 Beispiele.

1 Wir berechnen nun die Fläche $|K|$ einer Kreisscheibe $K := \{(x,y) : x^2 + y^2 \le r^2\}$ mit Radius $r > 0$.
Für $B := [-r,r]$, $f_1 : x \mapsto -\sqrt{r^2 - x^2}$, $f_2 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ ist

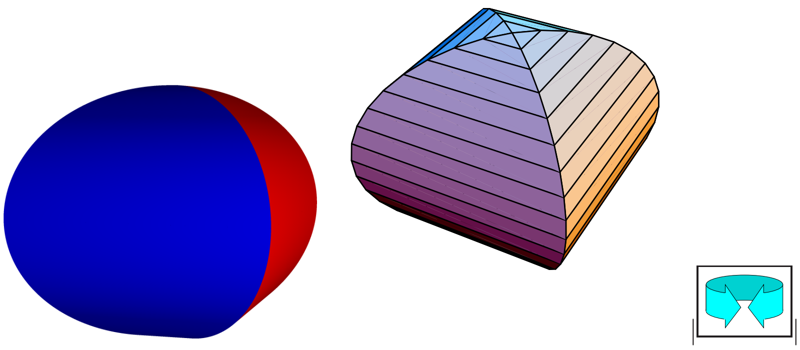
$$|K| \xlongequal{(7.3.3)} \int_B f_2 - f_1 = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx \xlongequal{x = r\sin(y)} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin(y)^2}\, r\cos(y)\,dy$$
$$= 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)^2\,dy = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2y)+1}{2}\,dy = 2r^2 \left[\frac{\sin(2y)}{4} + \frac{y}{2}\right]_{y=-\frac{\pi}{2}}^{y=\frac{\pi}{2}} = r^2\pi$$

2 Als nächstes berechnen wir das Volumen der Kugel $K := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ mit Radius $r > 0$. Es ist $K \subseteq [-r,r] \times \mathbb{R}^2$ J-meßbar und $K_x := \{(y,z) : (x,y,z) \in K\}$ eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$ und somit Fläche $|K_x| = (r^2 - x^2)\pi$. Nach (7.3.1) ist also

$$|K| = \int_{-r}^{r} |K_x| = \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\pi = \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-r}^{x=r} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

3 Es sei B der Durchschnitt der beiden Zylinder $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 \le 1\}$. Somit variiert x_1 in $[-1,1]$ und $|x_2| \le \sqrt{1 - x_1^2} =: b(x_1)$ und $|x_3| \le \sqrt{1 - x_1^2}$. Also ist

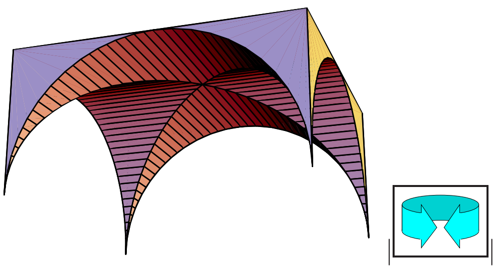
$$B = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \le 1, |x_2| \le b(x_1), |x_3| \le b(x_3)\Big\} \text{ und}$$
$$|B| = \int_B d(x_1,x_2,x_3) = \int_{-1}^{1} \int_{-b(x_1)}^{b(x_1)} \int_{-b(x_1)}^{b(x_1)} dx_3\,dx_2\,dx_1$$
$$= 8\int_0^1 \int_0^{b(x_1)} dx_3 \int_0^{b(x_1)} dx_2\,dx_1 = 8\int_0^1 b(x_1)^2\,d(x_1)$$
$$= 8\int_0^1 1 - x_1^2\,d(x_1) = 8\left(x_1 - \frac{1}{3}x_1^3\right)\Big|_{x_1=0}^{1} = \frac{16}{3}.$$



Damit können wir auch das Volumen eines Kreuzgewölbes als

$$\left(2^3 - 2\cdot 1^2\cdot\pi - 2\cdot 1^2\cdot\pi + \frac{16}{3}\right)/2$$

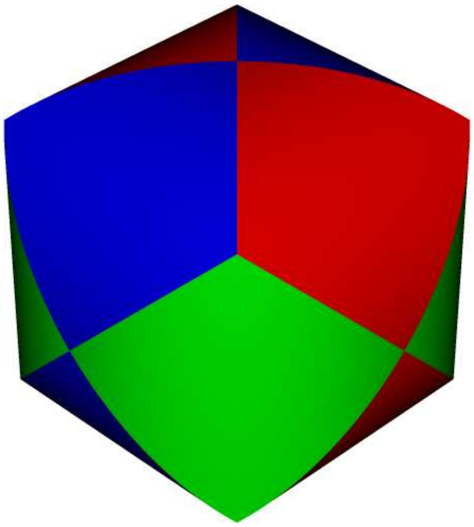
bestimmen.

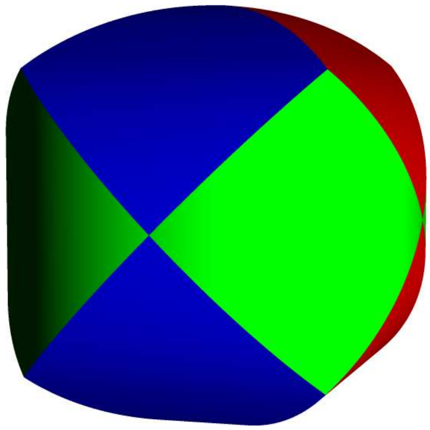


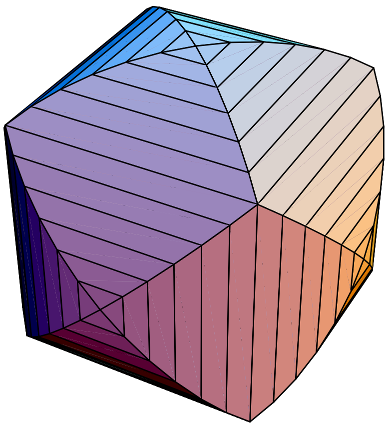
4 Es sei B der Durchschnitt der 3 orthogonalen Zylinder $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$, $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 \le 1\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 + x_1^2 \le 1\}$. Es variiert x_1 in $[-1, 1]$ und es ist $|x_2| \le b(x_1)$, $|x_3| \le b(x_1)$ und $|x_3| \le b(x_2)$. Also ist

$$B = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \le 1, |x_2| \le b(x_1), |x_3| \le \min\{b(x_1), b(x_2)\} =: c(x_1, x_2)\Big\} \text{ und}$$

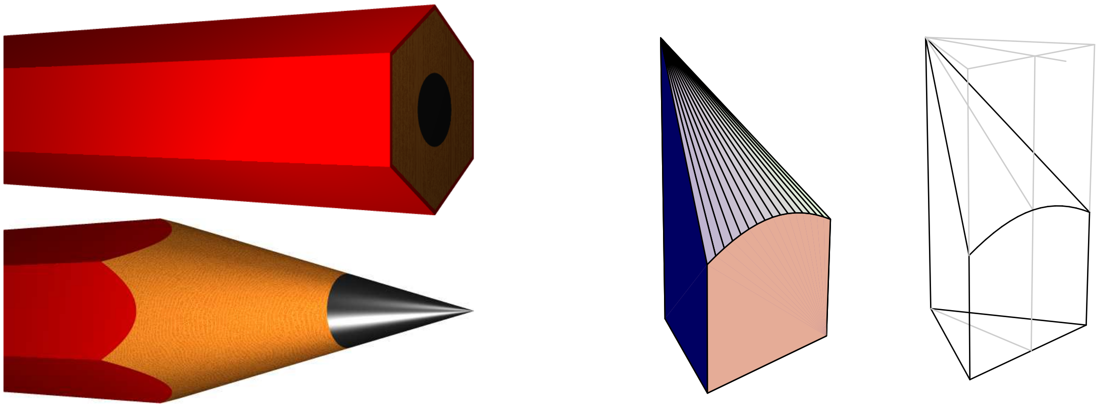
$$\begin{aligned}
|B| &= \int_B d(x_1, x_2, x_3) = \int_{-1}^{1} \int_{-b(x_1)}^{b(x_1)} \int_{-c(x_1,x_2)}^{c(x_1,x_2)} dx_3\, dx_2\, dx_1 \\
&= 8 \int_0^1 \int_0^{b(x_1)} c(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = 16 \int_0^1 \int_0^{\min\{b(x_1), x_1\}} \underbrace{c(x_1, x_2)}_{=b(x_1)}\, dx_2\, dx_1 \\
&= 16 \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{x_1} b(x_1)\, dx_2\, dx_1 + 16 \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_0^{b(x_1)} b(x_1)\, dx_2\, dx_1 \\
&= 16 \int_0^{1/\sqrt{2}} x_1\, b(x_1)\, dx_1 + 16 \int_{1/\sqrt{2}}^{1} b(x_1)^2\, dx_1 \\
&= -\frac{16}{3}\Big[(\sqrt{1 - x_1^2})^3\Big]_{x_1=0}^{1/\sqrt{2}} + 16\Big[x_1 - x_1^3 \frac{1}{3}\Big]_{x_1=1/\sqrt{2}}^{1} = 8(2 - \sqrt{2})
\end{aligned}$$







5 Die Form eines ungespitzten Bleistifts ist ein Zylinder über einen gleichseitigen Sechseck mit Abstand 8mm zwischen parallelen Mantelflächen. Gespitzt wird seine Deckfläche zu einen Teil des Kreiskegels mit Öffnungswinkel $\pi/6$. Wieviel Material wird dabei entfernt?



Auf Grund der sechsfachen Symmetrie genügt es das Volumen des Sechstels

$$B := \{(x,y,z) : 0 \le x \le 4,\ |y| \le x \ \tan\frac{\pi}{6},\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\,\tan\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\Big)\}.$$

zu bestimmen. Es ist $\sqrt{3}/3 = \tan(\pi/6) = \frac{2\tan(\pi/12)}{1-\tan(\pi/12)^2}$, also $\tan(\pi/12) = 2-\sqrt{3}$ und $\tan(\pi/2 - \pi/12) = \frac{1}{\tan(\pi/12)} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$. Somit ist das entfernte Volumen:

$$\begin{aligned}
6|B| &= 6\int_0^4 \int_{-x\sqrt{3}/3}^{+x\sqrt{3}/3} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}(2+\sqrt{3})} dz\,dy\,dx \\
&= 12(2+\sqrt{3}) \int_0^4 \int_0^{x\sqrt{3}/3} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx \\
&= 12(2+\sqrt{3}) \int_0^4 \Big[\frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{2}\log(y+\sqrt{x^2+y^2})\Big]_{y=0}^{y=x\sqrt{3}/3} dx \\
&= 12(2+\sqrt{3}) \int_0^4 \frac{x^2}{6}\sqrt{4} + \frac{x^2}{2}\log\Big(x(\sqrt{3}/3+\sqrt{4/3})\Big) - \frac{x^2}{2}\log(x)\,dx \\
&= 12(2+\sqrt{3}) \int_0^4 \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2}\log(\sqrt{3})\,dx = 12(2+\sqrt{3})\Big(\frac{1}{3}+\frac{\log(3)}{4}\Big)\int_0^4 x^2\,dx \\
&= (2+\sqrt{3})\Big(\frac{1}{3}+\frac{\log(3)}{4}\Big)4^4 \approx 580.973
\end{aligned}$$

7.4 Transformationsverhalten

Bemerkung.
Wir haben in (5.1.4f) gezeigt, daß homöomorphe Bilder von Nullmengen keine Nullmengen zu sein brauchen. In der Folge wollen wir nun Bedingungen angeben, wo dies doch stimmt.

7.4.1 Lemma. Inhalt von Lipschitz-Bildern.
Es sei $g : \mathbb{R}^p \supseteq N \to \mathbb{R}^p$ eine Lipschitz-Abbildung mit Konstante L. Für jedes gleichseitige kompakte Intervall I (ein Würfel) mit Seitenlänge s das N trifft existiert ein gleichseitiges kompaktes Intervall J (ein Würfel) mit $g(I\cap N) \subseteq J$ und $|J| \le (2\,L)^p|I|$.

Beweis. Es sei $x_0 \in I\cap N$. Für jedes $x \in I \cap N$ gilt $\|x-x_0\|_\infty \le s$. Also ist $\|g(x)-g(x_0)\|_\infty \le L\|x-x_0\|_\infty \le L\,s$, d.h. $g(x)$ liegt im Würfel J um $g(x_0)$ mit Seitenlänge $2\,L\,s$. Dieser hat Volumen $|J| \le (2\,L\,s)^p = (2\,L)^p\,|I|$. □

7.4.2 Folgerung. Lipschitz-Bilder von J-Nullmengen.
Lipschitz stetige Bilder von J-Nullmengen sind J-Nullmengen, d.h. $g(N)$ ist eine J-Nullmenge, falls N eine ist und $g : \mathbb{R}^p \supseteq N \to \mathbb{R}^p$ Lipschitz-stetig ist.

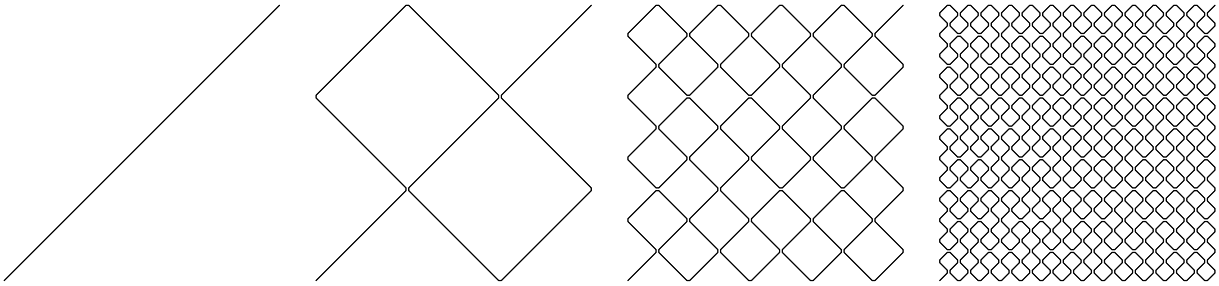
Beweis. Es ist $\int_I \chi_N = 0$ für einen kompakten Würfel I, der N umfaßt. Für $\varepsilon > 0$ sei Z eine äquidistante Zerlegung mit

$$\varepsilon > |O(\chi_N, Z)| = \sum_{\substack{J\in Z\\ J\cap N\neq\emptyset}} |J|.$$

Für jeden solchen Würfel $J \in Z$ wählen wir nach (7.4.1) einen Würfel J' mit $g(J \cap N) \subseteq J'$ und $|J'| \leq (2L)^p|J|$. Dann überdecken die J' ganz $g(N)$ und ihr gesamt-Volumen ist kleiner als $(2L)^p\varepsilon$, also ist $g(N)$ eine Nullmenge. □

7.4.5 Folgerung. Bogen sind Nullmengen.
Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^q$ Lipschitz (oder auch nur rektifizierbar) und $q \geq 2$. Dann ist $c([a, b])$ eine J-Nullmenge. Also ist jede beschränkte Menge deren Rand in einem rektifizierbaren Bogen enthalten ist J-meßbar.

Für Peano-Kurven, d.h. stetige surjektive Abbildungen $c : [0, 1] \to [0, 1]^2$, stimmt diese Folgerung offensichtlich nicht!



Diese Kurve ist als gleichmäßiger Grenzwert der rekursiv definierten Polygonzüge definiert, welche beginnend mit der Diagonale des Einheitsquadrat dadurch entstehen, daß ihre Segmente wie im im ersten Schritt durch die 9 Diagonalen der 9 Teilquadrate ersetzt werden. Die hat offensichtlich dichtes Bild in $[0, 1]^2$ und da dieses kompakt also abgeschlossen ist, ist sie surjektiv.

Beweis. Für Lipschitz-Kurven folgt dies aus (7.4.2), da $[a, b] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine J-Nullmenge ist und $\tilde c : (t, s) \mapsto c(t)$ Lipschitz ist.

Falls c nur rektifizierbar ist, so ist

$$t \mapsto V_a^t(c) := \sup\{\sum_{i=1}^n \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

stetig: Für $a \leq t \leq b$ sei Z eine Zerlegung $t = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ von $[t, b]$ mit $V_t^b(c) < V(c, Z) + \frac{\varepsilon}{2}$ und für $t = t_0 < t' < t_1$ so nahe, daß $\|c(t') - c(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und der Zerlegung Z' gegeben durch $t < t' < t_1 < \cdots < t_n$ gilt

$$V_t^b(c) - \frac{\varepsilon}{2} < V(c, Z) \leq V(c, Z') \leq V_{t'}^b(c) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ also } 0 \leq V_a^{t'}(c) - V_a^t(c) = V_t^{t'} = V_t^b(c) - V_{t'}^b(c) < \varepsilon,$$

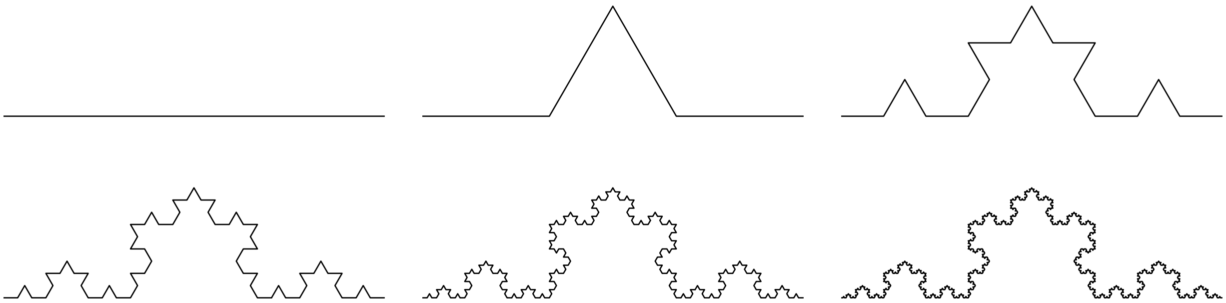
d.h. $t \mapsto V_a^t(c)$ ist rechts-stetig. Links-Stetigkeit folgt indem wir die rechts-Stetigkeit der Kurve $\overline{c} : t \mapsto c(-t)$ verwenden.

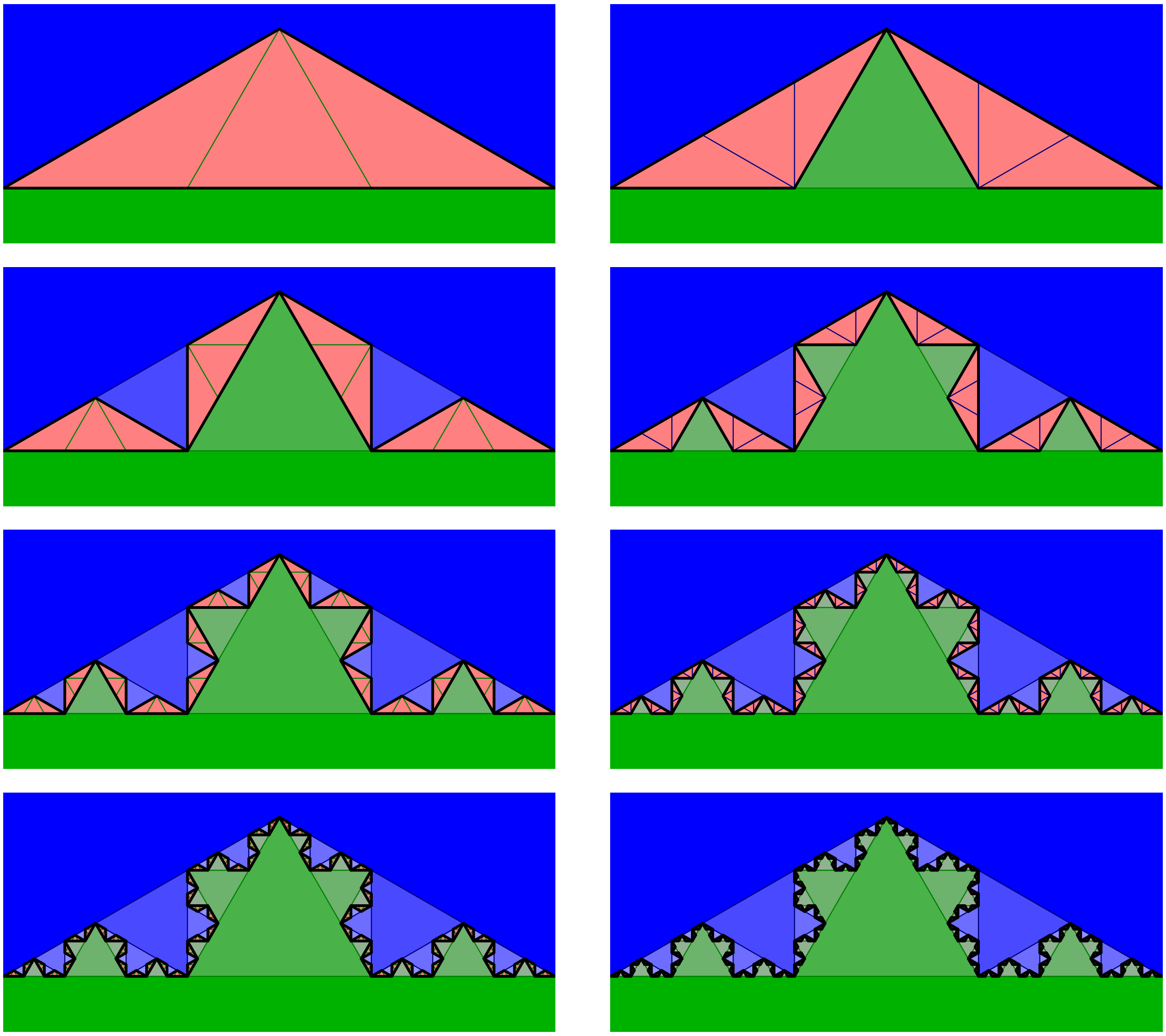
Nach dem Zwischenwertsatz können wir somit eine Zerlegung $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ so wählen, daß $V_{t_{i-1}}^{t_i}(c) = \frac{1}{n} V_a^b(c) =: \frac{L}{n}$. Dann gilt für $t \in [t_{i-1}, t_i]$, daß $\|c(t) - c(t_{i-1})\| \leq V_{t_{i-1}}^{t_i}(c)$, also ist $c(t)$ im Würfel J_i um $c(t_{i-1})$ mit Seitenlänge $\frac{2L}{n}$ und Volumen $\left(\frac{2L}{n}\right)^q$. Das Gesamtvolumen ist dann

$$n\left(\frac{2L}{n}\right)^q = (2\,L)^q\,\frac{1}{n^{q-1}} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

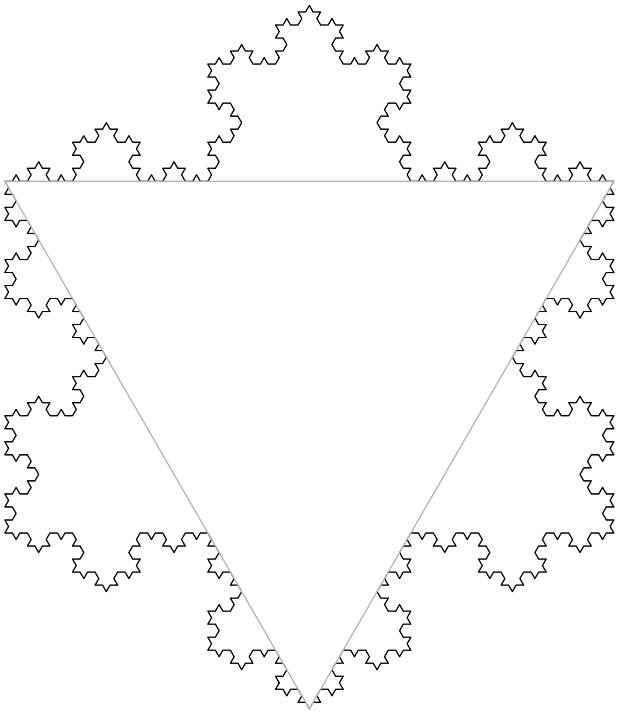
Die letzte Aussage folgt aus (7.2.4). □

7.4.5a Beispiel.
Die Koch'sche Kurve ist zwar nicht rektifizierbar, denn ihre Länge nimmt in jeden Schritt um den Faktor $\frac{4}{3}$ zu, begrenzt aber doch eine meßbare Fläche, denn die kritische rote Fläche nimmt in jeden Schritt um den Faktor $\frac{2}{3}$ ab.





Die inneren Polygone entstehen dadurch, daß jedes Segment in drei Teile geteilt wird, und das mittlere Segment durch die beiden anderen Seiten des darauf nach außen errichteten gleichseitigen Dreiecks ersetzt wird. Die äußeren Polygone entstehen auf die gleiche art, wobei die Seiten des nach innen gerichteten gleichseitigen Dreiecks verwendet werden.



Wir können den äußeren und den inneren Inhalt auch explizit abschätzen. Der Inhalt des ersten von Innen approximierenden Polygonzugs (ein Dreieck) ist $A = 1^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Im nächsten Schritt werden an jede seiner 3 Seiten jeweils ein Dreieck mit Fläche $A/9$ hinzugefügt. Im darauffolgenden Schritt an den nun $3 * 4$ vielen Seiten jeweils ein Dreieck mit Fläche $A/9^2$, u.s.w.. Als Grenzwert ergibt sich somit

$$U(B) \geq A + 3 \cdot \frac{A}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{A}{9^2} + \cdots + 3 \cdot A \cdot \frac{4^n}{9^{n+1}} + \cdots = A \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = A \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5}\right) = \frac{8}{5} \cdot A.$$

Der Inhalt des ersten von außen approximierenden Polygonzuges (ein Sechseck) ist $A \cdot (1 + 3 \cdot \frac{1}{3}) = 2A$. Im nächsten Schritt werden an jeder der 6 Seiten jeweils ein Dreicek mit Fläche $\frac{1}{27} \cdot A$ abgezogen. Im darauffolgenden Schritt an den nun $6 * 4$ vielen Seiten jeweils ein Dreieck mit Fläche $A \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{9}$, u.s.w. Als Grenzwert ergibt sich somit

$$O(B) \leq A \cdot 2 - 6 \cdot \frac{1}{27} \cdot A - 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{9} \cdot A - \cdots = A \cdot \left(2 - \frac{6}{27} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = A \cdot \left(2 - \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5}\right) = \frac{8}{5} \cdot A.$$

Also ist $O(B) = U(B) = \frac{8}{5} \cdot A$ und somit B meßbar mit Inhalt $\frac{8}{5} \cdot A$.

7.4.3 Definition. Stetig-Differenzierbarkeit.
Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^p \supseteq B \to \mathbb{R}^q$ auf einer beliebigen Teilmenge B von $\mathbb{R}^p$ heißt STETIG DIFFERENZIERBAR (kurz C^1) falls eine C^1-Erweiterung $\tilde{g} : \mathbb{R}^p \supseteq U \to \mathbb{R}^q$ mit offenen $U \supseteq B$ existiert.

7.4.4 Folgerung. C^1-Bilder von J-Nullmengen.
Es sei $g : \mathbb{R}^p \supseteq N \to \mathbb{R}^p$ C^1 und N eine kompakte J-Nullmenge. Dann ist $g(N)$ eine J-Nullmenge.

Beweis. Wegen (7.4.2) genügt zu zeigen, daß g auf N Lipschitz ist. Angenommen $\exists\, x_n \neq y_n \in N$ mit $\frac{\|g(x_n)-g(y_n)\|}{\|x_n-y_n\|} \to \infty$. Da N kompakt ist, dürfen wir annehmen, daß $\exists\, x_\infty := \lim_n x_n$. Da $g(N)$ kompakt und somit beschränkt ist muß der Zähler beschränkt und damit der Nenner gegen 0 gehen, also auch $\lim_n y_n = x_\infty$ sein. In der Nähe von x_∞ ist die C^1-Abbildung $\tilde{g}$ aber Lipschitz wegen des Hauptsatzes (5.6.17), da g' lokal beschränkt ist:

$$\|g(x) - g(y)\| \overset{(5.6.17)}{=\!=} \left\| \int_0^1 g'(y + t(x-y))(x-y)\,dt \right\| \le \int_0^1 \|g'(y+t(x-y))\| \cdot \|x-y\|\,dt$$
$$\le \sup\{\|g'(y+t(x-y))\| : t \in [0,1]\} \cdot \|x-y\|. \quad \square$$

7.4.6a Bemerkung. Vertauschen stetiger Abbildungen mit Rand, Abschluß und Innerem.
Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y.

Es sei $B \subseteq Y$. Dann ist $\overline{B} \subseteq Y$ abgeschlossen und somit auch $f^{-1}\big(\overline{B}\big) \subseteq X$ abgeschlossen, sei nämlich $x_n \in f^{-1}\big(\overline{B}\big)$ mit $x_n \to x_\infty \in X$. Dann liegt $f(x_n) \in \overline{B}$ und $f(x_n) \to f(x_\infty)$ also auch $f(x_\infty) \in \overline{B}$, da $\overline{B}$ abgeschlossen ist, und somit $x_\infty \in f^{-1}\big(\overline{B}\big)$.

Wegen $B \subseteq \overline{B}$ ist $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}\big(\overline{B}\big)$ und damit auch $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\big(\overline{B}\big)$.

Diese Aussage ist äquivalent zu $f\big(\overline{f^{-1}(B)}\big) \subseteq \overline{B}$.

Sei nun $A \subseteq X$ und $B := f(A)$, dann erhalten wir $\overline{f(A)} = \overline{B} \supseteq f\big(\overline{f^{-1}(B)}\big) = f\big(\overline{f^{-1}(f(A))}\big) \supseteq f\big(\overline{A}\big)$.

Für das Innere und den Rand habe wir keine analogen Aussagen. Betrachte den Rand betreffend z.B. $f := \sin$ und $A = [0, 3\pi/2]$. Dann ist $\partial A = \{0, 3\pi/2\}$ und $f(\partial A) = \{0, -1\}$ und weiters $f(A) = [-1,1]$ und $\partial(f(A)) = \{-1, 1\}$.

Falls f injektiv ist, so ist $f(\partial A) \subseteq \partial(f(A))$, denn $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, wobei A^c das Komplement $X \setminus A$ von A in X bezeichnet, und somit ist $f(\partial A) = f\big(\overline{A} \cap \overline{A^c}\big) \subseteq f\big(\overline{A}\big) \cap f\big(\overline{A^c}\big) \subseteq \overline{f(A)} \cap \overline{f(A^c)} \subseteq \overline{f(A)} \cap \overline{f(A)^c} = \partial(f(A))$, denn $f(A^c) \subseteq f(A)^c$, da für injektives f die Beziehung $f(A^c) \cap f(A) = f(A^c \cap A) = f(\emptyset) = \emptyset$ gilt.

Diese Inklusion hilft uns bei der Meßbarkeit von $f(A)$ allerdings nichts, außer f ist ein Homöomorphismus.

Für bijektives f ist $f(A^o) \supseteq f(A)^o$, denn $f(A^o) = f\big(\overline{A^c}^{\,c}\big) = f\big(\overline{A^c}\big)^c \supseteq \overline{f(A^c)}^{\,c} = \overline{f(A)^c}^{\,c} = f(A)^o$, da $f(A^c) = f(A)^c$ für bijektives f gilt.

Die wichtigsten Substitutionsfunktionen sind zumeist nicht überall injektiv und auch nicht überall lokale Diffeomorphismen. Denke z.B. an Polarkoordinaten als Abbildung auf eine Kreisscheibe mit Radius r, d.h. von $[0,r] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$. Darum formulieren wir folgenden Satz unter Zuhilfenahme einer J-Nullmenge N als Ausnahmemenge.

7.4.6 Satz. Bilder meßbarer Mengen.
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt J-meßbar und $g : B \to \mathbb{R}^p$ C^1. Es sei $N \subseteq B$ eine J-Nullmenge mit $g'(x)$ invertierbar für alle $x \in B \setminus N$. Dann ist $g(B)$ J-meßbar.

Falls g zu einem Diffeomorphismus auf eine Umgebung von B erweiterbar ist, so ist dieser Satz wegen (7.2.4) trivial, denn dann ist $\partial(g(B)) = g(\partial B)$ eine J-Nullmenge nach (7.4.4).

Beweis. B J-meßbar $\overset{(7.2.4)}{\Rightarrow}$ ∂B J-Nullmenge $\Rightarrow$ O.B.d.A. $N \supseteq \partial B$ und N kompakt. (7.4.4) $\Rightarrow$ $g(N)$ J-Nullmenge, kompakt, $\partial(g(B)) \subseteq g(B) = g(N) \cup g(B \setminus N)$. Offensichtlich ist $B \setminus N = B^o \cap (\mathbb{R}^p \setminus N)$ offen und da $g'(x)$ invertierbar für alle $x \in B \setminus N$ ist, ist g ein lokaler Diffeomorpismus auf $B \setminus N$ also auch $g(B \setminus N) \subseteq g(B)$ offen und damit $g(B \setminus N) \cap \partial(g(B)) = \emptyset$, also $\partial(g(B)) \subseteq g(N)$ ebenfalls eine J-Nullmenge und somit $g(B)$ J-meßbar nach (7.2.4). $\square$

7.4.7 Idee der Substitutionsregel (für mehrdimensionale Integrale).
In (5.2.3) hatten wir die Substitutionsformel

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

aus der Kettenregel (4.1.14) mittels Hauptsatz (5.2.2) erhalten. Dies läßt sich nicht ohne weiters aufs mehrdimensionale übertragen, denn selbst stetige $f : \mathbb{R}^p \supseteq B \to \mathbb{R}$ können wir nicht als Ableitung von Funktionen $F : B \to \mathbb{R}$ schreiben (diese sind nämlich Abbildungen $F' : B \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$) und überhaupt haben wir noch kein Pendant zum Hauptsatz zur Verfügung.

Um dennoch eine Idee zu bekommen, wie sich mehrdimensionale Integrale unter Substitutionen g transformieren betrachten wir ein Rechteck $B \subseteq \mathbb{R}^2$, eine C^1-Abbildung $g : B \to \mathbb{R}^2$ C^1 und eine stetige Funktion $f : g(B) \to \mathbb{R}$. Es sei Z eine Zerlegung von B. Das Bild eines Teilungsrechtecks $I_{i,j} := [t_i, t_i + 1] \times [s_j, s_{j+1}]$ hat annähernd die Fläche des von $g(t_{i+1}, s_j) - g(t_i, s_j)$ und $g(t_i, s_{j+1}) - g(t_i, s_j)$ erzeugten Parallelogramms, also

$$\begin{aligned}\det\Big(g(t_{i+1}, s_j) - g(t_i, s_j), g(t_i, s_{j+1}) - g(t_i, s_j)\Big) \approx&\\ \approx (t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j) \det\Big(\partial_1 g(t_i, s_j), \partial_2 g(t_i, s_j)\Big) =&\\ = (t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j) \det(g'(t_i, s_j)).&\end{aligned}$$

Beachte dabei, daß die (elementar geometrische) Fläche des von zwei Vektoren a und b erzeugten Parallelogramms gerade die Länge des einen Vektors a mal der Länge $\langle b| \frac{1}{\|a^\perp\|} a^\perp\rangle$ der Projektion des anderen Vektors b auf den Normalvektor $a^\perp$ ist, also gerade $\|a\| \cdot \langle b| \frac{1}{\|a^\perp\|} a^\perp\rangle = \langle b|a^\perp\rangle = \det(a, b)$. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_{g(B)} f &\approx \sum_{i,j} f(g(t_i, s_j))\, |\det(g'(t_i, s_j))|\, (t_{i+1} - t_i)\, (s_{j+1} - s_j)\\ &\approx \int_B f(g(t, s))\, |\det(g'(t, s))|\, d(t, s).\end{aligned}$$

Dies läßt uns folgende Transformationsformel erwarten:

7.4.8 Theorem. Substitutionsformel.
$K \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und J-meßbar, $g : K \to \mathbb{R}^p$ C^1, $N \subseteq K$ eine J-Nullmenge, $g|_{K\setminus N}$ injektiv, $x \mapsto \operatorname{sign}(\det(g'(x)))$ konstant und nicht 0 auf $K \setminus N$, sowie $f : g(K) \to \mathbb{R}$ stetig.

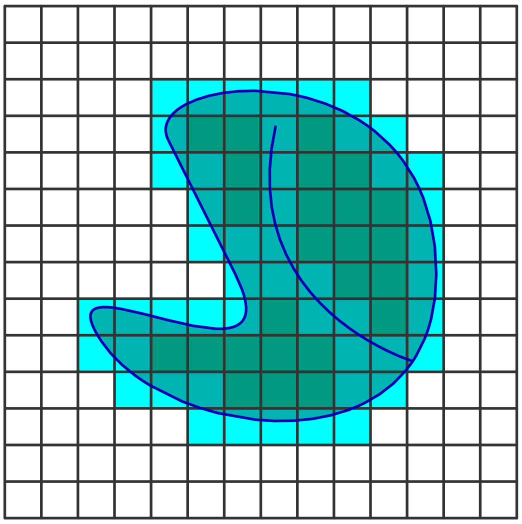
Dann ist $g(K)$ J-meßbar, f integrierbar auf $g(K)$ und es gilt folgende TRANSFORMATIONSFORMEL

$$\int_{g(K)} f(y)\, dy = \int_K f(g(x))\, |\det(g'(x))|\, dx.$$

Beweis. 1. Schritt. Existenz/Integrierbarkeit.
(7.4.6) $\Rightarrow$ $g(K)$ J-meßbar; $g(K)$ kompakt; $f \in C \Rightarrow f|_{g(K)}$ beschränkt; (7.2.7) $\Rightarrow$ f integrierbar auf $g(K)$.
$f \circ g \in C$, $g' \in C \Rightarrow f_g : x \mapsto f(g(x))\, |\det(g'(x))|$ integrierbar auf K. Da ∂K eine J-Nullmenge ist können wir auch o.B.d.A. annehmen, daß $\partial K \subseteq N$ gilt.

2. Schritt. Lokalisierung – Vereinfachung der Integrationsbereichs.
Wir wollen nun beweisen, daß es genügt die Gleichung für alle (hinreichend kleinen) kompakten Intervalle $J \subseteq K \setminus N$ zu zeigen.

Sei also letzters vorausgesetzt. Es sei $g : U \to \mathbb{R}^p$ C^1 mit $U \supseteq K$ offen und $\delta := d_\infty(K, \mathbb{R}^p \setminus U)$. Sei nun Z eine Zerlegung eines kompakten Intervalls $I \supseteq K$ mit $|Z| < \delta$. Insbesonders hat jedes kompakte Intervall $J \in Z$ Durchmesser $< \delta$ und wenn es K trifft so liegt es somit ganz in U. Da g auf U C^1 ist und $J \subseteq U$ kompakt und konvex ist, ist $g|_J$ Lipschitz mit Konstante $\|g'|_J\|_\infty$. Weiters sei



$$S := \bigcup\{J : J \in Z, J \subseteq K \setminus N\} \subseteq K \setminus N$$
$$R := \bigcup\{J : J \in Z, J \cap N \neq \emptyset\} \subseteq U$$

Beh.: $K \setminus R \subseteq S$: Es sei $x \in K \setminus R$. Dann existiert ein $J \in Z$ mit $x \in J$ und wegen $x \notin R$ ist $J \not\subseteq R$, also $J \cap N = \emptyset$ und damit auch $J \cap \partial K = \emptyset$. Damit ist aber $J \subseteq K$, denn andernfalls existiert ein $x' \in J \setminus K$. Seit $t_0 := \max\{t \in [0,1] : x + t(x'-x) \in K\}$ (existiert, da K kompakt und $t \mapsto x + t(x'-x)$ stetig ist) und $x_0 := x + t_0(x'-x)$. Dann ist $x_0 \in \partial K \cap J$, ein Widerspruch. Somit ist $J \subseteq K \cap N^c = K \setminus N \subseteq S$.

Folglich ist $K \subseteq K \cup R = (K \setminus R) \cup R \subseteq S \cup R$ und damit auch $K \setminus S \subseteq R \setminus S \subseteq R$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. O.B.d.A. ist $|R| < \varepsilon$, da N eine J-Nullmenge ist. Da jedes J von S die Vereinigung aller übrigen Intervalle von S nur in einer J-Nullmenge schneidet, ist $\int_S = \sum_J \int_J$. Nach (7.4.4) ist auch das Bild unter g eine J-Nullmenge, und da g injektiv auf S ist, stimmt dies mit dem Durchschnitt der Bilder überein, also ist $\int_{g(S)} = \sum_J \int_{g(J)}$. Für jedes J gilt nach Voraussetzung Gleichheit, also auch für S, d.h.

$$\int_{g(S)} f(y)\, dy = \int_S f(g(x))\, |\det(g'(x))|\, dx,$$

Es ist $K \setminus S \subseteq R$, denn $J \cap K \neq \emptyset$ und $J \not\subseteq K \setminus N \Rightarrow J$ trifft K und auch $\sim K$, also auch $\partial K \subseteq N$, ein Widerspruch. $\Rightarrow |K \setminus S| \leq |R| < \varepsilon$. Da g auf jedem Quader $J \in Z$ von $R \cup S$ Lipschitz mit Konstante $L := \|g'|_{R\cup S}\|_\infty$ ist, und wegen $g(K) \setminus g(S) \subseteq g(K \setminus S) \subseteq g(R)$ gilt $|g(K) \setminus g(S)| \leq |g(R)| \leq (2L)^p |R| < (2\|g'\|_\infty)^p \varepsilon$ nach (7.4.2). Mit $f_g(x) := f(g(x))\, |\det(g'(x))|$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\left| \int_{g(K)} f - \int_K f_g \right| &\stackrel{(7.2.13)}{=\!=} \left| \int_{g(K)\setminus g(S)} f + \overbrace{\int_{g(S)} f - \int_S f_g}^{=0} - \int_{K\setminus S} f_g \right| \\
&\leq \left| \int_{g(K)\setminus g(S)} f \right| + \left| \int_{K\setminus S} f_g \right| \\
&\leq \Big(\underbrace{|g(K) \setminus g(S)|}_{<(2L)^p\, \varepsilon} + \underbrace{|K \setminus S|}_{<\varepsilon} \Big) \max\Big\{ \underbrace{\|f\|_{g(K)\setminus g(S)}\|_\infty}_{\leq \|f\circ g|_K\|_\infty}, \underbrace{\|f_g|_{K\setminus S}\|_\infty}_{\leq \|f_g|_K\|_\infty} \Big\} \\
&\leq \varepsilon\, ((2L)^p + 1)\, \max\{\|f_g|_K\|_\infty, \|f \circ g|_K\|_\infty\}.
\end{aligned}$$

3. Schritt. Induktionsanfang.

Sei nun $K = I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ ein kompaktes Intervall, $N = \emptyset$ und $g : K \to \mathbb{R}^p$ sei von der Form $g(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_{p-1}, g_p(x))$.

Wir verwenden folgende Bezeichungen $x' := (x_1, \ldots, x_{p-1})$ und $I' := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{p-1}, b_{p-1}]$. Es hat $\det g'(x) = \partial_p g_p(x)$ nach Voraussetzung konstantes Vorzeichen $\neq 0$, also o.B.d.A. $+1$. Folglich ist $x_p \mapsto g(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ streng monoton wachsend und stetig und nach dem Zwischenwertsatz ist damit

$$g(I) = \{y : a_1 \leq y_1 \leq b_1, \ldots, a_{p-1} \leq y_{p-1} \leq b_{p-1}, g_p(y_1, \ldots, y_{p-1}, a_p) \leq y_p \leq g_p(y_1, \ldots, y_{p-1}, b_p)),$$

die Ordinatenmenge bzgl. der Grenzen $x' \mapsto g_p(x', a_p)$ und $x' \mapsto g_p(x', b_p)$. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_I f(g(x))\,|\det(g'(x))|\,dx &= \int_I f(g(x))\,\partial_p g_p(x)\,dx \\
&\underline{\underline{\text{(7.1.11)}}} \int_{I'} \int_{a_p}^{b_p} f(x_1, \dots, x_{p-1}, g_p(x))\,\frac{\partial g_p(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p)}{\partial x_p}\,dx_p\,dx_{p-1} \dots dx_1 \\
&\underline{\underline{\text{1-dim}}} \int_{I'} \int_{g_p(x', a_p)}^{g_p(x', b_p)} f(x', y_p)\,dy_p\,dx' \\
&\underline{\underline{\text{(7.3.3)}}} \int_{g(I)} f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

4. Schritt. Faktorisierung.
Es sei $g : \mathbb{R}^p \supseteq U \to \mathbb{R}^p$ C^1, $p > 1$, $x_0 \in U$ mit $g'(x_0)$ invertierbar. Dann existiert eine Umgebung $W \subseteq U$ von x_0 und injektive C^1-Funktionen $\psi : W \to \mathbb{R}^p$, $\bar{g} : \mathbb{R}^p \supseteq \psi(W) \to \mathbb{R}^p$, mit $\psi(W)$ offen und $g|_W = \bar{g} \circ \psi$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^p \\
W \arrow[u, hook, "\mathrm{incl}"] \arrow[r, tail, "\psi", "\cong"'] & \psi(W) \arrow[u, tail, "\bar{g}"']
\end{tikzcd}$$

Weiters ist eine Koordinate von ψ und alle anderen von $\bar{g}$ die Identität.
Da $\det(g'(x_0)) \neq 0$ muß nach Entwicklung nach der letzten Spalte zumindest eine $(p-1) \times (p-1)$-Unterdeterminante ungleich Null sein, o.B.d.A. (Umordnen der Werte-Koordinaten) sei dies die linke obere. Es sei $\psi(x) := (g_1(x), \dots, g_{p-1}(x), x_p)$, dann ist ψ C^1 und $\det(\psi'(x_0)) \neq 0$. Nach dem Satz (6.2.2) über inverse Funktionen existiert eine Umgebung W von x_0, auf welcher ψ ein Diffeomorphismus ist. Es sei $\bar{g} := g \circ (\psi|_W)^{-1}$, dann ist $\bar{g}$ C^1 und $\bar{g} \circ \psi|_W = g \circ (\psi|_W)^{-1} \circ \psi|_W = g|_W$. Also ist für $z \in \psi(W)$ und $x := (\psi|_W)^{-1}(z) \in W$:

$$\begin{aligned}
(z_1, \dots, z_p) = z = \psi(x) &= (g_1(x), \dots, g_{p-1}(x), x_p), \\
\bar{g}(z_1, \dots, z_p) = \bar{g}(z) = \bar{g}(\psi(x)) = g(x) &= (g_1(x), \dots, g_{p-1}(x), g_p(x)) \\
&= (z_1, \dots, z_{p-1}, g_p((\psi|_W)^{-1}(z))).
\end{aligned}$$

Da g injektiv und ψ ein Diffeomorphismus auf W ist, ist auch $\bar{g}$ injektiv.

5. Schritt. Reduktion auf das 1-dimensionale.
Es verbleibt die Gleichung für ein kompaktes Intervall K und allgemeines $g : K \to \mathbb{R}^p$ mit $N = \emptyset$ mittels Induktion nach der Dimension p zu zeigen.
Den Induktionsanfang ($p = 1$) haben wir in Schritt 3 erledigt. Für den Induktionsschritt existiert nach (7.1.2) eine Zerlegung Z von K in kompakte Intervalle auf denen g wie in Schritt 4 in $g = \bar{g} \circ \psi$ zerlegt werden kann. Nach Schritt 2 genügt es den Satz für jeden Teilquader $J \in Z$ zu zeigen. Es sei

$J = J' \times J_p$ mit 1-dimensionalen J_p so gilt

$$\begin{aligned}
\int_{g(J)} f(y)\,dy &= \int_{\bar g(\psi(J))} f(y)\,dy \\
&\overset{\text{Schritt 3 und 2}}{=\!=\!=} \int_{\psi(J)} \underbrace{f(\bar g(x))\,|\det(\bar g'(x))|}_{F(x)}\,dx \overset{\text{Def}}{=} \int_{\psi(J)} F(x',x_p)\,d(x',x_p) \\
&\overset{(7.1.11)}{=\!=\!=} \int_{J_p}\int_{\mathbb{R}^{p-1}} \widetilde{F}^{\psi(J)}(x',x_p)\,dx'\,dx_p = \int_{J_p}\int_{\psi(J',x_p)} F(x',x_p)\,dx'\,dx_p \\
&\overset{\text{I.A.}}{=\!=} \int_{J_p}\int_{J'} F(\psi(x',x_p))\,|\det(\psi'(x',x_p))|\,dx'\,dx_p \\
&\overset{(7.1.11)}{=\!=\!=} \int_{J'\times J_p} \underbrace{F(\psi(x))}_{f(\bar g(\psi(x)))\,|\det(\bar g'(\psi(x))|}\,|\det(\psi'(x))|\,dx \\
&= \int_J f(g(x))\,|\det(g'(x))|\,dx. \quad \square
\end{aligned}$$

7.4.9 Vergleich mit der 1-dimensionalen Substitutionsformel.
Im Falle $p = 1$ und $K := [a,b]$ ist nach der 1-dimensionalen Substitutionsregel (5.2.3)

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx.$$

In der Substitutionsformel (7.4.7)

$$\int_{g(K)} f(y)\,dy = \int_K f(g(x))\,|\det(g'(x))|\,dx$$

ist in diesen Fall $g'(x) \in L(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ also det überflüssig, und wenn $g(a) < g(b)$ so auch der Betrag und $g(K) = [g(a), g(b)]$, also $\int_{g(K)} = \int_{g(a)}^{g(b)}$. Ist hingegen $g(a) > g(b)$, also $g'(x) < 0$, so ist $|\det(g'(x))| = -g'(x)$ und $g(K) = [g(b), g(a)]$ also $\int_{g(K)} = \int_{g(b)}^{g(a)} = -\int_{g(a)}^{g(b)}$.
Beachte, daß der Transformationssatz für Dimension $p = 1$ schwächer als die Substitutionsformel aus (5.2.3.5) ist, denn dort war weder Injektivität noch Invertierbarkeit der Ableitung gefordert und z.B.

$$\int_{-1}^{1} f(x^2)\,2\,x\,dx = \int_{(-1)^2}^{1^2} f(y)\,dy = 0.$$

7.4.10 Polarkoordinaten.
Die Transformation von polar- auf Kartesische Koordinaten ist

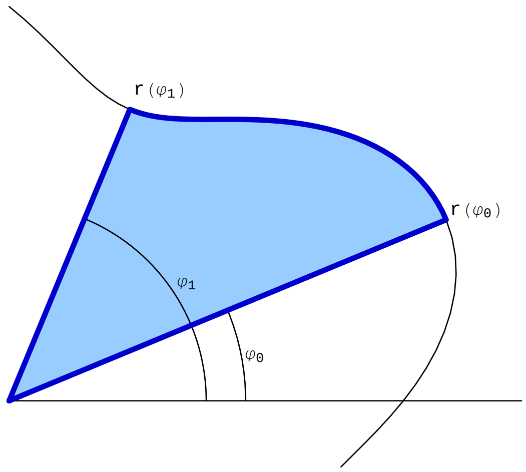
$$g : (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Sie ist injektiv auf $(0,+\infty) \times [0,2\pi)$ und für ihre Jacobi-Matrix gilt:

$$\det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix} = r(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) = r.$$

Speziell für den Sektor $B := g(\{(r,\varphi) : \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, 0 \le r \le r(\varphi)\})$ ist

$$|B| = \int_B 1 \overset{(7.4.8)}{=\!=\!=} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^{r(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2\,d\varphi.$$



Insbesonders erhalten wir für die Fläche einer Kreisscheibe B mit Radius r bequem:

$$|B| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi = r^2\,\pi.$$

7.4.11 Zylinderkoordinaten.
Die Transformation von Zylinder- auf Kartesische Koordinaten ist

$$g : (r, \varphi, z) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z).$$

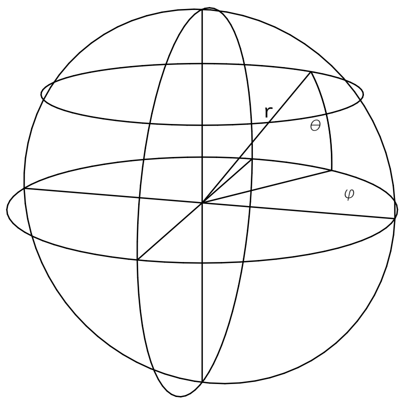
Sie ist injektiv auf $(0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und für ihre Jacobi-Matrix gilt:

$$\det\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = r(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) = r.$$

7.4.12 Kugelkoordinaten.
Die Transformation von Kugel- auf Kartesische Koordinaten ist

$$g : (r, \varphi, \vartheta) \mapsto (r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)),$$

wobei φ die geographische Länge und ϑ die geographische Breite bezeichnet.



Sie ist injektiv auf $(0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$ und für ihre Jacobi-Matrix gilt:

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cos(\vartheta) & -r\sin(\varphi)\cos(\vartheta) & -r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\\ \sin(\varphi)\cos(\vartheta) & r\cos(\varphi)\cos(\vartheta) & -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)\\ \sin(\vartheta) & 0 & r\cos(\vartheta)\end{pmatrix}=\\
&=\sin(\vartheta)\Big(r^2\sin(\varphi)^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)+r^2\cos(\varphi)^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big)+\\
&\qquad+r\cos(\vartheta)(r\cos(\varphi)^2\cos(\vartheta)^2+r\sin(\varphi)^2\cos^2\vartheta)\\
&=r^2(\sin(\vartheta)^2\cos(\vartheta)+\cos(\vartheta)^3)=r^2\cos(\vartheta).
\end{aligned}$$

Insbesonders erhalten wir für das Volumen einer Kugel B mit Radius R:

$$\begin{aligned}
|B|&=\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r^2\,\cos(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi\,dr=\int_0^R r^2\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\vartheta)\,d\vartheta\\
&=\frac{R^3}{3}\,2\pi\left(\sin(\frac{\pi}{2})-\sin(-\frac{\pi}{2})\right)=\frac{4\pi}{3}\,R^3.
\end{aligned}$$

7.4.13 Beispiel. Volumen des Parallelipipeds.
Es sei B das Parallelepiped, welches von den Vektoren $v_1,\dots,v_p$ aufgespannt wird, also die Menge

$$B:=\Big\{\sum_{k=1}^p t_k\,v_k : 0\le t_k\le 1 \text{ für alle } 1\le k\le p\Big\}.$$

Dann ist das Volumen von B gegeben durch

$$|B|=|\det(v_1,\dots,v_p)|.$$

In der Tat ist B das Bild des Einheitsintervalls $I:=[0,1]^p$ unter der linearen Abbildung $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$, $(t_1,\dots,t_p)\mapsto\sum_{k=1}^p t_k\,v_k$. Somit ist $g'(x)=g$ mit Matrixdarstellung $[g]=(v_1,\dots,v_p)$ und nach der Transformationsformel (7.4.7) ist

$$|B|=\int_{g(I)}1=\int_I 1(g(x))\,|\det(g'(x))|\,dx=\int_I|\det(v_1,\dots,v_n)|=|\det(v_1,\dots,v_n)|.$$

7.4.14 Newton Potential einer Kugel.
Die Gravitationskraft die ein Körper mit Punktmasse m_0 auf eine anderen Körper mit Punktmasse m_1 im Abstand r ausübt ist vermöge Gravitationskonstante G proportional zu $\frac{m_0 m_1}{r^2}$. Befindet sich also ein Massepunkt im Ursprung und der andere im Punkt $x\in\mathbb{R}^3$ so ist die Kraft die der erste auf den zweiten ausübt

$$F(x):=G\frac{m_0m_1}{\|x\|^2}\,\frac{-x}{\|x\|}=-\frac{Gm_0m_1}{\|x\|^3}x.$$

Dieses Vektorfeld F besitzt auf $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ ist ein Gradientenfeld, denn es besitzt das Newton-Potential $U:x\mapsto\frac{Gm_0m_1}{\|x\|}$ als zugehöriges Potential. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\langle\operatorname{grad}U(x)|v\rangle:=U'(x)(v)&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{Gm_0m_1}{\|x+tv\|}\\
&=Gm_0m_1\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{1}{\|x+tv\|}=Gm_0m_1\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{1}{\sqrt{\langle x+tv|x+tv\rangle}}\\
&=-\frac{Gm_0m_1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\langle x|x\rangle^3}}\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle x+tv|x+tv\rangle\\
&=-\frac{Gm_0m_1}{2}\,\frac{1}{\|x\|^3}\Big(\Big\langle\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x+tv)\;\Big|\;x\Big\rangle+\Big\langle x\;\Big|\;\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(x+tv)\Big\rangle\Big)\\
&=-\frac{Gm_0m_1}{2}\,\frac{1}{\|x\|^3}(\langle v|x\rangle+\langle x|v\rangle)=-Gm_0m_1\frac{\langle x|v\rangle}{\|x\|^3}=\langle F(x)|v\rangle.
\end{aligned}$$

Insbesonders ist also die Arbeit $\int_c F$ die wir längs eines Weges c im Kraftfeld F leisten müssen nach (6.5.8) vom Weg unabhängig.

Seien nun mehrere Massepunkte mit Massen $m_1, \dots, m_p$ in den Punkten $x_1, \dots, x_p$ gegeben. Dies üben dann auf einen Massepunkt in x mit Masse $m_0 = 1$ die Summe der Teilkräfte, also

$$F = -G \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{\|x - x_i\|^3} (x - x_i)$$

aus. Das zugehörige (Gravitations-)Potential ist dann

$$U(x) = G \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{\|x - x_i\|}.$$

Ist nun ein Körper $A \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Dichteverteilung $\rho : A \to \mathbb{R}^+$ gegeben und Z eine Zerlegung in Quader J auf welchen ρ fast konstant ($= \rho(\xi_J)$) ist, also mit Masse $\rho(\xi_J)\,|J|$. Seine Anziehungskraft auf einen Massepunkt im Punkt x ist dann näherungsweise durch

$$F(x) \approx -G \sum_{J \in Z} \frac{\rho(\xi_J)\,|J|}{\|x - \xi_J\|^3}(x - \xi_J) \approx -G \int_A \frac{\rho(z)}{\|x - z\|^3}(x - z)\,dz$$

gegeben, also dürfen wir

$$F(x) = -G \int_A \frac{\rho(z)}{\|x - z\|^3}(x - z)\,dz$$

erwarten (ein $\mathbb{R}^3$-wertiges Integral, welches wir z.B. komponentenweise definieren können) mit zugehörigen Potential

$$U(x) = G \int_A \frac{\rho(z)}{\|x - z\|}\,dz,$$

denn

$$U'(x)(v) \overset{(7.2.15)}{=\!=\!=} G \int_A \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\rho(z)}{\|x + tv - z\|}\,dz = -G \int_A \rho(z) \frac{\langle x - z | v \rangle}{\|x - z\|^3}\,dz = \langle F(x) | v \rangle.$$

Das Newton-Potential einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^3$ mit konstanter Dichte ρ ist die Funktion $x \mapsto U_A(x) := G\,\rho \int_A \frac{1}{\|x-y\|}\,dy$ definiert für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus A$.

Wir behaupten, daß für die Kugel A mit Mittelpunkt 0 und Radius R das Potential $U_A(x)$ gleich dem Potential $G\,\rho\,|A|\,\frac{1}{\|x\|}$ der im Mittelpunkt der Kugel konzentrierten Masse ist.

Wegen der Rotationssymmetrie können wir $x = (0, 0, a)$ mit $a = \|x\| > R$ annehmen. Also ist

$$U_A(x, y, z) = G\,\rho \int_A \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + (-y)^2 + (a - z)^2}}\,d(x, y, z).$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten

$$(x, y, z) = g(r, \varphi, z) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \text{ mit } \det(g'(t, \varphi, z)) = r.$$

Es sei B der Halbzylinder

$$B := \Big\{(r, \varphi, z) : |\varphi| \le \pi,\ |z| \le R,\ 0 \le r \le \sqrt{R^2 - z^2}\Big\}$$

dann ist $A = g(B)$ die Kugel mit Radius R und

$$
\begin{aligned}
U_A(x) = U_A(0,0,a) &\overset{(7.4.11)}{=\!=} G\,\rho \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-R}^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}}\,dr\,dz\,d\varphi \\
&= 2\,\pi\,G\,\rho \int_{-R}^{R} \Big[\sqrt{r^2+(a-z)^2}\Big]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} dz \\
&= 2\,\pi\,G\,\rho \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2+a^2-2az} - (a-z)\,dz \\
&= 2\,\pi\,G\,\rho \Big[-\frac{1}{3a}\sqrt{(R^2+a^2-2az)^3} - az + \frac{z^2}{2}\Big]_{z=-R}^{R} \\
&= 4\,\pi\,G\rho\,\frac{4}{3}\,\frac{\pi\,R^3}{4\pi}\,\frac{1}{a} = G\,\rho\,|A|\,\frac{1}{\|x\|}
\end{aligned}
$$

Sei nun allgemeiner B eine Kugel mit Radius R und einer rotationssymetrischen Dichte ρ, d.h. $\rho(x,y,z) = \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2},0,0) =: \rho(r)$. Für die Masse M von B erhalten wir

$$
\begin{aligned}
M = \int_B \rho(x,y,z).\ d(x,y,z) &\overset{(7.4.12)}{=\!=} \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \rho(r)\,r^2\cos\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr \\
= 2\pi \int_0^R \rho(r)\,r^2\,dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\,d\vartheta &= 4\pi \int_0^R r^2\,\rho(r)\,dr
\end{aligned}
$$

Um nun das Newton-Potential eines Punktes auszurechnen können wir wegen der Rotationssymmetrie o.B.d.A. annehmen, daß dieser Koordinaten $(0,0,a)$ mit $a > R$ besitzt. Aus dem Kosinussatz ergibt sich für den Abstand dieses Punktes zu einem Punkt in der Kugel mit Kugelkoordinaten (r,φ,ϑ): $\sqrt{a^2+r^2-2ar\sin(\vartheta)}$ und für das Potential somit

$$
\begin{aligned}
U(0,0,a) &= G \int_B \frac{\rho(x,y,z)}{\|(0,0,a)-(x,y,z)\|}\,dz \\
&\overset{(7.4.12)}{=\!=} G \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \frac{\rho(r)}{\sqrt{a^2+r^2-2ra\sin\vartheta}} r^2\cos\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr \\
&= G\,2\pi \int_0^R \frac{-r}{a}\,\rho(r) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\,\frac{-2ra\cos\vartheta}{\sqrt{a^2+r^2-2ra\sin\vartheta}}\,d\vartheta\,dr \\
&= G\,2\pi \int_0^R \frac{-r}{a}\,\rho(r)\,\Big[\sqrt{a^2+r^2-2ra\sin\vartheta}\Big]_{\vartheta=-\pi/2}^{\pi/2} dr \\
&= G\,2\pi \int_0^R \frac{r}{a}\,\rho(r)\,\underbrace{(|a+r|-|a-r|)}_{=2r}\,dr \\
&= G\,\frac{2\pi}{a} \int_0^R 2r^2\rho(r)\,dr = G\,\frac{4\pi}{a} \int_0^R r^2\rho(r)\,dr = G\,\frac{M}{a},
\end{aligned}
$$

also gerade das Potential der im Mittelpunkt der Kugel konzentrierten Kugelmasse M.

7.5 Partitionen der Eins und der Satz von Sard

Globalisierung.
Differentialrechnung haben wir dazu benutzt um aus infinitesimalen Eigenschaften (also Eigenschaften der Ableitung) auf lokale Eigenschaften zu schließen. Manchmals ist es uns gelungen daraus auch globale Eigenschaften zu erhalten, man/frau denke z.B. an den Nachweis globaler Extrema mittels topologischer Methoden.

Eine vor allem für die Differentialgeometrie sehr wichtige Methode um aus lokalen Konstrukten globale zu erhalten wollen wir nun behandeln. Man stelle sich z.B. vor daß wir lokal um jeden Punkt Funktionen (z.B. konstante) bereits konstruiert haben, die aber nicht zu einer globale Funktion zusammenpassen. D.h. wir haben eine Überdeckung $\mathcal{U}$ unseres Raums X und für jedes $U \in \mathcal{U}$ eine Funktion $g_U : U \to \mathbb{R}$. In Punkten z wo sich zwei oder mehrere der U treffen müssen wir also schön von einer dieser Funktionen zur anderen wechseln. Dies können wir dadurch erreichen, daß wir einen Prozentsatz $f_U(x)$ angeben mit dem wir den Wert $g_U(x)$ der Funktion f_U verwenden. Diese Prozentsatzfunktionen f_U sollten dazu analytisch möglichst schön, also sagen wir glatt($=C^\infty$) sein und an jeder Stelle sich auf $1 = 100\%$ aufsummieren, d.h. $\sum_{U\in\mathcal{U}} f_U(x) = 1$. Da g_U nur auf U definiert ist, muß der zugehörige Prozentsatz f_U ausserhalb U komplett verschwinden, also $\operatorname{trg}(f_U) \subseteq U$ sein. Da die Überdeckung $\mathcal{U}$ sehr viele (z.B. überabzählbar viele) Mengen U enthalten kann, haben wir Probleme $\sum_{U\in\mathcal{U}} f_U(x)$ zu bilden, darum verlangen wir zusätzlich, daß lokal nur endlich viele der Funktionen f_U nicht komplett verschwinden. Dies führt zu folgender

7.5.1 Definition. Partition der Eins.
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Eine $\mathcal{U}$ untergeordnete GLATTE PARTITION DER EINS ist eine Menge $\mathcal{F}$ von glatten Abbildungen $X \to \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ mit den Eigenschaften:

1. $\forall f \in \mathcal{F}\ \ \exists U_f \in \mathcal{U} : \operatorname{trg}(f) \subseteq U_f$
2. Die Familie $\{\operatorname{trg}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ ist lokal endlich, d.h. $\forall x \in X\ \ \exists U(x)$ eine Umgebung von x, sodaß $\{f \in \mathcal{F} : \operatorname{trg}(f) \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist.
3. $\sum_{f\in\mathcal{F}} f = 1$

7.5.2 Satz. Partitionen der Eins existieren.
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine C^∞-Partition der Eins, die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.

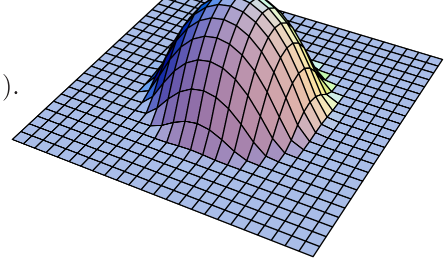
Beweis. Beh.: X (und in der Tat jeder separable metrische Raum) ist LINDELÖF, d.h. jede offene Überdeckung von X besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.
Sei also $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Es sei $X_0 := \{(x,r) : x \in \mathbb{Q}^n \cap X, 0 < r \in \mathbb{Q},\ \exists U \in \mathcal{U} : U_r(x) \subseteq U\}$. Dann ist X_0 abzählbar und nach Definition existiert für jedes $(x,r) \in X_0$ eine Menge $U_{x,r} \in \mathcal{U}$ mit $U_r(x) \subseteq U_{r,x}$. Wir können durch Auswahl also eine Funktion $\Psi : X_0 \to \mathcal{U}$, $(x,r) \mapsto U_{r,x}$ definieren. Bir behaupten, daß das Bild $\mathcal{U}_0 := \Psi(X_0)$ von Ψ eine abzählbare Teilüberdeckung zu $\mathcal{U}$ ist. Abzählbarkeit ist klar. Sei also $x \in X$ beliebig. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Da U offen ist existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq U$. Sei $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 < 2r < \delta$. Da $\mathbb{Q}^n \cap X$ in X dicht liegt existiert ein $x_0 \in \mathbb{Q}^n \cap X$ mit $d(x_0,x) < r$ und somit ist $x \in U_r(x_0) \subseteq U_\delta(x) \subseteq U$, also $x \in U_r(x_0) \subseteq U_{r,x_0}$.
Beh.: Es gibt glatte Funktionen mit beliebig kleinem Träger.
Betrachten wir dazu die glatte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} > 0 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

Wenn wir für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ nun eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) := h(r^2 - \|x - x_0\|^2)$ definieren, dann ist $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$0 = \varphi(x) := h(r^2 - \|x - x_0\|^2) \Leftrightarrow r^2 - \|x - x_0\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \notin U_r(x_0).$$

Das heißt also, der Träger von φ ist gegeben durch $\operatorname{trg} \varphi = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$.



Beh.: Es gibt eine abzählbare lokal endliche Verfeinerung $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{U}$.
Sei $\mathcal{U}$ die gegebene offene Überdeckung von X. Zu jedem $x \in U \in \mathcal{U}$ wählen wir ein $r > 0$ mit $\{y : \|y - x\| \le r\} \subseteq U$. Nach obigem wissen wir, daß es ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\{y : \|y - x\| < r\} = \{y : \varphi(y) \neq 0\} =: U_\varphi.$$

Diese Mengen bilden eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$. Da U Lindelöf ist, existieren abzählbar viele Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ s.d. $\{U_{\varphi_n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von X und eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist. Diese muß noch nicht lokal endlich sein, darum definieren wir W_n wie folgt:

$$W_n := \Big\{x : \varphi_n(x) > 0 \wedge \varphi_i(x) < \frac{1}{n} \text{ für } 1 \le i < n\Big\}.$$

Es ist klar, daß die W_n offen sind (durch stetige Ungleichung gegeben), und Teilmengen von U_{φ_n} sind.

Die W_n bilden eine Überdeckung von X, denn zu jedem $x \in U$ existiert ein minimales n_0 mit $\varphi_{n_0} > 0$ und somit ist $x \in W_{n_0}$.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die W_n lokal endlich sind. Dazu sei $x \in U$ beliebig. Dann existiert ein n, sodaß $x \in U_{\varphi_n}$. Sei $n_0 := \min\{n : x \in U_{\varphi_n}\}$. Nun definieren wir eine offene Umgebung um x:

$$U(x) := \left\{y : \varphi_{n_0}(y) > \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x)\right\}.$$

Falls $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$, dann sei y im Durchschnitt dieser beiden Mengen gewählt und es folgt:

$$\varphi_i(y) < \tfrac{1}{k} \text{ für } i < k \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y).$$

Falls $k > n_0$ ist, und zwar so groß, daß $\frac{1}{k} < \frac{\varphi_{n_0}(x)}{2}$ ist, dann erhalten wir durch

$$\tfrac{1}{k} < \tfrac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y) < \tfrac{1}{k}$$

einen Widerspruch. Also existieren nur endlich viele k mit $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$.

Beh.: Es gibt eine Partition der Eins $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\{x : f_n(x) \neq 0\} = W_n$.
Wir definieren vorerst glatte Funktion $\psi_n : U \to \{t : 0 \le t\}$ durch

$$\psi_n(x) := h(\varphi_n(x))h\Big(\frac{1}{n} - \varphi_1(x)\Big) \cdot \ldots \cdot h\Big(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x)\Big).$$

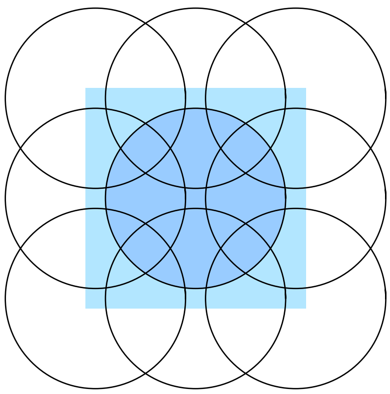
Dann ist

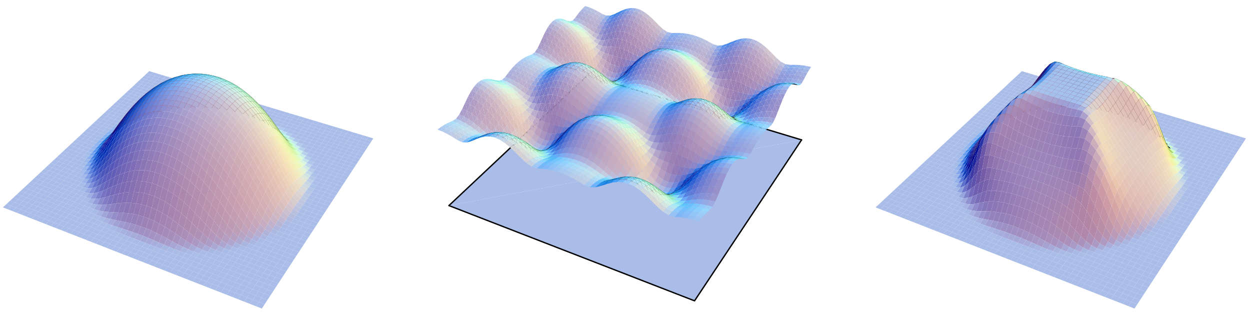
$$\psi_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow \Big(\varphi_n(x) > 0\Big) \wedge \Big(\tfrac{1}{n} - \varphi_1(x) > 0\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\tfrac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x) > 0\Big) \Leftrightarrow x \in W_n.$$

Da $\{W_n : n\}$ lokal endlich ist, sind in der Summe $\sum_{n=1}^\infty \psi_n$ lokal nur endlich viele Summanden ungleich 0, und somit ist $\psi := \sum_{n=1}^\infty \psi_n \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Diese Funktion ψ verschwindet nirgends, da die $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung bilden.
Nun definieren wir $f_n := \frac{\psi_n}{\psi} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Dann ist

$$\sum f_n = \frac{\sum \psi_n}{\psi} = \frac{\psi}{\psi} = 1$$

und damit haben wir Punkt (1) und (3) von (7.5.1) gezeigt.
(2) folgt nun aus: $\operatorname{trg}(f_n) \subseteq \overline{W_n} \subseteq \overline{U_{\varphi_n}} \subseteq U$ für ein $U \in \mathcal{U}$.





ψ_n ψ f_n

□

7.5.2a Folgerung. Die glatten Funktionen liegen dicht in den stetigen.
Es sei $g : \mathbb{R}^p \supseteq X \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $h : X \to \mathbb{R}$ C^∞ mit $\|g - h\|_\infty < \varepsilon$.

Beweis. Für jedes $x \in X$ existiert ein offener Ball U_x mit $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$ für alle $x' \in U_x$. Die Familie $\{U_x : x \in X\}$ bildet somit eine offene Überdeckung von X und somit existiert eine untergeordnete Partition der Eins $\mathcal{F}$ (dabei sei $\operatorname{trg}(f) \subseteq U_{x_f}$) Nun definieren wir

$$h(x) := \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x)\, g(x_f).$$

Dann ist offensichtlich h glatt und

$$\begin{aligned}|h(x) - g(x)| &= \Big|\sum_f f(x)\, g(x_f) - \underbrace{\sum_f f(x)}_{=1} g(x)\Big| \\ &\le \sum_f f(x)\, |g(x_f) - g(x)| = \sum_{x \in \operatorname{trg}(f) \subseteq U_{x_f}} f(x)\, \underbrace{|g(x_f) - g(x)|}_{<\varepsilon} < \sum_f f(x)\, \varepsilon = \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung.
Wir können die Partition der Eins, welche einer Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnet ist als Familie $\{f_U : U \in \mathcal{U}\}$ mit $\operatorname{trg}(f_U) \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ erhalten.

Dazu betrachten wir eine Partition der Eins $\mathcal{F}$ wie in (7.5.2), d.h. für jedes $f \in \mathcal{F}$ existiert ein $U_f \in \mathcal{U}$ mit $\operatorname{trg}(f) \subseteq U_f$. Wir können folglich durch Auswahl eine Funktion $\omega : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$, $f \mapsto U_f$ definieren. Für $U \in \mathcal{U}$ sein nun $f_U := \sum_{f \in \mathcal{F} : U_f = U} f$. Dann ist $f_U : X \to [0, 1]$ glatt,

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} f_U = \sum_{U \in \mathcal{U}} \sum_{f \in \mathcal{F} : U_f = U} f = \sum_{f \in \mathcal{F}} f = 1,$$

weiters ist

$$\{x : f_U(x) \neq 0\} = \bigcup_{f \in \mathcal{F} : U_f = U} \{x : f(x) \neq 0\} \subset \bigcup \{\operatorname{trg}(f) : U_f = U\} \subseteq U$$

und damit ist $\{f_U^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) : U \in \mathcal{U}\}$ lokal endlich, denn für jedes $x \in X$ existiert eine Umgebung die $\operatorname{trg}(f)$ nur für endlich viele $f \in \mathcal{F}$ trifft und somit auch nur $f_U^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ für jene endlich vielen $U = U_f$. Damit ist auch $\{\operatorname{trg}(f_U) : U \in \mathcal{U}\}$ lokal endlich, denn für offenes U folgt $\operatorname{trg}(f_U) \cap U \neq \emptyset$ aus $f_U^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap U \neq \emptyset$. Schließlich ist

$$\operatorname{trg}(f_U) = \overline{\{x : f_U(x) \neq 0\}} = \overline{\bigcup_{f \in \mathcal{F} : U_f = U} \{x : f(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\bigcup_{f \in \mathcal{F} : U_f = U} \operatorname{trg}(f)} = \bigcup_{f \in \mathcal{F} : U_f = U} \operatorname{trg}(f) \subseteq U,$$

denn die Vereinigung einer lokal endlichen Menge $\mathcal{A}$ abgeschlossener Mengen A ist abgeschlossen (für nicht-lokal endliche Mengen stimmt dies nicht wie $\mathcal{A} = \{\{x\} : x \in \mathbb{Q}\}$ zeigt). Sei nämlich $x \notin \bigcup \mathcal{A}$ und U_x eine offene Umgebung die nur endlich viele $A \in \mathcal{A}$ trifft. Für jedes solche A existiert wegen $x \notin A$ eine offene Umgebung U_A von x mit $A \cap U_A \neq \emptyset$. Dann ist $U_x \cap \bigcap \{U_A : A \cap U_x \neq \emptyset\}$ eine offene Umgebung von x, die kein $A \in \mathcal{A}$ trifft, also ist $(\bigcup \mathcal{A})^c$ offen und somit $\bigcup \mathcal{A}$ abgeschlossen.

7.5.2c Bemerkung.
Da die Konstruktion von glatten Partitionen der Eins nicht sehr konstruktiv war ergibt sich die Frage wie wir die eine stetige Funktion approximierenden Funktionen explizit konstruieren können. Hilfreich dafür ist die Faltung

$$f \star g : x \mapsto \int f(x-y)\, g(y)\, dy \overset{(7.4.8)}{=\!=} \int f(z)\, g(x-z)\, dz.$$

falls g stetig und $f \in C_c^\infty$ ist, so ist $f \star g$ wohldefiniert und C^∞, denn

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(z)\, g(x-z)\, dz = \int_{\operatorname{trg}(f)} f(z)\, g(x-z)\, dz$$

und

$$\partial_i (f \star g)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int f(x-y)\, g(y)\, dy \overset{(7.2.15)}{=\!=} \int \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y)\, g(y)\, dy = (\partial_i f \star g)(x)$$

Sei nun $h \geq 0$ eine glatte Funktion mit $\emptyset \neq \operatorname{trg}(h) \subseteq \{x : \|x\| \leq 1\}$. O.B.d.A. ist $\int_{\mathbb{R}^m} h = 1$ (Ersetze h durch $\frac{1}{\int h} \cdot h$). Für $\varepsilon > 0$ sei weiters $h_e p : x \mapsto \varepsilon^m h(x/\varepsilon)$. Dann ist $\operatorname{trg}(h_\varepsilon) \subseteq \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$ und $\int_{\mathbb{R}^m} h_\varepsilon = 1$. Somit konvergiert $h_\delta \star g \to g$ für $\delta \to 0$ gleichmäßig auf kompakten Mengen K, denn

$$\begin{aligned} |(h_\delta \star g)(x) - g(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^m} h_\delta(z) \cdot (g(x-z) - g(x))\, dz \Big| \\ &\leq \int_{\operatorname{trg} h_\delta} h_\delta(z) \cdot |g(x-z) - g(x)|\, dz \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

falls δ so klein gewählt wird, daß $|g(x') - g(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in K$ und $x' \in \mathbb{R}^n$ mit $|x' - x| < \delta$ (wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von g auf K). Man nennt $(h_\delta)_{\delta > 0}$ eine APPROXIMIERENDE EINHEIT, denn die h_δ approximieren das (nicht vorhandene) neutrale Element bzgl. der Faltung.

7.5.4 Satz von Stone Weierstraß.
Es sei X ein kompakter metrischer Raum und A eine Punkte-trennende Teilalgebra von $C(X) := C(X, \mathbb{R})$ mit Eins. Dann ist A dicht in $C(X)$.

Eine Menge A von Funktionen auf X heißt PUNKTE-TRENNEND, wenn für je zwei $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ ein $f \in A$ existiert mit $f(x_0) \neq f(x_1)$.

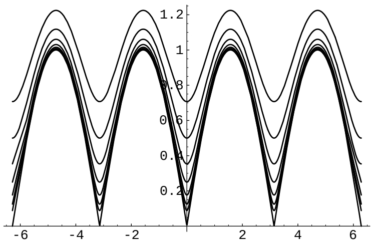
Beweis nach [51]. Es genügt zu zeigen, daß der Abschluß $\overline{A}$ von A in $C(X)$ dicht liegt, denn da dieser abgeschlossen ist, ist er gleich seinen Abschluß. Da $\overline{A}$ die selben Voraussetzungen (d.h. eine Punkte-trennende Teilalgebra von $C(X)$ zu sein) erfüllt, können wir also im Beweis A durch $\overline{A}$ ersetzen, d.h. annehmen, daß A abgeschlossen ist.

Beh. Falls $0 \leq f \in A$, so ist auch $\sqrt{f} \in A$:
Falls $\|f - 1\| < 1$ so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (f-1)^k$ von $\sqrt{f} = \sqrt{1 + (f-1)}$ in der abgeschlossenen Teilalgebra A. Somit ist $\sqrt{f} \in A$.
Falls $f \geq \alpha$ für eine Konstante $\alpha > 0$, so ist wegen $0 < \|f\|_\infty < \infty$ $\frac{\alpha}{\|f\|_\infty} \leq \frac{1}{\|f\|_\infty} f \leq 1$ und somit $0 \geq 1 - \frac{1}{\|f\|_\infty} f - 1 \leq 1 - \frac{\alpha}{\|f\|_\infty} < 1$ also $\|\frac{1}{\|f\|_\infty} f - 1\|_\infty < 1$. Nach dem ersten Teil, liegt somit $\sqrt{\frac{1}{\|f\|_\infty} f}$ in A und damit auch $\sqrt{f} = \sqrt{\|f\|_\infty} \cdot \sqrt{\frac{1}{\|f\|_\infty} f}$.

Sei schließlich $f \geq 0$ beliebig. Dann ist nach dem zuvor gezeigten $\sqrt{f + \frac{1}{n}} \in A$. Und da

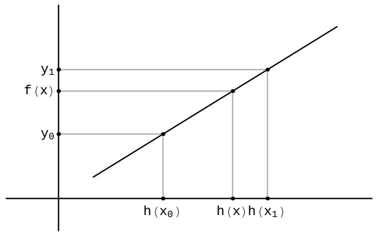
$$0 \leq \sqrt{f + \frac{1}{n}} - \sqrt{f} = \frac{f + 1/n - f}{\sqrt{f + 1/n} + \sqrt{f}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ist konvergiert $\sqrt{f+\frac{1}{n}} \to \sqrt{f}$ und somit ist auch $\sqrt{f}$ in A.



Beh. Mit $f, g \in A$ sind auch $|f|, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in A$:
Denn $|f| = \sqrt{f^2}$, $\max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ und $\min\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$.

Beh. Für $x_1 \neq x_0$ und $y_1, y_0 \in \mathbb{R}$ existiert ein $f \in A$ mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2$:
Da A Punkte-trennend ist, existiert ein $h \in A$ mit $h(x_1) \neq h(x_0)$. Dann erfüllt aber die Zusammensetzung $x \mapsto f(x) := y_0 \frac{h(x)-h(x_1)}{h(x_0)-h(x_1)} + y_1 \frac{h(x)-h(x_0)}{h(x_1)-h(x_0)}$ von h mit der affinen Funktion $t \mapsto y_0 \frac{t-h(x_1)}{h(x_0)-h(x_1)} + y_1 \frac{t-h(x_0)}{h(x_1)-h(x_0)}$ das Gewünschte.



Beh. Für $f \in C(X)$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $h \in A$ mit $\|f - h\| \leq \varepsilon$:
Für $x, y \in X$ existiert nach der letzten Behauptung ein $f_{x,y} \in A$, welches auf $\{x, y\}$ mit f übereinstimmt (Falls $x = y$ ist, so sei $f_{x,y}$ konstant gleich $f(x) = f(y)$). Da $f_{x,y} - f$ bei y verschwindet, existiert eine Umgebung U_y von y mit $f_{x,y}(z) - f(z) < \varepsilon$ für $z \in U_y$. Da X kompakt ist, überdecken endlich viele $U_{y_1}, \dots, U_{y_n}$ ganz X. Es sei $f_x := \min\{f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_n}\} \in A$. Dann gilt $f_x(x) = f(x)$ und $f_x(z) \leq f_{x,y_i}(z) < f(z)+\varepsilon$, wobei i so gewählt wurde, daß $z \in U_{y_i}$. Es existiert somit eine Umgebung U_x von x mit $f_x(z) - f(z) > -\varepsilon$ für alle $z \in U_x$. Da X kompakt ist überdecken auch endlich viele $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$ ganz X. Sei schließlich $h := \max\{f_{x_1}, \dots, f_{x_m}\} \in A$. Dann ist $f(z) - \varepsilon < f_{x_i}(z) \leq h(z) < f(z) + \varepsilon$ für alle $z \in X$, und somit $\|h - f\| \leq \varepsilon$. □

Approximation von stetigen Abbildungen durch Polynome.
Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann sind die Polynome in $C(X)$ dicht. □

Beachte, daß die Polynome gerade die Elemente der von den Koordinatenprojektionen $\mathrm{pr}_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ erzeugten Algebra sind.

Komplexer Stone-Weierstraß.
Es sei X ein kompakter metrischer Raum und A eine Punkte-trennende Teilalgebra von $C(X, \mathbb{C})$ mit Eins, welche zusätzlich unter komplex-konjugieren abgeschlossen ist. Dann ist A dicht in $C(X, \mathbb{C})$.

Beweis. Jedes $f \in C(X, \mathbb{C})$ läßt sich zerlegen in $f = \mathfrak{Re} f + i \cdot \mathfrak{Im} f$ mit Realteil $\mathfrak{Re} f := \frac{f+\bar{f}}{2}$ und Imaginärteil $\mathfrak{Im} f := \frac{f-\bar{f}}{2i}$. Da A Punkte-trennend ist, gilt gleiches auch für die Teilalgebra $A_{\mathbb{R}} := \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f \in A\}$ von $C(X, \mathbb{R})$, denn mit $f \in A$ ist $\mathfrak{Re} f, \mathfrak{Im} f \in A_{\mathbb{R}}$. Nach dem reellen Stone-Weierstraß ist folglich $A_{\mathbb{R}}$ dicht in $C(X, \mathbb{R})$, also existieren für $f \in C(X, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ Funktionen $f_j \in A_{\mathbb{R}}$ mit $\|\mathfrak{Re} f - f_1\| < \varepsilon/2$ und $\|\mathfrak{Im} f - f_2\| < \varepsilon/2$. Folglich ist $\|f - (f_1 + i\, f_2)\| < \varepsilon$ und $f_1 + i\, f_2 \in A_{\mathbb{R}} + i \cdot A_{\mathbb{R}} \subseteq A$. □

Bemerkung.
Die Abgeschlossenheit unter der Konjugation kann nicht weggelassen werden. Sei nämlich $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und A die auf K Punkte-trennende Algebra der Polynome mit komplexen Koeffizienten, also den Elementen der von $\mathrm{id} : z \mapsto z$ erzeugten Teilalgebra. Wegen der Cauchy'schen Integralformel

sind Grenzwerte von gleichmäßig konvergenten Folgen holomorpher Funktionen ebenfalls holomorph, also enthält der Abschluß von A nur Funktionen die holomorph auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sind, und somit ist dieser Abschluß sehr viel kleiner als $C(K, \mathbb{C})$, z.B. ist $z \mapsto \overline{z}$ nicht im Abschluß.

Beispiel.
Es sei A die Algebra der Polynome mit komplexen Koeffizienten in den Variablen $z = x + i\,y$ und $\overline{z} = x - i\,y$, also die Teilalgebra von $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ welche von $\mathrm{id} : z \mapsto z$ und $z \mapsto \overline{z}$ erzeugt wird. Diese ist angeschlossen unter Konjugation und somit dicht in $C(K, \mathbb{C})$ für jedes kompakte $K \subseteq \mathbb{C}$.

Die trigonometrischen Polynome liegen dicht.
Die trigonometrischen Polynome liegen dicht im Raum $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ der 2π-periodischen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz.

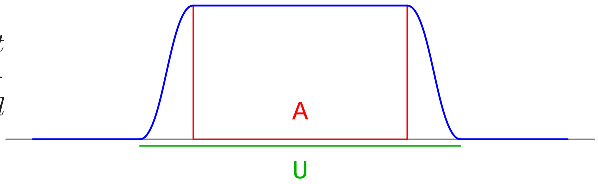
Unter einem TRIGONOMETRISCHEN POLYNOM versteht man eine (komplexe) Linearkombination von $t \mapsto \sin(kt)$ und $t \mapsto \cos(kt)$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es sei S^1 der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{it}$ ist ein lokaler Homöomorphismus, und sie induziert klarerweise einen Algebraisomorphismusus $\exp^* : C(S^1, \mathbb{C}) \to C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, der bezüglich der ∞-Normen eine Isometrie ist. Die trigonometrischen Polynome übersetzen sich in die Linearkombinationen von $z \mapsto z^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, denn $(e^{it})^k = e^{itk} = \cos(tk) + i \sin(tk)$ und $(e^{it})^{-k} = \cos(tk) - i \sin(tk)$. Diese Linearkombination erzeugen eine Teilalgebra A, die klarerweise Punkte-trennend ist ($\mathrm{id} \in A$) und auch unter Konjugation abgeschlossen ist, da $\bar{z} = \frac{1}{z}$ für $|z| = 1$ gilt. Also folgt aus dem komplexen Stone-Weierstraß, daß A dicht liegt. $\square$

Eine weitere Folgerung aus der Existenz von glatten Partitionen der Eins ist die Existenz von glatten "Treppenfunktionen":

7.5.2b Folgerung. Trennbarkeit von abgeschlossenen Mengen durch glatte Funktionen.
Es seien $A_0, A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und disjunkt, dann existiert eine glatte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit $g|_{A_i} = i$ für $i \in \{0, 1\}$.

Oder anders formuliert, sei $A \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit A abgeschlossen und U offen. Dann existiert eine glatte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit $g|_A = 1$ und $\mathrm{trg}(g) \subseteq U$.



Beweis. Zur offenen Überdeckung $\mathcal{U} := \{A_0^c, A_1^c\}$ existiert eine untergeordnete Zerlegung der Eins und nach obiger Bemerkung dürfen wir annehmen, daß diese von der Form $\{f_0, f_1\}$ ist mit $\mathrm{trg}(f_i) \subseteq A_i^c$. Die Funktion $g := f_0$ ist dann die gewünschte Funktion, denn $f_i|_{A_i} = f_i|_{A_i^{cc}} = 0$, also ist $g = f_0 = 1 - f_1 = 1$ auf A_1 und $g = f_0 = 0$ auch A_0.

Für die zweite Formulierung setzten wir $A_1 := A$ und $A_0 := U^c$, dann ist $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ da $A \subseteq U$ vorausgesetzt ist. Dann ist für $g = f_0$ wie zuvor auf $g|_{A_1} = 1$ und $\mathrm{trg}(g) = \mathrm{trg}(f_0) \subseteq A_0^c = U^{cc} = U$. $\square$

7.5.3 Proposition. Approximation integrierbarer Funktionen.
Es sei $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ beschränkt mit beschränktem(=kompaktem) Träger.

Dann ist f integrierbar genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Funktion $g_\pm \in C_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ existieren mit $g_- \leq f \leq g_+$ und $\int_{\mathbb{R}^p}(g_+ - g_-) < \varepsilon$. Es ist dann $\int_{\mathbb{R}^p} |f - g_\pm| < \varepsilon$, also liegen die C_c^∞-Funktionen dicht in den integrierbaren bzgl. der 1-Norm. Falls $\mathrm{trg}(f) \subseteq U$ mit U offen im $\mathbb{R}^p$ so können $g_\pm$ so gewählt werden, daß $\mathrm{trg}\, g_\pm \subseteq U$.

Beachte, daß die C_c^∞-Funktionen nicht dicht in den integrierbaren Funktionen bzgl. der ∞-Norm liegen, denn die stetigen Funktionen sind bzgl. dieser Norm abgeschlossen.

Beweis. ($\Rightarrow$)

Es sei f integrierbar, dann ist $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm := \max\{\pm f, 0\} \geq 0$ integrierbar , also dürfen wir o.B.d.A. $f \geq 0$ voraussetzen. Sei nun $\varepsilon > 0$, dann existiert eine Zerlegung Z mit $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$ (und $\forall J \in Z : J \cap \operatorname{trg}(f) \neq \emptyset \Rightarrow J \subseteq U$). Es sei N die Anzahl der $J \in Z$ mit $J \subseteq U$. Für jedes dieser endlich vielen Teilungsintervalle J wählen wir etwas größere und etwas kleinere Intervalle $J_\pm$ mit $J_- \subseteq J \subseteq J_+$ und $|J_+| - |J_-| < \frac{\varepsilon}{N\|f\|_\infty}$. Nach (7.5.2b) existieren C^∞-Funktionen $g_\pm^J$ mit $\operatorname{trg}(g_-^J) \subseteq J$ und $g_-^J|_{J_-} = 1$, sowie $\operatorname{trg}(g_+^J) \subseteq J_+$ und $g_+^J|_J = 1$, d.h. $0 \leq g_-^J \leq \chi_J \leq g_+^J$ und $\int_{\mathbb{R}^p}(g_+ - g_-) \leq |J_+| - |J_-|$. Damit ist $g_- := \sum_{J\in Z} \inf(f(J)) g_-^J \leq f \leq \sum_{J \in Z} \sup(f(J)) g_+^J =: g_+$ mit g_- und g_+ glatt, und

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int g_+ - g_- &= \sum_J \int \Big(\sup(f(J))\, g_+^J - \inf(f(J))\, g_-^J\Big)\\
&= \sum_J \int_{J_+\setminus J_-} \Big(\sup(f(J))\, g_+^J - \inf(f(J))\, g_-^J\Big) + \sum_J \int_{J_-} \Big(\sup(f(J)) - \inf(f(J))\Big)\\
&\leq \sum_J \int_{J_+\setminus J_-} \sup(f(J)) + \sum_J \Big(\sup(f(J)) - \inf(f(J))\Big)|J|\\
&\leq \sum_J \|f\|_\infty \left(|J_+| - |J_-|\right) + O(f,Z) - U(f,Z) < N\, \frac{\varepsilon}{N\,\|f\|_\infty} \|f\|_\infty + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Für die Umkehrung genügt es, daß $g_\pm$ integrierbar mit kompakten Träger sind, denn für geeignete Partitionen Z können wir das Integral von $g_\pm$ durch entsprechende Unter- und Obersummen approximieren und somit auch jenes von f. In Detail:

$$
\begin{aligned}
&\int (g_+ - g_-) < \varepsilon, \quad \int g_- - U(g_-,Z) < \varepsilon \quad \text{und} \quad O(g_+,Z) - \int g_+ < \varepsilon\\
\Rightarrow \quad & U(g_-,Z) \leq U(f,Z) \leq O(f,Z) \leq O(g_+,Z),\\
& O(f,Z) - U(f,Z) \leq O(g_+,Z) - U(g_-,Z)\\
&\qquad = \Big(O(g_+,Z) - \int g_+\Big) + \int (g_+ - g_-) + \Big(\int g_- - U(g_-,Z)\Big) < 3\varepsilon. \quad \square
\end{aligned}
$$

In (6.4.2) haben wir einen Punkt $x \in U$ einer differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}$ als kritisch bezeichnet, wenn $f'(x) = 0$ ist. Wir wollen dies nun auf Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ verallgemeinern und zeigen, daß nicht allzuviele Werte bei kritischen Punkten auftreten.

7.5.5 Satz von Sard.
Die Menge der kritischen Werte einer glatten Abbildung ist eine L-Nullmenge.

Dieses Resultat gilt auch noch, wenn $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ C^r ist mit $r > m - n$ ist. In [48] wurde eine C^1-Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konstruiert, die auf einem Bogen I kritisch, aber nicht konstant ist. Der Graph von f ist also eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$, auf welcher ein Bogen $f(I)$ liegt, sodaß die Tangentialebene an S in jeden Punkt horizontal ist, aber dennoch hat $f(I)$ nicht konstante Höhe.

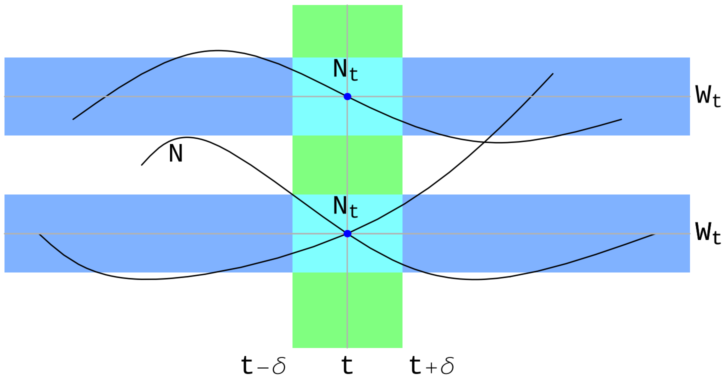
Definition.
Dabei heißt für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ ein Punkt $x \in U$ KRITISCHER PUNKT, falls $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ nicht maximalen Rang $\min\{m,n\}$ hat. Ein Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ heißt KRITISCHER WERT, falls ein kritischer Punkt $x \in f^{-1}(y)$ existiert. Manchmal wird für kritische Punkte nur verlangt, daß $f'(x)$ nicht surjektiv ist. Zumindestens für den Satz von Sard macht das aber keinen Unterschied, denn nur im Fall $m < n$ erhalten wir mehr kritische Werte (nämlich alle im Bild). Diese bilden aber nach der Folgerung in (7.4.4) ebenfalls eine L-Nullmenge.

Wir benötigen noch den

7.5.6 Satz von Fubini für Nullmengen.
Es sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $N_t := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,x) \in N\} \cong N \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist N eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Vergleiche mit (7.3.1)

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren für jedes $t \in \mathbb{R}$ abzählbar viele offene Quader W_t^i mit $i \in \mathbb{N}$, s.d. $W_t := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_t^i \supseteq N_t := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,x) \in N\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und $\sum_i |W_t^i| < \varepsilon$. Die Funktion $(t',x) \mapsto |t'-t|$ ist stetig auf N, positiv auf $N \setminus (\{t\}\times\mathbb{R}^{n-1}) = N \setminus (\{t\}\times N_t)$ und besitzt somit ein Minimum δ_t auf der kompakten Menge $N \setminus (\mathbb{R}\times W_t) \subseteq N \setminus (\{t\}\times N_t)$; d.h. $(t',x)\in N$, $|t'-t|<\delta_t$ $\Rightarrow x \in W_t$. Es sei $I_t := (t-\delta_t, t+\delta_t)$, dann ist $N \cap (I_t \times \mathbb{R}^{n-1}) \subseteq I_t \times W_t$.



O.B.d.A. sei $N \subseteq [a,b]\times\mathbb{R}^{n-1}$. Wir wählen nun eine endliche minimale Teilüberdeckung $\{I_i := I_{t_i} : i\}$ von $\{I_t : t \in [a,b]\}$. O.B.d.A. seien die $I_i = (a_i,b_i)$ mit a_i aufsteigend geordnet. Dann ist sind auch die b_i monoton wachsend, denn andernfalls folgt aus $b_{i+1} \le b_i$, daß $I_{i+1} \subseteq I_i$, also ein Widerspruch zur Minimalität. $a_i \le a_{i+1} \le b_i \le a_{i+2}$ (wegen der Minimalität, denn $b_i < a_{i+1} \Rightarrow I_i$, I_{i+1} nicht überlappend; $b_i > a_{i+2} \Rightarrow I_{i+1} \subseteq I_i \cup I_{i+2}$). Also ist

$$\sum_i |I_i| = \sum_i (b_i - a_i) = \sum_i (a_{i+1}-a_i) + (b_i - a_{i+1}) \le \sum_i (a_{i+1}-a_i) + (a_{i+2}-a_{i+1}) \le 2(b-a)$$

und somit ist $\{I_{t_i} \times W_{t_i}^j : i,j\}$ eine offene Überdeckung von N durch abzählbar viele Intervalle mit Gesamtinhalt

$$\sum_{i,j} |I_{t_i} \times W_{t_i}^j| = \sum_i |I_{t_i}| \sum_j |W_{t_i}^j| \le \varepsilon \sum_i |I_{t_i}| \le 2\,\varepsilon\,|b-a|. \quad \square$$

Beweis des Satzes von Sard (7.5.5). Sei D die Menge der kritischen Punkte. Wir machen Ordnungs-Induktion nach m. Sei

$$D_k := \Big\{x \in U : f^{(i)}(x) = 0 \text{ für alle } 1 \le i \le k\Big\}.$$

Die D_k sind abgeschlossen und erfüllen $D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots$.

Beachte, daß falls für jeden Punkt x einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Umgebung U_x existiert, s.d. $f(U_x \cap X)$ eine L-Nullmenge ist, so ist $f(X) = \bigcup_{x\in X} f(U_x \cap X)$ ebenfalls eine L-Nullmenge, denn abzählbar viele der U_x überdecken bereits X, da X nach dem Beweis von (7.5.2) Lindelöff ist.

Weiters ist die Menge der kritischen Punkte zwar nicht kompakt, aber eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen (und damit (7.5.6) anwendbar), denn die Menge der Punkte x, wo eine fixe $r\times r$-Teildeterminante von $f'(x)$ verschwindet ist abgeschlossen, also die abzählbare Vereinigung ihrer Durchschnitte mit den kompakten Bällen $B_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}$, und die kritischen Werte somit eine abählbare Vereinigung der kompakten Bilder all dieser kompakten Mengen.

Es ist $f(D \setminus D_1)$ eine L-Nullmenge:
Sei dazu $x \in D\setminus D_1$. O.B.d.A. ist $\frac{\partial}{\partial x^1} f_1(x) \ne 0$. Dann ist $h : U \to \mathbb{R}^m$, $(x^1,\dots,x^m) \mapsto (f_1(x), x^2, \dots, x^m)$ ein lokaler Diffeomorphismus und $g := f \circ h^{-1}$ hat (wie im Beweisschritt 4 der Transformationsformel (7.4.8)) die Gestalt

$$g : (t; x^2, \dots, x^m) \mapsto (t, g^2(t,x), \dots, g^n(t,x)).$$

Die Hyperebene $H_t := \{t\}\times\mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ bleibt invariant unter g, und die Einschränkung $g_t(x) := (g^2(t,x),\dots,g^n(t,x))$ von g auf sie hat x als kritischen Punkt genau dann, wenn (t,x) ein kritischer Punkt von g ist. Nach Induktionsvoraussetzung, sind die kritischen Werte von g_t eine L-Nullmenge, und nach dem Satz (7.5.6) von Fubini auch jene von g, dies sind aber auch jene von $f = g \circ h$, da h ein Diffeomorphismus ist.

Es ist auch $f(D_k \setminus D_{k+1})$ eine L-Nullmenge:
Sei $x \in D_k \setminus D_{k+1}$. O.B.d.A. ist $\partial_1 \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f_1(x) \neq 0$ und sei $w := \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f_1$. Dann ist $w|_{D_k} = 0$ und $\partial_1 w(x) \neq 0$. Es sei $h(x) := (w(x), x_2, \dots, x_m)$. Dann ist $h : U \to \mathbb{R}^m$ ein lokaler Diffeomorphismus und $h(D_k \cap U) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir betrachten die Abbildung $g := f \circ h^{-1}$ und ihre Einschränkung $g_0 : \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^n$. Die kritischen Werte von g_0 sind nach Induktions-Voraussetzung eine L-Nullmenge und jeder Punkt aus $h(D_k \cap U)$ ist kritisch für g_0, weil alle Ableitungen von f und damit von g bis zur Ordnung k und insbesonders die erste Ableitung von g_0 verschwindet. Also ist $f(D_k \cap U) = g_0(h(D_k \cap U))$ eine L-Nullmenge.

Für $k > \frac{m}{n} - 1$ ist $f(D_k)$ eine L-Nullmenge:
Es sei Q ein Würfel der Seitenlänge a. Aus der Taylor-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \Big| \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(x+th)(h, \dots, h)\, dt \Big| \\ &\le \underbrace{\sup\Big\{ \|f^{(k+1)}(x)\| : x \in Q \Big\} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, dt}_{=:\tau} \, |h|^{k+1} \le \tau\, |h|^{k+1} \end{aligned}$$

für alle $x \in D_k \cap Q$. Wir zerlegen Q in r^m Würfel der Seitenlänge $\frac{a}{r}$. Sei Q' solch ein Würfel, der einen Punkt $x \in D_k$ enthält. Dann ist jeder Punkt in Q' von der Form $x + h$ mit $|h| \le \frac{a}{r}$ und somit ist $f(Q')$ enthalten in einem Würfel der Kantenlänge $2\,\tau\, \left(\frac{a}{r}\right)^{k+1}$. Alle Würfel zusammen haben Gesamtvolumen höchstens $r^m \frac{(2\,\tau\, a^{k+1})^n}{r^{n(k+1)}}$ und für $n(k+1) > m$ konvergiert dieser Ausdruck gegen Null für $r \to \infty$. □

7.5.7 Retraktionssatz.
Es gibt keine stetige Retraktion $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\} \to S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Unter einer RETRAKTION f auf eine Teilmenge $Y \subseteq X$ versteht man eine Abbildung $f : X \to Y$ welche $f|_Y = \mathrm{id}$ erfüllt. Mehr der Anschauung entsprechend ist eine DEFORMATION von Y auf X, d.h. eine stetige Abbildung $F : [0,1] \times X \to X$, mit folgenden Eigenschaften:

- $\forall t \in [0,1]\ \ \forall y \in Y$: $F(t,y) = y$.
- $\forall x \in X$: $F(0,x) = x$.
- $\forall x \in X$: $F(1,x) \in Y$.

Wenn wir mit $F_t : X \to X$ die Abbildung $F_t(x) := F(t,x)$ bezeichnen, so ist also $F_t|_Y = \mathrm{id}_Y$, $F_0 = \mathrm{id}_X$ und $F_1 : X \to Y$ eine Retraktion.

Umgekehrt können wir aus einer Retraktion $f : D^n \to S^{n-1} \subseteq D^n$ eine Deformation $F(t,x) := (1-t)\,x + t\,f(x)$ machen.

Beweis. Angenommen f wäre eine Retraktion. Wir wollen zuerst zeigen, daß f o.B.d.A. C^∞ ist. Sicher existiert eine Retraktion $f_1 : D^n \to S^{n-1}$, die in einer Umgebung von S^{n-1} C^∞ ist, z.B.

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x/|x|) = x/|x| & \text{für } 1/2 \le |x| \le 1 \\ f(2x) & \text{für } |x| \le 1/2. \end{cases}$$

Nach dem Satz (7.5.2a) (oder dem Satz (7.5.4) von Stone-Weierstraß) existiert eine glatte Funktion $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\|f_2 - f_1\|_\infty < 1$. Sei nun $h : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ C^∞ mit $h(x) = 1$ für $|x| \le \frac{1}{2}$ und $h(x) = 0$ für $|x| \ge 1$ nach (7.5.2b) und $f_3(x) := (1 - h(x))\, f_1(x) + h(x)\, f_2(x)$. Dann ist $|f_3(x) - f_1(x)| = h(x) \cdot |f_2(x) - f_1(x)| \le |f_2(x) - f_1(x)| < 1$, d.h. $f_3(x) \neq 0$ und für $|x| \ge 1$ ist $f_3(x) = f_1(x) = x/|x|$. Schließlich ist $f_4(x) := f_3(x)/|f_3(x)|$ die gesuchte C^∞-Retraktion. Wir nennen diese wieder f.

Nach dem Satz von Sard existiert ein regulärer Wert $y \in S^{n-1}$ von f (Beachte, daß wir dazu S^{n-1} als $(n-1)$-dimensional(e Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$) auffassen. Dies können wir vermeiden, wenn wir f mit der stereographischen Projektion $p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{1-x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})$ durch den Nordpol $p := (0, \dots, 0, 1)$ zusammensetzen und kritische Punkte dieser Zusammensetzung f_0 auf $U := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq p\}$ betrachten. Da die Zusammensetzung surjektiv ist existiert nach den Satz von Sard ein y im Bild, welches regulärer Wert ist). Für jeden Punkt x im Urbild von y existiert ein lokaler Diffeomorphismus der das Urbild auf eine 0-Umgebung in $\{0\} \times \mathbb{R}$ abbildet (In der Tat ist $\operatorname{Ker}(f_0'(x))$ 1-dimensional wegen Rang $n-1$ und wenn wir einen Erzeuger v wählen so ist $\Psi : x' \mapsto (f_0(x'), \langle x'-x|v\rangle)$ ein lokaler Diffeomorphismus der $f_0^{-1}(y)$ auf eine Umgebung in $\{y\} \times \mathbb{R}$ abbildet). Also ist $f^{-1}(y) := M$ eine endlich Vereinigung von Kurven und $y \in M \cap S^{n-1}$. Es sei $z \in M$ ein weiterer Schnittpunkt der Zusammenhangskomponente von y in M mit S^{n-1}. Dann ist $f(z) = z \neq y$ ein Widerspruch zu $z \in f^{-1}(y)$.

Daß so ein weiterer Schnittpunkt existiert, wollen wir nun exakt zeigen:
Nach (7.5.9) existiert eine stetige Parametrisierung $c : \mathbb{R} \to M$ der Zusammenhangskomponente von $c(0) = y \in M$, welche surjektiv ist und entweder auch injektiv auf $\mathbb{R}$ oder nur auf $[0, 2pi)$ und 2π-periodisch. Da $f(x) = x/\|x\|$ für $\|x\| \geq 1$ ist, können wir annehmen, daß $c(t) = (t+1)\,y$ für alle kleinen $t > 0$ gilt und $c(t) \in D^n$ für alle $t \leq 0$ nahe 0 gilt. Angenommen $c(t) \in D^n$ für alle $t \leq 0$. Dann existiert ein Häufungswert x von $(c(-n))_{n\in\mathbb{N}}$ und dieser liegt natürlich auch in $f^{-1}(y)$, also existiert eine Umgebung von x die $f^{-1}(y)$ nur in einen Bogen trifft, und damit liegt $c(-n)$ auf diesen Bogen für große n und somit ist x in der Zusammenhangskomponente von M also von der Form $c(t_0)$ für ein $t_0 < 0$. Damit ist c periodisch, da $c(t)$ auf verschiedenen Seiten von $c(t_0)$ für $t > t_0$ bzw. $t < t_0$ liegen, aber $c(t_n) \to x$, und somit $c(t)$ immmer wieder auf der anderen Seite von y, also außerhalb D^n. Wegen Zwischenwertsatz muß $\|c(t)\|$ auch immer wieder gleich 1 sein. □

2. Beweis. In [23, 228.1] wird der Beweis wie folgt geführt. Er betrachtet die Abbildungen $g_t(x) := t\,x + (1-t)\,r(x)$. Es ist $g_0 = \mathrm{id}$ und $g_1 = r$. Es sei $V(t) := \int_{D^n} \det(g_t'(x))\,dx$. Man kann zeigen, daß ein $\delta > 0$ existiert, s.d. für $|t| < \delta$ einerseits $g_t : D^n \to D^n$ eine Substitutionsfunktion und andererseits $\det(g_t'(x)) > 0$ für alle $x \in D^n$ und somit ist

$$V(t) = \int_{D^n} \det(g_t'(x))\,dx = \int_{g_t(D^n)} 1 = \int_{g_0(D^n)} 1 = |D^n|$$

für diese t. Da V ein Polynom ist, ist dieses somit konstant und $V(1) = \int_{D^n} 0 = 0$, ein Widerspruch. □

EXAM **7.5.7a Lemma. Zusammenhang von Mannigfaltigkeiten.**
Es sei M eine topologische n-dimensionale MANNIGFALTIGKEIT*, d.h. ein metrischer Raum der für jedes $x \in M$ eine offenen Umgebung $U_x \cong \mathbb{R}^n$ besitzt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *M ist bogenzusammenhängend, d.h. zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in M$ existiert ein Bogen (d.h. eine stetige injektive Kurve $c : I \to M$ mit einen kompakten Intervall I) der sie verbindet (d.h. $c(i) = x_i$ für $i \in \{0, 1\}$ erfüllt).*
- *M ist wegzusammenhängend, d.h. zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in M$ existiert ein Weg (d.h. eine stetige Kurve $c : [0, 1] \to M$) der sie verbindet (d.h. $c(i) = x_i$ für $i \in \{0, 1\}$ erfüllt);*
- *M ist zusammenhängend, d.h. es existieren nicht zwei offene disjunkte nicht-leere Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit $X = U_1 \sqcup U_2$;*

Beweis. ($1 \Rightarrow 2$) ist offensichtlich, denn für $x_0 = x_1$ können wir den konstanen Weg verwenden, und für $x_0 \neq x_1$ und verbindenden Bogen $c : I \to M$ ist $[a, b] := I$ ein nicht degeneriertes Intervall, also $t \mapsto c(a + t(b-a)t)$ eine (injektive) Kurve mit $i \mapsto x_i$ für alle $i \in \{0, 1\}$.

($2 \Rightarrow 3$) Es sei $M = U_0 \sqcup U_1$ mit $x_i \in U_i$ für $i \in \{0, 1\}$. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Kurve $c : [0, 1] \to M$ mit $c(i) = x_i$ für $i \in \{0, 1\}$. Es sei $t_0 := \inf(c^{-1}(U_1))$. Da $c^{-1}(U_1)$ offen in $[0, 1]$ ist und $0 \notin c^{-1}(U_1)$ ist, ist $t_0 \notin c^{-1}(U_1)$, also $t_0 \in c^{-1}(U_1)^c = c^{-1}(U_1^c) = c^{-1}(U_0)$ und damit $c(t) \in c^{-1}(U_0)$ für alle hinreichend nahen t, ein Widerspruch zu $t_0 = \inf(c^{-1}(U_0^c))$.

($3 \Rightarrow 1$) Wir definieren eine Äquivalenzrelation durch $x_0 \sim x_1$, falls x_0 und x_1 durch einen Bogen verbunden werden können. Nur die Transitivität von $\sim$ ist nicht trivial. Sei als $x_1 \sim x_0 \sim x_2$ und

$c_i : [a_i, b_i] \to M$ Bögen die x_0 mit x_i für $i \in \{1, 2\}$ verbinden. Sei $t_2 := \max\Big(c_2^{-1}(c_1([a_1, b_1]))\Big)$ und $t_1 = c_1^{-1}(c_2(t_2)) \in [a_1, b_1]$, dann definiert

$$c(t) := \begin{cases} c_1(t_1 + t) & \text{für } t \le 0 \\ c_2(t_2 + t) & \text{für } t \ge 0 \end{cases}$$

eine stetige injektive Kurve $[a_1 - t_1, b_2 - t_2] \to M$ mit $c(a_1 - t_1) = c_1(a_1) = x_1$ und $c(b_2 - t_2) = c_2(b_2) = x_2$.

Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind offen, denn sei M_0 so eine Äquivalenzklasse und $x_0 \in M_0$ und $U \cong \mathbb{R}^m$ eine offene Umgebung. Dann kann jeder Punkt aus U durch das (inverse) Bild des Homöomorphismus der entsprechenden Strecke mit x_0 verbunden werden. □

EXAM

7.5.9 Theorem. Klassifikation 1-dimensionaler Mannigfaltigkeiten.
Jede zusammenhängende separable 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu S^1 oder zu $\mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $D = \{d_0, d_1, \dots, \}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von M. Sei $c_0 : [a_0, b_0] := [0, 1] \to M$ ein Bogen der d_0 mit d_1 verbindet. Wir konstruieren rekursiv Intervalle $[a_k, b_k] \supseteq [a_{k-1}, b_{k-1}]$ und injektive stetige Erweiterungen $c_k : [a_k, b_k] \to M$ wie folgt. Sei c_k bereits konstruiert und $n_0 := \min\{n : d_n \notin B_k := c_k([a_k, b_k])\}$. Dann existiert ein Bogen von B_k nach d_{n_0}. Dieser verläßt B_k in einem der beiden Randpunkte $c_k(a_k)$ bzw. $c_k(b_k)$, denn der Punkt wo er verläßt, besitzt eine zu einem offenen Intervall homöomorphe Umgebung, und wenn er kein Randpunkt von B_k ist, dann wird diese Umgebung lokal durch diesen Bogen überdeckt. Wir erweitern somit das Intervall je nachdem nach links oder nach rechts um $1/2^k$ und setzen c_k durch den außerhalb liegenden Teil des Bogens fort.

Wir erhalten somit eine stetige injektive Abbildung $c := \bigcup_k c_k : \bigcup_k [a_k, b_k] \to M$ eines beschränkten Intervalls mit Grenzen a und b nach M die D in ihrem Bild enthält.

Falls diese Abbildung surjektiv ist und das Intervall offen also homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, so sind wir fertig, denn c ist dann ein Homöomorphismus, da andernfalls eine Folge t_n mit $c(t_n) \to c(t_\infty)$ und ein $\delta > 0$ mit $\forall n : t_n \notin U_\delta(t_\infty)$ existiert. Da aber $c : U_\delta(t_\infty) \cong c(U_\delta(t_\infty))$ ein Homöomorphismus auf eine offene Umgebung $c(U_\delta(t_\infty))$ von $c(t_\infty)$ ist, muß $t_n \in c^{-1}(c(U_\delta(t_\infty))) = U_\delta(t_\infty)$ für alle großen n sein.

Ist die Abbildung surjektiv und besitzt das Intervall einen Randpunkt, so wird die zu $\mathbb{R}$ homöomorphe Umgebung auf einer Seite vom Bild des Intervalls nahe des einen Randpunkts und auf der anderen Seite vom Bild des Intervalls nahe den anderen Randpunkt überdeckt und letzterer gehört nicht zum Intervall, also erhalten wir eine injektive stetige surjektive Abbildung von $S^1 \to M$.

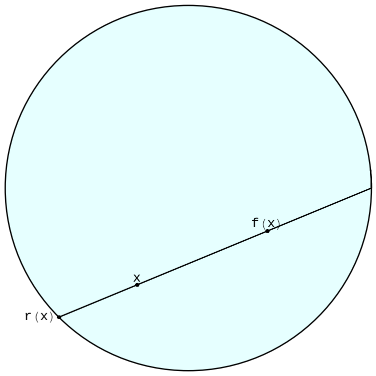
Falls die Abbildung nicht surjektiv ist, d.h. ein $x \in M$ existiert welches nicht im Bild liegt, so existiert eine zu einen Intervall homöomorphe offenen Umgebung U von x, links und rechts von x liegen dann Punkte $d_l = c(t_l)$ und $d_r = c(t_r)$ aus D, und da x nicht im Bild von c liegt, trifft der Bogen in U von d_l nach d_r den entsprechenden Bogen von c nicht, und wir erhalten somit eine stetige injektive Abbildung $S^1 \to M$, die auch surjektiv sein muß den kein Weg von ihrem Bild zu einem außerhalb liegenden Punkt ist möglich, da er das Bild nirgends verlassen kann. □

Bemerkung.
Beachte, daß jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^m$ separabel ist, denn dazu wählen wir aus jeden der abzählbar vielen Bälle mit rationalen Mittelpunktskoordinaten und rationalen Radius welcher X trifft einen Punkt in X. Die abzählbare Menge X_1 dieser Punkte ist dicht in X, denn sei $x \in X$ beliebig und $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$, dann existiert ein Punkt x_0 mit rationalen Koordinaten und $d(x_0, x) < \varepsilon/2$ und somit trifft der Ball um x_0 mit Radius $\varepsilon/2$ die Menge X enthält also einen Punkt $x_1 \in X_1$ und dieser liegt im Ball um x mit Radius ε, denn $d(x, x_1) \le d(x, x_0) + d(x_0, x_1) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

7.5.8 Brouwer's Fixpunktsatz.
Jedes stetige $f : D^n \to D^n$ hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis.

Angenommen $f : D^n \to D^n$ hat keinen Fixpunkt. Dann ist $r : D^n \to S^{n-1}$ definiert dadurch, daß $x \in D^n$ auf dem Schnittpunkt der Geraden von $f(x)$ nach x mit S^{n-1} der x näher liegt abgebildet wird eine stetige Retraktion, im Widerspruch zu (7.5.7). □



Explizit ist r gegeben durch:

$$r(x) := x - \lambda(f(x) - x), \text{ wobei } \lambda \geq 0 \text{ und}$$
$$0 = |r(x)|^2 - 1 = \lambda^2 |f(x) - x|^2 - 2\lambda\langle x|f(x) - x\rangle + |x|^2 - 1, \text{ d.h.}$$
$$\lambda = \frac{\langle x|f(x) - x\rangle + \sqrt{\langle x|f(x) - x\rangle^2 + |f(x) - x|^2\,(1 - |x|^2)}}{|f(x) - x|^2}.$$

7.6 Absolute Riemann-Integrierbarkeit

7.6.1 Definition. Lokale Integrierbarkeit.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt LOKAL INTEGRIERBAR falls für jedes $x \in U$ ein kompaktes Intervall $I \subseteq U$ existiert mit x im Inneren von I und $f|_I : I \to \mathbb{R}$ integrierbar.

7.6.2 Lemma. Charakterisierung lokal integrierbarer Funktionen.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1. *f ist lokal integrierbar;*
2. *$\forall K \subseteq U$, kompakt und J-meßbar: $f|_K$ ist integrierbar.*
3. *$\forall g \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$: $g \cdot f$ ist integrierbar;*

Mit $C_c(X, F)$ bezeichnen wir den linearen Teilraum von $C(X, F)$ der stetigen Funktionen mit kompakten Träger.

Beweis. (1⇒2) Es sei $K \subseteq U$ kompakt und J-meßbar. Für jedes $x \in K$ existiert nach (1) ein kompaktes Intervall $I_x \subseteq U$ mit x im Inneren $(I_x)^o$ von I_x. Da X kompakt ist existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in X$, s.d. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n (I_{x_i})^o \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_{x_i} =: K'$. Nach (7.2.13) ist $f|_{K'}$ integrierbar und da $K \subseteq K'$ meßbar ist auch $f|_{K'}$ nach (7.2.11).

($2 \Rightarrow 3$) Es sei $g : U \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger und integrierbar. Wie in (1⇒2) folgt die Existenz einer kompakten J-meßbaren Menge $K' \subseteq U$ mit $\operatorname{trg}(g) \subseteq K'$. Nach (2) existiert somit $\int_{K'} f$ und nach (7.2.8) ist auch $g\,f$ über K' und damit über $\mathbb{R}^p$ integrierbar.

($3 \Rightarrow 1$) Es sei $x \in U$ und $I \subseteq U$ ein kompaktes Intervall mit x im Inneren I^o. Nach (7.5.2b) existiert ein $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ mit $g|_I = 1$ und $\operatorname{trg}(I) \subseteq U$. Nach (3) ist $f\,g$ integrierbar und damit auch $f\,g|_I = f|_I$ integrierbar. □

7.6.3 Folgerung. Elementares über lokal integrierbare Funktionen.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$.

- *f stetig ⇒ f lokal integrierbar.*
- *f ist lokal integrierbar ⇔ f_- und f_+ sind lokal integrierbar.*
- *Die Menge $R_{lok}(U, \mathbb{R})$ der lokal integrierbaren Funktionen ist eine Algebra.*

Beweis. (1) Da f stetig ist, ist f über jede J-meßbare kompakte (damit f beschränkt ist) Teilmenge von U integrierbar.

(2) Offensichtlich, da $(f|_K)_\pm = f_\pm|_K$.

(3) Ebenso offensichtlich, da $(f + h \cdot g)|_K = f|_K + h|_K \cdot g|_K$. $\square$

Bemerkung.
In [19, 5.4] wird etwas anders vorgegangen. Er nennt eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^p$ lokal Archimedisch, wenn der Schnitt mit jeden kompakten Ball J-meßbar(=Archimedisch) ist. Die Menge A nennt er lokal mager (lokale J-Nullmenge), wenn diese Schnitte J-Nullmengen sind.

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer lokal J-meßbaren Menge A nennt er lokal integrierbar, wenn eine lokale J-Nullmenge N existiert, s.d. $f|_K$ integrierbar ist für jede abgeschlossene J-meßbare Menge $K \subseteq A \setminus N$. Da der Rand einer lokal J-meßbaren Menge eine lokale J-Nullmenge ist, können wir annehmen, daß $\partial A \subseteq N$ und $\partial N \subseteq N$, also daß N abgeschlossen und A offen ist.

Schließlich nennt er $f : A \to \mathbb{R}$ (absolut) integrierbar, falls f lokal integrierbar auf A ist und die Menge

$$I := \Big\{ \int_K f : K \subseteq A \text{ ist } J\text{-meßbar, abgeschlossen und } f|_K \text{ integrierbar} \Big\}$$

beschränkt ist. Das Integral ist dann durch

$$\int_A f := \sup(I) - \inf(I)$$

definiert. Dieses Integral ist additiv bzgl. des Integrationsbereichs. Falls $\{x \in A : f(x) > 0\}$ und $\{x \in A : f(x) < 0\}$ lokal J-meßbar sind, dann ist f genau dann integrabel über A, wenn $|f|$ es ist. Die Richtung $\Leftarrow$ stimmt nicht, falls $\{x : f(x) > 0\}$ nicht lokal J-meßbar ist (nur erwähnt in [19, S165]).

7.6.4 Proposition. Approximation des Integrals von innen.
Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ beschränkt und $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar. Dann gilt:

$$\int_B f = \sup\Big\{ \int_K f_+ : B \supseteq K \textit{ kompakt und } J\textit{-meßbar} \Big\} - \sup\Big\{ \int_K f_- : B \supseteq K \textit{ kompakt und } J\textit{-meßbar} \Big\}$$

Beweis. Nach (7.2.8) ist $f_\pm$ integrierbar $f = f_+ - f_-$ also und $\int_B f = \int_B f_+ - \int f_-$. Wir können also f_+ und f_- getrennt behandeln, und somit o.B.d.A. annehmen, daß $f \geq 0$ ist. Da $\int_B f := \int_{\mathbb{R}^p} \tilde{f}^B$ können wir weiters annehmen, daß $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mit $f|_{B^c} = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$ und sei I ein kompaktes Intervall mit $B \subseteq I$ und Z eine Zerlegung von I mit $O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon$. Es sei $Z' := \{J \in Z : J \subseteq B\}$. Dann ist $K := \bigcup Z' = \bigcup_{J \in Z'} J$ kompakt und J-meßbar und für $J \in Z' \setminus Z$ ist $\inf(f(J)) = 0$ also

$$U(f, Z') \leq \int_K f \leq O(f, Z') \leq O(f, Z)$$
$$U(f, Z') = U(f, Z) \leq \int_B f \leq O(f, Z)$$

und somit ist

$$0 \leq \int_B f - \int_K f < \varepsilon. \quad \square$$

Im 1-dimensionalen haben wir für Integration über nicht kompakte Intervalle uneigentliche R-Integrale eingeführt. Im mehrdimensionalen müssen wir nun statt dessen den stärkeren Begriff der absoluten R-Integrierbarkeit einführen.

7.6.5 Definition. Uneigentliche absolute Integrierbarkeit.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt (uneigentlich) ABSOLUT INTEGRIERBAR falls f lokal integrierbar ist und

$$\sup\Big\{ \int_K f_\pm : U \supseteq K \text{ kompakt und } J\text{-meßbar} \Big\} < \infty.$$

Man setzt dann

$$\int_U f := \sup\Big\{\int_K f_+ : U \supseteq K \text{ kompakt und } J\text{-meßbar}\Big\} - \sup\Big\{\int_K f_- : U \supseteq K \text{ kompakt und } J\text{-meßbar}\Big\}.$$

Wegen $0 \le f_\pm \le |f| = f_+ + f_-$ sind obige Beschränktheitsbedingungen äquivalent zu

$$\sup\Big\{\int_K |f| : U \supseteq K \text{ kompakt und } J\text{-meßbar}\Big\} < \infty,$$

was die Bezeichnung (uneigentlich) absolut integrierbar rechtfertigt.

Wegen (7.6.4) stimmt diese Definition des Integrals für beschränkte U mit der früheren Definition (7.2.1) überein.

Achtung: Zwar sind Linearkombinationen absolut integrierbarer Funktionen wieder absolut integrierbar, denn $|f + \lambda\, g| \le |f| + |\lambda|\,|g|$, dies ist für Produkte jedoch nicht mehr richtig wie das Beispiel $f = g : x \mapsto 1/\sqrt{x}$ auf $U := (0,1]$ zeigt.

Wir wollen die Definition (7.6.5) noch vereinfachen, indem wir nicht das Supremum über alle kompakten J-meßbaren Teilmengen von U betrachten, sondern nur über eine Basis der kompakten J-meßbaren Teilmengen von U, d.h. eine Menge $\mathcal{K}_0$ solcher Mengen, s.d. für jede kompakte J-meßbare Teilmenge $K \subseteq U$ ein $K_0 \in \mathcal{K}_0$ existiert mit $K \subseteq K_0$.

7.6.6 Theorem. Integration via Ausschöpfung.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Dann existiert eine abzählbare Basis der kompakten J-meßbaren Teilmengen von U. Für jede solche Basis $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine lokal integrierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ genau dann absolut integrierbar über U, wenn $n \mapsto \int_{K_n} |f|$ beschränkt ist. Unter diesen äquivalenten Bedingungen ist

$$\int_U f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{K_n} f,$$

bzw. wenn wir o.B.d.A. $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ als monoton wachsend voraussetzen

$$\int_U f = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f.$$

Beweis. Existenz einer Basis der angegebenen Form:
Um dies zu zeigen betrachten wir $A_n := \{x \in U : \|x\| \le n,\ d(x, U^c) \ge \frac{1}{n}\}$. Dann ist A_n beschränkt, abgeschlossen und damit kompakt, denn $x \mapsto \|x\|$ und $x \mapsto d(X, U^c)$ sind stetig, und zwar letzteres, da $d(x,y) \le d(x,x') + d(x',y) \Rightarrow d(x,Y) := \inf\{d(x,y) : y \in Y\} \le d(x,x') + \inf\{d(x',y) : y \in Y\} = d(x,x') + d(x',Y) \Rightarrow |d(x,Y) - d(x',Y)| \le d(x,x')$ für Teilmengen Y eines metrischen Raums X gilt. Weiters ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = U$, da U offen und somit $U = \{x : d(x,U^c) > 0\}$ ist. Weiters ist $A_n \subseteq \{x \in U : \|x\| < n+1,\ d(x,U^c) > \frac{1}{n+1}\} \subseteq A_{n+1}$, und da die mittlere Menge offen ist, ist $A_n \subseteq (A_{n+1})^o$. Allerdings muß A_n nicht J-meßbar sein, darum konstruieren wir nun K_n wie folgt: Für jedes $x \in A_n$ wählen wir ein kompaktes Intervall $I_x \subseteq (A_{n+1})^o$ mit x im Inneren. Da A_n kompakt ist überdecken endlich viele dieser Intervalle A_n und wir bezeichnen deren Vereinigung mit K_n. Dann ist K_n die gewünschte Folge mit $\bigcup_n K_n = U$ und $K_n \subseteq (K_{n+1})^o$, denn sei $K \subseteq U$ kompakt und J-meßbar, dann überdecken die Inneren $(K_n)^o$ die kompakte Menge K, also reichen endlich viele und damit auch die größte dieser.

Äquivalenz-Aussage für die absolute Integrierbarkeit:
($\Rightarrow$) Es sei f absolut integrierbar, also auch $f_\pm$. Sei also o.B.d.A. $f \ge 0$, dann ist $\int_{K_n} f \le \sup\{\int_K f : U \supseteq K \text{ kompakt und } J\text{-meßbar}\} = \int_U f$.

($\Leftarrow$) Es sei $K \subseteq U$ kompakt und J-meßbar. Dann existiert ein n mit $K \subseteq K_n$ und somit ist

$$\int_K f \le \int_{K_n} f \le \sup_j \int_{K_j} f.$$

Somit ist f absolut integrierbar und

$$\begin{aligned}\int_U f = \sup\Big\{\int_K f : U \supseteq K \text{ kompakt und } J\text{-meßbar}\Big\} &\le \sup_j \int_{K_j} f\\ \le \sup\Big\{\int_K f : U \supseteq K \text{ kompakt und } J\text{-meßbar}\Big\} &= \int_U f,\end{aligned}$$

und somit gilt Gleichheit. □

7.6.7 Folgerung. Substitutionsformel für absolute Integrale.
Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $g : V \to U$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ genau dann absolut integrierbar, wenn $(f \circ g) \cdot |\det \circ g'| : V \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar ist. Unter diesen Bedingungen ist

$$\int_U f = \int_V (f \circ g)(y)\, |\det(g'(y))|\, dy.$$

Beweis. Da $g : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist, durchlaufen die Mengen $g(K)$ mit $K \subseteq U$ kompakt und J-meßbar alle entsprechenden Teilmengen von $V = g(U)$ nach (7.4.4). Somit reduziert sich die behauptete Aussage auf die Substitutionsformel (7.4.7) für kompakte J-meßbare Teilmengen $K \subseteq U$. □

7.6.8 Beispiel.
Es ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Die Funktion $f : x \mapsto e^{-\|x\|^2}$ ist stetig am $\mathbb{R}^2$ und somit lokal integrierbar. Für $R > 0$ sei $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \|x\| \le R\}$. Dann ist vermöge Substitution mittels Polarkoordinaten

$$\int_{B_R} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r\, e^{-r^2}\, dr\, d\varphi = -\frac{\pi}{4}\, e^{-r^2}\Big|_{r=0}^R = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \le \frac{\pi}{4},$$

also f absolut integrierbar. Mittels Fubini erhalten wir

$$\Big(\int_0^R e^{-x^2}\, dx\Big)^2 = \Big(\int_0^R e^{-x_1{}^2}\, dx_1\Big) \cdot \Big(\int_0^R e^{-x_2{}^2}\, dx_2\Big) = \int_{[0,R]^2} e^{-(x_1^2 + x_2^2)}\, d(x_1, x_2).$$

Wegen $B_R \subseteq [0, R]^2 \subseteq B_{\sqrt{2}R}$ ist

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \le \int_{[0,R]^2} f \le \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$$

und somit

$$\Big(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\Big)^2 = \lim_{R \to +\infty} \int_{[0,R]^2} f = \frac{\pi}{4},$$

also

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

7.7 Dominierte Konvergenz

7.7.0 Bemerkung. Stetigkeit des Integrals.
Von großen Interesse ist die Frage nach der Vollständigkeit des Raums integrierbarer Funktionen und nach der Stetigkeit des Integrals auf diesem.

Teilweise Antworten dazu haben wir bereits gegeben:

1. Nach dem Lebesgue'sche Integrabilitätskriterium (7.2.7) und (4.2.8) ist für J-meßbares B der Raum $R(B,\mathbb{R})$ der Riemann-integrierbaren Funktionen bzgl. der Supremumsnorm vollständig.

2. Wegen (7.2.8) ist Integrieren $\int_B : R(B,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linear und wegen dem Mittelwertsatz (7.2.9) ist $|\int_B f| \leq |B|\,\|f\|_\infty$, also die Operatornorm von $\int_B$ höchstens $|B| < \infty$, d.h. Integrieren ist stetig, wenn wir auf $R(B,\mathbb{R})$ die Supremumsnorm verwenden.

3. Für das Integrieren ist aber die 1-Norm $\|f\|_1 := \int_B |f(x)|\,dx$ naheliegender, denn für diese gilt $|\int_B f| \leq \int_B |f(x)|\,dx =: \|f\|_1$, also ist dafür die Operatornorm des Integrierens 1.

4. Bzgl. der 1-Norm ist allerdings $R(B,\mathbb{R})$ kein normierter Raum, denn nach Aufgabe $\boxed{5}$ ist für integrierbare f genau dann Norm $\|f\|_1 = \int_B |f| = 0$, wenn $f = 0$ fast überall ist. Dies kann man reparieren, indem man den Raum $R(B,\mathbb{R})/\sim$ der Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation $f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ fast überall betrachtet.

5. Allerdings weder $R(B,\mathbb{R})$ noch $R(B,\mathbb{R})/\sim$ bzgl. der 1-Norm vollständig, wie die Aufgabe $\boxed{5.28}$ mit $\sum_n (3/2)^n\,\chi_{(1/2^{n+1},1/2^n]}$ zeigt.

6. Neben der gleichmäßigen Konvergenz (d.h. in der Supremumsnorm) und der Konvergenz im Mittel (d.h. bzgl. der 1-Norm) ist aber auch die punktweise Konvergenz interessant. Falls $\|f_n\|_1 \to 0$ für R-integrierbare f_n so folgt daraus jedoch nicht die punktweise Konvergenz von f_n, wie $f_{2^n+k} := \chi_{[k/2^n,(k+1)/2^n]}$ für $0 \leq k < 2^n$ zeigt, die an jeder Stelle divergent ist. Oder noch drastischer seien I_k die Vereinigung abgeschlossener Intervalle, die in (5.1.4e) zur Konstruktion des Cantor'schen Diskontinuums geführt hat, und $f_n := (4/3)^n\,\chi_{I_n}$. Dann ist $\|f\|_1 = (4/3)^n\,(2/3)^n = (8/9)^n \to 0$, aber f_n divergiert in jedem Punkt des Cantor'schen Diskontinuums gegen $+\infty$.

7. Umgekehrt folgt aus der punktweisen Konvergenz R-integrierbarer Funktionen f_k weder die Integrierbarkeit der Grenzfunktion f_∞, noch aus deren zusätzlich geforderten Integrierbarkeit die Konvergenz der Integrale $\int_B f_n \to \int_B f_\infty$: Die (monoton wachsende) Folge in Aufgabe $\boxed{5.28}$ hat eine unbeschränkte Funktion als punktweisen Grenzwert; und $f_n := 2^n\,\chi_{[1/2^n,1/2^{n-1}]}$ konvergiert zwar punktweise gegen 0, aber $\|f_n\|_1 = 1$ nicht gegen $\|0\|_1 = 0$.

Wir wollen nun zeigen, daß wir unter zusätzlichen Monotonievoraussetzungen bzw. Beschränktheitsvoraussetzungen Stetigkeitsaussagen für das Integrieren erhalten.

7.7.1 Proposition. Integral bei monotoner Konvergenz.
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und J-meßbar, $f_k : K \to \mathbb{R}$ seien beschränkt und f_k konvergiere punktweise und monoton fallend gegen 0. Dann ist $\lim_{k\to\infty} U(f_k) = 0$.

Falls f_k sogar stetig sind, so konvergiert $f_k \to 0$ gleichmäßig nach dem Satz von Dini (Aufgabe $\boxed{5.6}$) und somit ist $\lim_{k\to\infty} \int_K f_k = 0$.

Beweis nach [20] und [36]. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu f_k eine Treppenfunktion $t_k \leq f_k$ mit $U(f) - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \int t_k$ und nach (7.5.3) zu t_k eine C_c-Funktion $g_k \leq t_k$ mit $\int t_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \int g_k$, also $U(f_k) \leq \int_K g_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Indem wir g_k durch $(g_k)_+$ ersetzen dürfen wir o.B.d.A. $g_k \geq 0$ annehmen. Es sei $h_k := \min\{g_1, \ldots, g_k\} = \min\{h_{k-1}, g_k\}$. Dann ist h_k stetig und h_k konvergiert monoton fallend punktweise gegen 0.

Weiters ist

$$f_k - h_k = f_k - \min\{g_k, h_{k-1}\} = \max\{f_k - g_k,\ \underbrace{f_k - h_{k-1}}_{\le f_{k-1}-h_{k-1}}\} \le \max\{\underbrace{f_k - g_k}_{\ge 0}, \underbrace{f_{k_1} - h_{k-1}}_{\ge 0}\}$$
$$\le f_k - g_k + f_{k-1} - h_{k-1}.$$

Mittels vollständiger Induktion folgt $f_k - h_k \le \sum_{j=1}^k (f_j - g_j)$ und somit

$$U(f_k) = U\Big(h_k + \sum_{j=1}^k (f_j - g_j)\Big) \le \int_K h_k + U\Big(\sum_{j=1}^k (f_j - g_j)\Big) \not\le \int_K h_k + \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Diesen Fehler hat Hausdorff in [20] gemacht und er wurde oft kopiert, zuletzt z.B. von [16].

Die folgende Korrektur stammt von [36]: Für $1 \le i \le n$ ist

$$0 \le g_n = (g_n - g_i) + g_i \le \Big(\overbrace{\max\{g_i, \dots, g_n\} - g_i}^{\ge 0}\Big) + g_i \le g_i + \sum_{l=1}^{n-1}\Big(\max\{g_l, \dots, g_n\} - g_l\Big)$$
$$\Rightarrow\ 0 \le g_n \le h_n + \sum_{l=1}^{n-1}\Big(\max\{g_l, \dots, g_n\} - g_l\Big).$$
$$\Rightarrow\ \int_K g_n \le \int_K h_n + \sum_{l=1}^{n-1}\Big(\int_K \overbrace{\max\{g_l, \dots, g_n\}}^{\le \max\{f_l,\dots,f_n\} = f_l} - \int_K g_l\Big)$$
$$\le \int_K h_n + \sum_{l=1}^{n-1}\Big(U(f_l) - \int_K g_l\Big) \le \int_K h_n + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^l} = \int_K h_n + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$\Rightarrow\ U(f_n) \le \int_K g_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \le \int_K h_n + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) < \int_K h_n + \varepsilon.$$

Wegen dem Satz von Dini (Aufgabe $\boxed{\mathbf{5.6}}$) konvergiert h_k gleichmäßig gegen 0, also existiert ein k_0 s.d. für alle $k \ge k_0$:

$$\int_K h_k \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ und somit } 0 \le U(f_k) \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} < \varepsilon. \quad \square$$

7.7.2 Arzelà's Theorem über dominierte Konvergenz aus 1885 und 1900.
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und J-meßbar und $f_n : K \to \mathbb{R}$ integrierbar für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Es konvergiere f_n gegen f_∞ punktweise und $\|f_n\|_\infty$ sei beschränkt. Dann gilt: $\int_K f_n \to \int_K f_\infty$.

Beweis. O.B.d.A. ist $f_\infty = 0$ (ersetze f_n durch $f_n - f_\infty$) und $f_n \ge 0$ (betrachte $(f_n)_\pm$, (6.1.8)). Es sei $g_n := \sup\{f_j : j \ge n\}$ (dann ist g_n nicht notwendig integrabel) aber beschränkt da $\|f_n\|_\infty$ beschränkt ist, und pktw. falled gegen 0, da $f_n \to f_\infty = 0$ punktweise konvergiert. Nach (7.7.1) ist

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \int_K f_n \le \lim_{n\to\infty} U(g_n) = 0. \quad \square$$

7.7.3 Arzelà's Theorem über dominierte Konvergenz für absolute Integrierbarkeit.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f_n : U \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Es konvergiere f_n gegen f_∞ punktweise und es existiere eine über U absolut integrierbare Funktion g mit $|f_n(x)| \le g(x)$ für alle $x \in U$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_U f_n = \int_U f_\infty.$$

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach (7.6.6) existiert eine kompakte J-meßbare Teilmenge $K \subseteq U$ mit $\int_{U\setminus K} |f_\infty(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\int_{U\setminus K} |f_n(x)|\,dx \le \int_{U\setminus K} g < \frac{\varepsilon}{3}$. Nach (7.7.2) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Big|\int_U f_\infty - \int_U f_n\Big| &\le \Big|\int_K (f_\infty - f_n) + \int_{U\setminus K} f_\infty - \int_{U\setminus K} f_n\Big|\\ &\le \Big|\int_K (f_\infty - f_n)\Big| + \int_{U\setminus K} |f_\infty| + \int_{U\setminus K} |f_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Als erste Anwendung des Satzes von Arzelà wollen wir die Vertauschbarkeit von Ableiten und Differenzieren aufgreifen. Wir haben diese bereits in (6.1.22) für $f : E \times \mathbb{R} \supseteq U \times [a,b] \to F$ mit mehrdimensionalen E und F und in (7.2.15) für $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \supseteq U \times B \to \mathbb{R}$ mit kompakten J-meßbaren B behandelt. Idee dabei war, daß $x \mapsto \int_B f(x,y)\,dy$ die Zusammensetzung

$$U \xrightarrow{f^\vee} R(B,F) \xrightarrow{\int_B} F$$

ist und somit die Kettenregel anwendbar sein sollte. Für unbeschränktes B haben wir aber nicht mehr die Stetigkeit von $\int_B$ bzgl. der Supremumsnorm, aber dennoch Stetigkeit auf gewissen konvergenten Folgen in $R(B,\mathbb{R})$ nach Arzelà's Theorem (7.7.3). Damit können wir nun zeigen:

7.7.4 Folgerung. Vertauschbarkeit von Integral und Differential.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen und $f : U \times V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- *Für alle $x \in U$ ist $y \mapsto f(x,y)$ absolut integrierbar über V.*
- *$\partial_1 f : U \times V \to L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ existiert, ist stetig und für alle $x \in U$ ist $y \mapsto \partial_1 f(x,y)$ (komponentenweise) absolut integrierbar über V.*
- *Es gibt eine absolut integrierbare Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ mit $\|\partial_1 f(x,y)\| \le g(y)$ für alle $(x,y) \in U \times V$.*

Dann ist $\varphi : x \mapsto \int_V f(x,y)\,dy$ differenzierbar mit Ableitung $\varphi'(x) = \int_V \partial_1 f(x,y)\,dy$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) - \varphi(x) - \int_V \partial_1 f(x,y)\,dy \cdot h &= \int_V \Big(f(x+h,y) - f(x,y) - \partial_1 f(x,y)\cdot h\Big)\,dy\\ &= \int_V \int_0^1 \Big(\underbrace{\partial_1 f(x+s\,h,y) - \partial_1 f(x,y)}_{=:\Phi(x,s,h,y)}\Big)\cdot h\,ds\,dy\end{aligned}$$

also

$$\Big|\varphi(x+h) - \varphi(x) - \int_V \partial_1 f(x,y)\,dy \cdot h\Big| \le \int_V \int_0^1 \|\Phi(x,s,h,y)\|\,ds\,dy \cdot \|h\|.$$

Da $\partial_1 f$ stetig ist, konvergiert $\Phi(x,s,h_n,y) \to 0$ für $h_n \to 0$ und $\|\Phi(x,s,h_n,y)\| \le 2g(y)$, also konvergiert $\int_0^1 \|\Phi(x,s,h_n,y)\|\,ds \to 0$ für $n \to \infty$ nach (7.7.3) und somit auch $\int_V \int_0^1 \|\Phi(x,s,h_n,y)\|\,ds\,dy$ ebenfalls nach (7.7.3), da $\int_0^1 \|\Phi(x,s,h_n,y)\|\,ds \le 2g(y)$. Damit ist φ differenzierbar mit Ableitung $\int_V \partial_1 f(x,y)\,dy$ bei a. $\square$

7.7.6 Satz von Fubini für absolute Integrierbarkeit.
Wir wollen für $f : U \to \mathbb{R}$ mit offenen $U \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ das Integral $\int_U f$ rekursive berechnen. Dazu benötigen wir

$$\begin{aligned}U' &:= \{x \in \mathbb{R}^p \mid \exists\, y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in U\} \quad \text{und}\\ U^x &:= \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x,y) \in U\} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^p.\end{aligned}$$

Dann sind $U' \subseteq \mathbb{R}^p$ und $U^x \subseteq \mathbb{R}^q$ offene Teilmengen und

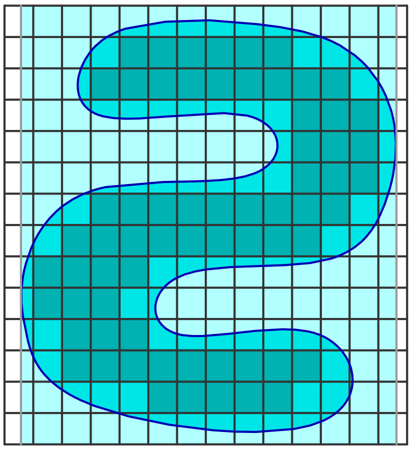
$$U = \{(x, y) : x \in U', y \in U^x\} = \bigsqcup_{x \in U'} \{x\} \times U^x,$$

und wir wollen

$$\int_U f = \int_{U'} \int_{U^x} f(x, y)\, dy\, dx$$

zeigen. Dazu betrachten wir der Einfachheithalber (vorerst) Funktionen $f \geq 0$ die absolut integrierbar sind. Sei $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis der kompakten J-meßbaren Teilmengen von U, d.h. jedes K_n ist endliche Vereinigung von (nicht-überlappenden) Intervallen in U und nach (7.6.6) ist $\int_U f = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f$. Wie für U definieren wir für K_n nun

$$\begin{aligned} K'_n &:= \{x \in \mathbb{R}^p | \, \exists\, y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in K_n\} \quad \text{und} \\ K^x_n &:= \{y \in \mathbb{R}^q | \, (x, y) \in K_n\} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$



Dann sind die $K'_n \subseteq U'$ und $K^x_n \subseteq U^x$ Basen der kompakten J-meßbaren Teilmengen, denn z.B. gilt für jede kompakte J-meßbare Teilmenge in U^x, daß $\{x\} \times K$ kompakt und J-meßbar in U ist, also in einem K_n enthalten. Falls f stetig ist, so folgt aus dem Satz von Fubini (7.1.10) bzw. (7.1.11):

$$\int_{K_n} f = \int_{K'_n} \underbrace{\int_{K^x_n} f(x, y)\, dy}_{=: g_n(x)}\, dx$$

Wir setzen also

$$g_n(x) := \begin{cases} \int_{K^x_n} f(x, y)\, dy & \text{für } x \in K'_n \\ 0 & \text{für } x \in U' \setminus K'_n \end{cases}$$

und

$$g(x) := \int_{U^x} f(x, y)\, dy,$$

wobei wir voraussetzen, daß dieses absolute Integral existiert, also konvergiert $g_n(x) = \int_{K^x_n} f(x, y)\, dy$ monoton wachsend (da $f \geq 0$) und konvergent gegen $g(x) = \int_{U^x} f(x, y)\, dy$ nach (7.7.2), da $\{K^x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis der kompakten J-meßbaren Teilmengen von U^x bildet. Um die absolute Integrierbarkeit von g über U' zu zeigen, wollen wir (7.7.3) anwenden. Dazu benötigen wir, daß $g : x \mapsto \int_{U^x} f(x, y)\, dy$ lokal integrierbar ist, und $\int_{K'_n} \int_{U^x} f(x, y)\, dy$ bzgl. n beschränkt ist. Aus (7.7.2) folgt letzteres, denn $\int_U f \geq \int_{K_n} f = int_{K'_n} g_n \to \int_{K'_n} g(x)$, denn $g_n(x)$ konvergiert punktweise und monoton wachsend gegen $g(x)$ und $g|_{K'_n}$ haben wir gerade als integrierbar vorausgesetzt und ist somit eine beschränkte Majorante.

Wir haben also folgendes Resultat bewiesen:

Satz von Fubini für absolute Integrierbarkeit.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig, absolut integrierbar und $f \geq 0$. Sei weiters $x \mapsto \int_{U_x} f(x,y)\,dy$ wohldefiniert und lokal integrierbar über U'. Dann ist

$$\int_U f = \int_{U'} \int_{U^x} f(x,y)\,dy\,dx. \quad \square$$

Bemerkung.
Es interessiert uns allerdings mehr eine Umkehrung zu obigen Satz, d.h. wir wollen aus der Existenz des iterierten Integrals $\int_{U'} \int_{U^x} f(x,y)\,dy\,dx$ auf die absolute Integrierbarkeit von f über U und

$$\int_U f = \int_{U'} \int_{U^x} f(x,y)\,dx\,dy$$

schließen:

7.7.7 Umkehrung des Satzes von Fubini für absolute Integrierbarkeit.
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und $f \geq 0$. Weiters existiere $\int_{U'} \int_{U^x} f(x,y)\,dy\,dx$, d.h. für alle $x \in U'$ sei $y \mapsto f(x,y)$ absolut integrierbar über U^x und $x \mapsto \int_{U^x} f(x,y)\,dy$ absolut integrierbar über U'.

Dann ist f absolut integrierbar über U und

$$\int_U f = \int_{U'} \int_{U^x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die absolute Integrierbarkeit von f über U. Lokale Integrierbarkeit ist klar, da f stetig vorausgesetzt ist. Sei also $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis wie zuvor. Dann ist $\int_{K_n} f = \int_{K'_n} \int_{K_n^x} f \leq \int_{K'_n} \int_{U^x} f \leq \int_U' \int_{U^x} f < \infty$, da die Existenz des letzten iterierten Integrals vorausgesetzt wurde und $f \geq 0$ ist. Also ist $n \mapsto \int_{K_n} f$ beschränkt und somit f absolut integrierbar über U nach (7.6.6).

Mittels (7.7.6) folgt nun die Gleichheit

$$\int_U f = \int_{U'} \int_{U^x} f(x,y)\,dy\,dx. \quad \square$$

7.7.8 Bemerkung.
Wenn wir die Bedingung $f \geq 0$ weglassen wollen, dann müssen wir halt die Funktionen $f_\pm \geq 0$ betrachten und die notwendigen Bedingungen in (7.7.6) und (7.7.8) für diese voraussetzen. In [16] wird fälschlicherweise nur die entsprechende Bedingung für $|f|$ vorausgesetzt, woraus aber wohl nicht jene für $f_\pm$ folgt.

7.7.5 Beispiel.
Es sei die stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := e^{-x^4y^2-y^2} = e^{-(1+x^4)y^2}$. Nach (7.6.8) ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+x^4}}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\,dx = \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx < \infty,$$

denn $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq x^{-2}$ für $|x| \geq 1$.

Andererseits divergiert $\int_\mathbb{R} f(x,0)\,dx = \int_\mathbb{R} dx$, wohingegen $\int_\mathbb{R} f(x,y)\,dx < \infty$ für $y \neq 0$. Jede kompakte J-meßbare Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ist in einem kompakten Intervall $[-R,R]^2$ enthalten und durch Substitution $(x,y) = (x, \frac{z}{\sqrt{1+x^4}})$ zeigt man, daß (7.6.6) erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-(1+x^4)y^2}\,dy\,dx &= \int_{-R}^{R}\int_{-R\sqrt{1+x^4}}^{R\sqrt{1+x^4}} e^{-z^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dz\,dx\\ &\leq \int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz}_{=\sqrt{\pi}}\,dx \leq \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} < \infty.\end{aligned}$$

Also ist f absolut integrierbar über $\mathbb{R}^2$. Es ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(1+x^4)y^2}\,d(x,y) &= 4\int_{\mathbb{R}^2_+} e^{-(1+x^4)y^2}\,d(x,y) = 4\int_{\mathbb{R}^2_+} e^{-(t+s)}\frac{1}{8(ts)^{\frac{3}{4}}}\,d(t,s)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\frac{1}{4}-1}\,dt\Big)^2 = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2,\end{aligned}$$

denn die Substitutionsfunktion $(x,y) \mapsto (x^4y^2, y^2) =: (t,s)$ hat Jakobi-Determinante $4x^3y\,2y^2$ und die Umkehrfunktion somit Jakobi-Determinante $\frac{1}{8(xy)^3} = \frac{1}{8(ts)^{3/4}}$.

7.7.9 Beispiel.
Es sei $f(x,y) := xy/(x^2+y^2)^2$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$.

Wir berechnen zuerst ein iteriertes Integral

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xy}{(x^2+y^2)}\,dy\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}\int_0^1\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}\int_{x^2}^{x^2+1}\frac{1}{u^2}\,du\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_{u=x^2}^{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx = 0.\end{aligned}$$

Allerdings ist f nicht absolut integrierbar über $\mathbb{R}^2$, denn für den Viertelkreisring $K(R_1,R_2) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ R_1^2 \leq x^2+y^2 \leq R_2^2\}$ ist

$$\begin{aligned}\int_{K(R_1,R_2)} f &= \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi/2}\frac{r\sin(\varphi)\,r\cos(\varphi)}{r^4}\,r\,d\varphi\,dr\\ &= \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}\,dr\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2\varphi)}{2}\,d\varphi = \Big[\ln(r)\Big]_{r=R_1}^{R_2}\cdot\Big[-\frac{\cos(2\varphi)}{4}\Big]_{\varphi=0}^{\pi/2}\\ &= \frac{\ln(R_2)-\ln(R_1)}{2} \to +\infty \quad \text{für } R_1 \to 0+,\ R_2 \to +\infty.\end{aligned}$$

7.7.10 Beispiel.
Es sei $f(x,y) := (x-y)/(x^2+y^2)^{3/2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$. Wieder berechnen wir zuerst

ein iteriertes Integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{dy}\left(\frac{x+y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy\,dx \\
&= \int_0^1 \Big[\frac{x+y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\Big]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dx}\Big(\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big)\,dx \\
&= \Big[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln(1+\sqrt{1+x^2})\Big]_{x=0}^{x=1} \\
&= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1) + \ln(2) = \ln(2)
\end{aligned}$$

Zur “Probe” nun das andere iterierte Integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{y-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy \\
&= -\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(y^2+x^2)^{3/2}}\,dy\,dx = -\ln(2)
\end{aligned}$$

Nachdem dies das Negative des anderen ist, kann f nicht absolut integrierbar über $(0,1)^2$ sein, wie auch die direkte Berechnung des positiven Teils zeigt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f_+(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^x \frac{d}{dy}\left(\frac{x+y}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy\,dx \\
&= \int_0^1 \Big[\frac{x+y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\Big]_{y=0}^x dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\sqrt{2}-1\right)\,dx \\
&= \big(\ln(1)-\ln(0)\big)\cdot\big(\sqrt{2}-1\big) = +\infty
\end{aligned}$$

7.8 Lebesgue-Integral

7.8.2 Folgerung. Erweiterung gleichmäßig stetiger Abbildungen.

Es sei X ein metrischer Raum, Y ein vollständig metrischer Raum, $A \subseteq X$ dicht und $f : A \to Y$ gleichmäßig stetig. Dann existiert eine (eindeutige gleichmäßig) stetige Erweiterung $\tilde{f} : X \to Y$ von f.

Beweis. Es sei $x \in X$. Da $A \subseteq X$ dicht liegt existieren $a_n \in A$ mit $a_n \to x$. Insbesonders ist $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge und da f glm. stetig ist, ist auch $(f(a_n))_n$ eine nach Aufgabe $\boxed{\mathbf{3.47}}$. Da Y vollständig existiert $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$. Die einzig mögliche stetige Erweiterung von f ist somit durch $\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ gegeben. Diese Definition macht Sinn, denn wenn auch $A \ni b_n \to x$, so konvergiert $d(a_n, b_n) \to 0$ und wegen der glm. Stetigkeit auch $d(f(a_n), f(b_n)) \to 0$, also ist $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.

Bleibt zu zeigen, daß $\tilde{f}$ glm. stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ dann existiert ein $\delta > 0$ s.d. $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$ für alle $a, b \in A$ mit $d(a,b) < \delta$. Sei nun $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$. Wie zuvor existieren $a_n, b_n \in A$ mit $a_n \to x$ und $b_n \to y$. Also ist $d(a_n, b_n) < \delta$ für alle hinreichend großen n und somit $d(f(a_n), f(b_n)) < \delta$. Damit ist aber $d(f(x), f(y)) = d(\lim_{n\to\infty} f(a_n), \lim_{n\to\infty} f(b_n)) = \lim_{n\to\infty} d(f(a_n), f(b_n)) \le \varepsilon$. □

7.8.3 Vervollständigung metrischer Räume.

Jeder metrische Raum (X,d) *besitzt eine* VERVOLLSTÄNDIGUNG EINES METRISCHEN RAUMES $(\tilde{X},\tilde{d})$, *d.h. einen vollständig metrischen Raum mit einer glm. stetigen Abbildung* $\iota : X \to \tilde{X}$*, die folgende universelle Eigenschaft besitzt. Zu jeder glm. stetigen Abbildung* $f : X \to Y$ *mit Werten in einem vollständig metrischen Raum* Y *existiert eine eindeutige glm. stetige Abbildung* $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ *mit* $\tilde{f}\circ\iota = f$*. Es folgt, daß* ι *eine dichte Einbettung ist.*

Beweis. Falls $X = \emptyset$, dann ist X vollständig und somit $\tilde{X} = X$. Andernfalls wählen wir $x_0 \in X$. Es sei $B(X,\mathbb{R})$ der Raum der beschränkten Abbildungen von $X \to \mathbb{R}$. Bzgl. der Supremumsnorm ist dies ein vollständig metrischer Raum nach (5.5.6). Die Abbildung $\iota : x \mapsto (y \mapsto d(y,x) - d(y,x_0))$ hat Werte in $B(X,\mathbb{R})$, denn $|d(y,x) - d(y,x_0)| \le d(x,x_0)$. Sie ist eine Isometrie, denn $\|\iota(x) - \iota(x')\|_\infty = \sup\{|d(y,x) - d(y,x')| : y \in X\} = d(x,x')$ ($\le$ ist klar wegen der Dreiecksungleichung, und nun setze $y = x'$). Sei nun $\tilde{X}$ der Abschluß von $\iota(X)$ in $B(X,\mathbb{R})$. Die universelle Eigenschaft folgt nun aus (7.8.2). □

Bemerkung.
Falls die Metrik d auf X beschränkt ist, so können wir einfacher $\check{d} : X \to B(X,\mathbb{R})$ als Einbettung in einen vollständigen metrischen Raum betrachten.

Falls E ein normierter Raum ist und d die von der Norm erzeugte Metrik, so ist $\tilde{E}$ ein Vektorraum und $\iota : E \to \tilde{E}$ linear, denn die skalar-Multiplikation und die Addition erweitern sich eindeutig zu stetigen Abbildungen $\mathbb{R} \times \tilde{E} \to \tilde{E}$ sowie $E \times \tilde{E} \to \tilde{E}$ und schließlich $\tilde{E} \times \tilde{E} \to \tilde{E}$ (denn $+ : E \times E \to E$ ist gleichmäßig stetig da $\|(x+y) - (x'+y')\| \le \|x - x'\| + \|y - y'\| \le 2\max\{\|x - x'\|, \|y - y'\|\}$, und $(\cdot) : E \to L(\mathbb{R},E) \subseteq L(\mathbb{R},\tilde{E})$ ist gleichmäßig stetig da $\sup\{\|\lambda\cdot x - \lambda\cdot x'\| : |\lambda| \le 1\} = \|x - x'\|$), und da die VR-Gesetze auf der dichten Teilmenge E gelten, so gelten diese auch auf $\tilde{E}$. Die Metrik $\tilde{d}$ ist aus den gleichen Gründen translationsinvariant, induziert also eine Abbildung $\|\_\| : \tilde{E} \to \mathbb{R}$ die eine Norm ist, welche die Norm von E erweitert. Also haben wir einen Banach-Raum $\tilde{E}$ erhalten in welchen E als dichter Teilraum isometrisch und linear eingebettet ist.

7.8.5a Banach-Räume integrierbarer Funktionen.
Wir wollen nun vollständige Räume integrierbarer Funktionen finden. Die Idee dabei ist einen Raum integrierbarer Funktionen bezüglich der 1-Norm zu vervollständigen. Wir könnten dazu natürlich vom Raum der stetigen Funktionen ausgehen, oder sogar von jenem der Riemann-integrierbaren. Aber am einfachsten ist es mit den Treppenfunktionen zu beginnen, denn da benötigen wir vorerst keine Integrationstheorie.

Sei also $\mathcal{A}$ die Menge aller endlichen disjunkten Vereinigungen von rechts-offenen Intervallen (d.h. Quadern) $[a,b) := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i < b_i\}$ in $X := \mathbb{R}^n$, wobei $-\infty \le a_i < b_i \le +\infty$.

Dieses Mengensystem hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{A}$

Das Volumen eines solchen Intervalls definieren wir als $\mu([a,b)) := \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$ bzw. als ∞, falls ein $a_i = -\infty$ oder ein $b_i = +\infty$. Dann läßt sich μ eindeutig zu einem sogenannten positiven Maß μ fortsetzen, i.e. einer Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$, welche σ-additiv ist, d.h. sind die $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und ist auch $\bigcup_{i=0}^\infty A_i \in \mathcal{A}$ so gilt: $\mu(\bigcup_{i=0}^\infty A_i) = \sum_{i=0}^\infty \mu(A_i)$.

Unter einer TREPPENFUNKTION verstehen wir dann die Elemente des linearen Raums T von Funktionen, welcher durch die CHARAKTERISTISCHEN FUNKTIONEN CHARAKTERISTISCHE FUNKTION mit $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) < \infty$ erzeugt wird, d.h. $T := \{\sum_{i=1}^m \lambda_i\chi_{A_i} : A_i \in \mathcal{A}, \mu(A_i) < \infty, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$. Man beachte, daß für $f \in T$ und jede Zahl c die Menge $f_{<c}$ in $\mathcal{A}$ liegt. Das INTEGRAL EINER TREPPENFUNKTION von $f = \sum_{i=1}^m \lambda_i\chi_{A_i}$ definieren wir als

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \lambda_i\chi_{A_i} d\mu := \sum_{i=1}^m \lambda_i\mu(A_i).$$

Integrieren ist somit ein lineares (wohldefiniertes!) Funktional auf T und mittels $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^m} |f| d\mu$ wird T zu einem normierten Raum. Also können wir dessen Vervollständigung $\tilde{T}$ betrachten. Dies ist ein Banach-Raum und das Funktional $\int$ erweitert sich zu einem stetigen linearen Funktional $\int$ auf $\tilde{T}$, und die Norm zu einer Norm $\|\_\|_1$. Für $A \in \mathcal{A}$ ist auch $\int_A f := \int_{\mathbb{R}^m} f \cdot \chi_A$ wohldefiniert.

Allerdings wissen wir nicht ob die Elemente $\varphi \in \tilde{T}$ als Funktionen am $\mathbb{R}^n$ aufgefaßt werden können. Dieses Problem wollen wir jetzt untersuchen.

7.8.5b Die Vervollständigung $\tilde{T}$ als integrierbare Funktionen.
Jedem $\varphi \in \tilde{T}$ wollen wir also eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ zuordnen, die in einem gewissen Sinn integrierbar ist. Da T in der Vervollständigung $\tilde{T}$ dicht liegt, existieren $f_n \in T$, s.d. $\|\varphi - f_n\|_1 \to 0$ (Insbesonders ist f_n eine Cauchy-Folge in T). Falls diese zumindest punktweise konvergiert, so wäre $f : x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ein Kandidat für die zu φ gehörende Funktion.

Im allgemeinen muß dies aber nicht der Fall sein, wie das Beispiel in (7.7.0.6) zeigt.

Das Problem bei diesem Beispiel ist, daß die Folge $f_n(x)$ zwei Häufungspunkte besitzt, also betrachten wir vorerst monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen f_n:

Lemma.
Sei eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen f_n vorgeben. Dann konvergiert f_n bezüglich der 1-Norm genau dann in $\tilde{T}$, wenn die Integrale $\int f_n$ (nach oben) beschränkt bleiben.

Unter dieser äquivalenten Bedingungen ist das Supremum $\sup_n f_n(x)$ fast überall endlich.

Für jede Nullmenge findet man eine solche Folge von Treppenfunktionen f_n, welche auf dieser Menge divergiert.

Man sagt, daß eine Aussage FAST ÜBERALL GÜLTIG gilt, wenn sie mit Ausnahme einer Nullmenge gilt.

Eine NULLMENGE ist eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varepsilon > 0$ Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ existieren mit $A \subseteq \bigcup_{n=0}^\infty A_n$ und $\sum_{n=0}^\infty \mu(A_n) \le \varepsilon$. Äquivalent dazu ist die Existenz von $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\mu(A_n) \le \varepsilon$ und $A \subseteq \bigcup_n A_n$ (Hinweis: Ersetze A_n durch $\bigcup_{k\le n} A_k$).

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f_n bezüglich der 1-Norm konvergent, dann ist f_n eine Cauchy-Folge also ist $\int f_n$ beschränkt, da $\int$ stetig und linear ist.

($\Leftarrow$) Sei nun f_n eine wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $\sup_n \int f_n < \infty$, dann existiert der Limes K der wachsenden beschränkten Folge $\int f_n$. Folglich gilt für $n \ge m$:

$$\int |\underbrace{f_n - f_m}_{\ge 0}| = \int f_n - \int f_m \to K - K = 0 \text{ für } n, m \to \infty,$$

also ist f_n eine Cauchy-Folge in T.

Sei $g_n := f_n - f_0 \ge 0$ und $K := \sup\{\int g_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $A_{\varepsilon,n} := \{x : g_n(x) \ge \frac{K}{\varepsilon}\}$. Klarerweise ist $A_{\varepsilon,n+1} \supseteq A_{\varepsilon,n} \in \mathcal{A}$ und es ist $\mu(A_{\varepsilon,n}) \le \varepsilon$, denn wegen $g_n \ge 0$ ist

$$\frac{K}{\varepsilon}\mu(A_{\varepsilon,n}) \le \int_{A_{\varepsilon,n}} g_n \le \int g_n \le K.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} f_n(x) \text{ ist divergent} &\Leftrightarrow g_n(x) \text{ ist divergent} \\ &\Leftrightarrow g_n(x) \text{ ist unbeschränkt} \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n : x \in A_{\varepsilon,n} \\ &\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 : x \in \bigcup_n A_{\varepsilon,n}, \end{aligned}$$

also ist die Menge der Punkte x, wo $g_n(x)$ divergiert, eine 0-Menge.

Sei nun N eine Nullmenge. Dann existieren für jedes n eine Folge von Intervallen $A_{n,k} \in \mathcal{A}$, s.d. $A_{n,k} \subseteq A_{n,k+1}$, $N \subseteq \bigcup_k A_{n,k}$ und $\mu(A_{n,k}) \leq 2^{-n}$. Es sei $f_m := \sum_{n\leq m} \chi_{A_{n,m}} \in T$. Dann gilt

$$\int f_m \leq \sum_{n\leq m} \int \chi_{A_{n,m}} \leq \sum_{n\leq m} \mu(A_{n,m}) \leq \sum_{n\leq m} 2^{-n} \leq 1.$$

Für alle $x \in N$ divergiert $f_m(x)$ für $m \to \infty$, denn für alle n existiert ein k_n mit $x \in A_{n,k_n}$. Wählen wir nun $m := \max\{n, k_1, \dots, k_n\}$, so gilt $f_m(x) \geq \sum_{k=1}^n \chi_{A_{k,m}}(x) = n$, also ist $f_m(x)$ unbeschränkt. $\square$

Definition. Meßbare und Lebesgue-integrierbare Funktionen.
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ heißt MESSBARE FUNKTION, wenn sie fast überall der Limes einer Folge von Funktionen $f_n \in T$ ist.

Sie heißt LEBESGUE-INTEGRIERBARE FUNKTION, wenn die f_n zusätzlich so gewählt werden können, daß sie eine Cauchy-Folge in T bilden.

Sie heißt L^+-FUNKTION, wenn $n \mapsto f_n$ noch zusätzlich monoton wachsend gewählt werden kann.

Wir wollen nun jedem Element $\varphi \in \tilde{T}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion zuordnen. Dazu benötigen wir die

Folgerung.
Für jedes $\varphi \in \tilde{T}$ existieren $f_n \in T$, welche bezüglich der 1-Norm gegen φ konvergieren, und welche fast überall punktweise (gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion) konvergieren.

Beweis. Da T dicht ist in $\tilde{T}$, existiert eine gegen φ in der 1-Norm konvergente Folge von Treppenfunktionen $f_n \in T$. Durch Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, daß für $s_n := f_n - f_{n-1}$ die Reihe $\sum_n \|s_n\|_1$ konvergiert (Hinweis: es existieren n_k mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$). Also konvergiert die Reihe der positiven Anteile $s_n^+ := \max\{s_n, 0\}$ und jene der negativen Anteil $s_n^- := \max\{-s_n, 0\}$ fast überall, denn diese Reihen sind wachsend und $\int \sum_{k\leq n} s_n^\pm = \sum_{k\leq n} \int s_n^\pm \leq \sum_{k\leq n} \int |s_n| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|s_n\|_1 < \infty$. Folglich konvergiert die Teleskopsumme $f_n - f_0 = \sum_{k\leq n} s_k = \sum_{k\leq n} s_k^+ - \sum_{k\leq n} s_k^-$ fast überall. $\square$

Der Raum L^+ ist nicht abgeschlossen unter Differenzenbildung, aber es gilt die

Folgerung.
Der von L^+ erzeugten Vektorraum besteht gerade aus den Lebesgue-integrierbaren Funktionen. D.h. eine Funktion f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, falls zwei Funktionen g und h in L^+ existieren, s.d. $f = g - h$ ist.

Beweis. ($\Downarrow$) Es sei $f = g - h$, wobei $g, h \in L^+$. Dann existieren Treppenfunktionen g_n und h_n, welche monoton fast überall gegen g und h konvergieren, und welche Cauchy-Folgen bezüglich der 1-Norm sind. Die Differenzfolge $g_n - h_n$ konvergiert dann natürlich fast überall gegen $f = g - h$ und ist eine Cauchy-Folge bezüglich der 1-Norm.

($\Uparrow$) Es sei f_n eine Cauchy-Folge in T, welche fast überall gegen f konvergiert. Wir haben oben gezeigt, daß eine Teilfolge existiert, die sich in eine Differenz von zwei monotonen Folgen mit beschränkten Integralfolgen zerlegen läßt. Also ist $f = g - h$, wobei g und h die Grenzwerte fast überall dieser monotonen Folgen sind, d.h. in L^+ liegen. $\square$

Wir wollen nun eine Bijektion von $\tilde{T}$ mit dem Raum der integrierbaren Funktionen finden. Dazu liegt es nahe die Abbildung zu betrachten, die einem $\varphi \in \tilde{T}$ wie folgt eine integrierbare Funktion f zuordnet: Wir wählen eine gegen φ konvergente Folge von Treppenfunktionen f_n, die zusätzlich fast überall konvergiert. Die Funktion f definieren wir dann durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Damit ist aber f nur fast überall festgelegt. Also müssen wir anstelle des Raums der integrierbaren Funktionen den Quotientenraum

$$L^1 := \{f : f \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\}/\{f : f = 0 \text{ f.ü. }\}$$

betrachten. Daß dies eine bijektive lineare wohldefinierte Abbildung von $\tilde{T}$ auf L^1 liefert, zeigt folgendes

Lemma.
Es sei f_n eine Folge in T, welche gegen $\varphi \in \tilde{T}$ konvergiert und für welche f_n fast überall gegen f konvergiert. Dann ist $\varphi = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.

Beweis. ($\Rightarrow$) Es sei $\varphi = 0$ und wir wählen eine Teilfolge, die wir wieder mit f_n bezeichnen, so daß $\|f_n\|_1 \leq 2^{-n}$. Wir müssen zeigen, daß $N := \{x : \ \exists\, f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $x \in N$, dann ist $|f(x)| > 2^{-n}$ für ein $n > m$ und somit $|f_k(x)| > 2^{-n}$ für ein $k > 2n$. Folglich ist $N \subseteq \bigcup_{n>m} \bigcup_{k>2n} A_{n,k}$, wobei $A_{n,k} := \{x : |f_k(x)| > 2^{-n}\} \in \mathcal{A}$. Weiters ist

$$2^{-k} \geq \|f_k\|_1 \geq 2^{-n}\mu(A_{n,k}) \Rightarrow \mu(A_{n,k}) \leq 2^{n-k}$$

und somit

$$\sum_{\substack{n>m\\k>2n}} \mu(A_{n,k}) \leq \sum_{\substack{n>m\\j:=k-2n>0}} 2^{n-k} = \sum_{n>m} 2^{-n} \sum_{j>0} 2^{-j} = 2^{-m}.$$

($\Leftarrow$) Es sei $f = 0$ f.ü. und wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $\|f_{n+1} - f_n\| \leq 2^{-n}$. Es sei N die 0-Menge $\{x : \ \exists \lim_n f_n(x) \Rightarrow \lim_n f_n(x) \neq 0\}$. Für fixes $\varepsilon > 0$ und $m \geq n$ sei $A_{n,m} := \{x : \sum_{i=n}^m |f_{i+1}(x) - f_i(x)| > \varepsilon\}$. Dann ist $\mathcal{A} \ni A_{n,m} \subseteq A_{n,m+1}$ und $\varepsilon\mu(A_{n,m}) \leq \int \sum_{i=n}^m |f_{i+1} - f_i| \leq \sum_{i=n}^m 2^{-i} \leq 2^{-n+1}$. Für $x \notin N \cup \bigcup_{m\geq n} A_{n,m}$ ist

$$|f_n(x)| \leq \underbrace{|f_{m+1}(x)|}_{\to 0 \text{ für } m\to\infty} + \underbrace{\sum_{i=n}^{m} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|}_{\leq\varepsilon \text{ für alle } m}.$$

Also ist

$$\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\} \subseteq N \cup \bigcup_{m\geq n} A_{n,m} \subseteq \bigcup_{m\geq n} A_{n,m} \cup N_{n,m},$$

wobei $N \subseteq \bigcup_m N_{n,m}$ mit $N_{n,m+1} \supseteq N_{n,m} \in \mathcal{A}$ und $\mu(N_{n,m}) \leq \frac{1}{2^n}$. Da die Mengen $N_{n,m} \cup A_{n,m}$ monoton in m wachsen und

$$\mu(N_{n,m} \cup A_{n,m}) \leq \mu(N_{n,m}) + \mu(A_{n.m}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{2}{\varepsilon 2^n} = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

ist

$$\mu(\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\}) \leq \sup\{\mu(N_{n,m} \cup A_{n,m}) : m \geq n\} \leq \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right).$$

Also konvergiert $\mu(\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\}) \to 0$ für $n \to \infty$. Man sagt auch f_n sei MASSKONVERGENT gegen 0.

Es sei $\delta > 0$ beliebig und $A_n := \{x : f_n(x) \neq 0\}$. Dann liegt $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$ und somit ist

$$\begin{aligned}
\|f_k\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^m\setminus A_n} \underbrace{|f_k|}_{=|f_k-f_n|} + \int_{\{x\in A_n:|f_k|\leq\delta\}} \underbrace{|f_k|}_{\leq\delta} + \int_{\{x\in A_n:|f_k|>\delta\}} \underbrace{|f_k|}_{\leq|f_n|+|f_k-f_n|}\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m\setminus A_n} |f_k - f_n| + \delta\,\mu(A_n) + \|f_n\|_\infty\,\mu(\{x : |f_k(x)| > \delta\}) + \int_{A_n} |f_k - f_n|\\
&\leq \|f_k - f_n\|_1 + \delta\,\mu(A_n) + \|f_n\|_\infty\,\mu(\{x : |f_k(x)| > \delta\})
\end{aligned}$$

Es existiert ein $N(\varepsilon)$, s.d. der 1.te Term kleiner als ε ist für $k, n \geq N(\varepsilon)$. Wir setzen $n := N(\varepsilon)$, dann existiert ein hinreichend kleines $\delta > 0$, s.d. der 2.te Term kleiner als ε ist. Da f_k maßkonvergent gegen 0 ist, existiert nun ein $K \geq N(\varepsilon)$, s.d. der letzte Term ebenfalls kleiner als ε ist für alle $k \geq K$. Folglich konvergiert $\|f_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. □

$$\begin{tikzcd}
\varphi & \tilde{T} \arrow[r, dotted] & L^1 \\
& T \arrow[u, hook] & \{f : f \text{ L-integrierbar}\} \arrow[u, two heads] \\
f_n \arrow[uu, "n\to\infty"] \arrow[rr, "\text{f.ü.}"] & & f
\end{tikzcd}$$

Zusammenfassung. Banach-Raum integrierbarer Funktionen.
Die Vervollständigung $\tilde{T}$ ist als Vektorraum isomorph zu L^1. Der Isomorphismus ist dadurch gegeben, daß man zu gegebenen $\varphi \in \tilde{T}$ eine Cauchy-Folge $f_n \in T$ wählt, die zusätzlich noch fast überall punktweise konvergiert. Und dann φ die Restklasse dieses Grenzwertes f zuordnet.

Beweis. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn die Differenz $g_n - h_n$ zweier gegen φ konvergierender Folgen, konvergiert gegen 0, also konvergiert sie punktweise fast überall gegen $0 = g - h$.

Sie ist klarerweise linear und nach Konstruktion surjektiv. Injektiv ist sie, da $f = 0$ fast überall die Aussage $\varphi = 0$ zur Folge hat.

Sowohl $\|\_\|_1$ als auch $\int$ sind also wohldefiniert und stetig auf L^1, und es gilt $\|f\|_1 = \int |f|$, da diese Gleichung auf den dichten Teilraum T gilt. Die Abbildung $\varphi \mapsto [f]$ ist folglich eine Isometrie von $\tilde{T}$ mit L^1, und somit ist L^1 die Vervollständigung von T. □

7.8.5 Konvergenzsätze.
Die Vollständigkeit von L^1 im Vergleich mit R spiegelt sich auch in den besseren Konvergenzsätzen (vgl. diese mit (7.7.1) und (7.7.3)) wobei vor allem folgende zu nennen sind (siehe [23, §125,§126]):

Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz.
Es sei $n \mapsto f_n$ eine monoton wachsende Folge in L^1. Falls $\sup\{\int f_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ so konvergiert f_n fast überall gegen eine Funktion $f_\infty \in L^1$ und $\int f_n \to \int f_\infty$.

Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz.
Es seien $f_n \in L^1$ und f_n konvergiere fast überall gegen eine Funktion f_∞. Falls ein $g \in L^1$ existiert mit $|f_n| \le g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $f_\infty \in L^1$ und $\int f_n \to \int f_\infty$.

Lemma von Fatou.
Es seien $0 \le f_n \in L^1$ und f_n konvergiere fast überall gegen eine Funktion f_∞. Falls $\sup\{\int f_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, so liegt $f_\infty \in L^1$.

7.8.4 Hilbert-Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen.
Wenn man einen Hilbert-Raum von integrierbaren Funktionen benötigt, so kann man $L^2 := \{f : f \text{ ist meßbar und } |f|^2 \in L^1\}$, den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen, betrachten und die 2-Norm durch

$$\|f\|_2 := \sqrt{\|f^2\|_1} = \int f(x)\,\overline{f(x)}\,dx$$

definieren. Ein zugehöriges inneres Produkt ist durch

$$\langle f|g\rangle := \int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

gegeben.

8 Integralsätze

8.1 Integralsätze im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

8.1.1 Motivation und Rekapitulation.
Wir wollen für mehrdimensionale Integrale Pendants zum Hauptsatz der Analysis finden, und zwar liegt unser Augenmerk auf dem zweiten Teil, denn dieser war für das berechnen bestimmter Integrale von zentraler Bedeutung. Die in (5.2.2) gegebene Version des Hauptsatzes besagte:
Wenn $B := [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : B \to \mathbb{R}$ C^1 (oder auch nur mit integrierbarer Ableitung) ist, dann ist

$$\int_B f' = \int_a^b f' = [f(x)]_{x=a}^b = f(b) - f(a).$$

Die Verallgemeinerung in (5.3.8) sagte dasselbe für vektorwertige Funktionen $f : B \to \mathbb{R}^m$ und (5.6.17) schließlich für vektorwertige Funktionen $f : B \to F$, wobei F ein beliebiger Banach-Raum sein konnte.

In (6.5.5) haben wir daraus (und der Kettenregel) die Formel

$$\int_c f' := \int_a^b f'\big(c(t)\big)\big(c'(t)\big)\,dt$$

für C^1-Abbildungen $f : E \supseteq U \to F$ und C^1-Kurven $c : [a,b] \to U \subseteq E$ erhalten. Da f' eine Abbildung $E \supseteq U \to L(E,F)$ ist, führte uns das dazu allgemeine Kurvenintegrale

$$\int_c g := \int_a^b g\big(c(t)\big)\big(c'(t)\big)\,dt$$

für stetige 1-Formen $g : E \supseteq U \to L(E,F)$ und C^1-Kurven $c : [a,b] \to U \subseteq E$ zu behandeln. Nach (6.5.7) hängt dieses Integral nicht von der Parametrisierung der Kurve ab sondern nur von deren Bild $B := c([a,b])$ und der Richtung in der dieses durchlaufen wird (also der "Orientierung"). Wir können damit also 1-Formen $g : E \supseteq U \to L(E,F)$ über '1-dimensionale dimensionale' Teilmengen $B \subseteq U$ integrieren. Wenn wir dazu höherdimensionale Pendants angeben wollen, so werden wir dafür erklären müssen, was 'p-dimensionale Teilmengen' des $\mathbb{R}^n$ sein sollen, und welche Art von Abbildungen (nämlich die p-Formen) wir darüber integrieren wollen.

Ein anderes Problem welches sich uns auch stellt, ist Oberfläche (und entsprechende höherdimensionale Pendants) von 2-dimensionalen (p-dimensionalen) Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu definieren und bestimmen. Für $p = n$, d.h. p-dimensionale Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$, haben wir die als $|B| := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B$ in (7.2.1) definiert. Für $p = 1 \le n$, also 1-dimensionale (parametrisierte) Teilmengen, haben wir die Länge in (6.5.10) als Supremum der interpolierenden Polygonzüge definiert und in (6.5.11) gezeigt, daß dies für C^1-Kurven $c : [a,b] \to E$ ebenfalls durch ein Integral

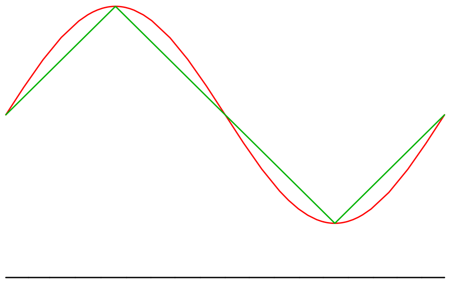
$$\int_a^b \|c'(t)\|\,dt$$

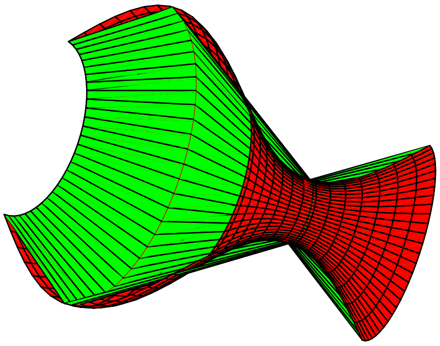
berechnet werden kann.

Bemerkung. Oberfläche.
Zumindestens für Rotationsflächen, d.h. Flächen S die durch Rotation einer C^1-Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}$ um eine Achse entstehen, also

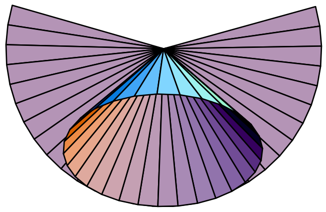
$$S := \{(t,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^3 : t \in [a,b],\ \|v\| = c(t)\},$$

können wir die Oberfläche interpolierender Kegelstümpfe die dadurch entstehen, daß wir interpolierende Polygonzüge von c entsprechend rotieren, betrachten.





Den Mantel eines Kegels(tumpfes) können wir in der Ebene abrollen und damit seine Mantelfläche berechnen. Denn sei der halbe Öffnungswinkel α und seine Höhe h, also sein Basis-Radius $r := h\tan(\alpha)$, so erhalten wir nach Abrollen einen Kreissektor mit Radius $s := \sqrt{h^2+r^2} = h\sqrt{1+\tan(\alpha)^2} = h/\cos(\alpha)$ und Bogen $2r\pi$, also Fläche $s^2\pi\cdot\frac{2r\pi}{2s\pi} = r\,s\,\pi$.



Für den Kegelstumpf zwischen den Höhen h_0 und h_1 mit zugehörigen Radien $r_i := h_i\tan(\alpha)$ und $s_i := h_i/\cos(\alpha)$ erhalten wir somit als Mantelfläche

$$\pi(r_1\,s_1 - r_0\,s_0) = \pi(s_1 - s_0)(r_1 + r_0),$$

denn $s_1\,r_0 - s_0\,r_1 = h_0\,h_1\Big(\tan(\alpha)\cos(\alpha) - \tan(\alpha)\cos(\alpha)\Big) = 0$. Wir können somit die Fläche von S als

$$|S| := \lim_{|Z|\to 0}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\pi\,\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(c(t_i)-c(t_{i-1}))^2}\,\Big(c(t_i)+c(t_{i-1})\Big)}_{=:S(c,Z)}$$

definieren, wobei Z durch alle Zerlegungen $a = t_0 < \cdots < t_N = b$ läuft. Falls c stetig differenzierbar ist, so sind dies näherungsweise die Riemannsummen von

$$\int_a^b 2\pi c(t)\sqrt{1+c'(t)^2}\,dt.$$

In der Tat existiert in diesen Fall $\lim_{|Z|\to 0} S(c,Z)$ und stimmt mit $2\pi\int_a^b c(t)\sqrt{1+c'(t)^2}\,dt$ überein, denn nach dem Mittelwertsatz existiert ein Zwischenvektor ξ mit

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\pi\,\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(c(t_i)-c(t_{i-1}))^2}\,\Big(c(t_i)+c(t_{i-1})\Big) = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{N}\pi\,\sqrt{1+\left(\frac{c(t_i)-c(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right)^2}\,\Big(c(t_i)+c(t_{i-1})\Big)\,(t_i-t_{i-1}) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{N}\pi\,\sqrt{1+c'(\xi_i)^2}\,\Big(c(t_i)+c(t_{i-1})\Big)\,(t_i-t_{i-1})
\end{aligned}$$

und

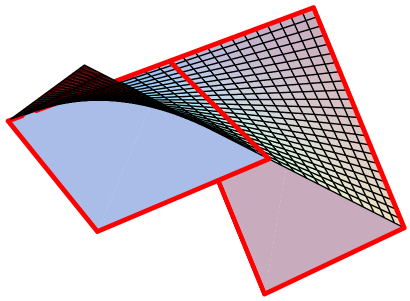
$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^N \pi\,\sqrt{1+c'(\xi_i)^2}\,\Big(c(t_i)+c(t_{i-1})\Big)\,(t_i-t_{i-1}) - \sum_{i=1}^N 2\pi\,\sqrt{1+c'(\xi_i)^2}\,c(\xi_i)\,(t_i-t_{i-1})\Big| &\le \\ \le \sum_{i=1}^N 2\pi\,\sqrt{1+c'(\xi_i)^2}\,\Big(|c(t_i)-c(\xi_i)|+|c(t_{i-1})-c(\xi_i)|\Big)\,(t_i-t_{i-1}) \\ \le 2\pi\,\sqrt{1+\|c'\|_\infty^2}\,\varepsilon\,(b-a),\end{aligned}$$

falls $\delta := |Z|$ so klein, daß $|c(t)-c(s)|<\varepsilon$ für alle $|t-s|<\delta$.

Für eine Zylinder oder einer Kegelstumpf rechnet man leicht nach, daß dieses Integral die Mantelfläche berechnet.

Falls nun S kein Rotationskörper mehr ist, so könnten wir den Definitionsbereich einer zugehörigen Parametrisierung $f: I \to S$ in Rechtecke zerlegen. Die Bilder der Eckpunkte eines Rechtecks müssen nun aber nicht mehr in einer Ebene liegen, sodaß wir diesen Viereck keine wohldefinierte Fläche zuordnen können, wohl aber den von zwei Seitenvektoren erzeugten Parallelogramm.

Wir können also versuchen die Oberfläche von $S = f(I)$ durch die Summe der Flächen der von $f(t_i,s_{i-1}) - f(t_{i-1},s_{i-1})$ und $f(t_{i-1},s_i) - f(t_{i-1},s_{i-1})$ erzeugten Parallelogramme zu approximieren, wobei $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ und $s_0 < s_1 < \dots < s_m$ Zerlegungen der Seiten von I sind und dann schauen was passiert, wenn wir die Zerlegungen feiner machen.
Wenn wir aber $f:(t,s)\mapsto(t,s,ts)$ mit Definitionsbereich $I := [-1,1]\times[0,1]$ betrachten, so ist die Fläche des von $f(1,0)-f(-1,0) = (2,0,0)$ und $f(-1,1)-f(-1,0) = (0,1,-1)$ erzeugten Rechtecks $2\sqrt{2}$, wohingegen die zur Zerlegung $-1<0<1$ und $0<1$ gehörende Fläche $1\cdot\sqrt{2}+1\cdot 1 = 1+\sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ ist. Wir können also nicht das Supremum über alle Zerlegungen als Definition der Fläche verwenden.



Auch hilft es uns nichts, wenn wir den Parameterbereich in Dreiecke zerlegen. Denn dann ist zwar die Fläche der von den Bildern der Ecken erzeugten Dreiecke wohldefiniert, aber bei Übergang zu einer Verfeinerung kann die Gesamtfläche dennoch fallen oder wachsen, wie das Beispiel $f:(t,s)\mapsto(t,s,ts^2)$ zeigt.

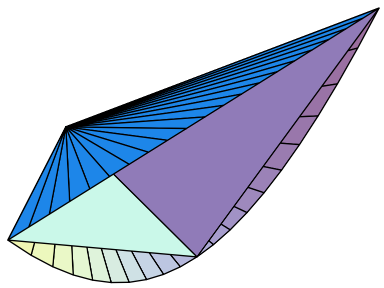
Das Dreieck, welches von den Bildern $(0,0,0)$ und $(a,\pm1,a)$ der Ecken $(0,0)$ und $(a,\pm1)$ erzeugt wird hat Fläche

$$\|(a,1,a)-(a,0,a)\|\cdot\|(a,0,a)-(0,0,0)\| = a\sqrt{2}.$$

Hingegen haben die beiden Bilddreiecke die durch Teilung am Punkt $(a,0)$ entstehen zusammen Fläche

$$\|(a,1,a)-(a,0,0)\|\cdot\|(a,0,0)-(0,0,0)\| = a\,\sqrt{1+a^2}$$

also kleinere Fläche genau dann wenn $a>1$ ist.



Geometrische Interpretation des Kurvenintegrals.

Sei $c : I := [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar und $K := c(I)$. Sei weiters $f = (f_1, \dots, f_n) : K \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\tilde{f} = \sum_i f_i(x)^i dx^i$ die zugehörige 1-Form $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \supseteq K \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$. Nach (6.5.7) hängt das Kurvenintegral (zumindest für C^1-Kurven) nicht von der Parametrisierung c (sondern nur deren Orientierung) ab, wir können $\int_K \tilde{f} := \int_c \tilde{f}$ (für injektives c) setzen, und brauchen uns bei K nicht die Parametrisierung sondern nur die Durchlaufungsrichtung merken. Genauer bedeutet dies, daß K als geometrische Kurve interpretiert werden soll, d.h. eine Äquivalenzklasse von parametrisierten C^1 Kurven $c : I \to \mathbb{R}^n$ bzgl. der Äquivalenzrelation $c_1 \sim c_0 :\Leftrightarrow \ \exists\, h : [a_1, b_1] \to [a_0, b_0]$, einen C^1-Diffeomorphismus mit $c_1 = c_0 \circ h$. Weiters ist

$$\begin{aligned}\int_K f &:= \int_K \tilde{f} = \int_c \sum_i f_i(x)\,dx_i = \int_a^b \sum_i f_i(c(t))\,c_i'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \Big\langle f(c(t)) \,\Big|\, c'(t) \Big\rangle\,dt \overset{c'(t)\neq 0}{=\!=\!=} \int_a^b \Big\langle f(c(t)) \,\Big|\, \underbrace{\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}}_{=:\tau_c(t)} \Big\rangle \underbrace{\|c'(t)\|}_{=:\mathrm{vol}_c(t)}\,dt = \int_a^b \langle f \circ c | \tau_c\rangle\,\mathrm{vol}_c\,.\end{aligned}$$

Wollen wir nun das letzte Integral als Kurvenintegral schreiben, dann können wir $c(t) \mapsto \langle f(c(t)) | \tau_c(t)\rangle$ als Funktion $\langle f | \tau_K\rangle : K \to \mathbb{R}$ auffassen, wobei $\tau_K(c(t)) := \tau_c(t) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ den Einheitstangentialvektor an K im Punkte $c(t)$ bezeichnet. Folglich müssen wir den zweiten Teil $\mathrm{vol}_c : t \mapsto \|c'(t)\|$ als Wert einer 1-Form $\mathrm{vol}_K : K \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ – das sogenannte Längenelement oder auch 1-dimensionale Volumselement – an der Stelle $c(t)$ angewandt auf $c'(t)$ darstellen, also z.B.

$$\mathrm{vol}_K(x)(w) := \langle w | \tau_K(x)\rangle \text{ für } x \in K,\ w \in \mathbb{R}^2$$

definieren. Dann ist

$$\int_a^b \langle f \circ c | \tau_c\rangle\,\mathrm{vol}_c = \int_a^b (\langle f | \tau_K\rangle \circ c)(t)\,\underbrace{\mathrm{vol}_K(c(t))(c'(t))}_{\|c'(t)\|}\,dt = \int_c \langle f | \tau_K\rangle\,\mathrm{vol}_K =: \int_K \langle f | \tau_K\rangle\,\mathrm{vol}_K\,.$$

Beachte, daß

$$\int_I \|c'(t)\|\,dt = \int_I \mathrm{vol}_c = \int_K \mathrm{vol}_K$$

die Länge von c ist und somit vol_K soetwas wie "Infinitesimale Längenmessung" der Kurve ist:

$$\mathrm{vol}_K(c(t))(c'(t)) = \mathrm{vol}_c(t_0) = \|c'(t_0)\| \overset{(7.2.9)}{=\!=\!=} \lim_{\substack{|I|\to 0\\ t_0 \in I}} \frac{1}{|I|} \int_I \|c'(t)\|\,dt.$$

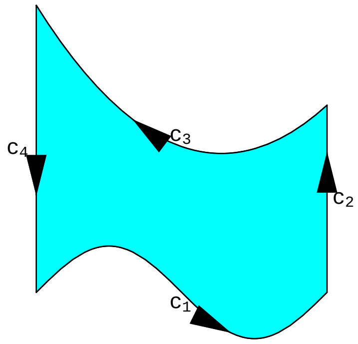
Beachte weiters, daß τ_K das Vorzeichen ändert, wenn die Parametrisierung umgekehrt wird.

8.1.2 Der Gauß'scher Integralsatz in der Ebene.

Wir haben nun alle Ingredienzien um ein Pendant des Hauptsatzes für 2-dimensionale Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^2$ zu formulieren und zu beweisen. Idee dabei ist, daß das Integral der Ableitung einer Abbildung $f : B \to \mathbb{R}$ (eine 1-Form $f' : B \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bzw. ein Gradientenfeldes $\operatorname{grad} f : B \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$) durch die Randwerte von f, also $f|_{\partial B}$ bestimmt werden kann. Für eindimensionales $B = [a,b]$ waren dies die Differenz der beiden Randwerte, also der Summe der beiden Längen $-f(a)$ und $f(b)$, die wir uns auch als Integral $\int_{\{-a,b\}} f := f(b) - f(a)$ einer Funktion $f|_{\partial B}$ von der 0-dimensionalen Menge $\{a,b\}$ nach $\mathbb{R}$ denken können, wobei wir auf die Orientierung des Randes achten müssen und den linken Endpunkt "negativ orientiert nehmen müssen". Für 2-dimensionales B können wir also ein Integral von f über den "orientierten" Rand ∂B, also ein Kurvenintegral erwarten.

Es sei $B = M(\varphi_1, \varphi_2)$ mit $\varphi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Ordinaten-Menge mit C^1-Grenzen φ_1 und φ_2. Es sei (p,q) ein C^1-Vektorfeld auf B und $(x,y) \mapsto p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ die zugehörige 1-Form. Der Rand von B wird durch folgende 4 Kurven positiv orientiert parametrisiert:

$$c_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [a,b],$$
$$c_2(t) := \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)],$$
$$c_3(t) := \begin{pmatrix} t \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [a,b] \text{ verkehrt durchlaufen},$$
$$c_4(t) := \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)], \text{ verkehrt durchlaufen.}$$



Also ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} p(x,y)\,dx &= \int_{c_1} + \underbrace{\int_{c_2}}_{=0} - \int_{c_3} - \underbrace{\int_{c_4}}_{=0} = \int_a^b p(t,\varphi_1(t))\cdot 1\cdot dt - \int_a^b p(t,\varphi_2(t))\cdot 1 \cdot dt \\ &= \int_a^b \Big[p(t,y)\Big]_{y=\varphi_2(t)}^{y=\varphi_1(t)} dt = \int_a^b \int_{\varphi_2(t)}^{\varphi_1(t)} \partial_2 p(t,y)\,dy\,dt = -\int_a^b \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \partial_2 p(t,y)\,dy\,dt \\ &= -\int_B \partial_2 p.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir falls B auch Ordinatenmenge bzgl. der anderen Achse ist

$$\int_{\partial B} q(x,y)\,dy = \int_B \partial_1 q$$

Letzteres ist auch gültig, falls B nur als Ordinatenmenge bzgl. der ersten Achse vorausgesetzt ist, denn für $h(x) := \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} q(x,y)\,dy = H(\varphi_1(x),\varphi_2(x),x)$ mit $H(a,b,x) := \int_a^b q(x,y)\,dy$ und dabei q fortgesetzt zu einer C^1-Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mittels (7.5.2b) ist

$$\partial_1 H(a,b,x) = -q(x,a), \quad \partial_2 H(a,b,x) = q(x,b), \quad \partial_3 H(a,b,x) = \int_a^b \partial_1 q(x,y)\,dy$$

und allesamt stetig und damit

$$\begin{aligned}h'(x) &= \partial_1 H(\varphi_1(x),\varphi_2(x),x)\,\varphi_1'(x) + \partial_2 H(\varphi_1(x),\varphi_2(x),x)\,\varphi_2'(x) + \partial_3 H(\varphi_1(x),\varphi_2(x),x) \\ &= -q(x,\varphi_1(x))\,\varphi_1'(x) + q(x,\varphi_2(x))\,\varphi_2'(x) + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \partial_1 q(x,y)\,dy\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\int_B \partial_1 q &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \partial_1 q(x,y)\,dy \\ &= \int_a^b \Big(h'(x) - \varphi_2'(x)\,q(x,\varphi_2(x)) + \varphi_1'(x)\,q(x,\varphi_1(x))\Big)\,dx \\ &= h(b) - h(a) - \int_a^b q(x,\varphi_2(x))\,\varphi_2'(x)\,dx + \int_a^b q(x,\varphi_1(x))\,\varphi_1'(x)\,dx \\ &= \int_{c_2} q\,dx - \int_{c_4} q\,dx - \int_{c_3} q\,dx + \int_{c_1} q\,dx = \int_{\partial B} q\,dx\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ist

$$\int_{\partial B} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \int_B \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)(x,y)\,d(x,y).$$

Das zeigt den

Gauß'scher Integralsatz in der Ebene.
Es sei B eine Ordinatenmenge mit C^1 Rändern. Weiters sei ∂B der positiv orientierte Rand. Das Vektorfeld $(p,q) : B \to \mathbb{R}^2$ sei C^1. Dann ist

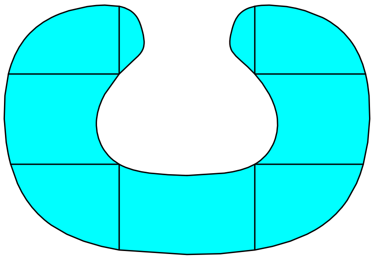
$$\int_{\partial B} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \int_B \partial_1 q - \partial_2 p. \quad \square$$

Insbesonders erhalten wir mit $p(x,y) := -y$ und $q(x,y) := x$ die

8.1.3 Folgerung. Fläche via Kurvenintegral.
Es sei B eine Ordinatenmenge mit C^1-Rändern. Weiters sei ∂B der positiv orientierte Rand. Dann ist

$$|B| = \frac{1}{2}\int_{\partial B} (x\,dy - y\,dx). \quad \square$$

Beachte, daß also $x\,dy - y\,dx$ eine somit recht nützliche gerade nicht-exakte 1-Form ist.



Der Gauß'sche Integralsatz gilt auch kompliziertere Gebiete, die man durch endlich viele Schnitte in Ordinatenmengen bzgl. jeweils einer Achse zerlegen kann, denn das Kurveintegral über jede Schnittlinie kommt genau zweimal vor und zwar mit entgegengesetzter Orientiertung, hebt sich also weg.
Der Gauß'sche Integralsatz gilt auch für beschränktes B dessen Rand durch eine rektifizierbare injektive Kurve $c : S^1 \to \partial B$ parametrisiert werden kann. Für einen Beweis dieser Aussage siehe Apostol, T.M., Mathematical Analysis, Massachusetts-London 1957.

Bemerkung.
Ist B gegeben durch alle Punkte mit Polarkoordinaten (r,φ) die $0 \le r \le r(\varphi)$ erfüllen, so erhalten wir aus (8.1.3) wieder die Formel aus (7.4.10):

$$|B| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\varphi)^2\,d\varphi.$$

In der Tat ist dann der Rand ∂B durch die Kurve $c : t \mapsto (r(t)\,\cos(t), r(t)\,\sin(t))$ mit Ableitung

$$c'(t) = (r'(t)\,\cos(t) - r(t)\,\sin(t), r'(t)\,\sin(t) + r(t)\,\cos(t))$$

beschrieben und somit ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial B}(x\,dy - y\,dx) &= \int_0^{2\pi} r(t)\Big(\cos(t)\,\big(r'(t)\,\sin(t) + r(t)\,\cos(t)\big) - \sin(t)\,\big(r'(t)\,\cos(t) - r(t)\,\sin(t)\big)\Big)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} r(t)^2\,(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)\,dt = \int_0^{2\pi} r(\varphi)^2\,d\varphi.\end{aligned}$$

Geometrische Interpretation.

1. Für das Vektorfeld $f = (f_1, f_2) = (p,q) : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}^2$ definieren wir eine Funktion

$$\operatorname{rot} f := \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R},$$

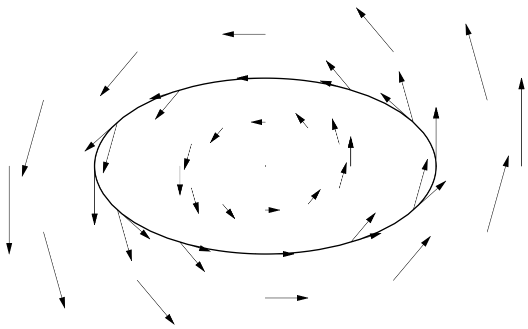
die ROTATION VON f. Der Gauß'sche Integralsatz ließt sich dann wie folgt:

$$\int_{\partial B} \langle f|\tau_{\partial B}\rangle \operatorname{vol}_{\partial B} = \int_B \operatorname{rot} f,$$

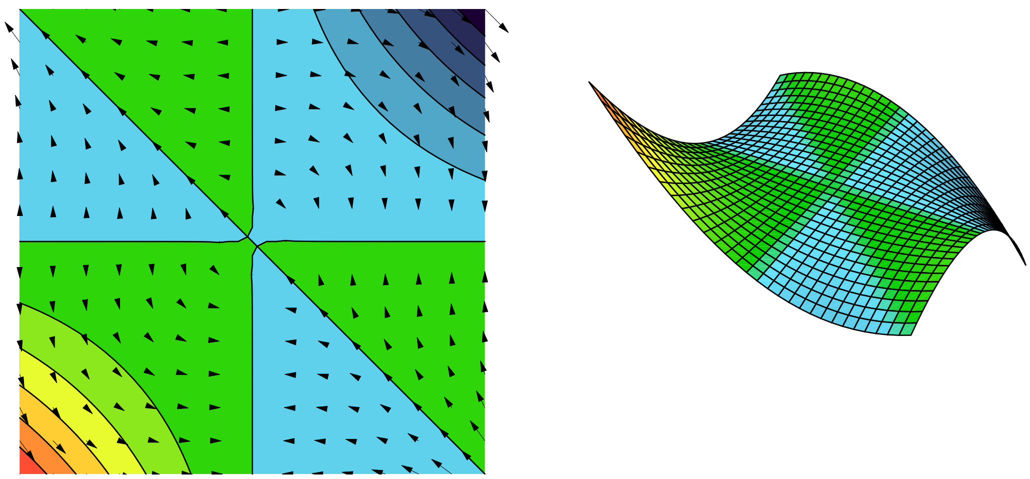
wobei $\tau_{\partial B}$ der Einheitstangentialvektor an ∂B und $\operatorname{vol}_{\partial B}$ das 1-dimensionale Volumselement von ∂B ist. Die linke Seite ist die Arbeit von f längs ∂B (das Mittel des Tangentialanteils von f) und somit ist

$$\operatorname{rot} f(x) \xlongequal{(7.2.9)} \lim_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B \operatorname{rot} f \text{ die WIRBELDICHTE.}$$

Diese mißt wie sehr der Fluß des Vektorfelds um den Punkt x herumfließt. Ein Vektorfeld f heißt WIRBELFREI $:\Leftrightarrow \operatorname{rot} f = 0$.



der Tangentialanteil eines Vektorfelds längs einer Kurve



ein Vektorfeld und seine Rotation

2. Es sei $g := (g_1, g_2) = (q, -p)$, d.h. $f = g^\perp$, der positiv gedrehte Normalvektor. Dann ist

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 =: \operatorname{div} g,$$

und

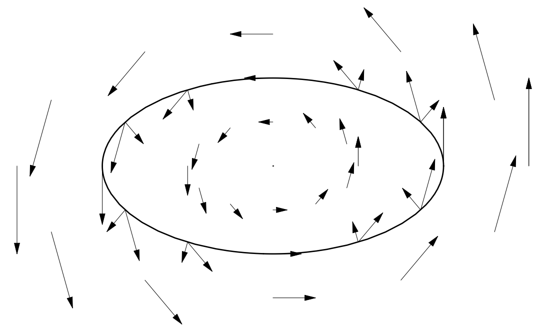
$$\langle f|\tau_{\partial B}\rangle = \langle g^\perp|\tau_{\partial B}\rangle = \langle g^{\perp\perp}|\tau_{\partial B}^\perp\rangle = \langle g| - \tau_{\partial B}^\perp\rangle = \langle g|\nu_{\partial B}\rangle,$$

wobei $\nu_{\partial B}$ der NACH AUSSEN WEISENDER EINHEITS-NORMALVEKTOR ist. Der Gauß'sche Integralsatz hat nun also die Form

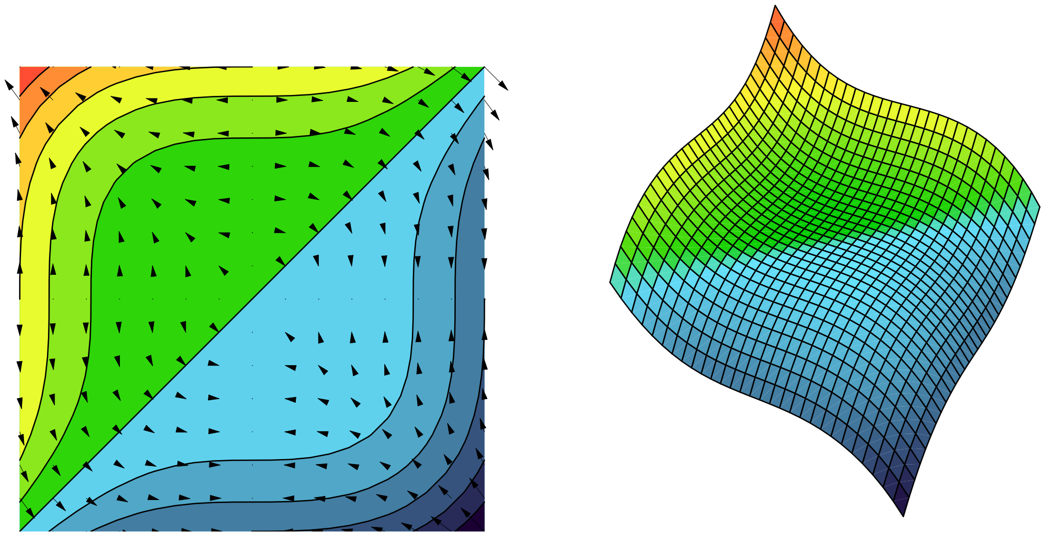
$$\int_{\partial B} \langle g|\nu_{\partial B}\rangle \operatorname{vol}_{\partial B} = \int_B \operatorname{div} f.$$

Die linke Seite mißt nun die Durchflußmenge durch ∂B und somit ist

$$\operatorname{div} f(x) \overset{(7.2.9)}{=\!=\!=} \lim_{\substack{|B|\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B \operatorname{div} f \text{ die Quellendichte.}$$



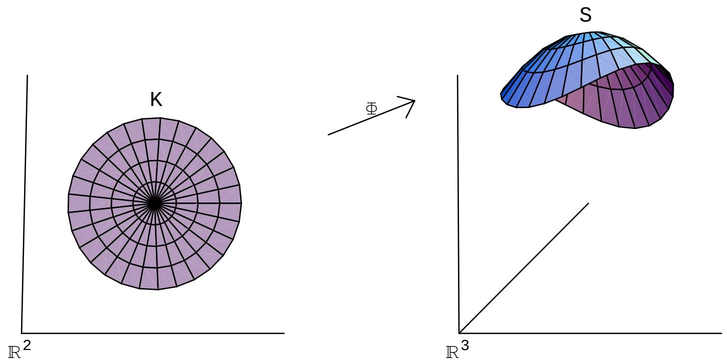
der Normalanteil eines Vektorfelds längs einer Kurve



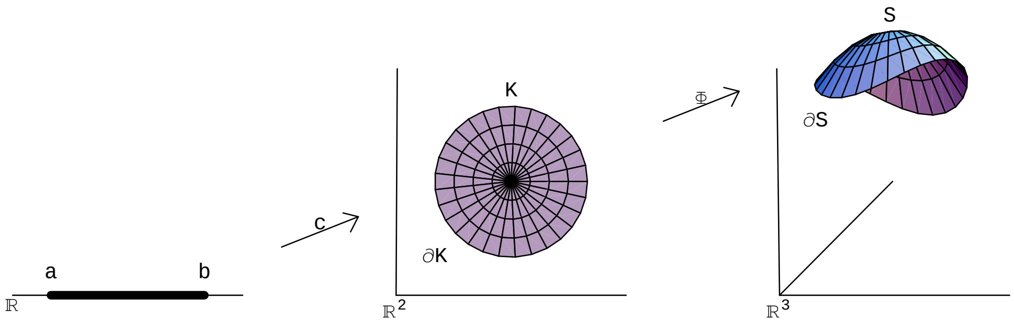
ein Vektorfeld und seine Divergenz

Ein Vektorfeld f heißt QUELLENFREI $:\Leftrightarrow \operatorname{div} f = 0$.

8.1.4 Definition. Flächen im $\mathbb{R}^3$.
Unter einer FLÄCHE S im $\mathbb{R}^3$ verstehen wir eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zusammen mit einer surjektiven C^1-Parametrisierung $\Phi = (x, y, z) : K \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $K \subseteq \mathbb{R}^2$ J-meßbar und kompakt. Dies ist ein Spezialfall einer 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, siehe Differentialgeometrie.



8.1.5 Der Stokes'scher Integralsatz im Raum.
Es sei $f = (p, q, r)$ ein C^1-Vektorfeld auf $\Phi(K)$, mit $\Phi = (x, y, z)$ C^2 (!) und der Rand ∂K sei durch eine C^1-Kurve $c = (u, v) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert. Mit ∂S bezeichnen wir die durch $\Phi \circ c$ parametrisierte Kurve $\Phi(\partial K)$. Dies ist nicht der topologische Rand von $S \subseteq \mathbb{R}^3$.



Dann ist

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial S} p\,dx &= \int_{\Phi\circ c} p(x,y,z)\,dx = \int_a^b p\Big(x(c(t)), y(c(t)), z(c(t))\Big)\,(x\circ c)'(t)\,dt \\
&= \int_a^b (p\circ\Phi\circ c)(t)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)dt = \int_c (p\circ\Phi)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv\right) \\
&\overset{(8.1.2)}{=\!=} \int_K \underbrace{\frac{\partial}{\partial u}\left(p\circ\Phi\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(p\circ\Phi\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)}_{\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + p\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - p\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}} \\
&\overset{(6.3.10)}{=\!=} \int_K \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right) \\
&= \int_K \frac{\partial p}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)}_{-\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} + \frac{\partial p}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)}_{\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}} \\
&= \int_K \left(\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \int_K \left(\frac{\partial p}{\partial z}\cdot dz\wedge dx - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot dx\wedge dy\right),
\end{aligned}
$$

wobei wir folgende Abkürzungen verwendet haben:

$$
dz\wedge dx := \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad dx\wedge dy := \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad dy\wedge dz := \det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \dots
$$

Analog oder durch zyklisches Vertauschen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial S} q\,dy &= \int_K \left(\frac{\partial q}{\partial x}\,dx\wedge dy - \frac{\partial q}{\partial z}\,dy\wedge dz\right) \\
\int_{\partial S} r\,dz &= \int_K \left(\frac{\partial r}{\partial y}\,dy\wedge dz - \frac{\partial r}{\partial x}\,dz\wedge dx\right)
\end{aligned}
$$

und insgesamt also

$$
\int_{\partial S} f = \int_K \left(\left(\tfrac{\partial q}{\partial x} - \tfrac{\partial p}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\tfrac{\partial r}{\partial y} - \tfrac{\partial q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\tfrac{\partial p}{\partial z} - \tfrac{\partial r}{\partial x}\right)dz\wedge dx\right).
$$

Zum C^1-Vektorfeld $f = (p, q, r) : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ definieren wir nun ein neues Vektorfeld

$$
\operatorname{rot} f = \operatorname{rot}(p,q,r) = \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right),
$$

die ROTATION des Vektorfelds. Als Memotechnik ist

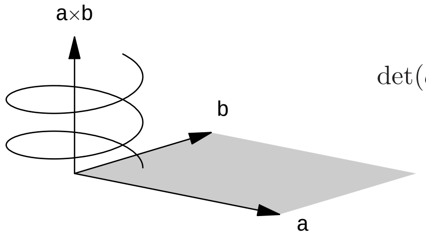
$$\operatorname{rot} f = \left(\det\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & q\\ \frac{\partial}{\partial z} & r\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z} & r\\ \frac{\partial}{\partial x} & p\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & p\\ \frac{\partial}{\partial y} & q\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}e_1 & \frac{\partial}{\partial x} & p\\ e_2 & \frac{\partial}{\partial y} & q\\ e_3 & \frac{\partial}{\partial z} & r\end{pmatrix} = \nabla\times f,$$

wobei

$$\nabla := \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a\times b := \det\begin{pmatrix}e_1 & a_1 & b_1\\ e_2 & a_2 & b_2\\ e_3 & a_3 & b_3\end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist. Dies ist durch $a\times b \perp a, b$ und $\det(a\times b, a, b) = |a\times b|$ (also $(a\times b, a, b)$ positiv orientiert, und $|a\times b|$ die Fläche des Parallelogramms, das von (a,b) aufgespannt wird) geometrisch charakterisiert: In der Tat ist

$$\langle v | a\times b\rangle = \det(v, a, b) \Rightarrow a\times b\perp a, b$$



$$\begin{aligned}\det(a\times b, a, b) &= \det\begin{pmatrix}\det\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{pmatrix} & a_1 & b_1\\ -\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{pmatrix} & a_2 & b_2\\ \det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix} & a_3 & b_3\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}^2\\ &= |a\times b|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Und andererseits

$$\det(a\times b, a, b) = |a\times b|\cdot \text{Fläche}(a,b) \Rightarrow |a\times b| = \text{Fläche}(a,b)$$

Es sei $g = (a,b,c) : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld (wie z.B. $g = \operatorname{rot} f$). Wir definieren ein Integral von g über $\Phi : K \to S$ als

$$\int_\Phi g := \int_K a\circ\Phi\cdot dy\wedge dz + b\circ\Phi\cdot dz\wedge dx + c\circ\Phi\cdot dx\wedge dy$$
$$\text{mit}\quad dy\wedge dz := \det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right),\quad dz\wedge dx := \det\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)\quad\text{und}\quad dx\wedge dy := \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

Dieses Integral ist Reparametrisierungsinvariant, denn wenn $h : (r,s) \mapsto (u,v)$ eine Orientierungserhaltende (d.h. $\det h'(r,s) \geq 0$) Substitutionsfunktion h ist, dann ist wegen der Kettenregel (6.1.5)

$$\det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,s)}\right) = \det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)\cdot\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}\right)$$

und somit wegen der Transformationsformel

$$\int_\Phi g = \int_{\Phi\circ h} g$$

und wir können

$$\int_S g := \int_\Phi g$$

setzen, müssen uns dabei aber die "Orientierung" von S merken. Damit erhalten wir schließlich den

Satz von Stokes für Flächen im 3-dimensionalen.
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Ordinatenmenge mit C^1-Grenzen. Weiters sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq K \to \mathbb{R}^3$ C^2 und f ein C^1-Vektorfeld auf $S := \Phi(K)$. Dann ist

$$\int_{\partial S} f = \int_S \operatorname{rot} f. \quad \square$$

Geometrische Interpretation.
Nach obigen können wir die linke Seite geometrisch als

$$\int_{\partial S} \langle f | \tau_{\partial S} \rangle \operatorname{vol}_{\partial S}$$

interpretieren. Nun zur rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{\partial q}{\partial x} - \tfrac{\partial p}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\tfrac{\partial r}{\partial y} - \tfrac{\partial q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\tfrac{\partial p}{\partial z} - \tfrac{\partial r}{\partial x}\right) dz \wedge dx &= \\
= \left(\tfrac{\partial q}{\partial x} - \tfrac{\partial p}{\partial y}\right) \tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \left(\tfrac{\partial r}{\partial y} - \tfrac{\partial q}{\partial z}\right) \tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \left(\tfrac{\partial p}{\partial z} - \tfrac{\partial r}{\partial x}\right) \tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} & \\
= \left\langle \operatorname{rot} f \,\middle|\, \tfrac{\partial\Phi}{\partial u} \times \tfrac{\partial\Phi}{\partial v} \right\rangle, = \left\langle \operatorname{rot} f \,\middle|\, \underbrace{\frac{\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi}{|\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi|}}_{=:\nu_\Phi} \right\rangle \cdot \underbrace{|\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi|}_{=:\operatorname{vol}_\Phi} &
\end{aligned}$$

denn

$$\Phi'(u,v) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\int_{\partial S} f = \int_S \operatorname{rot} f = \int_K \langle \operatorname{rot} f | \nu_\Phi \rangle \operatorname{vol}_\Phi,$$

wobei

$$\nu_\Phi(u,v) := \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\|}, \qquad \operatorname{vol}_\Phi(u,v) := \|\tfrac{\partial\Phi}{\partial u} \times \tfrac{\partial\Phi}{\partial v}\|$$

die Einheitsnormale an die Fläche und das Oberflächenelement- oder 2-dimensionale Volumselement bezeichnet. Dies beiden Objekte sind wohldefiniert, falls $\{\partial_1\Phi(u,v), \partial_2\Phi(u,v)\}$ linear unabhängig ist, d.h. $\Phi'(u,v)$ (maximalen) Rang 2 hat. Beachte, daß für C^1-Parametrisierungen $\Phi : K \to S$ und stetiges $\rho : S \to \mathbb{R}$ folgendes Integral

$$\int_K \rho \circ \Phi \operatorname{vol}_\Phi = \int_\Phi \rho(\Phi(u,v)) \operatorname{vol}_\Phi(u,v)\, d(u,v) = \int_K \rho(\Phi(u,v)) \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v) \right\| d(u,v).$$

reparametrisierungsinvariant ist, denn wenn $g : (r,s) \mapsto (u,v)$ eine (nicht notwendigerweise Orientierungserhaltende) Substitutionsfunktion ist, dann ist

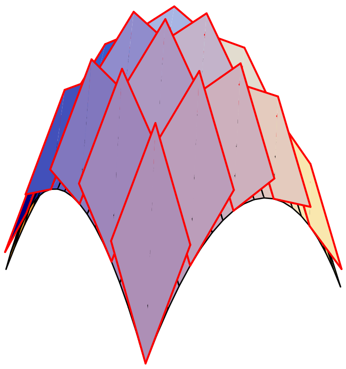
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial s} &= \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\Big) \times \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\Big) \\
&= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial s} \cdot \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial u}}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial s} \cdot \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial v} \times \frac{\partial\Phi}{\partial u}}_{-\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}} + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s} \cdot \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial v} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}}_{=0} \\
&= \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}\right) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right).
\end{aligned}$$

Es macht also Sinn folgende Definition zu geben:

$$\int_S \rho \operatorname{vol}_S := \int_\Phi \rho \operatorname{vol}_S := \int_K \rho \circ \Phi \operatorname{vol}_\Phi$$

und dies kann als MASSE von S bzgl. der DICHTEFUNKTION ρ aufgefaßt werden, oder im Spezialfall $\rho = 1$ als OBERFLÄCHE von S. Dabei ist vol_S vorläufig nur ein Symbol (das OBERFLÄCHENELEMENT EINER FLÄCHE von S heißt) und dazu dient, die definierende rechte Seite zu imitieren. Die Namensgebung rührt daher, daß die Riemann-Summen von $\int_K \rho\circ\Phi\ \mathrm{vol}_\Phi$ gerade

$$\begin{aligned} S(\rho\circ\Phi\ \mathrm{vol}_\Phi, Z) &= \sum_{I\times J\in Z} \rho(\Phi(\xi_I,\eta_J))\cdot \underbrace{\left\|(\partial_1\Phi\times\partial_2\Phi)(\xi_I,\eta_J)\right\| |I|\,|J|}_{\text{Fläche des Bildes }\Phi'(\xi_I,\eta_J)(I\times J)} \\ &\approx \sum_{I,J} \rho(\Phi(\xi_I,\eta_J))\cdot(\text{“Fläche” des Bildes }\Phi(I\times J) \\ &= \text{“Fläche” des Bildes }\Phi(K). \end{aligned}$$



Im Fall, daß Φ injektiv ist (und natürlich noch immer der Rang von Φ' gleich 2 ist) können wir die EINHEITSNORMALE ν_S an die Fläche S als

$$\nu_S(\Phi(u,v)) := \nu_\Phi(u,v) := \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}}{\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\|}$$

definieren. Diese steht normal auf $\partial_1\Phi$ und $\partial_2\Phi$ und somit an jede Richtungsableitung (d.h. an jeden Tangentialvektor der Fläche S) $d_w\Phi$ für $w\in\mathbb{R}^2$. Der Satz von Stokes hat nun folgende geometrische Form:

$$\int_{\partial S}\langle f|\tau_{\partial S}\rangle\ \mathrm{vol}_{\partial S} = \int_S \langle \mathrm{rot}\, f|\nu_S\rangle\ \mathrm{vol}_S\,.$$

Der Anteil $\langle \mathrm{rot}\, f|\nu\rangle$ der Rotation $\mathrm{rot}\, f$ in Richtung eines Einheitsvektors ν mißt also wieder die WIRBELDICHTE von f in der Ebene $S := \nu^\perp$ die normal auf ν steht.

Beispiel.
Die Sphäre S wird durch $\Phi : (\varphi,\vartheta)\mapsto(\cos(\varphi)\cos(\vartheta),\sin(\varphi)\cos(\vartheta),\sin(\vartheta))$ mit $K := [0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]$ parametrisiert. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \Phi'(\varphi,\vartheta) &= \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 & \cos(\vartheta)\end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= \begin{pmatrix}\cos(\vartheta)^2\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)^2\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\end{pmatrix} = \cos(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi,\vartheta) \end{aligned}$$

Somit ist die Oberfläche

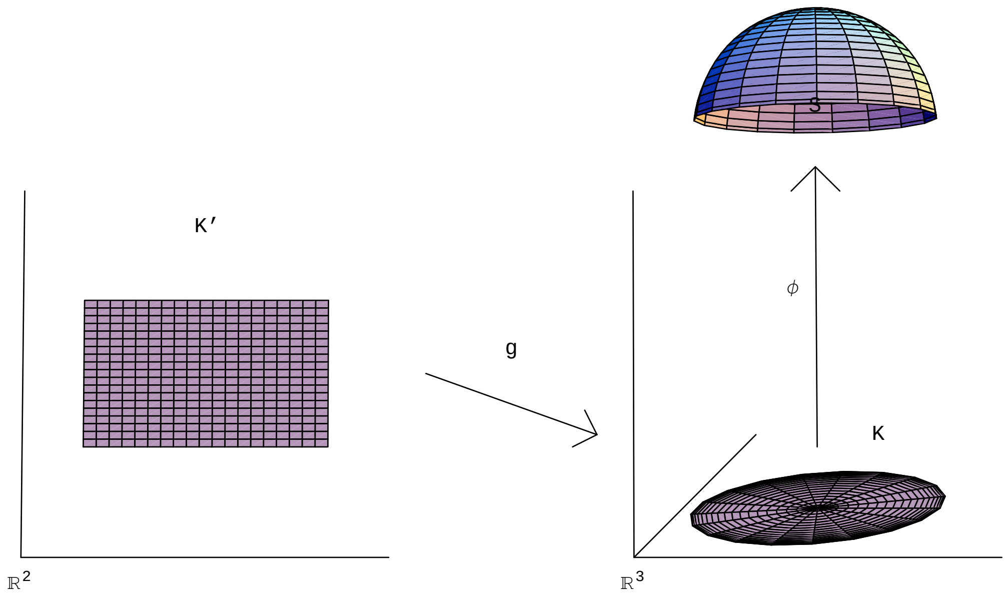
$$\begin{aligned} \int_S \mathrm{vol}_S = \int_K \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right\| d(\varphi,\vartheta) &= \int_K |\cos(\vartheta)|\,\overbrace{\|\Phi\|}^{1}\, d(\varphi,\vartheta) \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\cdot[\sin(\vartheta)]_{\vartheta=-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi. \end{aligned}$$

8.1.6 Definition. Normalbereich.
Unter einem C^1-NORMALBEREICH bezüglich der xy-Ebene verstehen wir eine Ordinatenmenge

$$B = M(\varphi_{-1},\varphi_{+1}) := \{(x,y,z) : (x,y)\in K, \varphi_{-1}(x,y)\le z\le\varphi_{+1}(x,y)\}$$

wobei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt (J-meßbar $\Leftarrow$), ∂K C^1-parametrisierbar und $\varphi_{-1} \le \varphi_{+1} : K \to \mathbb{R}$ stetig sind. Die Deckel sind dann durch $S_i := \operatorname{graph}(\varphi_i)$ für $i = \pm 1$ gegeben und der Mantel $S_0 := \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial K, \varphi_{-1}(x,y) \le z \le \varphi_{+1}(x,y)\}$. Wir benötigen eine C^1-Parametrisierung der Oberfläche $\partial B = S_0 \cup S_{-1} \cup S_{+1}$. Da in wichtigen Beispielen (Kugel) die φ_i aber nicht überall differenzierbar sind, fordern wir zusätzlich die Existenz von Substitutionsfunktionen $g_i : K_i \to K$, s.d. $\varphi_i \circ g$ C^1 ist. Dann ist $\Phi_i : K_i \to S_i$ eine Parametrisierung von S_i für $i \in \{-1, 0, +1\}$, wobei $K_0 := \{(u,v) : u \in [a,b], \varphi_{-1}(c(u)) \le v \le \varphi_{+1}(c(u))\}$, weiters $c : [a,b] \to \partial K$ eine positiv orientierte C^1-Parametrisierung von ∂K ist, und

$$\Phi_i(u,v) := \begin{cases} (c(u), v) & \text{für } i = 0 \\ (g_i(u,v), \varphi_i(g_i(u,v))) & \text{sonst.} \end{cases}$$



Wir benötigen noch, daß die Orientierung dieser Parametrisierungen paßt, d.h. der Normalvektor ν_Φ nach außen weißt. Dafür folgende Rechnung: Es ist

$$\Phi_i'(u,v) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x'(u) & 0 \\ y'(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für } i = 0 \\ \begin{pmatrix} g_i'(u,v) \\ (\varphi_i \circ g_i)'(u,v) \end{pmatrix} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\partial_1 \Phi_i \times \partial_2 \Phi_2)(u,v) = \begin{cases} \begin{pmatrix} y'(u) \\ -x'(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c'(u)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } i = 0 \\ \begin{pmatrix} * \\ * \\ \det(g_i'(u,v)) \end{pmatrix} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also verlangen wir zusätzlich o.B.d.A., daß $\det(g_{-1}'(u,v)) \le 0$ und $\det(g_{+1}'(u,v)) \ge 0$ für alle (u,v) gilt.

Beispiel.
Der Quader $[a_1,a_2] \times [b_1,b_2] \times [c_1,c_2]$: Dabei ist $K = [a_1,a_2] \times [b_1,b_2]$ und $\varphi_i := c_i$. Hier müssen wir nicht mehr umparametrisieren, d.h. $K_i := K$ und $g_i := \mathrm{id}$.

Die Kugel $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$ mit Radius R: Dabei ist $K := \{(x,y) : x^2 + y^2 \le \mathbb{R}^2\}$, $\varphi_{+1}(x,y) := \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}$, $\varphi_{-1}(x,y) := -\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}$. Die φ_i sind nun auf ∂K nicht mehr differenzierbar. Wir verwenden Kugelkoordinaten zur Umparametrisierung, d.h. $K_1 := [0, 2\pi] \times [-\pi/2, 0]$, $K_2 := [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$ und $g_i(u, v) := R\cos(v)(\cos(u), \sin(u))$. Dann ist $(\varphi_i \circ g_i)(u, v) = \pm\sqrt{R^2(1 - \cos^2 v)} = \pm R\sin(v)$ C^∞ in (u, v).

8.1.7 Gauß'scher Integralsatz im Raum.
Für stetiges $r : B \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\partial B} r\; dx \wedge dy = \sum_{i=-1}^{+1} \int_{S_i} r(x, y, z)\, dx \wedge dy = {}^{*)}$$

Wegen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{cases} (c'(u), 0) & \text{für } i = 0 \\ (g_i'(u, v)) & \text{sonst} \end{cases}$$

ist

$$\int_{S_i} r(x, y, z)\; dx \wedge dy = \int_{K_i} r(\Phi(u, v))\; \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, d(u, v)$$

Dieses Integral ist 0 für $i = 0$ und für $i \neq 0$ ergibt sich

$$= \int_{K_i} r(g_i(u, v), \varphi_i(g_i(u, v)))\; \det g_i'(u, v)\, d(u, v) = \pm \int_K r(x, y, \varphi_i(x, y))\, d(x, y).$$

Folglich ist nach dem Hauptsatz (5.2.2)

$$\begin{aligned} {}^{*)} = \int_{\partial B} r\; dx \wedge dy &= \int_K \Big[r(x, y, z) \Big]_{z=\varphi_{-1}(x,y)}^{\varphi_{+1}(x,y)} d(x, y) \\ &\overset{(5.2.2)}{=\!=} \int_K \int_{\varphi_{-1}(x,y)}^{\varphi_{+1}(x,y)} \frac{\partial}{\partial z} r(x, y, z)\, dz\, d(x, y) = \int_B \frac{\partial}{\partial z} r(x, y, z)\, d(x, y, z) \end{aligned}$$

Durch zyklisches Vertauschen erhalten wir:

Satz von Gauß im 3-dimensionalen.
Es sei B ein C^1-Normalbereich bezüglich aller 3 Koordinatenebenen und $f = (p, q, r)$ ein C^1-Vektorfeld auf B. Dann ist

$$\int_{\partial B} p\; dy \wedge dz + q\; dz \wedge dx + r\; dx \wedge dy = \int_B \left(\frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial y} q + \frac{\partial}{\partial z} r \right). \quad \square$$

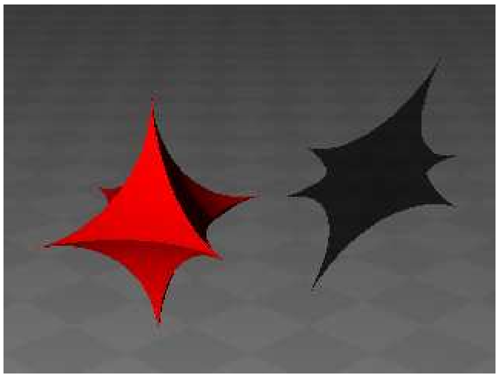
Geometrische Bedeutung.

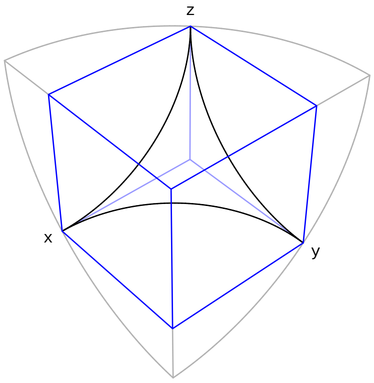
Für ein C^1-Vektorfeld $f = (p, q, r) : \mathbb{R}^3 \supseteq B \to \mathbb{R}^3$ definieren wir die Funktion $\operatorname{div} f : B \to \mathbb{R}$ durch $\operatorname{div} f := \partial_1 p + \partial_2 q + \partial_3 r$. Dann ist

$$\int_{\partial B} \langle f | \nu_{\partial B} \rangle\; \mathrm{vol}_{\partial B} = \int_B \operatorname{div} f.$$

Die linke Seite beschreibt wie im 2-dimensionalen die Quellenergiebigkeit oder auch Quellenstärke des Bereichs B, und somit nennt man $\operatorname{div} f$ die Quellendichte des Vektorfelds f.

8.1.8 Beispiel.
Es sei der Körper B dadurch gegeben, daß aus einen Würfel in Mittelpunktslage mit Seitenlänge 2 um Kugeln mit Radius $\sqrt{2}$ an jeden der Ecken vermindert wird.





Sein Volumen in einem Oktanten ist jenes des Würfels mit Seitenlänge 1 vermindert um den Oktanten einer Kugel mit Radius $\sqrt{2}$ vermehrt um die 3 Kugelabschnitte mit geographischer Breite $\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/2$ und Volumen

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2 \cos(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \int_0^{\sqrt{2}} r^2\, dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\sqrt{2}^3}{3}\,\frac{\pi}{2}\,\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{3}\,\pi.$$

Also ist das Gesamtvolumen

$$|B| = 8\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{4\pi}{3}\,\sqrt{2}^3 + 3\,\frac{\sqrt{2}-1}{3}\,\pi\right) = 8\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi - \pi\right).$$

Eine Parametrisierung Φ von S wird gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &:= (1 - \sqrt{2}\cos(u)\cos(v), 1 - \sqrt{2}\sin(u)\cos(v), 1 - \sqrt{2}\sin(v)) \\
\Phi'(u,v) &= \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{pmatrix} (u,v) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos(v)\sin(u) & \cos(u)\sin(v) \\ -\cos(v)\cos(u) & \sin(v)\sin(u) \\ 0 & -\cos(v) \end{pmatrix} \\
(\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi)(u,v) &= 2\Big(\cos(v)^2\cos(u), \cos(v)^2\sin(u), \sin(v)\cos(v)\Big) \\
&= 2\cos(v)\Big(\cos(v)\cos(u), \cos(v)\sin(u), \sin(v)\Big) \\
\mathrm{vol}(u,v) &= 2\cos(v)
\end{aligned}$$

Nun zur Oberfläche. Pro Oktant besteht diese aus dem Quadranten einer Sphäre mit Radius $\sqrt{2}$ vermindert um 3 Sphärenabschnitte mit geographischer Breite $\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/2$ und Oberfläche wegen dem Beispiel in (8.1.5)

$$\sqrt{2}^2 \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(\vartheta)\, d\vartheta = 2\,\frac{\pi}{2}\,\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi.$$

Die Gesamtoberfläche ist somit

$$|\partial B| = 8\left(\frac{4\pi\sqrt{2}^2}{8} - 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi\right) = 4\,(3\sqrt{2} - 4)\,\pi.$$

Die Gesamtlänge der 12 Viertelkreise die als Kanten der schneidenden Sphäre entstehen ist

$$12\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 6\,\pi.$$

Sei nun ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) := (x^2 y, y^2 z, z^2 x)$$

mit

$$\operatorname{div}(f)(x,y,z) = 2(x\,y + y\,z + z\,x) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}(f)(x,y,z) = -(y^2, z^2, x^2).$$

Wir überpüfen nun den Integralsatz von Stokes und von Gauß im $\mathbb{R}^3$.

Sei S der Schnitt von ∂B mit einem Oktanten, also ein Achtel der Sphäre durch $(1,1,1)$ mit Radius $\sqrt{2}$ vermindert um die 3 Abschnitte mit geographischer Breite $\pi/4 \le \vartheta \le \pi/2$. Da $\operatorname{rot}(f)$ invariant unter zyklischer Vertauschung der Koordinaten x, y, z ist erhalten wir

$$\begin{aligned}(\langle \operatorname{rot}(f)\circ\Phi|\nu_S\rangle\ \operatorname{vol}_S)(u,v) = 2\,\cos(v)\,\Big(-&\Big(\cos(u)\,\cos(v)\,\Big(-1+\sqrt{2}\,\cos(v)\,\sin(u)\Big)^2\Big)\\ &-\Big(-1+\sqrt{2}\,\cos(u)\,\cos(v)\Big)^2\,\sin(v)\\ &-\cos(v)\,\sin(u)\,\Big(-1+\sqrt{2}\,\sin(v)\Big)^2\Big)\end{aligned}$$

und somit

$$\int_S \operatorname{rot}(f) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} - 3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(4\sqrt{2} - \frac{9}{4}\pi\right) - 3\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1 - \frac{17}{16}\pi\right) = 3 - \frac{15}{16}\pi.$$

Berechnen wir andererseits das Kurvenintegral von f über die 3 Vierteilkreise des Randes so erhalten wir ebenfalls

$$\int_{\partial S} f = 3\int_0^{\pi/2} (1-\cos(t))^2\,(1-\sin(t))\,\sin(t)\,dt = 3\left(1 - \frac{5}{16}\pi\right).$$

Es ist $\int_{\partial B}\operatorname{rot}(f) = \int_{\partial(\partial B)} f = \int_\emptyset f = 0$, was wir auch aus den Symmetrieeigenschaften ablesen hätten können.

Nun berechnen wir das Integral von f über S. Es ist

$$\begin{aligned}\Big(\langle f\circ\Phi|\nu_S\rangle\ \operatorname{vol}_S\Big)(u,v) = 2\,\cos(v)\,\Big(-&\Big(\cos(u)\,\cos(v)\,\Big(-1+\sqrt{2}\,\cos(u)\,\cos(v)\Big)^2\,\Big(-1+\sqrt{2}\,\cos(v)\,\sin(u)\Big)\Big)\\ &-\cos(v)\,\sin(u)\,\Big(-1+\sqrt{2}\,\cos(v)\,\sin(u)\Big)^2\,\Big(-1+\sqrt{2}\,\sin(v)\Big)\\ &+\Big(1-\sqrt{2}\,\cos(u)\,\cos(v)\Big)\,\sin(v)\,\Big(-1+\sqrt{2}\,\sin(v)\Big)^2\Big)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_S f &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} -3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\\ &= \left(-\frac{18\sqrt{2}}{5} + \left(-2\sqrt{2} + \frac{9}{2}\right)\pi\right) - 3\left(-\frac{163}{60} - \frac{6\sqrt{2}}{5} - \left(2\sqrt{2} - \frac{17}{4}\right)\pi\right)\\ &= \frac{163}{20} + \left(4\sqrt{2} - \frac{33}{4}\right)\pi.\end{aligned}$$

Jenes über die Seitenflächen in den Koordinaten-Ebenen ist 0, da z.B. für $z = 0$ der Einheitsnormalvektor $(0, 0, -1)$ ist und somit $\langle f|\nu\rangle = 0$ ist. Andererseits ergibt sich für das Integral von $\operatorname{div}(f)$ über $B_+ := B \cap \mathbb{R}^3_+$ ebenfalls

$$\begin{aligned}\int_{B_+} \operatorname{div}(f) &= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} \int_0^{1-\sqrt{2-(x-1)^2-(y-1)^2}} 2(x\,y + y\,z + z\,x)\, d(x, y, z)\\ &= \frac{163}{20} + \left(4\sqrt{2} - \frac{33}{4}\right)\pi.\end{aligned}$$

Beachte, daß auf Grund der Symmetrieeigenschaften $\int_B \operatorname{div}(f) = 0 = \int_{\partial B} f$ ist.

8.1.9 Zusammenfassung.
Wir haben bisher folgende Typen von Integralen behandelt:

- Integrale $\int_I \rho$ von Funktionen $\rho : \mathbb{R}^p \supseteq I \to \mathbb{R}$ über kompakten Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}^p$.
- Integrale $\int_B \rho$ von Funktionen $\rho : \mathbb{R}^p \supseteq B \to \mathbb{R}$ über (J-meßbare) Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^p$.
- Integrale $\int_U \rho$ von Funktionen $\rho : \mathbb{R}^p \supseteq U \to \mathbb{R}$ über offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^p$.

Für Kurven $c : \mathbb{R} \supseteq I \to K \subseteq \mathbb{R}^p$ haben wir folgende Kurvenintegrale behandelt:

- Kurven-Integrale $\int_c g$ von 1-Formen $g : \mathbb{R}^p \supseteq K \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ bzw. $\int_K g$.
- Kurven-Integrale $\int_c f$ von Vektorfeldern $f : \mathbb{R}^p \supseteq K \to \mathbb{R}^p$, indem wir die assoziierte 1-Form betrachtet haben, bzw. $\int_K g$.
- Kurven-Integrale $\int_K \rho \operatorname{vol}_K$ von Funktionen $\rho : \mathbb{R}^2 \supseteq K \to \mathbb{R}$.

Für Flächen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ haben wir folgende Flächenintegrale:

- Flächen-Integrale $\int_S f$ von Vektorfeldern $f = (p, q, r) : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}^3$ vermöge $\int_B p \circ \Phi \cdot dy \wedge dz + \dots$.
- Flächen-Integrale $\int_S \rho \operatorname{vol}_S$ von Funktionen $\rho : \mathbb{R}^3 \supseteq S \to \mathbb{R}$ vermöge $\int_B \rho \circ \Phi \cdot |\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi|$.

Die auftretenden Vektorfelder und Funktionen waren in den Integralsätzen dabei durch

- $\operatorname{rot} f : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$.
- $\operatorname{div} f : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{div} f := \langle\nabla|f\rangle$ mit $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$.
- $\operatorname{rot} f : \mathbb{R}^3 \supseteq B \to \mathbb{R}^3$ mit $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ und $\operatorname{rot} f := \nabla \times f$.
- $\operatorname{div} f : \mathbb{R}^3 \supseteq B \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{div} f := \langle\nabla|f\rangle$.
- $\langle f|\tau_K\rangle$ mit $\tau_K(c(t)) := \frac{1}{\|c'(t)\|}\, c'(t)$.
- $\langle f|\nu_K\rangle$ mit $\nu_K(c(t)) := -\tau_K(c(t))^\perp$.
- $\langle f|\nu_S\rangle$ mit $\nu_S(\Phi(u, v)) := \frac{1}{\|\partial_1\Phi(u,v)\times\partial_2\Phi(u,v)\|}\, \partial_1\Phi(u, v) \times \partial_2\Phi(u, v)$ gegeben.

Die Integralsätze die wir bislang behandelt haben sind:

Hauptsatz:

$$\int_{\partial I} f := f(b) - f(a) = \int_I f'$$
$$\int_{\partial K} f := f(c(b)) - f(c(a)) = \int_K f'$$

Gauß in der Ebene:

$$\int_{\partial B} g = \int_B \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1$$
$$\int_{\partial B} \langle g | \tau_{\partial B} \rangle \operatorname{vol}_{\partial B} = \int_B \operatorname{rot}(g)$$
$$\int_{\partial B} \langle g | \nu_{\partial B} \rangle \operatorname{vol}_{\partial B} = \int_B \operatorname{div}(g)$$

Stokes im Raum:

$$\int_{\partial S} g = \int_S \operatorname{rot}(g)$$
$$\int_{\partial S} \langle g | \tau_{\partial S} \rangle \operatorname{vol}_{\partial S} = \int_S \langle \operatorname{rot}(f) | \nu_S \rangle \operatorname{vol}_S$$

Gauß im Raum:

$$\int_{\partial B} g = \int_B \operatorname{div}(g)$$
$$\int_{\partial B} \langle g | \nu_B \rangle \operatorname{vol}_B = \int_B \operatorname{div}(g)$$

Das Linienelement vol_K für Kurven K konnten wir als 1-Form interpretieren, die an jeder Stelle der Kurve Tangentialvektoren ihre Länge zuordnet.

Für das Volumselement vol_S für Flächen S können wir nun als 2-Form interpretieren, d.h. etwas das an jeder Stelle der Fläche zwei Tangentialvektoren die von ihnen erzeugte orientierte Fläche zuordnet. Für solche $\omega : S \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ können wir dann das Flächenintegral definieren durch

$$\int_S \omega := \int_K \omega(\Phi(u,v))(\partial_1 \Phi(u,v), \partial_2 \Phi(u,v)) \, d(u,v)$$

definieren. Auch $dx \wedge dy$ ist so etwas, denn $dx \wedge dy = \det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})$ ist die Fläche des von $\operatorname{pr}_{1,2}(\partial_1 \Phi)$ und $\operatorname{pr}_{1,2}(\partial_2 \Phi)$ erzeugten Parallelograms im $\mathbb{R}^2$.

Ein Problem das sich stellt wenn wir die Integralsätze von rechts nach links anwenden wollen, ist welche Funktionen sich als Divergenz eines Vektorfelds bzw. welche Vektorfelder sich als Rotation eines Vektorfelds schreiben lassen. Für das analoge Problem für den Gradienten haben wir eine lokale Antwort in (6.5.2) und globale in (6.5.4) und (6.5.8) gegeben.

Wir wollen nun die erhaltenen Integralsätze zu einem gemeinsamen Satz verallgemeinern. Dazu benötigen wir einerseits die Objekte (Flächen) über die wir integrieren und die einen vernünftig handhabbaren Rand besitzen und andererseits die Objekte die wir integrieren können (Funktion, 1-Formen, Vektorfelder, ...). Wir beginnen mit letzteren. Bei Flächen und Volumsberechnung spielt offensichtlich die Determinante eine große Rolle. Diese ist eine alternierende multi-lineare Form, und deshalb schauen wir uns solche Formen im folgenden Abschnitt genauer an.

Da die meiste mathematische Literatur auf english ist, habe ich den folgenden Abschnitt zwecks Eingewöhnung auf englisch verfaßt.

8.2 Multi-linear Forms

As usual we denote the vector space of all p-linear mappings $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_p \to F$ by $L(E_1, \ldots, E_p; F)$ or by $L_p(E_1, \ldots, E_p; F)$. If all E_k are equal to E, we denote this space also by $L_p(E; F)$.

8.2.1 Definition. Tensor product of mappings.
Up to now we have met the following products: For $\Phi : X_1 \to Y_1$ und $\Psi : X_2 \to Y_2$ we have the cartesian product

$$\Phi \times \Psi : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (\Phi(x_1), \Psi(x_2)),$$

and in the special case $X = X_1 = X_2$ und $Y_1 = \mathbb{R} = Y_2$ we have the pointwise product

$$\Phi \cdot \Psi : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Phi(x) \cdot \Psi(x).$$

For $Y_1 = \mathbb{R} = Y_2$ and arbitrary X_1 und X_2 we define now the TENSOR PRODUCT

$$\Phi \otimes \Psi : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \Phi(x_1) \cdot \Psi(x_2).$$

Note that $\Phi \otimes \Psi = \mu \circ (\Phi \times \Psi)$, where $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotes the multiplication $(t, s) \mapsto t\, s$, and $\Phi \cdot \Psi = (\Phi \otimes \Psi) \circ \Delta$, where $\Delta : X \to X \times X$ denotes the diagonal mapping $x \mapsto (x, x)$.

The simplest bilinear mapping is the multiplication $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto t \cdot s$. This can also be described as $(t, s) \mapsto \mathrm{pr}^1(t) \cdot \mathrm{pr}^2(s)$, where $\mathrm{pr}^1, \mathrm{pr}^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are the linear coordinate projections $(t, s) \mapsto t$ and $(t, s) \mapsto s$. In order to describe general multi-linear forms via a similar product of linear forms we can use the tensor product of multi-linear forms.

Let $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_p \to \mathbb{R}$ be p-linear (we also say: its DEGREE OF A MULTI-LINEAR MAPPING is p) and let $\Psi : F_1 \times \ldots \times F_q \to \mathbb{R}$ be q-linear. Then their TENSOR PRODUCT OF MULTI-LINEAR FORMS $\Phi \otimes \Psi : E_1 \times \ldots \times E_p \times F_1 \times \ldots \times F_q \to \mathbb{R}$ defined by

$$(\Phi \otimes \Psi)(v_1, \ldots, v_p; w_1, \ldots, w_q) := \Phi(v_1, \ldots, v_p) \cdot \Psi(w_1, \ldots, w_q).$$

is $(p + q)$-linear.

Thus we start feeding as many variables as possible into Φ and all the remaining ones into Ψ in the given order and finally multiply the resulting numbers. It is easily shown that this multiplication $(\Phi, \Psi) \mapsto \Phi \otimes \Psi$ is bi-linear and associative.

Let $\Phi \in L_p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ be arbitrary, then we have

$$\Phi(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} v_1^{i_1} \ldots v_p^{i_p}\ \Phi(e^1_{i_1}, \ldots, e^p_{i_p}) = \sum_{i_1,\ldots,i_p} v_1^{i_1} \ldots v_p^{i_p}\ \Phi_{i_1,\ldots,i_p},$$

where $\Phi_{i_1,\ldots,i_p} := \Phi(e^1_{i_1}, \ldots, e^p_{i_p}) \in \mathbb{R}$. For the linear functionals $\mathrm{pr}^i \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ defined by $\mathrm{pr}^i : x = (x^1, \ldots, x^n) \mapsto x^i$ for $i = 1, .., n$, we have $(pr^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{pr}^{i_p})(v_1, \ldots, v_p) = v_1^{i_1} \ldots v_p^{i_p}$ one hence can rewrite the above equation as

$$\Phi = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \Phi_{i_1,\ldots,i_p} \cdot \mathrm{pr}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{pr}^{i_p},$$

i.e. the family $\Big\{\mathrm{pr}^{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{pr}^{i_p} : i_1,\ldots,i_p\in\{1,\ldots,n\}\Big\}$ generates the vector space $L_p(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$.

Furthermore, the p-linear functionals $\mathrm{pr}^{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{pr}^{i_p}$ are linear independent, since evaluated at $(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})$ they give 1 when $(i_1,\ldots,i_p)=(j_1,\ldots,j_p)$, and 0 otherwise, and hence

$$\begin{aligned}0&=\sum_{i_1,\ldots,i_p}\Phi_{i_1,\ldots,i_p}\cdot\mathrm{pr}^{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{pr}^{i_p}\Rightarrow\\ 0&=\sum_{i_1,\ldots,i_p}\Phi_{i_1,\ldots,i_p}\cdot\mathrm{pr}^{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{pr}^{i_p}(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})=\Phi_{j_1,\ldots,j_p}\text{ for all }j_1,\ldots,j_p\in\{1,\ldots,m\}.\end{aligned}$$

So we have shown the following lemma

8.2.2 Lemma. Basis for space of multi-linear functions.
The family $\Big\{\mathrm{pr}^{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{pr}^{i_p} : i_1,\ldots,i_p\in\{1,\ldots,n\}\Big\}$ *is a basis of the vector space* $L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. □

8.2.3 Definition. Alternating multi-linear functions.
Since the (oriented) volume of the parallelepiped spanned by vectors $v_1,\ldots,v_n$ is alternating, namely the determinant, we consider now multi-linear alternating mappings.

A p-linear mapping $\Phi\in L_p(E,F)$ is called ALTERNATING if Φ changes sign whenever two entries are exchanged, i.e.

$$\Phi(\ldots,v,\ldots,w,\ldots)=-\Phi(\ldots,w,\ldots,v,\ldots).$$

Since every permutation σ of $\{1,\ldots,p\}$ can be decomposed into such transpositions and since the sign of the composite of permutations is the product of the signs of the factors, the condition is equivalent to

$$\Phi(v_1,\ldots,v_p)=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\Phi\underbrace{(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)})}_{=:\sigma^*(v_1,\ldots,v_p)},$$

for every permutation σ of $\{1,\ldots,p\}$. Where we denoted the exchange of variables via σ by $\sigma^*: E\times\ldots\times E\to E\times\ldots\times E$, which is defined by $\sigma^*(v_1,\ldots,v_p):=(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)})$. The condition above can be expressed shortly by

$$\Phi=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\Phi\circ\sigma^*\text{ or, equivalently, by }\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\Phi=\Phi\circ\sigma^*.$$

Note, that if we consider $(v_1,\ldots,v_p)$ as mapping $v:\{1,\ldots,p\}\to E$, then $\sigma^*(v):=v\circ\sigma$. In fact, $\sigma^*(v)(i):=v_{\sigma(i)}=(v\circ\sigma)(i)$. Moreover $\sigma^*(e_i)=e_j\Leftrightarrow\sigma(j)=i$, since obviously $\sigma^*(e_i)$ is a standard unit-vector with 1 at exactly that coordinate j for which $\sigma(j)=i$.

Let $L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$ denote the set of all alternating p-linear mappings in $L_p(E,F)$. This is easily seen to be a linear subspace of $L_p(E,F)$.

8.2.4 Lemma. Alternator.
The ALTERNATOR $\mathrm{alt}:\Phi\mapsto\frac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\Phi\circ\sigma^*$, *where the sum is taken over all permutations* σ *of* $\{1,\ldots,p\}$, *defines a projection from* $L_p(E,F)$ *onto* $L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$ *which turns every multi-linear mapping* Φ *into an alternating one* $\mathrm{alt}(\Phi)$. *For any permutation* π *one has* $\mathrm{alt}(\Phi\circ\pi^*)=\mathrm{sgn}(\pi)\,\Phi=\mathrm{alt}(\Phi)\circ\pi^*$. *The kernel* $\ker(\mathrm{alt})$ *of* alt *contains all p-linear mappings which are symmetric in at least 2 variables.*

Proof. Obviously $\mathrm{alt}(\Phi)$ is p-linear provided Φ is it.

Now let π be an arbitrary permutation. Then

$$\begin{aligned}\mathrm{alt}(\Phi\circ\pi^*)&=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\pi^*\circ\sigma^*)=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)\overbrace{\mathrm{sgn}(\pi)^2}^{=1}(\Phi\circ(\sigma\circ\pi)^*)\\&=\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\bar\sigma)\,\mathrm{sgn}(\pi)(\Phi\circ\bar\sigma^*)=\mathrm{sgn}(\pi)\cdot\mathrm{alt}(\Phi),\end{aligned}$$

since $\bar\sigma := \sigma\circ\pi$ runs through all permutations of $\{1,\dots,p\}$ exactly once while σ runs through them (use that the set of all permutations forms a group under composition, and multiplication by a group element π is a bijection whose inverse is the multiplication with the inverse element π^{-1}) and since $\pi^*\circ\sigma^* = (\sigma\circ\pi)^*$.

On the other hand we have by analogous arguments

$$\begin{aligned}\operatorname{alt}(\Phi)\circ\pi^* &= \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\sigma^*)\circ\pi^* = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\sigma^*\circ\pi^*)\\ &= \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\overbrace{\operatorname{sgn}(\pi)^2}^{=1}(\Phi\circ(\pi\circ\sigma)^*) = \tfrac{1}{p!}\sum_{\bar\sigma}\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\bar\sigma)(\Phi\circ\bar\sigma^*)\\ &= \operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{alt}(\Phi),\end{aligned}$$

where $\bar\sigma := \pi\circ\sigma$.

So we have proved that $\operatorname{alt}(\Phi)$ is alternating and that the claimed formula holds.

The operator alt is a projection from $L_p(E,F)$ onto $L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$, since the alternating mappings Φ are invariant under alt:

$$\operatorname{alt}(\Phi) = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\sigma^*) = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma)\Phi = \tfrac{p!}{p!}\Phi = \Phi.$$

Furthermore $\operatorname{alt}(\Phi) = 0$ for any p-linear mapping Φ, which is symmetric in some variables: Symmetry in some variables implies that there is some transposition π (hence $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$), such that $\Phi\circ\pi^* = \Phi$. Applying alt gives $\operatorname{alt}(\Phi) = \operatorname{alt}(\Phi\circ\pi^*) = (-1)\operatorname{alt}(\Phi)$, hence $\operatorname{alt}(\Phi) = 0$. □

8.2.5 Definition. Wedge product.
Since the tensor product of two alternating multi-linear mappings is no longer alternating, we need a new kind of product the so called WEDGE PRODUCT.

Let $\omega \in L_{p,\mathrm{alt}}(E,\mathbb{R})$ and $\eta \in L_{q,\mathrm{alt}}(E,\mathbb{R})$ be two alternating multi-linear functions. Then the wedge product of ω and η is the alternating multi-linear function

$$\omega\wedge\eta := \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\cdot\operatorname{alt}(\omega\otimes\eta).$$

The factor $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ is chosen in such a way, that this product can be used to calculate the appropriate volumes, see the definition of $\det^{i_1,\dots,i_p}$ in (8.2.7).

8.2.6 Lemma.
The multiplication $(\omega,\eta)\mapsto\omega\wedge\eta$ is bi-linear, associative and graded commutative, i.e. $\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}\eta\wedge\omega$, where p and q are the degrees of ω and η.

Proof. That the multiplication is bi-linear follows immediately from the corresponding statement for the tensor product, and from the linearity of the alternator.

Claim. The wedge product is graded commutative:
Using the permutation

$$\pi : j \mapsto \begin{cases} j+q & \text{for } j\in\{1,\dots,p\}\\ j-p & \text{for } j\in\{p+1,\dots,p+q\}\end{cases}$$

which exchanges the block of the first p variables with that of the last q variables, with $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{pq}$, we calculate as follows.

$$\omega\wedge\eta = \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}(\omega\otimes\eta) = \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}((\eta\otimes\omega)\circ\pi^*) = \operatorname{sgn}(\pi)\cdot\tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}(\eta\otimes\omega) = (-1)^{pq}\,\eta\wedge\omega.$$

Claim. The wedge product is associative:

$$(\operatorname{alt}\Phi)\otimes\Psi = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(\Phi\circ\sigma^*)\otimes\Psi = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\bar\sigma)(\Phi\otimes\Psi)\circ\bar\sigma^*,$$

where $\bar\sigma$ is the permutation of $\{1,\dots,p+q\}$, which agrees with σ on $\{1,\dots,p\}$ and keeps $\{p+1,\dots,p+q\}$ fixed. Obviously $\operatorname{sgn}(\bar\sigma)=\operatorname{sgn}(\sigma)$. Hence

$$\begin{aligned}\operatorname{alt}\big((\operatorname{alt}\Phi)\otimes\Psi\big) &= \operatorname{alt}\Big(\tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\bar\sigma)(\Phi\otimes\Psi)\circ\bar\sigma^*\Big)\\ &= \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\bar\sigma)\operatorname{alt}((\Phi\otimes\Psi)\circ\bar\sigma^*) = \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{alt}(\Phi\otimes\Psi) = \operatorname{alt}(\Phi\otimes\Psi).\end{aligned}$$

Remark that this shows that the kernel of alt is an ideal, since $\operatorname{alt}(\Phi)=0$ implies that $\operatorname{alt}(\Phi\otimes\Psi) = \operatorname{alt}(\operatorname{alt}(\Phi)\otimes\Psi)=\operatorname{alt}(0\otimes\Phi)=\operatorname{alt}(0)=0$.

So we obtain finally, when a, b and c denote the degrees of α, β and γ:

$$\begin{aligned}(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma &= \tfrac{(a+b+c)!}{(a+b)!c!}\operatorname{alt}\Big((\alpha\wedge\beta)\otimes\gamma\Big) = \tfrac{(a+b+c)!}{(a+b)!c!}\operatorname{alt}\Big(\tfrac{(a+b)!}{a!b!}\operatorname{alt}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma\Big)\\ &= \tfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}\operatorname{alt}\Big(\operatorname{alt}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma\Big) = \tfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}\operatorname{alt}\Big((\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma\Big).\end{aligned}$$

And by symmetry

$$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) = \tfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}\operatorname{alt}\Big(\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)\Big).$$

Since the tensor product is associative, the result follows. □

8.2.7 Definition. Subdeterminants.
For $i_1,\dots,i_p\in\{1,\dots,n\}$ let $\det^{i_1,\dots,i_p} := \operatorname{pr}^{i_1}\wedge\dots\wedge\operatorname{pr}^{i_p}\in L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Then we have

$$\begin{aligned}\det{}^{i_1,\dots,i_p}(v_1,\dots,v_p) &= (\operatorname{pr}^{i_1}\wedge\dots\wedge\operatorname{pr}^{i_p})(v_1,\dots,v_p)\\ &\overset{(8.2.6)}{=\!=} p!\operatorname{alt}(\operatorname{pr}^{i_1}\otimes\dots\otimes\operatorname{pr}^{i_p})(v_1,\dots,v_p)\\ &= \tfrac{p!}{p!}\sum_\sigma\operatorname{sgn}(\sigma)(\operatorname{pr}^{i_1}\otimes\dots\otimes\operatorname{pr}^{i_p})(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})\\ &= \sum_\sigma\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{pr}^{i_1}(v_{\sigma(1)})\dots\operatorname{pr}^{i_p}(v_{\sigma(p)})\\ &= \sum_\sigma\operatorname{sgn}(\sigma)v^{i_1}_{\sigma(1)}\dots v^{i_p}_{\sigma(p)}\\ &= \det\begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_p^{i_1}\\ \vdots & & \vdots\\ v_1^{i_p} & \dots & v_p^{i_p}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

So $\det^{i_1,\dots,i_p}$ is in fact the determinant of the submatrix of the $(n\times p)$-matrix

$$(v_1,\dots,v_p) = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_p^1\\ \vdots & & \vdots\\ v_1^n & \dots & v_p^n\end{pmatrix}.$$

formed by the lines $i_1,\dots,i_p$.

8.2.8 Corollary. Algebraic Rules for Subdeterminants.
Let $i_1,\dots,i_p;j_1,\dots,j_q\in\{1,\dots,n\}$ and let σ be any permutation of $\{1,\dots,n\}$. Then $\det^{i_1,\dots,i_p}\wedge\det^{j_1,\dots,j_q} = \det^{i_1,\dots,i_p;j_1,\dots,j_q}$ and $\det^{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(p)}} = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\det^{i_1,\dots,i_p}$. If two of the indices $i_1,\dots,i_p$ are the same then $\det^{i_1,\dots,i_p}=0$.

Proof. The first equation follows directly from the associativity of the wedge product, the second one follows from the graded commutativity. The last one is a consequence of $\omega \wedge \omega = 0$ for every $\omega \in L(E;\mathbb{R})$ of degree 1, since $\omega \wedge \omega = (-1)^{1\cdot 1}\, \omega \wedge \omega$. □

Similar to (8.2.2) the wedge-products of coordinate projections form a basis for all multi-linear alternating forms.

8.2.9 Lemma. Basis for alternating multi-linear functions.

The family $\{\det^{i_1,\dots,i_p} : i_1 < \ldots < i_p,$ *and* $i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}\}$ *is a basis of the vector space* $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

Proof. Since $\mathrm{alt} : L_p(E,F) \to L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$ is a linear surjection, and $\{\mathrm{pr}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{pr}^{i_p} : i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}\}$ is a basis of $L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ their image $\{\det^{i_1,\dots,i_p} = p!\,\mathrm{alt}(\{\mathrm{pr}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{pr}^{i_p}) : i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}\}$ under alt generates the image $L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$. By the previous corollary these elements are zero whenever the indices are not pairwise different, and they are equal up to a sign when their indices are just a permutation of each other. So we conclude that even the family $\{\det^{i_1,\dots,i_p} : i_1 < \ldots < i_p,$ and $i_1,\dots,i_p \in \{1,\dots,n\}\}$ generates $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

That they are linear independent can be seen as follows: Assume that some linear combination $\sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p} \cdot \det^{i_1,\dots,i_p} = 0$. Now evaluate this p-linear map at $(e_{j_1},\dots,e_{j_p})$, where $j_1 < \ldots < j_p$. This yields $0 = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p} \cdot \det^{i_1,\dots,i_p}(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) = \omega_{j_1,\dots,j_p}$, hence all coefficients $\omega_{j_1,\dots,j_p}$ are zero. □

Remark.
This shows that any alternating p-linear mapping ω applied to p many vectors $v_1,\dots,v_p \in \mathbb{R}^n$ is a linear combination of the p-dimensional volumina of the projections $\mathrm{pr}^{i_1,\dots,i_p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ with $1 \le i_1 \le \dots \le i_p \le n$ of the parallelepiped spanned by $v_1,\dots,v_p$.

This description of alternating p-linear mappings ω as linear combinations $\sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p} \cdot \det^{i_1,\dots,i_p}$ can be used to define the wedge product for the basis, extend it bi-linearly and give a different proof of its basic properties (8.2.6), see [23, 1986, Satz 211.2].

8.2.11 Corollary. Dimension of $L_{p,\mathrm{alt}}$.
The dimension of $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *equals* $\binom{n}{p}$. *In particular* $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{0\}$ *for* $p > n$, *and* $L_{n,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{t \cdot \det : t \in \mathbb{R}\}$.

Proof. The set of indices in (8.2.9) corresponds exactly to the subsets $\{i_1,\dots,i_p\}$ of $\{1,\dots,n\}$ of p elements. There are $\binom{n}{p}$ many such subsets. □

8.2.12 Definition. 0-Forms.
We extend the definition of the considered function spaces by setting $L_0(E,F) := F$ and $L_{0,\mathrm{alt}}(E,F) := F$. The tensor product and the wedge product are extended by $t \otimes \Phi := t \cdot \Phi$ and $t \wedge \omega := t \cdot \omega$. Then the properties given in (8.2.6) are valid in this situation as well.

8.2.13 Lemma. Wedge product of linear functionals.
Let $\omega^i = \sum_{j=1}^n \omega^i_j\, \mathrm{pr}^j$ *of degree 1 be given, i.e.* $\omega_i \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, *for* $i = 1,\dots,n$. *Then*

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n = \det((\omega^i_j)_{i,j=1,\dots,n}) \cdot \mathrm{pr}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}^n = \det((\omega^i_j)_{i,j=1,\dots,n}) \cdot \det$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n &= \sum_{i_1,\dots,i_n} \omega^1_{i_1} \ldots \omega^n_{i_n} \cdot \mathrm{pr}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}^{i_n} \\
&= \sum_\sigma \omega^1_{\sigma_1} \ldots \omega^n_{\sigma_n} \cdot \mathrm{pr}^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}^{\sigma_n} \\
&= \sum_\sigma \omega^1_{\sigma_1} \ldots \omega^n_{\sigma_n} \cdot \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{pr}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}^n \\
&= \det((\omega^i_j)_{i,j=1,\dots,n}) \cdot \mathrm{pr}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}^n,
\end{aligned}$$

where σ is the map $\sigma(j) = i_j$ for all $j = 1, \dots, n$; and we may assume that σ is a permutation, since $\mathrm{pr}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{pr}^{i_n} = 0$ whenever two of the indices coincide. $\square$

8.3 Differential Forms

8.3.1 Definition. Differential forms.
Let X be a subset in $\mathbb{R}^n$. A p-FORM (DIFFERENTIAL FORM OF ORDER p) on X is a mapping $\omega : X \to L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. More generally a p-TENSOR FIELD on X is a mapping $\Phi : X \to L_p(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

The space of all p-tensor fields on X turns into a vector space, by defining the operations pointwise:

$$(\Phi + \Psi)(x) := \Phi(x) + \Psi(x); \quad (\lambda \cdot \Phi)(x) := \lambda \cdot (\Phi(x))$$

Moreover, tensor fields can be multiplied with real valued functions on X by: $(f \cdot \Phi)(x) := f(x) \cdot \Phi(x)$. And, more generally, a p-tensor field and a q-tensor field can be multiplied to give a $p+q$-tensor field:

$$(\Phi \otimes \Psi)(x) := \Phi(x) \otimes \Psi(x)$$

The space of p-forms is a linear subspace of that of p-tensor fields, and one has a projection $\mathrm{alt}_* : \Phi \mapsto alt \circ \Phi$ onto it.

So one can multiply differential forms:

$$(\omega \wedge \eta)(x) := \omega(x) \wedge \eta(x) = \tfrac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{alt}(\omega(x) \otimes \eta(x)).$$

By (8.2.6) this multiplication is obviously associative, bi-linear and graded commutative. Recall that $L_0(E, \mathbb{R}) = L_{0,\mathrm{alt}}(E, \mathbb{R}) := \mathbb{R}$. Hence the 0-tensor fields and the 0-forms are exactly the real-valued functions on X. In this case we write $f \cdot \omega := f \wedge \omega$ and $f \cdot \Phi := f \otimes \Phi$.

8.3.2 The exterior derivative of 0-forms.
Recall that the derivative of a C^1-function $f : X \to \mathbb{R}$ is a map $f' : X \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, hence can be considered as a 1-tensor field or a 1-form denoted by df.

Consider in particular the function $\mathrm{pr}^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined by $x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$. Being linear its derivative is the constant function $d\,\mathrm{pr}^i = (\mathrm{pr}^i)' : x \mapsto \mathrm{pr}^i$. For obvious reasons this 1-form will be denoted dx^i. If $f : X \to \mathbb{R}$ is a C^1-function then $df(x) = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^i} f(x)) \cdot dx^i$ or shorter $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^i$.

Using that a basis of $L_{p,\mathrm{alt}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ is given by $\{\det^{i_1,\dots,i_p} = \mathrm{pr}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{pr}^{i_p} : i_1 < \dots < i_p\}$ we see that every p-form ω on X can be written as $\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} (\omega(x))_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ and if we set $\omega_{i_1,\dots,i_p}(x) := (\omega(x))_{i_1,\dots,i_p}$ we can express this shortly by

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

The derivative of a p-tensor field $\Phi : \mathbb{R}^n \supseteq X \to L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ which is C^1 can be considered as mapping $\Phi' : \mathbb{R}^n \supseteq X \to L(\mathbb{R}^n, L_p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})) \cong L_{p+1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. If Φ is a p-form, i.e. $\Phi(x)$ is in addition alternating for all $x \in X$, then we can not expect Φ' to be a $p+1$-form, hence we modify the derivative to get the so-called exterior derivative:

8.3.3 Definition. Exterior derivative.
The DIFFERENTIAL (or EXTERIOR DERIVATIVE) $d\omega$ of a differentiable p-form ω is a $(p+1)$-form defined by: $d\omega(x) := {}_{(p+1)}\ \operatorname{alt}(\widehat{\omega'(x)})$, where $\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$ is the isomorphism $L(E, L_p(E, \dots, E; F)) \cong L_{p+1}(E, \dots, E; F)$. Thus

$$d\omega(x)(v_0, v_1, \dots, v_p) = {}_{(p+1)}\ \operatorname{alt}_{v_0,v_1,\dots,v_p}\big(\omega'(x)(v_0)(v_1, \dots, v_p)\big),$$

where $\mathrm{alt}_{v_0,v_1,\dots,v_p}$ is the alternator with respect to the variables $v_0, v_1, \dots, v_p$. We can write this shorter as

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= (p+1)\cdot \mathrm{alt}(\widehat{\omega'(x)}) \\ d\omega &= (p+1)\cdot \mathrm{alt}\circ\widehat{(\quad)}\circ\omega'. \end{aligned}$$

Since $\omega'(x)(v_0)(v_1,\dots,v_p)$ is already alternating in v_1,..,v_p this formula can be simplified as follows:

8.3.4 Lemma. Simplified formula for the exterior derivative.

$$d\omega(x)(v_0,\dots,v_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\omega'(x)(v_i)(v_1,\dots,\overbrace{v_i},\dots,v_p),$$

where $\overbrace{\dots}$ *means that the corresponding term is removed.*

This formula is one reason for the choice of the factor $(p+1)$ in the definition of $d\omega$.

Proof.

$$\begin{aligned} d\omega(x)(v_0,\dots,v_p) &= \tfrac{p+1}{(p+1)!}\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega'(x)(v_{\sigma(0)})(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) \\ &= \tfrac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p}\sum_{\sigma(0)=i}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega'(x)(v_i)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) \\ &= \tfrac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p}\sum_{\tilde\sigma(i)=i}\mathrm{sgn}(\tilde\sigma)(-1)^i(\omega'(x)(v_i)(v_{\tilde\sigma(0)},\dots,\overbrace{v_{\tilde\sigma(i)}},\dots,v_{\tilde\sigma(p)}) \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\omega'(x)(v_i)(v_0,\dots,\overbrace{v_i},\dots,v_p). \end{aligned}$$

Where for fixed i we denote by $\tilde\sigma$ the unique permutation of $\{0,\dots,p\}$ satisfying $\tilde\sigma(j)=\sigma(j+1)$ for $j<i$, $\tilde\sigma(i)=i$, and $\tilde\sigma(j)=\sigma(j)$ for $j>i$, i.e. $\tilde\sigma=\sigma\circ\pi_i$, where

$$\pi_i : j \mapsto \begin{cases} j+1 & \text{for } j<i \\ 0 & \text{for } j=i \\ j & \text{for } j>i \end{cases}$$

with sign $(-1)^i$. Thus $\mathrm{sgn}(\tilde\sigma)=(-1)^i\,\mathrm{sgn}(\sigma)$ and $\tilde\sigma(i)=\sigma(0)$. Note that $\sigma\mapsto\tilde\sigma$ is a bijection between permutations σ of $\{0,\dots,p\}$ with $\sigma(0)=i$ and permutations $\tilde\sigma$ of $\{0,\dots,p\}$, which keep i fixed. □

Next we check how d and $\wedge$ fit together, so we search for some kind of Leibniz-rule.

8.3.5 Lemma. d as graded derivation.
d is a graded derivation, i.e.

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^p\omega\wedge d\eta,$$

for every differentiable p-form ω and q-form η.

Proof. Obviously d is linear. By the generalized Leibniz rule (6.1.9)

$$\begin{aligned} (\omega\wedge\eta)'(x)(v) &= \omega'(x)(v)\wedge\eta(x) + \omega(x)\wedge\eta'(x)(v) \\ &= \omega'(x)(v)\wedge\eta(x) + (-1)^{pq}\eta'(x)(v)\wedge\omega(x) \\ &= \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\,\mathrm{alt}\Big(\omega'(x)(v)\otimes\eta(x) + (-1)^{pq}\eta'(x)(v)\otimes\omega(x)\Big), \end{aligned}$$

since $(\omega,\eta)\mapsto\omega\wedge\eta$ is bi-linear and graded commutative. Thus

$$\begin{aligned}
(\widehat{\omega\wedge\eta)'}(x)(v,v_1,\dots) &= (\omega\wedge\eta)'(x)(v)(v_1,\dots)\\
&= \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\ \operatorname{alt}\Big(\omega'(x)(v)\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\eta'(x)(v)\otimes\omega(x)\Big)(v_1,\dots)\\
&= \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\ \operatorname{alt}_{v_1,\dots}\Big(\omega'(x)(v)(v_1,\dots)\cdot\eta(x)(\dots)+(-1)^{pq}\eta'(x)(v)(v_1,\dots)\cdot\omega(x)(\dots)\Big)\\
&= \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\ \operatorname{alt}_{v_1,\dots}\Big(\widehat{\omega'(x)}(v,v_1,\dots)\cdot\eta(x)(\dots)+(-1)^{pq}\widehat{\eta'(x)}(v,v_1,\dots)\cdot\omega(x)(\dots)\Big)\\
&= \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\ \operatorname{alt}_{v_1,\dots}\Big(\widehat{\omega'(x)}\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\widehat{\eta'(x)}\otimes\omega(x)\Big)(v,v_1,\dots)
\end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned}
d(\omega\wedge\eta)(x) &= {\scriptstyle (p+q+1)}\ \operatorname{alt}((\widehat{\omega\wedge\eta)'}(x))\\
&= \tfrac{(p+q+1)!}{p!q!}\operatorname{alt}\Big(\widehat{\omega'(x)}\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\widehat{\eta'(x)}\otimes\omega(x)\Big)\\
&= \tfrac{(p+q+1)!}{p!q!}\operatorname{alt}\bigg(\operatorname{alt}(\widehat{\omega'(x)})\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\operatorname{alt}(\widehat{\eta'(x)})\otimes\omega(x)\bigg)\\
&= \tfrac{(p+q+1)!}{p!q!}\operatorname{alt}\bigg(\tfrac{1}{p+1}\,d\omega(x)\otimes\eta(x)+(-1)^{pq}\tfrac{1}{q+1}\,d\eta(x)\otimes\omega(x)\bigg)\\
&= d\omega(x)\wedge\eta(x)+(-1)^{pq}d\eta(x)\wedge\omega(x)\\
&= d\omega(x)\wedge\eta(x)+(-1)^{pq}(-1)^{(q+1)p}\omega(x)\wedge d\eta(x)\\
&= d\omega(x)\wedge\eta(x)+(-1)^{p}\omega(x)\wedge d\eta(x). \qquad\square
\end{aligned}$$

8.3.6 Lemma.
$d^2=0$, i.e. $d(d\omega)=0$ for all p-forms ω, which are C^2.

The idea behind this result and its proof is, that $w''(x)$ is symmetric and $d^2\omega$ is obtained from making $w''(x)$ skew-symmetric in all its entries.

1st Proof.

$$\begin{aligned}
(\widehat{d\omega)'}(x)(u,v,w_1,\dots,w_p) &= (d\omega)'(x)(u)(v,w_1,\dots,w_p)\\
&= \big({\scriptstyle (p+1)}\ \operatorname{alt}\circ\widehat{(\ \ )}\circ\omega'\big)'(x)(u)(v,w_1,\dots,w_p)\\
&= {\scriptstyle (p+1)}\ \Big(\operatorname{alt}\circ\widehat{(\ \ )}\Big)\Big((\omega')'(x)(u)\Big)(v,w_1,\dots,w_p)\\
&= {\scriptstyle (p+1)}\ \operatorname{alt}\big(\widehat{(\omega')'(x)(u)}\big)(v,w_1,\dots,w_p)\\
&= {\scriptstyle (p+1)}\ \operatorname{alt}_{v,w_1,\dots,w_p}\big(\omega''(x)(u,v)(w_1,\dots,w_p)\big),
\end{aligned}$$

since $\quad \big(\widehat{(\omega')'(x)(u)}\big)(v,w_1,\dots,w_p)=(\omega')'(x)(u)(v)(w_1,\dots,w_p)=\omega''(x)(u,v)(w_1,\dots,w_p)$.

Thus

$$\begin{aligned}
(d^2\omega)(x)(u,v,w_1,\dots,w_p) &= {\scriptstyle (p+2)}\ \operatorname{alt}_{u,v,w_1,\dots,w_p}((\widehat{d\omega)'}(x)(u,v,w_1,\dots,w_p))\\
&= {\scriptstyle (p+2)}\ \operatorname{alt}_{u,v,w_1,\dots,w_p}({\scriptstyle (p+1)}\ \operatorname{alt}_{v,w_1,\dots,w_p}(\omega''(x)(u,v)(w_1,\dots,w_p)))\\
&= {\scriptstyle (p+2)(p+1)}\ \operatorname{alt}_{u,v,w_1,\dots,w_p}(\omega''(x)(u,v)(w_1,\dots,w_p)),
\end{aligned}$$

which is zero by the property of the kernel, since $\omega''(x)(u,v)$ is symmetric. $\square$

2nd Proof.

$$
\begin{aligned}
d^2\omega(x)(v_0,v_1,\dots,v_{p+1}) &\overset{(8.3.4)}{=\!=} \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\,(d\omega)'(x)(v_i)(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+1})\\
&= \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\omega(x+t\,v_i)(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+1})\\
&= \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\omega'(x+t\,v_i)(v_j)(v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+1})+\\
&\qquad + \sum_{j=i+1}^{p+1}(-1)^{j-1}\omega'(x+t\,v_i)(v_j)(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_{p+1})\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{p+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\,\omega''(x)(v_i,v_j)(v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+1})+\\
&\qquad \underbrace{+\sum_{i=0}^{p+1}\sum_{j=i+1}^{p+1}(-1)^{i+j-1}\,\omega''(x)(v_i,v_j)(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_{p+1})}_{-\sum_{j=1}^{p+1}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j}\,\omega''(x)(v_i,v_j)(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_{p+1})}\\
&= \sum_{i=1}^{p+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\,\omega''(x)(v_i,v_j)(v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+1})+\\
&\qquad -\sum_{i=1}^{p+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\,\omega''(x)(v_j,v_i)(v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+1}) = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

8.3.7 The coordinate expression for dw.
For $\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1,\dots,i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$ we can calculate $d\omega$ as follows:

$$
\begin{aligned}
&d(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}) \overset{(8.3.5)}{=\!=} d^2x^{i_1}\wedge(dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}) + (-1)^1dx^{i_1}\wedge d(dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}) = 0\\
&d\omega = d\Big(\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1,\dots,i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\Big)\\
&\quad\overset{(8.3.5)}{=\!=} \sum_{i_1<\ldots<i_p} d(\omega_{i_1,\dots,i_p})\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p} + \sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1,\dots,i_p}d(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p})\\
&\quad\overset{(8.3.2)}{=\!=} \sum_{i_1<\ldots<i_p}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1,\dots,i_p}}{\partial x^k}\cdot dx^k\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p} + 0\\
&\quad= \sum_{j_0<\ldots<j_p}\sum_{l=0}^{p}(-1)^l\frac{\partial\omega_{j_0,\dots,\widehat{j_l},\dots,j_p}}{\partial x^{j_l}}\,dx^{j_0}\wedge\ldots\wedge dx^{j_p},
\end{aligned}
$$

where $\{i_1<\ldots<i_p;k\} = \{j_0<\ldots<i_p\}$ and $j_l = k$, i.e. $j_0 = i_1,\dots,j_{l-1} = i_l, j_l = k, j_{k+1} = i_{l+1},\dots,j_p = i_p$.
This coordinate-formula for $d\omega$ can be utilized to give a second proof of the properties of d, see [23, 1985, Satz 212.2 und 212.3].

Since we have to use substitution for integrals, we need a formula how differential forms transform:

8.3.8 Definition. Pullback of tensors.
Let $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}^m$ be a C^1-map, and let Φ be a p-tensor field on $f(X)$, then the PULLBACK

EINES TENSORFELDS $f^*(\Phi)$ of Φ along f is the p-tensor field defined by $f^*(\Phi)(x)(v_1,\dots,v_p) := \Phi(f(x))(f'(x)\cdot v_1,\dots,f'(x)\cdot v_p)$. If Φ is a p-form then so is $f^*(\Phi)$. In particular, for 0-forms Ω we have $f^*(\Omega)=\Omega\circ f$ as in (5.5.11).

Compatibility with products is given by:

8.3.9 Lemma. Algebraic properties of pull-back.
f^* is an algebra-homomorphism and commutes with alt_*, *i.e. f^* is linear,*

$$f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta,\quad \textit{resp.}\quad f^*(\Phi\otimes\Psi)=f^*\Phi\otimes f^*\Psi,$$

and $f^*(\operatorname{alt}\circ\Phi)=\operatorname{alt}\circ f^*(\Phi)$.

Proof. Obviously f^* is linear.

$f^*(\omega\otimes\eta)=f^*\omega\otimes f^*\eta$, since

$$\begin{aligned}
f^*(\omega\otimes\eta)(x)(v_1,\dots,v_p;w_1,\dots,w_q) &= (\omega\otimes\eta)(fx)(f'x\cdot v_1,\dots,f'x\cdot v_p;f'x\cdot w_1,\dots,f'x\cdot w_q)\\
&= (\omega(fx)\otimes\eta(fx))(f'x\cdot v_1,\dots,f'x\cdot v_p;f'x\cdot w_1,\dots,f'x\cdot w_q)\\
&= \omega(fx)(f'x\cdot v_1,\dots,f'x\cdot v_p)\cdot\eta(fx)(f'x\cdot w_1,\dots,f'x\cdot w_q)\\
&= f^*(\omega)(x)(v_1,\dots,v_p)\cdot f^*(\eta)(x)(w_1,\dots,w_q)\\
&= (f^*(\omega)(x)\otimes f^*(\eta)(x))(v_1,\dots,v_p;w_1,\dots,w_q)\\
&= (f^*(\omega)\otimes f^*(\eta))(x)(v_1,\dots,v_p;w_1,\dots,w_q)
\end{aligned}$$

$f^*(\operatorname{alt}\circ\Phi)=\operatorname{alt}\circ f^*(\Phi)$, i.e. $f^*\circ\operatorname{alt}_*=\operatorname{alt}_*\circ f^*$, since

$$\begin{aligned}
(f^*(\operatorname{alt}\circ\Phi))(x)(v_1,\dots,v_p) &= (\operatorname{alt}\circ\Phi))(fx)(f'x\cdot v_1,\dots,f'x\cdot v_p)=\operatorname{alt}(\Phi(fx))(f'x\cdot v_1,\dots,f'x\cdot v_p)\\
&= \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma(\Phi(fx)\circ\sigma^*)(f'x\cdot v_1,\dots,f'x\cdot v_p)\\
&= \tfrac{1}{p!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma(f^*(\Phi)(x))(\sigma^*(v_1,\dots,v_p))=\operatorname{alt}(f^*(\Phi)(x)(v_1,\dots,v_p)).
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
f^*(\omega\wedge\eta) &= f^*\big(\tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}\circ(\omega\otimes\eta)\big)=\tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}\circ f^*(\omega\otimes\eta)\\
&= \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\operatorname{alt}\circ(f^*\omega\otimes f^*\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta. \qquad\square
\end{aligned}$$

Compatibility with the exterior derivative is given by:

8.3.10 Lemma.
d and f^* commute, i.e. $d(f^*\omega)=f^*(d\omega)$ for every C^2-function f. Furthermore $f^*\circ g^*=(g\circ f)^*$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{p+1}\Big(d(f^*\omega)-f^*(d\omega)\Big) &= \operatorname{alt}\circ\widehat{(_)}\circ(f^*\omega)'-\underbrace{f^*(\operatorname{alt}\circ\widehat{(_)}\circ\omega')}_{\operatorname{alt}\circ f^*(\widehat{(_)}\circ\omega')}\\
&= \operatorname{alt}\circ\Big(\widehat{(_)}\circ(f^*\omega)'-f^*(\widehat{(_)}\circ\omega')\Big)=0,
\end{aligned}$$

since

$$\begin{aligned}
\Big(\widehat{(_)} \circ (f^*\omega)' - f^*(\widehat{(_)} \circ \omega')\Big)(x)(v_0,\dots,v_p) =\\
&= (\widehat{f^*\omega)'}(x)(v_0,\dots,v_p) - f^*(\widehat{(_)} \circ \omega')(x)(v_0,\dots,v_p)\\
&= (f^*\omega)'(x)(v_0)(v_1,\dots,v_p) - (\widehat{(_)} \circ \omega')(f(x))(f'(x)v_0,\dots,f'(x)v_p)\\
&= \mathrm{ev}_{v_1,\dots,v_p}\Big((f^*\omega)'(x)(v_0)\Big) - \widehat{\omega'(f(x))}(f'(x)v_0,\dots,f'(x)v_p)\\
&= \Big(\mathrm{ev}_{v_1,\dots,v_p} \circ f^*\omega\Big)'(x)(v_0) - \omega'(f(x))(f'(x)v_0)(f'(x)v_1,\dots,f'(x)v_p)\\
&= \Big(\omega(f(_))(f'(_)v_1,\dots,f'(_)v_p)\Big)'(x)(v_0)\\
&\quad - \omega'(f(x))(f'(x)v_0)(f'(x)v_1,\dots,f'(x)v_p)\\
&= (\omega\circ f)'(x)(v_0)(f'(x)v_1,\dots,f'(x)v_p)\\
&\quad + \sum_{i=1}^p \omega(f(x))(f'(x))(f'(x)v_1,\dots,(f'(_))'(x)(v_0)(v_i),\dots,f'(x)v_p)\\
&\quad - (\omega\circ f)'(x)(v_0)(f'(x)v_1,\dots,f'(x)v_p)\\
&= \sum_{i=1}^p \omega(f(x))(f'(x))(f'(x)v_1,\dots,f''(x)(v_0,v_i),\dots,f'(x)v_p),
\end{aligned}$$

where the i-th summand is symmetric in (v_0, v_i) and hence lies in the kernel of alt.

Remains to show that $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$. But this follows immediately from the chain-rule $(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$:

$$\begin{aligned}
(g\circ f)^*(\Phi)(x)(v_1,\dots,v_p) &= \Phi((g\circ f)(x))((g\circ f)'(x)(v_1),\dots,(g\circ f)'(x)(v_p))\\
&= \Phi(g(f(x)))(g'(f(x))\, f'(x)(v_1),\dots,g'(f(x))\, f'(x)(v_p))\\
&= g^*(\Phi)(f(x))(f'(x)(v_1),\dots,f'(x)(v_p)) = f^*(g^*(\Phi))(x)(v_1,\dots,v_p). \quad \square
\end{aligned}$$

8.3.11 Coordinate expression for $f^*(\omega)$.
Let $f = (f^1,\dots,f^n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ be C^1 and and $\omega := \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \omega_{i_1,\dots,i_p} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}$ be a p-Form on the image $f(X)$. Then we have

$$\begin{aligned}
f^*(\omega) &= f^*\Big(\sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p}\, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}\Big)\\
&\overset{(8.3.9)}{=\!=\!=} \sum_{i_1<\dots<i_p} f^*(\omega_{i_1,\dots,i_p})\, f^*(dy^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{i_p}).
\end{aligned}$$

Using that for a function $g : f(X) \to \mathbb{R}$ we have $f^*(g) = g \circ f$, and thus $f^*(dg) = d(f^*g) = d(g \circ f)$ for g is C^1 by (8.3.10). So we obtain further:

$$f^*(\omega) = \sum_{i_1<\dots<i_p} (\omega_{i_1,\dots,i_p} \circ f) \cdot df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_p}.$$

This deduction does not make use of the full strength of lemma (8.3.10), one only needs the formula $f^*(dy^i) = df^i$. This coordinate formula for $f^*(\omega)$ can be utilized to give a second proof for (8.3.10), see [23, 1985, Satz 212.5 + 212.6].

If $m = p$ we can proceed as follows:

8.3.12 Corollary. Pull-back of p-Forms to $\mathbb{R}^p$.
Let $f = (f^1, \dots, f^p) : \mathbb{R}^p \supseteq X \to \mathbb{R}^p$ be a C^1-mapping. Then we have

$$f^*\Big(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^p\Big) = df^1 \wedge \ldots \wedge df^p = \det\left(\frac{\partial(f^1, \dots, f^p)}{\partial(x^1, \dots, x^p)}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$$

More generally, for any C^1-function $f : \mathbb{R}^p \supseteq X \to \mathbb{R}^n$ and arbitrary p-form $\omega = \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p}\, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}$ we have

$$f^*(\omega) = \left(\sum_{i_1<\ldots<i_p} f^*(\omega_{i_1,\dots,i_p}) \det\left(\frac{\partial(f^{i_1}, \dots, f^{i_p})}{\partial(x^1, \dots, x^p)}\right)\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$$

Proof. The first statement follows immediately from (8.2.13) together with $df^i = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$.
The second more general statement is a consequence of

$$f^*\Big(dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p}\Big) = \det\left(\frac{\partial(f^{i_1}, \dots, f^{i_p})}{\partial(x^1, \dots, x^p)}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p,$$

which in turn follows in the same way as the first one. □

8.3.13 Bemerkung. Rechtfertigung der Memotechnik betreffend Differentiale.
Im 1-dimensionalen haben wir bei mehreren Gelegenheiten mit $\frac{dy}{dx}$ wie mit einem Bruch gerechnet. Wir wollen die damalige Memotechniken nun exakt machen. Offensichtlich sind dx und dy als (exakte) 1-Formen $\mathbb{R} \to L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ zu interpretieren, wobei wir die Koordinate auf $\mathbb{R}$ einmal als x und einmal als y bezeichnen. Zwischen diesen beiden Koordinaten bestehe der Zusammenhang $y = f(x)$, also eigentlich sind x und y die Koordinaten auf zwei verschiedenen Kopien von $\mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung zwischen diesen Kopien, s.d. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R} & \\
\mathbb{R} \arrow[ur, "\mathrm{id}=x"] \arrow[rr, "h"'] & & \mathbb{R} \arrow[ul, "\mathrm{id}=y"']
\end{tikzcd}$$

Um nun die beiden 1-Formen dy und dx zueinander in Beziehung zu setzen müssen wir dy auf die Kopie von $\mathbb{R}$ auf welcher dx lebt zurückziehen, d.h. $h^*(dy) = d(h^*y) = dh$ betrachten. Nach (6.5.3) ist $dh = h' \cdot dx$ und da dx nirgends verschwindet und Werte im Körper $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ hat, ist

$$\frac{dy}{dx}(x) := \frac{h^*(dy)}{dx}(x) = \frac{h'(x)\, dx}{dx} = h'(x).$$

Nun zu den Situationen wo wir diese Quotientenschreibweise verwendet haben:

- Die Kettenregel:
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$
Hier ist offensichtlich von 3 Kopien von $\mathbb{R}$ mit Koordinaten x, y und z die Rede, wobei diese via $z = k(y)$ und $y = h(x)$ zusammenhängen sollen. Um die auftretenden Differentialformen in Beziehung zu setzten müssen wir sie also auf die zu x gehörende Kopie von $\mathbb{R}$ zurückziehen und erhalten
$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right) &:= h^*\left(\frac{k^*(dz)}{dy}\right) \cdot \frac{h^*(dy)}{dx} = \frac{h^*(k^*(dz))}{h^*(dy)} \cdot \frac{h^*(dy)}{dx} = \frac{d(k \circ h)}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} \\ &= \frac{d(k \circ h)}{dx} = \frac{(k \circ h)^*(dz)}{dx} =: \frac{dz}{dx}.\end{aligned}$$

- Die Substitutionsformel:

$$\int f\,dy = \int f\,\frac{dy}{dx}\,dx \quad \text{oder genauer} \quad \int_{h(a)}^{h(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(h(x))\,\frac{dy}{dx}(x)\,dx.$$

Interpretation als 1-Formen liefert:

$$h^*(f\,dy)(x) = (f\circ h)(x)\cdot h^*(dy)(x) = f(h(x))\,dh(x)\,\frac{dx}{dx} = f(h(x))\,\frac{dh}{dx}(x)\,dx$$

und somit

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f\,dy = \int_a^b h^*(f\,dy) = \int_a^b f(h(x))\,\frac{dh}{dx}(x)\,dx.$$

- Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\,g(x) \Rightarrow \frac{1}{f(y)}\,dy = g(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int g(x)\,dx.$$

Interpretation mittels 1-Formen liefert:

$$\begin{aligned}
&\frac{h^*dy}{dx}(x) = h'(x) = (h^*(f)\,g)(x) = h(f(x))\,g(x)\\
\Rightarrow&\frac{1}{f(h(x))}\,dh(x) = g(x)\,dx\\
\Rightarrow&\int_{h(a)}^{h(b)} \frac{1}{f(y)}\,dy = \int_a^b \frac{1}{f(h(x))}\,dh(x) = \int_a^b g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

8.4 Integration von Differentialformen

8.4.1a Definition. Integration von p-Formen über parametrisierte p-Flächen.
Für eine stetige p-Form $\omega = \omega_{1,\dots,r}\,du^1\wedge\dots\wedge du^p$ auf einer kompakten J-meßbaren Menge $K\subseteq\mathbb{R}^p$ definieren wir

$$\int_K \omega = \int_K \omega_{1,\dots,r}\,du^1\wedge\dots\wedge du^p := \int_K \omega_{1,\dots,r}\,d(u^1,\dots,u^p).$$

Unter einer parametrisierten p-Fläche im $\mathbb{R}^n$ verstehen wir eine Teilmenge $S\subseteq\mathbb{R}^n$ zusammen mit einer surjektiven C^1-Abbildung $\Phi:\mathbb{R}^p\supseteq K\to S\subseteq\mathbb{R}^n$ auf einer kompakten J-meßbaren Menge K. Für eine stetige p-Form ω auf S definieren wir

$$\int_\Phi \omega := \int_K \Phi^*(\omega).$$

Es ist

$$\Phi^*(\omega)(u)(v_1,\dots,v_p) = \omega(\Phi(u))\Big(\Phi'(u)(v_1),\dots,\Phi'(u)(v_p)\Big)$$

Da $\Phi^*(\omega)$ eine p-Form am $\mathbb{R}^p$, also von der Form $\rho\cdot du^1\wedge\dots\wedge du^p$ und wir erhalten

$$(\rho\cdot du^1\wedge\dots\wedge du^p)(e_1,\dots,e_p) = \rho(u)\cdot \overset{1,\dots,p}{\det}(e^1,\dots,e^p) = \rho(u),$$

also ist

$$\Phi^*(\omega)(u) = \omega(\Phi(u))\Big(\Phi'(u)(e_1),\dots,\Phi'(u)(e_p)\Big)\,du^1\wedge\dots\wedge du^p = \omega(\Phi(u))(\partial_1\Phi(u),\dots,\partial_p\Phi(u))\,du^1\wedge\dots\wedge du^p$$

und somit ist

$$\int_\Phi \omega = \int_K \omega(\Phi(u))(\partial_1\Phi(u),\dots,\partial_p\Phi(u))\,du.$$

Die zugehörigen Riemann-Summen haben als Summanden die Differentialform ω an Bildern Φ von Zwischenstellen $u_J \in J$ angewandt auf die partiellen Ableitungen $\partial_i\Phi(u_J)$ multipliziert mit den Volumen $|J|$, also das mittels $\omega(\Phi(u_J))$ gemessene p-dimensionale Volumen des Bildes von J unter der linearen Approximation $\Phi'(u_J)$ von Φ. Falls $\omega = \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_r} dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}$ ist, so ist somit

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega = \int_K \Phi^*(\omega) &\overset{(8.3.12)}{=\!=} \sum_{i_1<\dots<i_p} \int_K \omega(\Phi(u))\ \det\left(\frac{\partial(\Phi^{i_1},\dots,\Phi^{i_p})}{\partial(u^1,\dots,u^p)}\right)\,du^1\wedge\dots\wedge du^p\\ &= \sum_{i_1<\dots<i_p} \int_K \omega(\Phi(u))\ \det\left(\frac{\partial(\Phi^{i_1},\dots,\Phi^{i_p})}{\partial(u^1,\dots,u^p)}\right)\,d(u^1,\dots,u^p)\end{aligned}$$

Diese Definition stimmt für $p=1$ mit jener aus (6.5.6) von Kurvenintegrale von 1-Formen überein. In der Tat, für $p=1$ und $K := [a,b]$ ist $\Phi : K \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve und $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ eine 1-Form auf $\Phi(K)$. Nach (8.3.9) und (8.3.10) ist

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i \circ \Phi \cdot d\Phi^i$$

und somit

$$\int_\Phi \omega = \int_K \Phi^*(\omega) = \int_K \sum_{i=1}^n \omega_i\circ\Phi\; d\Phi^i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\Phi(t))\,(\Phi^i)'(t)\,dt,$$

die Definition aus (6.5.6) des Kurvenintegrals.

Für $p=2$ und $n=3$ stimmt die Definition mit jener für 2-Formen aus (8.1.5) überein, denn dann ist $\Phi = (\Phi^1,\Phi^2,\Phi^3) : K \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $\omega = a\,dy\wedge dz + b\,dz\wedge dx + c\,dx\wedge dy$ eine allgemeine 2-Form. Nach (8.3.12) ist

$$\Phi^*(\omega) = \Big(a\circ\Phi\cdot\det(\tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}) + b\circ\Phi\cdot\det(\tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}) + c\circ\Phi\cdot\det(\tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})\Big)\,du\wedge dv,$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega &= \int_K \Phi^*(\omega)\\ &= \int_K \Big(a\circ\Phi\cdot\det(\tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}) + b\circ\Phi\cdot\det(\tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}) + c\circ\Phi\cdot\det,(\tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})\Big)\,d(u,v)\end{aligned}$$

die Definition aus (6.5.6) des Integrals des Vektorfelds $f=(a,b,c)$ über eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

8.4.1 Proposition. Parametrisierungsinvarianz des Integrals.
Es sei $\Phi : \mathbb{R}^p \supseteq K \to S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-Parametrisierung der p-Fläche S und $g : \mathbb{R}^p \supseteq K' \to K \subseteq \mathbb{R}^p$ eine surjektive Substitutionsfunktion. Dann ist für jede stetige p-Form ω auf S:

$$\int_{\Phi\circ g} \omega = \mathrm{sgn}(\det(g'))\cdot\int_\Phi \omega.$$

Beachte dabei, daß $x \mapsto \mathrm{sgn}(\det(g'(x)))$ für eine Substitutionsfunktion (bis auf eine Nullmenge) als konstant vorausgesetzt werden kann, und wir für diese Konstante etwas mißbräuchlich $\mathrm{sgn}(\det(g'))$ schreiben.

Beweis. Es sei $g : (u^1, \dots, v^p) \mapsto (u^1, \dots, u^p)$ und $\Phi^*(\omega) =: f\, du^1 \wedge \dots \wedge du^p$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\Phi\circ g} \omega &= \int_{K'} (\Phi \circ g)^*(\omega) = \int_{K'} g^*(\Phi^*(\omega)) = \int_{K'} g^*(f\, du^1 \wedge \dots \wedge du^p)\\ &\overset{(8.3.12)}{=\!=} \int_{K'} g^*(f) \det\left(\frac{\partial(g^1,\dots,g^p)}{\partial(v^1,\dots,v^p)}\right) dv^1 \wedge \dots \wedge dv^p\\ &= \operatorname{sgn}(\det(g')) \int_{K'} f(g(v))\, |\det(g'(v)|\, dv \overset{(7.4.8)}{=\!=} \operatorname{sgn}(\det g') \int_{g(K')} f(u)\, du\\ &= \operatorname{sgn}(\det(g')) \int_{g(K')} f\, du^1 \wedge \dots \wedge du^p = \operatorname{sgn}(\det(g')) \int_K \Phi^*(\omega). \quad \square\end{aligned}$$

wegen der Transformationsformel (7.4.8). □

Definition. Integration von p-Formen über orientierte p-Flächen.
Für orientierte p-Flächen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (genauer für Äquivalenzklassen von parametrisierten p-Flächen $\Phi : \mathbb{R}^p \supseteq K \to S \subseteq \mathbb{R}^n$ bzgl. Reparametrisierung via Substitutionsfunktionen) und p-Formen ω auf S können wir somit folgendes Integral definieren:

$$\int_S \omega := \int_\Phi \omega.$$

8.4.2 Transformationssatz.
Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine p-Fläche mit C^1-Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^p \supseteq K \to S \subseteq \mathbb{R}^n$, weiters $T : \mathbb{R}^n \supseteq S \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung und ω eine stetige p-Form auf der p-Fläche $T(S)$, welche durch $T \circ \Phi : \mathbb{R}^p \supseteq K \to S \to S' \subseteq \mathbb{R}^m$ parametrisiert wird. Dann ist

$$\int_{T(S)} \omega = \int_S T^*(\omega).$$

Beweis.

$$\int_{T(S)} \omega := \int_{T\circ\Phi} \omega = \int_K (T \circ \Phi)^*(\omega) = \int_K \Phi^*(T^*(\omega)) = \int_\Phi T^*(\omega) =: \int_S T^*(\omega). \quad \square$$

8.5 Ketten

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Integrationsbereiche genügend vernünftig handhabbaren Rand haben. Es gäbe da durchaus verschiedene brauchbare Ansätze (berandete Mannigfaltigkeiten, Quader, …), wir entscheiden uns für den Folgenden.

8.5.1a Definition. Simplex.
Der von $\{a_0, \dots, a_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ erzeugte p-Simplex (oder Hyper-Detraeder) ist die konvexe Hülle

$$\langle a_0, \dots, a_p\rangle := \Big\{\sum_{i=0}^p t_i a_i : \sum_i t_i = 1, t_0 \geq 0, \dots, t_p \geq 0\Big\}.$$

Beachte, daß $\sum_{i=0}^p t_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^p t_i(a_i - a_0)$ ein Punkt in dem affinen p-dimensionalen Teilraum durch a_0 mit Richtungsvektoren $a_1 - a_0, \dots, a_p - a_0$ ist. Falls also $\{a_i - a_0 : i = 1, \dots, p\}$ linear unabhängig ist (d.h. $\langle a_0, \dots, a_p\rangle$ nicht in einer affinen Ebene der Dimension $< p$ liegt), so sind die t_i eindeutig bestimmt.
Der Standard p-Simplex sei $\Delta_p := \langle e_0, \dots, e_p\rangle \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$.
Für jeden p-Simplex $\langle a_0, \dots, a_p\rangle$ existiert genau eine lineare surjektive Abbildung $\mathbb{R}^{p+1} \supseteq \Delta_p \to$

$\langle a_0, \dots, a_p\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$, mit $e_i \mapsto a_i$ für $0 \le i \le p$. Diese ist durch $\sum_i t_i e_i \mapsto \sum_i t_i a_i$ gegeben. Es genügt also für die Integration den Standard-Simplex zu behandeln.

Unter der i-ten SEITE EINES SIMPLEX von $\langle a_0, \dots, a_p\rangle$ verstehen wir den $p-1$-Simplex

$$\langle a_0, \dots, a_{i-1}, \widehat{a_i}, a_{i+1}, \dots, a_p\rangle.$$

Für die Integration benötigen wir eine ORIENTIERUNG auf den Simplizes, d.h. eine fixe Auswahl der Reihenfolge der Ecken. Zwei Anordnungen sollen dabei gleich-orientiert heißen, wenn sie durch eine gerade Permutation (d.h. mit positives Signum) auseinander hervorgehen.

Unter einem SINGULÄREN p-SIMPLEX in einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine C^2-Abbildung $\varphi : \Delta_p \to X$. Die Eigenschaft C^2 ist deshalb vorausgesetzt, damit $\varphi^*(\omega)$ C^1 ist für jede C^1-Form ω.

Die i-te SEITE DES STANDARD SIMPLEX (d.h. der i-ten Ecke gegenüberliegende Seite) des standard p-Simplex ist der $p-1$-Simplex $\langle e_1, \dots, e_{i-1}, \widehat{e_i}, e_{i+1}, \dots, e_p\rangle$. Sie kann mittels

$$\begin{aligned}
\varepsilon^i : \Delta_{p-1} = \langle e_0, \dots, e_{p-1}\rangle \to \langle e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_p\rangle \subseteq \langle e_0, \dots, e_p\rangle = \Delta_p \\
e_j \mapsto \begin{cases} e_j & \text{für } j < i \\ e_{j+1} & \text{andernfalls} \end{cases} \\
\mathbb{R}^p \ni (u^0, \dots, u^{p-1}) \mapsto (u^0, \dots, u^{i-1}, 0, u^i, \dots, u^{p-1}) \in \mathbb{R}^{p+1}
\end{aligned}$$

durch den standard $p-1$-Simplex parametrisiert werden.
Entsprechend ist die i-te SEITE eines singulären p-Simplex $\varphi : \Delta_p \to X$ der singuläre $p-1$-Simplex $\varphi \circ \varepsilon^i : \Delta_{p-1} \to X$.

Der RAND EINES SINGULÄREN SIMPLEX ist also eine Vereinigung von singulären Simplizes, die wir allerdings noch richtig orientieren sollte, denn z.B. besteht der Rand von $\langle a_0, a_1, a_2\rangle$ aus: $\langle a_1, a_2\rangle$, $\langle a_0, a_2\rangle$ (falsch orientiert) und $\langle a_0, a_1\rangle$. Für den Rand benötigen wir den Begriff der SINGULÄREN KETTE: Mit $C_p(X)$ bezeichnen wir die freie Abel'sche Gruppe mit der Menge $\mathcal{S}_p$ aller singulären p-Simplizes als Erzeuger, d.h. die Menge aller formalen endlichen Linearkombination $\sum_i \lambda_i \cdot \varphi_i$ mit Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ oder genauer aller Abbildungen $\lambda : \mathcal{S}_p \to \mathbb{Z}$ die fast überall den Wert 0 haben (so eine Abbildung schreiben wir auch als $\sum_{\varphi\in\mathcal{S}_p} \lambda(\varphi)\cdot\varphi$, oder, wenn $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} := \{\varphi : \lambda(\varphi) \ne 0\}$ und $\lambda_i := \lambda(\varphi_i)$, auch als $\sum_i \lambda_i\ \varphi_i$). Also ist

$$\begin{aligned}
C_p(X) &:= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Z}, \varphi_i \text{ ist singulärer } p\text{-Simplex} \right\} \\
&= \Big\{ \lambda : \mathcal{S}_p \to \mathbb{Z}, \lambda(\varphi) = 0 \text{ bis auf endlich viele } \varphi \in \mathcal{S}_p \Big\}.
\end{aligned}$$

Die Elemente von $C_p(X)$ heißen SINGULÄRE p-KETTEN. Solche Ketten können wir addieren, mit Zahlen aus $\mathbb{Z}$ multiplizieren, und somit auch subtrahieren. Dem entspricht gerade die formale Addition, skalar-Multiplikation und Subtraktion der formalen endlichen Summen.

Für einen singulären p-Simplex $\varphi : \Delta_p \to X$ ist der RAND EINER SINGULÄREN KETTE als

$$\partial\varphi := \sum_{i=0}^p (-1)^i (\varphi \circ \varepsilon^i) \in C_{p-1}(X)$$

definiert, und für eine singuläre p-Kette $\sum_j \lambda_j \varphi_j$ als

$$\partial\Big(\sum_j \lambda_j \varphi_j\Big) = \sum_j \lambda_j \partial(\varphi_j) \in C_{p-1}(X).$$

Analog zu $d^2\omega = 0$ für p-Formen ω gilt nur das folgende in dieser Vorlesung nicht benötigte

Lemma.
$\partial^2\varphi = 0$ für alle p-Ketten φ.

Beweis. O.B.d.A. sei $\varphi : \Delta_p \to X$ ein singulärer Simplex. Dann ist

$$\begin{aligned}
\partial^2\varphi &= \partial\Big(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\varphi\circ\varepsilon^i\Big) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j\\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{0\le j<i}(-1)^{i+j}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j + \sum_{i=0}^{p}\sum_{i\le j<p}(-1)^{i+j}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j\\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{0\le j<i}(-1)^{i+j}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j + \sum_{i=0}^{p}\sum_{i<k=j+1\le p}(-1)^{i+k-1}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^{k-1}\\
&= \sum_{0\le j<i\le p}(-1)^{i+j}\varphi\circ\varepsilon^i\circ\varepsilon^j - \sum_{0\le j<i\le p}(-1)^{j+i}\varphi\circ\varepsilon^j\circ\varepsilon^{i-1}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $\varepsilon^i\circ\varepsilon^j = \varepsilon^j\circ\varepsilon^{i-1}$ für $i>j$. In der Tat

$$\begin{tikzcd}
\langle e_0,\dots,e_{p-2}\rangle \arrow[r, "\cong", "\varepsilon^j"'] \arrow[d, "\varepsilon^{i-1}"', "\cong"] & \langle e_0,\dots,\widehat{e_j},\dots,e_{p-1}\rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & \langle e_0,\dots,e_{p-1}\rangle \arrow[d, "\varepsilon^i"', "\cong"] \\
\langle e_0,\dots,\widehat{e_{i-1}},\dots,e_{p-1}\rangle \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, hook] & \langle e_0,\dots,\widehat{e_j},\dots,\widehat{e_i},\dots,e_p\rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \langle e_0,\dots,\widehat{e_i},\dots,e_p\rangle \arrow[d, hook] \\
\langle e_0,\dots,e_{p-1}\rangle \arrow[r, "\cong", "\varepsilon^j"'] & \langle e_0,\dots,\widehat{e_j},\dots,e_p\rangle \arrow[r, hook] & \langle e_0,\dots,e_p\rangle
\end{tikzcd}$$

oder expliziter

$$\varepsilon^j(e_k) := \begin{cases} e_k & \text{für } k<j\\ e_{k+1} & \text{für } j\le k\end{cases}$$

$$\varepsilon^i(\varepsilon^j(e_k)) = \begin{cases} e_k & \text{für } k<j<i,\ \text{i.e. } k+1\le j<i\\ e_{k+1} & \text{für } j\le k,\ k+1<i,\ \text{i.e. } j<k+1<i\\ e_{k+2} & \text{für } j\le k,\ i\le k+1 \text{ i.e. } j<i\le k+1\end{cases}$$

$$\varepsilon^{i-1}(e_k) := \begin{cases} e_k & \text{für } k<i-1\\ e_{k+1} & \text{für } i-1\le k\end{cases}$$

$$\varepsilon^j(\varepsilon^{i-1}(e_k)) = \begin{cases} e_k & \text{für } k<j\le i-1,\ \text{i.e. } k+1\le j<i\\ e_{k+1} & \text{für } j\le k<i-1,\ \text{i.e. } j<k+1<i\\ e_{k+1} & \text{für } i-1\le k,\ k+1<j,\ \text{i.e. } i\le k+1<j\\ e_{k+2} & \text{für } i-1\le k,\ j\le k+1,\ \text{i.e. } j<i\le k+1\end{cases} \qquad \square$$

8.5.2 Bemerkung. Homologie.
In der algebraischen Topologie (siehe [46]) verwendet man die Identität $\partial^2 = 0$ dazu das Vorhandensein von Löchern in Räumen X aufzuspüren. Dazu nennt man eine Kette φ GESCHLOSSENE KETTEN, falls

$\partial\varphi = 0$ ist, und man nennt sie EXAKTE KETTEN, falls eine $p+1$-Kette ψ existiert mit $\partial\psi = \varphi$. Vergleiche dies mit den entsprechenden Bedingungen für 1-Formen. Die Menge der geschlossenen p-Ketten ist somit $\ker(\partial : C_p(X) \to C_{p-1}(X))$ und das Bild $\mathrm{Bild}(\partial : C_{p+1}(X) \to C_p(X))$ ist darin enthalten. Beides sind Abel'sche Untergruppen ($\mathbb{Z}$-lineare Teilräume) und somit können wir den Quotienten

$$H_p(X;\mathbb{Z}) := \ker(\partial : C_p(X) \to C_{p-1}(X))/\,\mathrm{Bild}(\partial : C_{p+1}(X) \to C_p(X))$$

betrachten. Dies ist die sogenannte p-te HOMOLOGIEGRUPPE des Raumes X. Wenn man dabei nur gewöhnliche Simplizes betrachtet, d.h. Räumen X, die TRIANGULIERT werden können, d.h. eine Zerlegung in (offene) Simplizes zulassen, behandelt, sogenannte SIMPLIZIALKOMPLEXE, so spricht man von der SIMPLIZIALEN HOMOLOGIE. Falls man singuläre Simplizes (die zumeist nur stetig vorausgesetzt sind) behandelt, so spricht man von SINGULÄRER HOMOLOGIE. Der Rand $X := \partial\varphi$ eines Simplex φ ist insbesonders geschlossen, aber nicht exakt in X, denn der Simplex φ, dessen Rand er ja ist, gehört nicht zu X. Es ist somit $H_p(X) = \mathbb{Z} \neq \{0\}$, und das kodiert die Tatsache, daß X ein Loch einschließt.

Wenn man das gleiche Spiel mit C^∞-Differentialformen ω auf X treibt, so erhält man den Vektorraum

$$H^p(X;\mathbb{R}) := \ker(\partial : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X))/\,\mathrm{Bild}(\partial : \Omega^{p-1}(X) \to \Omega^p(X)),$$

wobei $\Omega^p(X)$ die Menge der p-Formen auf X bezeichnet die C^∞ sind. Dieser Vektorraum heißt nun p-te (de Rham) KOHOMOLOGIE von X und seine Dimension ist die p-te BETTI-ZAHL $b_k(X)$ von X. Falls alle Betti-Zahlen endlich sind (z.B. wenn X kompakt ist), so nennt man deren alternierende Summe $\sum_{k=0}^{\dim(X)}(-1)^k b_k(X) =: \chi(X)$ EULER-CHARAKTERISTIK von X. Für triangulierte Räume kann man diese auch durch die alternierende Summe der entsprechenden Anzahlen von p-Simplizes die in der Triangulierung verwendet wurden berechnen. Für 2-dimensionale kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeiten ist das Geschlecht g durch $\chi(X) = 2-2g$ im orientierbaren Fall und durch $\chi(X) = 2-g$ im nicht orientierbaren Fall gegeben, wobei das GESCHLECHT die Anzahl der Zylinder bzw. Möbiusbänder angibt die man an eine Sphäre kleben muß um die Mannigfaltigkeit bis auf Homöomorphie zu erhalten.

8.6 Integration über Ketten

8.6.1a Definition. Integration von p-Formen über$p$-Simplizes.
Wir wollen über singuläre p-Ketten integrieren, und dafür benötigen wir Parametrisierungen der Simplizes als p-Flächen. Es sei

$$\begin{aligned}\Phi_p : \mathbb{R}^p \supseteq \langle 0, e_1, \dots, e_p\rangle &\xrightarrow{\cong} \langle e_0, \dots, e_p\rangle \subseteq \mathbb{R}^{p+1}\\ (u^1, \dots, u^p) &\mapsto (1 - \sum_i u^i, u^1, \dots, u^p)\end{aligned}$$

die STANDARD-PARAMETRISIERUNG DES STANDARD SIMPLEX von Δ_p, d.h. $\Phi_p(0) := e_0$ und $\Phi_p(e_i) := e_i$. Der Parameterbereich ist dabei $K_p := \langle 0, e_1, \dots, e_p\rangle \subseteq \mathbb{R}^p$.

Für eine stetige p-Form ω auf einem singulären p-Simplex $\varphi : \Delta_p \to X$ ist dann

$$\int_\varphi \omega := \int_{\varphi\circ\Phi_p} \omega = \int_{K_p} (\varphi\circ\Phi_p)^*(\omega),$$

und für eine singuläre p-Kette $\sum_i \lambda^i\varphi_i$ in X und eine stetige p-Form auf X ist

$$\int_{\sum_i \lambda^i\varphi_i} \omega := \sum_i \lambda^i \int_{\varphi_i} \omega.$$

8.6.1 Proposition. Orientierungsabhängigkeit des Integrals.
Es sei ω eine stetige p-Form auf einem p-Simplex $\langle a_0, \dots, a_p\rangle$ und τ eine Permutation von $\{0, \dots, p\}$. Dann ist

$$\int_{\langle a_{\tau(0)},\dots,a_{\tau(p)}\rangle} \omega = \mathrm{sgn}(\tau) \int_{\langle a_0,\dots,a_p\rangle} \omega.$$

Beweis. Es sei $\varphi : \Delta_p := \langle e_0, \dots, e_p\rangle \to \langle a_0, \dots, a_p\rangle$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die e_i auf a_i abbildet für alle i und $\varphi_\tau : \Delta_p \to \langle a_{\tau(0)}, \dots, a_{\tau(p)}\rangle$ jene, die e_i auf a_{τ_i} abbildet. Dann ist $\varphi_\tau = \varphi \circ (\tau^{-1})^*$, bzw. $\varphi = \varphi_\tau \circ \tau^*$, wobei $\tau^* : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^{p+1}$ jene lineare Abbildung, welche die Koordinaten entsprechend τ vertauscht, d.h. $\tau^*(x^1, \dots, x^p) := (x^{\tau(1)}, \dots, x^{\tau(p)})$ bzw. $\tau(e_{\tau(i)}) := e_i$ erfüllt. Somit ist

$$\int_{\langle a_0,\dots,a_p\rangle} \omega := \int_{\Delta_p} \varphi^*\omega = \int_{\Delta_p} (\tau^*)^*\varphi_\tau^*\omega$$
$$\int_{\langle a_{\tau(0)},\dots,a_{\tau(p)}\rangle} \omega := \int_{\Delta_p} \varphi_\tau^*\omega.$$

Um die Integrale auszurechnen, müssen wir die Integranden mittels Φ_p auf K_p zurückziehen. Sei dazu $\tilde\tau^*$ die eindeutig bestimmte affine Abbildung, die die Ecken von K_p entsprechend vertauscht, d.h. folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
K_p \arrow[r, "\Phi_p", "\cong"'] \arrow[d, dotted, "\tilde\tau^*"', "\cong"] & \Delta_p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau^*"', "\cong"] & \langle a_0, \dots, a_p\rangle \subseteq \mathbb{R}^n \\
K_p \arrow[r, "\Phi_p", "\cong"'] & \Delta_p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, dotted, "\varphi_\tau"] & \langle a_{\tau(0)}, \dots, a_{\tau(p)}\rangle \subseteq \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Dann ist

$$\int_{\langle a_0,\dots,a_p\rangle} \omega := \int_{\Delta_p} (\tau^*)^*\varphi_\tau^*\omega = \int_{K_p} \Phi^*(\tau^*)^*\varphi_\tau^*\omega = \int_{K_p} (\tilde\tau^*)^*\Phi^*\varphi_\tau^*\omega$$
$$\int_{\langle a_{\tau(0)},\dots,a_{\tau(p)}\rangle} \omega := \int_{\Delta_p} \varphi_\tau^*\omega = \int_{K_p} \Phi^*\varphi_\tau^*\omega.$$

Es ist $\Phi^*\varphi_\tau^*\omega = f\, du^1 \wedge \dots \wedge du^p$ mit einer Funktion f, und $(\tilde\tau^*)^*(\Phi^*\varphi_\tau^*\omega) = f \circ (\tilde\tau^*)\ \det(\tilde\tau^*)'\, du^1 \wedge \dots \wedge du^p$ nach (8.3.12). Es genügt wegen der Substitutionsformel (7.4.7) also zu zeigen, daß die Determinante des linearen Anteils von $\tilde\tau^*$ gerade $\operatorname{sgn}(\tau)$ ist.

Falls τ eine Permutation von $\{1, \dots, p\}$ ist, die 0 fixhält, so ist $\tilde\tau^*$ die lineare Abbildung des $\mathbb{R}^p$, welche die entsprechenden Koordinaten vertauscht

$$\begin{tikzcd}
K_p = \langle 0, e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(p)}\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d, "\tilde\tau^*"'] & \langle e_0, e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(p)}\rangle = \Delta_p \arrow[d, "\tau^*"'] \\
K_p = \langle 0, e_1, \dots, e_p\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] & \langle e_0, e_1, \dots, e_p\rangle = \Delta_p
\end{tikzcd}$$

Diese hat somit Determinante $\operatorname{sgn}(\tau)$. In der Tat, $\tilde\tau^*(e_{\tau(i)}) = e_i$, also steht in der $\tau(i)$-ten Spalte der Matrixdarstellung von $\tilde\tau^*$ der i-te Einheitsvektor, d.h. die Spalten von $\tilde\tau^*$ sind jene der Einheitsmatix aber mit τ vertauscht und somit ist $\det(\tilde\tau^*) = \operatorname{sgn}(\tau)\ \det(\mathrm{id}) = \operatorname{sgn}(\tau)$.

Jede andere Permutation können wir als Zusammensetzung von Transpositionen $(0, i)$ und solchen die 0 festhalten schreiben. Weiters ist $(0, i) = (0, 1)(1, i)(0, 1)$, also genügt es $\tau = (0, 1)$ zu betrachten. Dann vertauscht $\tilde\tau^*$ gerade die Ecke 0 mit e_1 und hält die anderen fix.

$$\begin{tikzcd}
K_p = \langle 0, e_1, e_2, \dots, e_p\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d, "\tilde\tau^*"'] & \langle e_0, e_1, e_2, \dots, e_p\rangle = \Delta_p \arrow[d, "\tau^*"'] \\
K_p = \langle e_1, 0, e_2, \dots, e_p\rangle \arrow[r, "\Phi_p"] & \langle e_1, e_0, e_2, \dots, e_p\rangle = \Delta_p
\end{tikzcd}$$

Der lineare Anteil $(\tilde\tau^*)' = \tilde\tau^* - \tau(0)$ ist also durch $e_1 \mapsto 0 - e_1$, $e_k \mapsto e_k - e_1$ gegeben, d.h. in Koordinaten

$(u^1, \dots, u^k) \mapsto (-\sum_i u^i, u^2, \dots, u^k)$ mit Determinante

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = -1 = \operatorname{sgn}(\tau)$$

und es ist $\tilde{\tau}^*(u^1, \dots, u^p) = (1 - \sum_i u^i, u^2, \dots, u^p)$. □

8.7 Der Satz von Stokes über p-Ketten

8.7.1a Definition. Parametrisierung der Seiten.
Die Parametrisierung $\bar{\varepsilon}^i : K_{p-1} \to K_p$ der i-ten Seite von K_p ist durch folgendes Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd}
K_p := \langle 0, e_1, \dots, e_p \rangle \arrow[r, "\Phi_p"] & \langle e_0, e_1, \dots, e_p \rangle =: \Delta_p \\
\langle 0, e_1, \dots, \overbracket{e_j}, \dots, e_p \rangle \arrow[u, hook] & \langle e_0, \dots, \overbracket{e_j}, \dots, e_p \rangle \arrow[u, hook] \\
K_{p-1} := \langle 0, e_1, \dots, e_{p-1} \rangle \arrow[u, dotted, "\bar{\varepsilon}^j"] \arrow[r, "\Phi_{p-1}"] & \langle e_0, \dots, e_{p-1} \rangle =: \Delta_{p-1} \arrow[u, "\varepsilon^j"']
\end{tikzcd}$$

d.h. $\bar{\varepsilon}^0$ ist die eindeutig bestimmte affine Abbildung mit

$$\bar{\varepsilon}^0 : \begin{cases} 0 \mapsto e_1 \\ e_i \mapsto e_{i+1} \quad \text{für } 1 \leq i < p, \\ (u^1, \dots, u^{p-1}) \mapsto (1 - \sum_i u^i, u^1, \dots, u^{p-1}) \end{cases}$$

und für $j > 0$ ist $\bar{\varepsilon}^j$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit

$$\bar{\varepsilon}^j : \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ e_i \mapsto e_i \quad \text{für } 1 \leq i < j, \\ e_i \mapsto e_{i+1} \quad \text{für } j \leq i < p, \\ (u^1, \dots, u^{p-1}) \mapsto (u^1, \dots, u^{j-1}, 0, u^j, \dots, u^{p-1}). \end{cases}$$

8.7.1 Lemma. Integralformel von Stokes für Standard-Parameterbereich.
Es sei ω eine stetig differenzierbare $p-1$-Form auf K_p. Dann ist

$$\int_{K_p} d\omega = \int_{\partial K_p} \omega := \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \int_{\bar{\varepsilon}^j} \omega := \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\bar{\varepsilon}^j)^* \omega.$$

Beweis. Es sei vorerst $\omega = \omega_1\, du^2 \wedge \dots \wedge du^p$ mit einer C^1-Funktion $\omega_1 : K \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$d\omega = \Big(\sum_i \frac{\partial \omega_1}{\partial u^i}\, du^i\Big) \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^p = \frac{\partial \omega_1}{\partial u^1}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^p + 0 + \dots + 0$$

$$\begin{aligned}
\int_{K_p} d\omega &= \int_{K_p} \frac{\partial \omega_1}{\partial u^1}(u^1,\dots,u^p)\, d(u^1,\dots,u^p)\\
&\overset{(7.3.3)}{=\!=} \int_{K_{p-1}} \int_0^{1-\sum_{j>1} u^j} \frac{\partial \omega_1}{\partial u^1}(u^1,\dots,u^p)\, du^1\, d(u^2,\dots,u^p)\\
&\overset{(5.2.2)}{=\!=} \int_{K_{p-1}} \Big(\omega_1(1-\sum_{j>1} u^j, u^2,\dots,u^p) - \omega_1(0,u^2,\dots,u^p)\Big)\, d(u^2,\dots,u^p)\\
&= \int_{K_{p-1}} \Big(\omega_1(1-\sum_{j>0} v^j, v^1,\dots,v^{p-1}) - \omega_1(0,v^1,\dots,v^{p-1})\Big)\, d(v^1,\dots,v^{p-1})
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K_p} \omega &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \int_{\bar\varepsilon^j} \omega = \sum_{j=0}^p (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\varepsilon^j)^*(\omega)\\
&\overset{(8.3.12)}{=\!=\!=} \sum_{j=0}^p (-1)^j \int_{K_{p-1}} \omega_1(\bar\varepsilon^j(v^1,\dots,v^{p-1}))\,\det\frac{\partial(u^2,\dots,u^p)}{\partial(v^1,\dots,v^{p-1})}\, d(v^1,\dots,v^{p-1})\\
&= \int_{K_{p-1}} \omega_1(1-\sum_{i>0} v^i, v^1,\dots,v^{p-1})\, d(v^1,\dots,v^{p-1})\\
&\quad - \int_{K_{p-1}} \omega_1(0,v^1,\dots,v^{p-1})\, d(v^1,\dots,v^{p-1}) + \sum_{j=2}^p 0,
\end{aligned}$$

Für $\omega = \omega_i\, du^1 \wedge \dots \wedge du^{i-1} \wedge du^{i+1} \wedge \dots \wedge du^p$ und die Permutation $\sigma = (1,2,\dots,i)$ die i an die 1-te Stelle verschiebt mit $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{i-1}$, ist

$$\begin{aligned}
(\sigma^*)^*(\omega) &= (\omega_i \circ \sigma^*)\, d(\sigma^*)^*u^1 \wedge \dots \wedge d(\sigma^*)^*u^{i-1} \wedge d(\sigma^*)^*u^{i+1} \wedge \dots \wedge d(\sigma^*)^*u^p\\
&= (\omega_i \circ \sigma^*)\, du^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge du^{\sigma(i-1)} \wedge du^{\sigma(i+1)} \wedge \dots \wedge du^{\sigma(p)}\\
&= (\omega_i \circ \sigma^*)\, du^2 \wedge \dots \wedge du^i \wedge du^{i+1} \wedge \dots \wedge du^p,
\end{aligned}$$

denn $(\sigma^*)^*(\mathrm{pr}^i) = \mathrm{pr}^i \circ \sigma^* = \mathrm{pr}^{\sigma(i)}$, da

$$(\mathrm{pr}^i \circ \sigma^*)(u^1,\dots,u^p) = \mathrm{pr}^i(u^{\sigma(1)},\dots,u^{\sigma(p)}) = u^{\sigma(i)} = \mathrm{pr}^{\sigma(i)}(u^1,\dots,u^p).$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\sigma)\int_{K_p} d\omega &\overset{(8.4.1)}{=\!=\!=} \int_{K_p} (\sigma^*)^*(d\omega) \overset{(8.3.10)}{=\!=\!=} \int_{K_p} d((\sigma^*)^*(\omega))\\
&\overset{\text{s.o.}}{=\!=} \int_{\partial K_p} (\sigma^*)^*(\omega) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^j)^*(\sigma^*)^*(\omega)\\
&= \sum_{j=0}^p (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\underbrace{\sigma^* \circ \bar\varepsilon^j}_{\bar\varepsilon^{\sigma^{-1}(j)} \circ \sigma_j^*})^*(\omega) \overset{\text{s.u.}}{=\!=} \sum_{j=0}^p (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\sigma_j^*)^*(\bar\varepsilon^{\sigma^{-1}(j)})^*(\omega)\\
&\overset{(8.6.1)}{=\!=\!=} \sum_{j=0}^p (-1)^j \operatorname{sgn}(\sigma_j) \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^{\sigma^{-1}(j)})^*(\omega)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{s.u.}}{=\!=} \sum_{j=0}^{p} (-1)^{\sigma^{-1}(j)} \operatorname{sgn}(\sigma) \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^{\sigma^{-1}(j)})^*(\omega) \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{l=0}^{p} (-1)^l \int_{\bar\varepsilon^l} \omega =: \operatorname{sgn}(\sigma) \int_{\partial K_p} \omega,
\end{aligned}
$$

dabei ist σ_j wie folgt definiert: Es bildet σ^* die j-te Ecke von K_p auf die $k := \sigma^{-1}(j)$-te Ecke ab, also induziert σ^* eine Permutation σ_j der Ecken von K_{p-1} vermöge

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^p & K_p \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sigma^*", "\cong"'] & K_p \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^p \\
 & \langle 0, e_1, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_p \rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sigma^*", "\cong"'] & \langle 0, e_1, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_p \rangle \arrow[u, hook] & \\
\mathbb{R}^p \arrow[uu, dotted, "(j,\dots,p)^*"] & K_{p-1} \arrow[l, hook'] \arrow[u, "\bar\varepsilon^j"] \arrow[r, dotted, "\sigma_j^*"] & K_{p-1} \arrow[u, "\bar\varepsilon^k"'] \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^p \arrow[uu, dotted, "(k,\dots,p)^*"']
\end{tikzcd}
$$

Für $j = 0$ ist $k = 0$ und $\sigma_0 = (0, \dots, i-1)$ mit $\operatorname{sgn}(\sigma_0) = (-1)^{i-1} = \operatorname{sgn}(\sigma)$, denn

$$
\begin{tikzcd}
\langle 0, e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}, \dots, e_p \rangle \arrow[r, "\sigma^*"] & \langle 0, e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p \rangle \\
\langle e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}, \dots, e_p \rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sigma^*"] & \langle e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p \rangle \arrow[u, hook] \\
\langle 0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, \dots, e_{p-1} \rangle \arrow[u, "\bar\varepsilon^0"] \arrow[r, "\sigma_0^*"] & \langle e_{i-1}, 0, \dots, e_{i-2}, e_i, \dots, e_{p-1} \rangle \arrow[u, "\bar\varepsilon^0"']
\end{tikzcd}
$$

Und für $j > 0$ und $k := \sigma^{-1}(j)$ ist $\sigma_j = (j, j+1, \dots, p)^{-1} \circ \sigma \circ (k, k+1, \dots, p)$, denn $\bar\varepsilon^j : \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^p$ können wir als Einschränkung von $(j, j+1, \dots, p)^*$ auf $\mathbb{R}^{p-1} \subset \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^p$ auffassen und analog für $\bar\varepsilon^k$. In der Tat läßt ε^j gerade die j-te Ecke im Bild aus, und wenn wir den Definitionsbereich um eine Dimension mit $\mathbb{R} \cdot e_p$ erweitern, und gerade die Ecke e_p auf e_j abbilden, so ist diese lineare Abbildung von der Permutation $(j, j+1, \dots, p)^{-1}$ induziert. Also ist

$$
\begin{aligned}
\sigma^* \circ \varepsilon^j &= \sigma^* \circ ((j, j+1, \dots, p)^{-1})^*|_{\mathbb{R}^{p-1}} = ((j, j+1, \dots, p)^{-1} \circ \sigma)^*|_{\mathbb{R}^{p-1}} \\
&= (\sigma_j \circ (k, k+1, \dots, p)^{-1})^*|_{\mathbb{R}^{p-1}} = ((k, k+1, \dots, p)^{-1})^*|_{\mathbb{R}^{p-1}} \circ \sigma_j^* = \varepsilon^k \circ \sigma_j^*.
\end{aligned}
$$

Für das Vorzeichen erhalten wir somit $(-1)^{p-j} \operatorname{sgn}(\sigma_j) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, (-1)^{p-k}$, d.h.

$$
(-1)^{\sigma^{-1}(j)} \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^j \operatorname{sgn}(\sigma_j).
$$

□

8.7.2 Satz von Stokes für Ketten.
Es sei φ eine p-Kette in $X \subseteq \mathbb{R}^n$ welche C^2 ist, und ω eine $p-1$-Form auf X welche C^1 ist. Dann ist

$$
\int_\varphi d\omega = \int_{\partial\varphi} \omega.
$$

Beweis. Es ist $\varphi = \sum_i \lambda_i \varphi_i$ und $\partial\varphi = \sum_i \lambda_i \partial\varphi_i$. Wegen (8.7.1) ist

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_i} d\omega &:= \int_{K_p} (\varphi_i \circ \Phi_p)^* d\omega \overset{(8.3.10)}{=\!=} \int_{\partial K_p} d(\varphi_i \circ \Phi_p)^* \omega \\
&\overset{(8.7.1)}{=\!=} \int_{K_p} (\varphi_i \circ \Phi_p)^* \omega := \sum_j (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\bar\varepsilon^j)^* (\varphi_i \circ \Phi_p)^* \omega \\
&= \sum_j (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\varphi_i \circ \Phi_p \circ \bar\varepsilon^j)^* \omega \overset{(8.7.1a)}{=\!=} \sum_j (-1)^j \int_{K_{p-1}} (\varphi_i \circ \varepsilon^j \circ \Phi_{p-1})^* \omega \\
&= \sum_j (-1)^j \int_{\varphi_i \circ \varepsilon^j} \omega := \int_{\partial \varphi_i} \omega.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_\varphi d\omega = \sum_i \lambda_i \int_{\varphi_i} d\omega = \sum_i \lambda_i \int_{\partial\varphi_i} \omega = \int_{\partial\varphi} \omega \quad \square$$

8.8 Spezialfälle des Satzes von Stokes

8.8.1 Im $\mathbb{R}^2$.
Die Formen am $\mathbb{R}^2$ können wie folgt beschreiben werden:

$$\begin{array}{lcll}
\text{0-Formen} & = & \text{Fkt} & & \\
\text{1-Formen} & \cong & \text{VF}, & p\,dx + q\,dy & \leftarrow\!\shortmid & f = (p,q) \\
\text{2-Formen} & \cong & \text{Fkt}, & f\,dx \wedge dy & \leftarrow\!\shortmid & f
\end{array}$$

Das Hackprodukt sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{tikzcd}
\text{0-Formen} \times \text{k-Formen} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \text{k-Formen} \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\text{Fkt} \times \begin{cases}\text{Fkt}\\ \text{VF}\end{cases} \arrow[r, "\cdot"] & \begin{cases}\text{Fkt}\\ \text{VF}\end{cases}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\text{1-Formen} \times \text{1-Formen} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \text{2-Formen} \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\text{VF} \times \text{VF} \arrow[r, "\det"] & \text{Fkt}
\end{tikzcd}$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned}
(\alpha\,dx + \beta\,dy) \wedge (\gamma\,dx + \delta\,dy) &= \alpha\,\gamma\,\underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \alpha\,\delta\,dx \wedge dy + = \beta\,\gamma\,\underbrace{dy \wedge dx}_{=-dy\wedge dx} + \beta\,\delta\,\underbrace{dy \wedge dy}_{=0} \\
&= (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)\,dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Die äußere Ableitung ist

$$\begin{tikzcd}
\text{0-Formen} \arrow[r, "d"'] \arrow[d, equal] \arrow[rr, bend left, "0"] & \text{1-Formen} \arrow[r, "d"'] \arrow[d, equal, "\wr"] & \text{2-Formen} \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\text{Fkt} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & \text{VF} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, equal, "\wr", "(_)^\perp"'] & \text{Fkt} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] \\
\text{Fkt} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[rr, bend right, "\Delta"'] & \text{VF} \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \text{Fkt}
\end{tikzcd}$$

In der Tat ist

$$
\begin{aligned}
d(p\,dx + q\,dy) &= dp \wedge dx + \underbrace{p\,d^2x}_{=0} + dq \wedge dy + \underbrace{q\,d^2y}_{=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\,dy + \frac{\partial q}{\partial y}\,dy\right) \wedge dy \\
&= 0 + \frac{\partial p}{\partial y}\,\underbrace{dy \wedge\, dx}_{-dx \wedge dy} + \frac{\partial q}{\partial x}\,dx \wedge\, dy + 0 = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\,dx \wedge\, dy == \operatorname{rot}(p,q)\,dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

und

$$\operatorname{rot}((p,q)^\perp) = \operatorname{rot}(-q,p) = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial(-q)}{\partial y} = \operatorname{div}(p,q).$$

8.8.2 Im $\mathbb{R}^3$.
Die Formen können wie folgt beschrieben werden

$$
\begin{array}{lcllcl}
\text{0-Formen} & = & \text{Fkt} & & & \\
\text{1-Formen} & \cong & \text{VF}, & p\,dx + q\,dy + r\,dz & \leftarrow\!\shortmid & f = (p,q,r) \\
\text{2-Formen} & \cong & \text{VF}, & p\,dy \wedge dz + q\,dz \wedge dx + r\,dx \wedge dy & \leftarrow\!\shortmid & f = (p,q,r) \\
\text{3-Formen} & \cong & \text{Fkt}, & f\,dx \wedge dy \wedge dz & \leftarrow\!\shortmid & f
\end{array}
$$

Das Hackprodukt sieht nach Aufgabe $\boxed{\textbf{8.48}}$ und $\boxed{\textbf{8.49}}$ folgendermaßen aus:

$$
\begin{tikzcd}
\text{0-Formen} \times \text{k-Formen} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \text{k-Formen} \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\text{Fkt} \times \begin{cases}\text{Fkt}\\ \text{VF}\end{cases} \arrow[r, "\cdot"] & \begin{cases}\text{Fkt}\\ \text{VF}\end{cases}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{1-Formen} \times \text{1-Formen} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \text{2-Formen} \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\text{VF} \times \text{VF} \arrow[r, "\times"] & \text{VF}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\text{1-Formen} \times \text{2-Formen} \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \text{3-Formen} \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\text{VF} \times \text{VF} \arrow[r, "\langle\text{-}|\text{-}\rangle"] & \text{Fkt}
\end{tikzcd}
$$

Die äußere Ableitung ist nach Aufgabe $\boxed{\textbf{8.50}}$

$$
\begin{tikzcd}
\text{0-Formen} \arrow[r, "d"'] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[d, equal] & \text{1-Formen} \arrow[r, "d"'] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \text{2-Formen} \arrow[r, "d"'] \arrow[d, equal, "\wr"] & \text{3-Formen} \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\text{Fkt} \arrow[r, "\nabla", "\text{grad}"'] & \text{VF} \arrow[r, "\nabla\times\text{\_}", "\text{rot}"'] & \text{VF} \arrow[r, "\langle\nabla,\text{\_}\rangle", "\text{div}"'] & \text{Fkt}
\end{tikzcd}
$$

Z.B. ist

$$
\begin{aligned}
d\Big(\sum_i f_i\,dx^i\Big) &= \sum_i \sum_j \tfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\,dx^j \wedge dx^i \\
&= \Big(\tfrac{\partial f_3}{\partial x^2} - \tfrac{\partial f_2}{\partial x^3}\Big)\,dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\tfrac{\partial f_1}{\partial x^3} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x^1}\Big)\,dx^3 \wedge dx^1 + \Big(\tfrac{\partial f_2}{\partial x^1} - \tfrac{\partial f_1}{\partial x^2}\Big)\,dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}
$$

8.8.3 Spezialfälle des Satzes von Stokes.
Für p-Ketten φ im $\mathbb{R}^n$ und $p-1$-Formen ω am Bild der Kette liefert der Stokes'sche Integralsatz (8.7.2):

$p = 1, n = 1$**:** den Hauptsatz, (5.2.2);

$p = 1, n > 1$**:** das Resultat für Kurvenintegrale aus (6.5.5);

$p = 2, n = 2$**:** den Gauß'schen Integralsatz (8.1.2) im $\mathbb{R}^2$. Sei $\omega = p\,dx + q\,dy$ die 1-Form, also $f = (p, q)$ das zugehörige Vektorfeld. Dann ist $d\omega$ die 2-Form zur Funktion $\operatorname{rot} f$, und somit

$$\int_{\partial\varphi} f := \int_{\partial\varphi} \langle f, \tau_{\partial\varphi}\rangle \operatorname{vol}_{\partial\varphi} := \int_{\partial\varphi} \omega \overset{(8.7.2)}{=\!=} \int_{\varphi} d\omega = \int_{\varphi} \operatorname{rot} f;$$

Für das zu f normale Vektorfeld $g := -f^{\perp} = (q, -p)$ gilt

$$\int_{\partial\varphi} \langle g, \nu_{\partial\varphi}\rangle \operatorname{vol}_{\partial\varphi} := \int_{\partial\varphi} \omega \overset{(8.7.2)}{=\!=} \int_{\varphi} d\omega = \int_{\varphi} \operatorname{rot} f = \int_{\varphi} \operatorname{div} g.$$

$p = 2, n = 3$**:** den Stokes'schen Integralsatz (8.1.5) im $\mathbb{R}^3$. Sei $\omega = p\;dx + q\;dy + r\;dz$ die 1-Form und somit $f = (p, q, r)$ das zugehörige Vektorfeld. Dann ist $d\omega$ die 2-Form zum Vektorfeld $\operatorname{rot} f$, und somit

$$\int_{\partial\varphi} f := \int_{\partial\varphi} \langle f, \tau_{\partial\varphi}\rangle \operatorname{vol}_{\partial\varphi} := \int_{\partial\varphi} \omega \overset{(8.7.2)}{=\!=} \int_{\varphi} d\omega =: \int_{\varphi} \langle \operatorname{rot} f, \nu_{\varphi}\rangle \;\operatorname{vol}_{\varphi} =: \int_{\varphi} \operatorname{rot} f.$$

$p = 3, n = 3$**:** den Gauß'schen Integralsatz (8.1.7) im $\mathbb{R}^3$. Sei $\omega = p\;dy \wedge dz + q\;dz \wedge dx + r\;dx \wedge dy$ die 2-Form und somit $f = (p, q, r)$ das zugehörige Vektorfeld. Dann ist $d\omega$ die 3-Form zum Funktion $\operatorname{div} f$, und somit

$$\int_{\partial\varphi} f := \int_{\partial\varphi} \langle f, \nu_{\partial\varphi}\rangle \operatorname{vol}_{\partial\varphi} := \int_{\partial\varphi} \omega \overset{(8.7.2)}{=\!=} \int_{\varphi} d\omega = \int_{\varphi} \operatorname{div} f.$$

8.8.4 Bemerkung. Kohomologie.
Für 1-Formen ω haben wir in (6.5.4) bewiesen, daß geschlossenen Formen (d.h. $d\omega = 0$) auf sternförmigen Mengen exakt sind, d.h. eine 0-Form η (also eine Funktion) existiert mit $d\eta = \omega$.

Das Poincaré-Lemma (Aufgabe $\boxed{\textbf{8.52}}$) zeigt, daß diese Aussage auch für geschlossene p-Formen auf sternförmigen Mengen gilt. Also haben in dieser Situation eine genau Beschreibung welche p-Formen η wir auf der rechten Seite im Stokes'schen Integralsatz (8.7.2) als $d\omega$ verwenden können.

Falls die Menge B nicht sternförmig ist, so muß aus der Geschlossenheit von ω auf B nicht die Exaktheit folgen, wegen (8.3.6) wohl aber umgekehrt. Man kann dies benutzen um den Vekorraum

$$H^p(B) := \ker(d : \Omega^p(B) \to \Omega^{p+1}(B))/d(\Omega^{p-1}(B))$$

zu betrachten, wobei $\Omega^p(B)$ für den (unendlich dimensionalen) Vektorraum aller glatten p-Formen steht. Man nennt $H^p(B)$ die p-te (de-Rham) Kohomologie von B. Dieser Vektorraum ist oft endlich-dimensional (siehe [28]) und seine Dimension heißt p-te Betti-Zahl und zählt in einem gewissen Sinn, die in B vorhandenen Löcher.

EXAM

9 Anwendungen

9.1 Physikalische Bedeutung des Gauß'schen Integralsatzes

9.1.1 Strömende Flüssigkeiten.
Eine Flüssigkeit ströme in einem Raumbereich. Die Geschwindigkeit an der Stelle x zum Zeitpunkt t sei $v(t,x)$. Die Bahn eines Partikels, der zum Zeitpunkt t_0 am Ort $x_0 \in \mathbb{R}^n$ war, ist durch $t \mapsto x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ und $\frac{d}{dt}(x(t)) = v(t, x(t))$ gegeben, also eine gewöhnliche Differentialgleichung 1.ter Ordnung. Die Strömung heißt STATIONÄRE STRÖMUNG, falls v von t unabhängig ist, und das wollen wir der Einfachheit halber im Folgenden voraussetzen. Es sei Fl_t der FLUSS EINES VEKTORFELDS zu v zum Zeitpunkt t, d.h. $t \mapsto \mathrm{Fl}_t(x_0)$ ist die Lösungskurve x der Differentialgleichung mit Anfangswerte x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, und somit ist $\mathrm{Fl}_0(x) = x$ und $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Fl}_t(x) = v(\mathrm{Fl}_t(x))$.

Die Dichte der Flüssigkeit an der Stelle x sei $\rho(x) > 0$. Die sogenannte FLUSSDICHTE ist dann durch das Vektorfeld $f : x \mapsto \rho(x)\, v(x)$ gegeben.

Da die Masse beim Fliesen wohl erhalten bleibt ist für alle J-meßbaren Mengen B

$$\int_B \rho \text{ vol} = \int_{\mathrm{Fl}_t(B)} \rho \text{ vol} = \int_B \mathrm{Fl}_t^*(\rho \text{ vol}) \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

mit $\mathrm{vol} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. D.h. $\rho \cdot \mathrm{vol} = \mathrm{Fl}_t^*(\rho \cdot \mathrm{vol})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit ist

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Fl}_t^*(\rho \cdot \mathrm{vol})(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol})(x)\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol})(x) + \rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{div}(v)\ \mathrm{vol})(x) \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathrm{Fl}_t(x)) + \rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{div}(v))\Big) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol})(x),
\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol}) &= \tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\mathrm{Fl}_t^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\
&= \tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\Big(d\,\mathrm{Fl}_t^*(x^1) \wedge \dots \wedge d\,\mathrm{Fl}_t^*(x^n)\Big) \\
&= d\Big(\tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\mathrm{Fl}_t^*(x^1)\Big) \wedge \dots \wedge d\,\mathrm{Fl}_0^*(x^n) + \dots + d\,\mathrm{Fl}_0^*(x^1) \wedge \dots \wedge d\Big(\tfrac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\mathrm{Fl}_t^*\, x^n\Big) \\
&= dv^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge dv^2 \\
&= \sum_i \tfrac{\partial v^1}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots \\
&\quad \dots + dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge \sum_i \tfrac{\partial v^n}{\partial x^i} dx^i \\
&= \mathrm{div}(v)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + 0 = \mathrm{div}(v)\ \mathrm{vol}\,.
\end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol}) &= \tfrac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\mathrm{Fl}_{t+s}^*(\mathrm{vol}) = \tfrac{\partial}{\partial s}|_{s=0}(\mathrm{Fl}_s \circ \mathrm{Fl}_t)^*(\mathrm{vol}) = \tfrac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{Fl}_s^*(\mathrm{vol})) \\
&\overset{\mathrm{Fl}_t^* \text{ ist linear}}{=\!=\!=} \mathrm{Fl}_t^*(\tfrac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\mathrm{Fl}_s^*(\mathrm{vol})) = \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{div}(v)\ \mathrm{vol}).
\end{aligned}$$

Da Fl_t als Inverse Fl_{-t} besitzt, ist Fl_t ein Diffeomorphismus und somit $\mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol})$ ein nicht verschwindendes Vielfaches $\det(\mathrm{Fl}_t')$ vol von vol, also wegen obiger Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathrm{Fl}_t(x)) + \rho(\mathrm{Fl}_t(x)) \cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{div}(v))(x) = 0$$

oder wenn wir mit $\rho_x(t) := \rho(\mathrm{Fl}_t(x))$ die Zeitentwicklung der Dichte für den Anfangswqert x bezeichnen

$$\frac{d}{dt}\,\rho_x(t) = \frac{d}{dt}\rho(\mathrm{Fl}_t(x)) = -\rho_x(t)\cdot \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{div}(v)),$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung für ρ_x, die sogenannte Formel von Liouville. Die Lösung erhalten wird mittels Separation der Variablen dann aus $\frac{d\rho}{\rho} = -\,\mathrm{div}(v)\,dt$, d.h.

$$\rho(x(t)) = \rho(x(0))\cdot e^{-\int_0^t \mathrm{div}(v(x(s)))}\,ds.$$

Die Flüssigkeit heißt inkompressibel falls ρ konstant ist, oder äquivalent, falls $\mathrm{div}(v) = 0$ ist.

Wenn wir einerseits $\mathrm{Fl}_0 = \mathrm{id}$, weiters die Formel $\det{}'(\mathrm{id})(A) = \mathrm{spur}(A)$ aus Aufgabe **6.12**, sowie $\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\mathrm{Fl}_t(x) = v(\mathrm{Fl}_0(x)) = v(x)$ verwenden, so erhalten wir auch

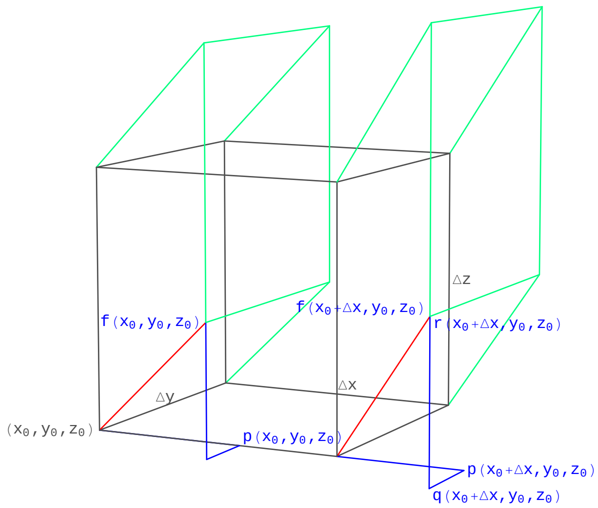
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{Fl}_t^*(\mathrm{vol}) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \det(\mathrm{Fl}_t'(x))\ \mathrm{vol} = \det{}'(\mathrm{id})\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{Fl}_t'(x)\right)\ \mathrm{vol} = \mathrm{spur}\Big(v'(x)\Big)\ \mathrm{vol},$$

also

$$\mathrm{div}(v)(x) = \mathrm{spur}(v'(x)),\ \text{ die Summe der Eigenwerte von } v'(x),$$

was wir in Koordinaten auch direkt einsehen.

Sei nun S ein Flächenstück und ν_S der normierte Normalvektor zu S. Dann ist $\langle v, \nu_S\rangle$ die Komponente von v in Richtung ν_S und $\int_S \langle v, \nu_S\rangle\ \mathrm{vol}_S$ das Volumen, welches pro Zeiteinheit in Richtung ν durch S fließt. Ganz analog ist die Masse, die pro Zeiteinheit in Richtung ν durch S fließt durch $\int_S \langle f, \nu_S\rangle\ \mathrm{vol}_S$ mit $f = \rho\cdot v$ gegeben. Es sei $f = (p, q, r)$. Dann ist die Masse, die aus den kompakten Intervall I mit Ecke (x_0, y_0, z_0) und Seitenlängen Δx, Δy und Δz in x-Richtung durch die beiden auf x normal stehenden Seiten fließt



$$\begin{aligned}\Big(p(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - p(x_0, y_0, z_0)\Big)\ \Delta y\,\Delta z &= \frac{p(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - p(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}\ \Delta x\,\Delta y\,\Delta z \\ &\approx \frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\ \Delta x\,\Delta y\,\Delta z,\end{aligned}$$

und somit jene Masse die aus I fließt (d.h. die sogenannte Quellenstärke) folglich

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right)\ \Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \mathrm{div}(f)\ \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

Die Ergiebigkeit eines Bereichs B ist somit

$$\int_B \mathrm{div}\, f \approx \sum_I \mathrm{div}(f)\,|I|$$

und nach dem zuvorgesagten mit $S := \partial B$ auch

$$\int_{\partial B} \langle f, \nu_{\partial B}\rangle\ \mathrm{vol}_{\partial B}\,.$$

Dies ist also ein physikalische Indiz für die Gültigkeit des Divergenzsatzes.

9.1.2 Wärmeleitungsgleichung.
Es sei $\delta(t,x)$ die Temperatur zum Zeitpunkt t im Punkt x. Es ist

$$\Delta Q = c\, m\, \Delta\vartheta$$

wobei ΔQ die zuzuführende Wärmemenge ist um in einem Körper mit Masse $m \approx \rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ und spezifischer Wärme c eine Temperaturänderung $\Delta\vartheta$ hervorzurufen. Für die durch ein kleines Rechteck mit Fläche ΔA und Normale ν in der Zeitspanne Δt fließende Wärmemenge gilt

$$\Delta Q \approx \lambda\, \langle \operatorname{grad}\vartheta, \nu\rangle\, \Delta A\, \Delta t,$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Körpers ist. Analog zu (9.1.1), aber jetzt mit dem Vektorfeld $f := \lambda \operatorname{grad}\vartheta$, ist also

$$\Delta Q \approx \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}\vartheta)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z, \Delta t$$

die Wärmemenge die durch ein kleines kompaktes Intervall fließt. Somit ist

$$c\,\rho\,\Delta\vartheta\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \approx c\, m\, \Delta\vartheta = \Delta Q \approx \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}\vartheta)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z, \Delta t$$

also

$$c\,\rho\,\frac{d}{dt}\vartheta \approx c\,\rho\,\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \approx \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}\vartheta) =: \Delta(\vartheta),$$

wobei $\Delta(\vartheta) := \operatorname{div}(\operatorname{grad}\vartheta) = \sum_i \frac{\partial^2\vartheta}{(\partial x^i)^2}$ den Laplace-Operator angewandt auf ϑ bezeichnet. Die Wärmeleitungsgleichung ist somit

$$\Delta(\vartheta) = \frac{c\,\rho}{\lambda}\frac{\partial\vartheta}{\partial t},$$

eine partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung. Eine Gleichgewicht (nach hinreichend langer Zeit $t \to \infty$) bedeutet $\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = 0$, also $\Delta(\vartheta) = 0$, d.h. ϑ ist harmonische Funktionen. Z.B. ist das Newton-Potential aus (7.4.14) $U(x) := -G\, m \int_B \frac{\rho(z)}{|x-z|}\, dz$ nach Aufgabe $\boxed{\mathbf{6.20}}$ harmonisch.

9.2 Die Kepler'schen Gesetze der Planetenbewegung

9.2.1 Zentralkräfte.
Wenn ein Kraftfeld f auf einem fixen Punkt $r_0 \in \mathbb{R}^3$ (o.B.d.A. der Nullpunkt) weist, d.h. $f(r) = (r - r_0)\,\rho(r)$ mit einer skalaren Funktion ρ ist, dann spricht man von einer Zentralkraft. Nach dem Newtonschen Kraftgesetz ist $f = m\,\ddot r$, wobei $\dot r$ und $\ddot r$ wie oft üblich die erste und zweite Ableitung von r nach der Zeit t bezeichnet.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \rho\, r = f = m\,\ddot r\\
&\Rightarrow r \times \ddot r = 0\\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(r \times \dot r\Big) = \dot r \times \dot r + r \times \ddot r = 0 + 0 = 0\\
&\Rightarrow C := r \times \dot r \text{ ist konstant}
\end{aligned}$$

Man nennt $m\,C$ den Drehimpuls. Falls $C = 0$ ist, so ist r und $\dot r$ linear abhängig, d.h. r bleibt auf einer Geraden. Dies klingt sehr einleuchtend, beweisen kann man das indem man für ein fixes t_0 mit $r(t_0) \neq 0$ die orthonormal-Projektion p auf die Normalebene $r(t_0)^\perp$ betrachtet. Dann ist $\rho \cdot p \circ r = p \circ (\rho \cdot p) = p \circ (m \cdot \ddot r) = m \cdot (p \circ r)\ddot{}$, also $p \circ r$ Lösung der entsprechenden Differentialgleichung mit $(p \circ r)(t_0) = 0$ und $(p \circ r)\dot{}(t_0) = 0$ also ist wegen der Eindeutigkeit der Lösung $p \circ r = 0$, d.h. $r(t) \in \ker p = \mathbb{R} \cdot r(t_0)$.

Für $C \neq 0$ ist $\langle r, C\rangle = \langle r, r \times \dot r\rangle = \det(r, r, \dot r) = 0$, d.h. r bleibt in der Ebene $C^\perp$. O.B.d.A. sei $C = (0,0,c)$, d.h. $r = (x,y,0)$. Dann ist $r \times \dot r = (0, 0, x\dot y - y\dot x)$, also $x\dot y - y\dot x = c$ konstant. Für die durch r überstrichene Fläche ist

$$|B| = \frac{1}{2}\int_{\partial B} x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\,\dot y - y\dot x)\, dt + 0 = \frac{c}{2}(t_2 - t_1),$$

denn für radiale Kurven γ (also $\gamma' || \gamma$) gilt $\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \int \langle \gamma^\perp, \gamma' \rangle = 0$.
Dies zeigt das

9.2.2 Zweites Kepler'sches Gesetz.
Bei der Bewegung unter einer Zentralkraft werden vom Radiusvektor in gleicher Zeit gleiche Flächen überstrichen. □

Kepler fand dieses Gesetz 1602 aus den Daten des Umlaufs der Erde um die Sonne.

9.2.3 Erstes Kepler'sches Gesetz.
Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen mit der Sonne in einem Brennpunkt.

Kepler fand dieses Gesetz 1605 empirisch aus den Daten von Tycho Brahe über die Bahn von Mars. Er publizierte die ersten beiden Gesetze 1609 in seinem Buch Astronomia Nova.

Beweis. Es sei M die Masse der Sonne und m die eines Planeten. Die Kraft ist eine auf die Sonne weisende Zentralkraft, und somit bewegt sich nach (9.2.1) der Planet in einer Ebene um die Sonne. Es sei $(x(t), y(t))$ seine Ortskoordinaten, beziehungsweise in Polarkoordinaten $(r(t), \varphi(t))$, d.h.

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\varphi, & \dot x &= \dot r\,\cos\varphi - r\,\dot\varphi\,\sin\varphi, \\ y &= r\,\sin\varphi, & \dot y &= \dot r\,\sin\varphi + r\,\dot\varphi\,\cos\varphi. \end{aligned}$$

Für seine skalare Geschwindigkeit v gilt

$$v(t)^2 := \dot x^2 + \dot y^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2.$$

Nach (9.2.1) ist $c = x\dot y - y\dot x = r^2\dot\varphi$ konstant und nach (7.4.14) sind Gravitationsfelder Gradientenfelder, also gilt nach (9.4.7) der Energieerhaltungssatz (kinetische plus potentielle Energie ist konstant):

$$\frac{1}{2}m\gamma := \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{|r|} \text{ ist konstant.}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \frac{2GM}{r} + \gamma = v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 &= \left(\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right)\dot\varphi^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\frac{c^2}{r^4} + \frac{c^2}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{\gamma}{c^2} + \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \quad (c \neq 0, \text{ da Bahn nicht auf einer Geraden}) \end{aligned}$$

Für $u := \frac{1}{r} > 0$ ist $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$ also

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{\gamma}{c^2} + \frac{2GM}{c^2}u - u^2 = \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 + \frac{\gamma}{c^2} - (u - \frac{GM}{c^2})^2 \\ &= \left(\underbrace{\frac{GM}{c^2}}_{=:1/p>0}\right)^2\left(\underbrace{1 + \frac{\gamma c^2}{G^2M^2}}_{=:\varepsilon^2}\right) - \left(u - \frac{GM}{c^2}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2, \end{aligned}$$

mit $\varepsilon^2 := 1 + \frac{\gamma c^2}{G^2M^2} \geq 0$, da $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \geq 0$. Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung erhalten wir nun durch Separation der Variablen und Substitution $s = \sin\left(\frac{p}{\varepsilon}(u - \frac{1}{p})\right)$ wie folgt:

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\varphi + C = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - (u - \frac{1}{p})^2}} = \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - w^2}} = \int \frac{p}{\varepsilon}\frac{du}{\sqrt{1 - (\frac{p}{\varepsilon}(u = \frac{1}{p}))^2}} = \int 1\,ds = s = \arcsin\frac{pu - 1}{\varepsilon}.$$

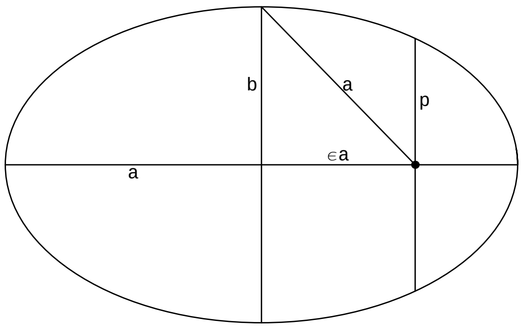
Also ist

$$u = \frac{1+\varepsilon\sin(\varphi+C)}{p}, \text{ bzw. } r = \frac{p}{1+\sin(\varphi+C)}.$$

Durch Drehung können wir erreichen, daß $r(0)$ minimal ist, also $\sin C = 1$ ist. Damit folgt $\sin(\varphi+C) = \sin\varphi\cos C + \cos\varphi\sin C = \cos\varphi$, also

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

die Gleichung einer allgemeinen Kegelschnittlinie.



Diese beschreibt für $\varepsilon < 1$ eine Ellipse, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel und für $\varepsilon > 1$ einen Ast einer Hyperbel. Für Planetenbahnen kommt nur der Fall $\varepsilon < 1$ in Frage. Der Halbparameter $p = \frac{b^2}{a}$ und die numerischer Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ sind auf diese Art durch die Halbachsenlängen a und b bestimmt, oder umgekehrt

$$a := \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \qquad b := \sqrt{a\,p} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

In der Tat liegt $(x,y) := r\,(\cos\varphi, \sin\varphi)$ auf folgender Ellipse

$$\begin{aligned}\frac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{1}{a^2}\Big(\varepsilon a + \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\cos\varphi\Big)^2 + \frac{1}{ap}\Big(\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\sin\varphi\Big)^2 \\ &= \frac{\frac{1}{a^2}\Big(\varepsilon a + \cos\varphi(p+\varepsilon^2 a)\Big)^2 + \frac{1}{ap}\Big(p\sin\varphi\Big)^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} \\ &= \frac{(\varepsilon+\cos\varphi)^2 + (1-\varepsilon^2)\,(1-\cos^2\varphi)}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = 1 \quad \square\end{aligned}$$

Für die Mars-Bahn ist die Exzentrizität $\varepsilon = 0.093$.

9.2.4 Drittes Kepler'sches Gesetz.

Das Verhältnis der Quadrate der Umlaufzeiten zu den Kuben der großen Halbachsen ist konstant.

Kepler publizierte dies 1619 in Harmonices Mundi. Dieses Gesetz und nicht der Apfel brachte Newton dazu sein Gravitationsgesetz zu finden.

Beweis. Nach (9.2.1) gilt für die Umlaufzeit T folgende Beziehung zur Fläche der Ellipse $\pi ab = \frac{cT}{2}$. Also ist

$$\frac{cT}{2} = \pi ab = \pi a\sqrt{a}\frac{b}{\sqrt{a}} = \pi a^{3/2}\sqrt{p} = \pi a^{3/2}\frac{c}{\sqrt{GM}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}. \quad \square$$

9.2.5 Entfernungen und Massen im Sonnensystem.

Die Gravitationskonstante G ist experimentell bestimmbar (Erstmals 1798). Aus $G\frac{m\mu}{R^2} = \mu g$ mit Erdmasse m, Masse μ eines Körpers auf der Erdoberfläche (d.h. Abstand R) und Erdbeschleunigung $g \Rightarrow$ Erdmasse $m \approx 6\cdot 10^{24}$ kg.

Aus dem 3.ten Kepler'schen Gesetz und den Abstand von der Sonne a (Trigonometrie) $\Rightarrow$ Sonnenmasse $M \approx 2\cdot 10^{30}$ kg.

Aus dem 3.ten Kepler'schen Gesetz und der Umlaufzeit eines Planeten $\Rightarrow$ Sonnenentfernung des Planeten.

Aus dem 3.ten Kepler'schen Gesetz, der Umlaufzeit eines Mondes und seiner mittlere Entfernung (Trigonometrie) $\Rightarrow$ Masse des Planeten.

9.3 Fourier-Reihen

9.3.0 Herleitung der Schwingungsgleichung. [d'Alembert 1747].
Um eine schwingende Saite zu beschreiben können wir in erster Näherung annehmen, daß die Punkte auf der Saite sich auf der Normalen zur Saite in Ruhelage bewegen, also der Ort jedes Punktes x der Saite zum Zeitpunkt t durch den Normalabstand $u(x,t) = u_t(x)$ beschrieben werden kann. Je zwei Punkte $(x_i, u(x_i))$ und $(x_{i+1}, u(x_{i+1}))$ ziehen sich mit einer Kraft an welche proportional zum Verhältnis ihres Abstandes zu ursprünglichen Abstand ist, d.h. auf $(x_i, u(x_i))$ wirkt durch $(x_{i+1}, u(x_{i+1}))$ die Kraft

$$\delta \cdot \frac{(x_{i+1}, u(x_{i+1})) - (x_i, u(x_i))}{x_{i+1} - x_i} = \delta \cdot \Big(1, \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\Big).$$

Auf $(x_i, u(x_i))$ wirkt also insgesamt die Kraft (zu seinen beiden Nachbarn)

$$\delta \cdot \left(\left(1, \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right) + \left(1, \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{x_{i-1} - x_i}\right)\right) = \left(0, \delta\Big(\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{x_{i-1} - x_i}\Big)\right).$$

Die Gesamtkraft die auf ein Stück $[a, b]$ wirkt (mit $\Delta(x) = \frac{b-a}{n}$ und $x_i = a + i\,\Delta(x)$) ist also näherungsweise

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\Big(0, \delta\,\Big(\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{x_{i-1} - x_i}\Big)\Big) &= \\ = \Big(0, \delta \cdot \Big(\frac{u(b + \Delta x) - u(b)}{\Delta x} - \frac{u(a) - u(a - \Delta x)}{\Delta x}\Big)\Big) &\to \\ \to (0, \delta \cdot (u'(b) - u'(a))) \text{ für } \Delta x \to 0, \text{ d.h. } n \to \infty.\end{aligned}$$

Nach dem Newton'schen Kraftgesetz ist somit für ein kleines Kurvenstück von x bis $x + \Delta x$:

$$\delta \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x} u(t, x + \Delta x) - \frac{\partial}{\partial x} u(t, x)\Big) = \text{Kraft} = \underbrace{\text{Masse}}_{\rho\,\Delta x} \times \text{Beschl.} \approx \rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u''(t, x)$$

Für $\Delta(x) \to 0$ ergibt sich hieraus

$$\frac{\delta}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

die sogenannte SCHWINGUNGSGLEICHUNG, eine PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG.

9.3.1 Separationsansatz zur Lösung der Schwingungsgleichung.
Wir suchen Lösungen $u \neq 0$ der Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \, \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

unter der Randwertbedingung

$$u(0, t) = 0 = u(L, t) \text{ für alle } t.$$

O.B.d.A. können wir dabei $L = \pi$ voraussetzen. Wir machen den Ansatz $u(x, t) = v(x)\,w(t)$ mit Funktionen v und w in jeweils einer Variable. Die Schwingungsgleichung lautet dann $v(x)w''(t) = \alpha^2 v''(x)w(t)$. Aus $u \neq 0$ folgt $\exists\,(x_0, t_0) : 0 \neq u(x_0, t_0) = v(x_0)\,w(t_0)$, also $v(x_0) \neq 0 \neq w(t_0)$. Sei $\lambda := -\frac{v''(x_0)}{v(x_0)}$. Dann ist $w''(t) = -\alpha^2\,\lambda\,w(t)$ für alle t und $\alpha^2 v''(x)\,w(t_0) = v(x)w''(t_0) = -v(x)\alpha^2\lambda\,w(t_0)$ $v''(x) = -\lambda v(x)$, d.h.

$$w'' + \alpha\,\lambda\,w = 0, \quad v'' + \lambda v = 0,$$

ein (entkoppeltes) System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wegen $v(0)w(t_0) = u(0, t_0) = 0 = u(\pi, t_0) = v(0)w(t_0)$ folgt $v(0) = 0 = v(\pi)$ und weiter $\lambda \int_0^\pi v^2 = -\int_0^\pi v\,v'' =$

$-[vv']_0^\pi + \int_0^\pi (v')^2 = \int_0^\pi (v')^2 > 0$, also ist $\lambda > 0$. Nach (5.4.5) können wir die gewöhnliche Differentialgleichung $v''(t) + \lambda\, v(t) = 0$ auf ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen und erhalten als allgemeine Lösung $v(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ mit Konstanten C_1 und C_2. Die Randbedingung $v(0) = 0$ hat $C_1 = 0$ zur Folge, und aus $v(\pi) = 0$ folgt $C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, d.h. $\sqrt{\lambda}\pi \in \pi\mathbb{Z}$, i.e. $\lambda = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Diese λ sind also gerade die (negativ genommenen) Eigenwerte des Differentialoperators $v \mapsto v''$ am (unendlich dimensionalen) Raum der v mit Randwerten $v(0) = 0 = v(\pi)$. Auf gleiche Weise erhalten wir als allgemeine Lösung von $w''(t) + \alpha^2\lambda w(t)$ die Funktionen $w(t) = D_1\, \cos(\alpha\lambda t) + D_2\, \sin(\alpha\lambda t)$, und somit für u die Ausdrücke

$$u_n(x,t) := C_2\, \sin(\frac{n\pi}{\pi}x) \cdot \Big(D_1\, \cos(\alpha\frac{n\pi}{\pi}t) + \tilde{D}_2\, \sin(\alpha\frac{n\pi}{\pi}t)\Big)$$

Um Eindeutigkeit der Lösung dieser partiellen Differentialgleichung zu erhalten müssen wir uns noch Anfangsbedingungen vorgeben:
Sei also die Anfangslage $u(x,0) := g(x)$ für alle x und die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} u(x,t) := h(x)$ für alle x gegeben. Da die Differentialgleichung linear ist, sind Linearkombinationnen der Lösungen u_n ebenfalls Lösungen und wir können somit versuchen eine Lösung unter den gegebenen Anfangsbedingungen der Form

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^\infty u_n(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \sin(nx) \cdot (A_n \cos(\alpha n t) + B_n \sin(\alpha n t))$$

zu finden. Dazu benötigen wir, daß die Reihe konvergiert und zweimal gliedweise nach t und x differenziert werden kann und die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty A_n\, \sin(nx) = g(x) \text{ und}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \alpha\, n\, B_n\, \sin(nx) = h(x)$$

erfüllt sind. Wir müssen also "allgemeine" Funktionen g und h in trigonometrische Reihen entwickeln. Dies ist die Frage nach der Fourier-Reihenentwicklung.

9.3.2 Der Begriff der Fourier-Reihe.
Der Klarheit halber definieren wir $\sin_n : x \mapsto \sin(nx)$, und $\cos_n : x \mapsto \cos(nx)$. Es sei

$$f(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$
$$\text{d.h.}\quad f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos_n + b_n \sin_n).$$

Wir wollen die Koeffizienten a_n und b_n berechnen. So ein Problem wird in der linearen Algebra behandelt: Sei $\{u_k : k \leq n\} \subseteq E$ linear unabhängig und f ein Element des linearen Erzeugnisses $\langle\{u_k : k \leq n\}\rangle \subseteq E$. Dann existieren eindeutig bestimmte Skalare c_k mit $f = \sum_{k\leq n} c_k u_k$. Falls $\{u_k : k \leq n\}$ orthonormal ist, so lassen sich die c_k auch leicht als $c_k := \langle f|u_k\rangle$ angeben. Wenn wir für Funktionen $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt durch $\langle f|g\rangle := \int_{-\pi}^\pi f(t)\, g(t)\, dt$ definieren, oder wegen $\langle \sin|\sin\rangle = \int_\pi^\pi \sin^2 = \pi$ besser

$$\langle f|g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)\, g(t)\, dt$$

dann zeigt sich, daß $\langle 1|1\rangle = 2$, $\langle 1|\cos_m\rangle = 0 = \langle 1|\sin_m\rangle = 0$ für $n \neq 0$, $0 = \langle \sin_n|\cos_m\rangle = \langle \sin_n|\sin_m\rangle = \langle \cos_n|\cos_m\rangle$ für $1 \leq n \neq m \geq 1$ und $\langle \sin_n|\sin_n\rangle = 1 = \langle \cos_n|\cos_n\rangle$ für $n \neq 0$.

Falls $(a_0, b_1, a_1, b_2, \dots) \in \ell^1$, so ist die obige (Fourier-)Reihe absolut konvergent bzgl. der ∞-Norm und auch bzgl. der 1-Norm, da $\|\sin_n\|_1 = \|\cos_n\|_1 = \sqrt{\pi}$. Weil $g \mapsto \langle \cos_n, g\rangle$ linear und stetig bzgl. der

1-Norm ist, ist $\langle \cos_n, f\rangle = \sum_k a_k \langle \cos_n, \cos_k\rangle = a_k$ und somit

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx \text{ dies ist Grund für den Faktor } \frac{1}{2} \text{ bei } a_0\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\cos(nx)\,dx \text{ für } n \ge 0\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx \text{ für } n \ge 1
\end{aligned}$$

9.3.3 Proposition. Fourier-Reihen mit ℓ^1-Koeffzienten konvergieren gleichmäßig.
Es sei $(a_0, b_1, a_1, b_2, \dots) \in \ell^1$. Dann ist

$$f(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

glm. konvergent und

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\cos(nx)\,dx\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx \qquad \square
\end{aligned}$$

Umgekehrt sei f integrierbar. Dann ist auch $f\,\cos_n$ und $f\,\sin_n$ integrierbar und wir setzen

$$\begin{aligned}
a_0 &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx\\
a_n &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\cos(nx)\,dx\\
b_n &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx
\end{aligned}$$

und nennen dies die FOURIER-KOEFFIZIENTEN von f und

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\ge 1}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

die FOURIER-REIHE von f.
Das entscheidende Problem, welches sich dabei stellt, ist natürlich ob diese Reihe konvergiert und in welchen Sinn und ob ihre Summe auch wirklich f ist.

Symmetrischer wird die Fragestellung wenn wir in $\mathbb{C}$ rechnen, denn wegen

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ und } \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

ist

$$\begin{aligned}
\cos_n &= \tfrac{1}{2}\exp_n + \tfrac{1}{2}\exp_{-n}, & \sin_n &= -\tfrac{i}{2}\exp_n + \tfrac{i}{2}\exp_{-n},\\
\exp_n &= \cos_n + i\,\sin_n, & \exp_{-n} &= \cos_n - i\sin_n,
\end{aligned}$$

also ist der von $\{\sin_n, \cos_n\}$ erzeugte komplexe Vektorraum ident mit dem von $\{\exp_n, \exp_{-n}\}$ erzeugten. Und unser Ziel ist nun komplex-wertige Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ als Reihe der Form

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, \exp_k$$

darzustellen. Als komplexes inneres Produkt verwenden wir nun

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

und erhalten für $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq l$:

$$\langle \exp_k | \exp_k\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{ikt}\,\overline{e^{ikt}}}_{e^{ikt}\, e^{-ikt}=1} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 = 1$$

und

$$\begin{aligned} \langle \exp_k | \exp_l\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{ikt}\,\overline{e^{ilt}}}_{e^{i(k-l)t}} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{i(k-l)} \frac{d}{dt} e^{i(k-l)t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i(k-l)} \left(e^{i(k-l)\pi} - e^{-i(k-l)\pi} \right) = 0, \end{aligned}$$

also die Orthonormalität sehr einfach.

Es sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$, also eine absolut summierbare (beidseitige) Folge komplexer Zahlen. Dann ist

$$f := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, \exp_k$$

glm. konvergent und

$$c_k = \langle f| \exp_k\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx.$$

Umgekehrt sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann ist auch $f \exp_k$ integrierbar für alle $k \in \mathbb{Z}$ und wir setzen

$$c_k := \langle f| \exp_k\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx$$

und nennen dies den k-ten komplexen Fourier-Koeffizienten von f und

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \exp_k$$

die komplexe Fourier-Reihe von f.

9.3.4 Rechenregeln für Fourier-Koeffizienten.
Beachte, daß die Operation $\mathcal{F}$, die zu einer gegebenen integrierbaren Funktion f die Folge der Fourier-Koeffizienten $c_k(f) := \frac{1}{frm-epi} \in_{-\pi}^{\pi} f \, \exp_{-k}$ zuordnet, und die vermeindliche Inverse $\mathcal{F}^{-1}$, die zu einer summierbaren Folge $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Funktion $f := \sum_k c_k \, \exp_k$ zuordnet, ganz ähnlich Form besitzen. Also können wir erwarten, daß zu Formeln für $\mathcal{F}$ entsprechende für $\mathcal{F}^{-1}$ existieren.

Es gilt:

Für $S(f)(x) := f(-x)$, die Spiegelung,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(S(f))_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\, e^{-ikx}\, dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(y)\, e^{iky}\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{iky}\, dy = S(\mathcal{F}(f)) \\
\text{d.h. } \mathcal{F}(S(f)) &= S(\mathcal{F}(f)) \text{ oder } \mathcal{F}\circ S = S\circ\mathcal{F} \\
f \text{ gerade } & f(x) = f(-x)\ \mathcal{F}(f)_{-k} = \mathcal{F}(f)_k, \text{ d.h. } \mathcal{F}(f) \text{ gerade.} \\
f \text{ ungerade } & \mathcal{F}(f) \text{ ungerade.} \\
\mathcal{F}(\bar{f})_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, e^{-ikx}\, dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ikx}\, dx} \\
&= \overline{\mathcal{F}(f)_{-k}} \\
\text{d.h. } \mathcal{F}(\overline{f}) &= S(\overline{\mathcal{F}(f)}) = \overline{S(\mathcal{F}(f))} \\
\text{Für } T_c(f)(x) &:= f(x+c), \text{ die Translation,} \\
\mathcal{F}(T_c(f))_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+c)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-ik(y-c)}\, dy \\
&= e^{ikc}\cdot\mathcal{F}(f)_k \\
\text{d.h. } \mathcal{F}(T_c(f)) &= \exp_c\cdot\mathcal{F}(f) \\
\mathcal{F}(f\cdot\exp_c)_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{icx}\, e^{-ikx}\, dx = \mathcal{F}(f)_{k-c} = T_{-c}(\mathcal{F}(f))_k \\
\text{d.h. } \mathcal{F}(f\cdot\exp_c) &= T_{-c}(\mathcal{F}(f)) \\
\mathcal{F}(f')_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-ikx}\, dx \\
&= \Big[f(x)\, e^{-ikx}\Big]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(-ik)\, e^{-ikx}\, dx \\
&= i\,k\,\mathcal{F}(f)_k. \\
\mathcal{F}(f') &= i\cdot\mathrm{id}\cdot\mathcal{F}(f) \text{ falls } f' \text{ existiert und integrierbar ist.}
\end{aligned}$$

Letzteres ist natürlich von zentraler Wichtigkeit, den es erlaubt uns durch Anwendung von $\mathcal{F}$ aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung eine multiplikative Gleichung zu machen, die wir mittels Division lösen können und durch Rücktransformation mit $\mathcal{F}^{-1}$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung erwarten dürfen. In der Tat haben Malgrange und Ehrenpreis diese Methode ausgefeilt um die Lösbarkeit von linearen partiellen Differentialgleichungen zu beweisen, siehe [30].

Um nun das Problem der Invertierbakeit von $\mathcal{F}$ anzugehen zeigen wir vorerst den

9.3.5 Satz von Riemann-Lebesgue.
Es sei $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$, dann gilt $c_n(f) \to 0$ für $|n| \to \infty$. Wenn $\mathcal{F}(f) := (c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{F}^{-1}(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \exp_k$ für $x = (x_k)_k \in c_0$, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \arrow[d, hook] & \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \arrow[l, "\mathcal{F}^{-1}"'] \arrow[d, hook] \\
L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C}) \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & c_0(\mathbb{Z},\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es ist $\mathcal{F}$ nach ℓ^∞ stetig, denn

$$|\mathcal{F}(f)_k| = |c_k(f)| = |\langle f, \exp_k\rangle| \le \|f\|_1\, \|\exp_k\|_\infty = \|f\|_1.$$

Ebenso ist $\mathcal{F}^{-1}$ stetig, denn $|\mathcal{F}^{-1}(c)(x)| = |\sum_k c_k\, \exp_k(x)| \le \sum_k |c_k| = \|c\|_1$.

Bleibt zu zeigen, da's $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1) \subseteq c_0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Aus dem Weierstraß'schen Approximationssatz (7.5.4) folgt, daß ein trigonometrisches Polynom p existiert mit $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p(x)|\, dx < \varepsilon$. Daraus folgt, daß $|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-p(x))\, e^{inx}\, dx| \le \varepsilon$. Somit genügt es die Aussage für trigonometrische Polynome p zu zeigen. Für so ein Polynom $p : x \mapsto \sum_{|k|\le n} c_k\, e^{ikx}$ gilt aber offensichtlich $c_k(p) = 0$ für $|k| > n$. $\square$

Wir haben also $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id}$ auf $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Hingegen können wir die Zusammensetzung $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$ im allgemeinen nicht bilden, da $\mathcal{F}^{-1}$ nur für summierbare Folgen wohldefiniert ist, aber wir von den Folgen im Bild von $\mathcal{F}$ nur wissen, daß sie Nullfolgen sind.

In der Tat kann man nachfolgende Resultate zeigen (siehe [30, 5.11]):

Proposition. Das Bild von $\mathcal{F}$ ist mager.
Das Bild $\mathcal{F}(L^1)$ ist mager in $c_0 := \{(\lambda_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \lim_{|n|\to\infty} \lambda_n = 0\} \subseteq \ell^\infty$, wobei $\mathcal{F}$ die Abbildung $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ bezeichnet.

Ein konkretes Beispiel ist die Reihe $\sum_{n\ge 2} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$. Sie ist nicht die Fourier-Reihe einer L^1-Funktion, aber die Koeffizienten liegen in c_0 .

Proposition. Die Menge der Funktionen mit summierbarer Fourier-Reihe ist mager.
Nicht für jedes $f \in L^1[-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe in der 1-Norm. Die Menge der f in L^1 für welche die Fourier-Reihe in der 1-Norm konvergiert ist sogar mager.

Bemerkung.
Von Kolmogoroff [27] stammt ein Beispiel einer L^1-Funktion, für welche die Fourier-Reihe in keinem einzigen Punkt konvergiert, siehe [12, S.22].

Es wurde von [35] vermutet, daß die Fourier-Reihe jeder L^2-Funktion fast überall konvergiert. Das konnte von [10] gezeigt werden. [25] dehnte das Resultat auf alle L^p mit $p > 1$ aus.

Vielleicht haben wir zuviel erwartet. Betrachten wir statt dessen stetige periodische Funktionen f, dann sollte die Fourier-Reihe von f mindestens punktweise konvergieren.

Lemma. Die Menge der stetigen Funktion mit pktw. konverg. Fourier-Reihe ist mager.
Die Menge der stetigen Funktionen $f \in C(S^1, \mathbb{R})$, für welche die Fourier-Reihe in einem fixen Punkt (sagen wir 0) konvergiert, ist mager in $C(S^1, \mathbb{R})$.
Es gilt sogar, daß zu jeder abzählbaren Teilmenge von S^1, es eine nicht magere Menge A gibt, die diese enthält, sowie eine stetige Funktion $f \in C(S^1, \mathbb{R})$, so daß die Fourier-Reihe von f in jedem Punkt von A divergiert .

Lemma. Integraldarstellung der Partialsummen der Fourier-Reihe.
Die partial-Summen $s_n(f) := \sum_{|k|\le n} c_k(f)\, e^{ikx}$ der Fourier-Reihe haben folgende Integral-Darstellung

$$s_n(f) : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\, f(t)\, dt =: (D_n \star f)(x),$$

wobei der Dirichlet-Kern *D_n durch $D_n(t) := \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$ gegeben ist und eine stetige gerade Funktion ist.*
Es gilt

$$\sup\left\{\left|\int_a^b D_n(x)\, dx\right| : 0 \le a \le b \le \pi,\, n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$$

und

$$\|D_n\|_1 \ge \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} s_n(f)(x) &= \sum_{|k|\le n} c_k\, e^{ikx} = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt\, e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{|k|\le n} e^{ik(x-t)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,dt \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} D_n(t) &:= \sum_{|k|\le n} e^{ikt} = e^{-int}\sum_{k=0}^{2n}(e^{it})^k \\ &= e^{-int}\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1} = \frac{e^{i(n+1/2)t}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Es sei $h(x) := \frac{1}{\sin x/2} - \frac{2}{x}$ für $x \in (0,\pi]$ und $h(0) := 0$. Dann ist $h \in C([0,\pi])$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b D_n(x)\,dx\right| &\le \left|\int_a^b h(x)\,\sin((n+1/2)x)\,dx\right| + \left|\int_a^b \frac{2}{x}\,\sin((n+1/2)x)\,dx\right| \\ &\le \pi\cdot\|h\|_\infty + 4\,\sup\{|\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx| : t \ge 0\}, \end{aligned}$$

da mit $s = (n+1/2)x$ folgendes gilt:

$$\int_a^b \frac{\sin((n+1/2)x)}{((n+1/2)x)}\cdot(n+1/2)\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{\sin s}{s}ds = \int_0^\beta \frac{\sin s}{s}ds - \int_0^\alpha \frac{\sin s}{s}ds.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \|D_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}\right|\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\right|\,dt \quad \text{(mit } s := \frac{t}{2} \text{ und Symmetrie)} \\ &\ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\right|\,dt, \quad \text{(da } 0 \le \sin t \le t\text{)} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{\frac{k\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{(k+1)\pi}{2(2n+1)}}\left|\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\right|\,dt \\ &\ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{2(2n+1)}{(k+1)\pi}\int_{\frac{k\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{(k+1)\pi}{2(2n+1)}}|\sin((2n+1)t)|\,dt \\ &\ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{2}{(k+1)\pi}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}|\sin(t)|\,dt \quad \text{(mit } s = (2n+1)\cdot t\text{)} \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\int_0^{\pi/2}|\sin(t)|\,dt \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung zu Kernen.
Der Kern a eines linearen Operators $A : f \mapsto A(f)$ mit $A(f)(x) = \int_B a(x,y)\, f(y)\, dy$ ist eine Verallgemeinerung der Matrixdarstellung $[A] = (a_i^j)_{i,j}$ einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_j (Ax)^j e_j = \sum_j \sum_i a_i^j x^i e_j \\ \text{d.h. } (Ax)^j &= \sum_i a_i^j x^i \\ \text{oder } (Ax)(j) &= \sum_i a_i^j x(i) \\ \text{analog also } (Af)(x) &= \int_B a(x,y)\, f(y)\, dy \end{aligned}$$

9.3.6 Proposition.
Für $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$ gilt: Die Fourier-Reihe von f bei x konvergiert gegen $\sigma \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2\sigma)\, D_n(x)\, dt \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis.

$$s_n(x) - \sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2\sigma)\, D_n(t)\, dt \quad \square$$

Folgerung. Gleichmäßige Konvergenz gewisser Fourier-Reihen.
Für absolut-stetiges und 2π-periodisches f konvergiert die Fourier-Reihe $s_n(f)$ gleichmäßig gegen f.

Dabei heißt eine Funktion ABSOLUT-STETIGE FUNKTION, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodaß $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ für jede endliche Folge disjunkter(!) Intervalle (a_k, b_k) mit $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$.
Die absolut-stetigen Funktionen F sind fast überall differenzierbar und die Ableitung $f := F'$ liegt in L^1 und es gilt $F(b) - F(a) = \int_a^b f$.
Umgekehrt ist die Stammfunktion $F : x \mapsto \int_0^x f$ einer L^1-Funktion f absolut-stetig, und es gilt $F'(x) = f(x)$ fast überall.

Beweis. Es sei $s_n(f)$ die n-te symmetrische Partialsumme der Fourier-Reihe von f, so gilt wegen

$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\pi$:

$$\begin{aligned}
|s_n f(0) - f(0)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(0))\,D_n(t)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^t f'(s)\,ds\,D_n(t)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi}\int_0^t f'(s)\,D_n(t)\,ds\,dt + \int_{-\pi}^{0}\int_0^t f'(s)\,D_n(t)\,ds\,dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi}\int_0^t f'(s)\,D_n(t)\,ds\,dt - \int_{-\pi}^{0}\int_t^0 f'(s)\,D_n(t)\,ds\,dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi}\int_s^{\pi} f'(s)\,D_n(t)\,dt\,ds - \int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^s f'(s)\,D_n(t)\,dt\,ds\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi} f'(s)\int_s^{\pi} D_n(t)\,dt\,ds + \int_{-\pi}^{0} f'(s)\Big(-\int_{-s}^{\pi} D_n(-t)\,dt\Big)ds\right| \\
&\le \|f'\|_1\cdot\sup\left\{\left|\int_s^{\pi} D_n(t)\,dt\right| : s\ge 0\right\}.
\end{aligned}$$

Wegen $s_n(T_h(f)) = T_h(s_n(f))$ (!) erhalten wir diese Ungleichung überall. Es sei p ein trigonometrisches Polynom, welches $\|p'-f'\|_1 \le \frac{\varepsilon}{K}$ erfüllt. Für k größer als der Grad von p gilt dann

$$\begin{aligned}
|s_k(f)(x) - f(x)| &= |(s_k(f)(x) - p(x)) - (f(x)-p(x))| \\
&= |s_k(f-p)(x) - (f-p)(x)| \\
&\le \|(f-p)'\|_1\cdot K \le \frac{\varepsilon}{K}\cdot K = \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

9.3.7 Riemann'scher Lokalisierungssatz.
Für $f\in\mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$ gilt: Die Fourier-Reihe von f bei x konvergiert gegen $\sigma\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\exists\, 0<\delta<\pi : \int_0^{\delta}(f(x+t)+f(x-t)-2\sigma)\,D_n(x)\,dt \to 0 \text{ für } n\to\infty.$$

Beweis. Es sei x fix. $g(t) := g_x(t) := f(x+t)-f(x-t)-2\sigma$. Nach (9.3.6) ist z.z. $\int_\delta^\pi g(t)\,D_n(t)\,dt \to 0$ für $\delta>0$ und $n\to\infty$.

$$\begin{aligned}
\int_\delta^\pi g(t)\,D_n(t)\,dt &= \int_\delta^\pi \frac{g(t)}{2\sin(\frac{t}{2})}\,\sin((n+\frac12)t)\,dt \\
&= \int_\delta^\pi \frac{g(t)}{2}\,\cot(\frac{t}{2})\,\sin(nt) + \frac{g(t)}{2}\,\cos(nt)\,dt \to 0 \text{ nach (9.3.5).} \quad \square
\end{aligned}$$

9.3.8 Lemma.
$\exists\, K>0\ \ \forall a,b\in[0,\pi]\ \ \forall n\ge 0$: $\left|\int_a^b D_n(t)\,dt\right| \le K$.

Beweis. Es sei $h(t) := \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}$ für $t\in(0,2\pi]$. $\lim_{t\searrow 0} h(t) = 0$ $\;h(0) := 0$, $h\in C[0,2\pi]$, $\|h\|_\infty<\infty$. Für $a,b\in[0,2\pi]$ ist

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b D_n(t)\,dt\right| &\le \left|\int_a^b h(t)\,\sin((2n+1)\frac{t}{2})\,dt\right| + \left|\int_a^b \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{t}\,dt\right| \\
&\le \pi\,\|h\|_\infty + 2M,
\end{aligned}$$

denn nach §87 ist $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}$ konvergent (aber nicht absolut!) $\exists M > 0\ \forall x \geq 0$:$\left|\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\right| \leq M$ und

$$\int_a^b \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{(2n+1)\frac{t}{2}} \frac{2n+1}{2}\, dt = \int_\alpha^\beta \frac{\sin s}{s}\, ds = \int_0^\beta \frac{\sin s}{s}\, ds - \int_0^\alpha \frac{\sin s}{s}\, ds \quad \square$$

9.3.9 Das Integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.

Es sei h wie im Beweis (9.3.8) von. $\xRightarrow{(9.3.5)}$

$$0 \leftarrow \int_0^\pi h(x)\, \sin\Big((n+\frac{1}{2})x\Big)\, dx = \underbrace{\int_0^\pi D_n}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{x}\, dx}_{\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

9.3.10 Dirichlet'sche Regel für die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe.

Es sei $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$, 2π-periodisch fortgesetzt, $x \in \mathbb{R}$ und f sei lokal um x von beschränkter Variation. Dann konvergiert $s_n(x) \to s(x) := \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Falls zusätzlich f stetig bei x ist, so ist $s(x) = f(x)$.

Wir bezeichnen mit $BV[a,b]$ den Vektorraum der Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ von beschränkter Variation.

Beweis.

$$g(t) := f(x+t) + f(x-t) - 2\sigma \text{ mit } \sigma := \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

O.B.d.A. $\delta < \pi$. $f \in BV[x-\delta, x+\delta]$ $\quad g \in BV[0,\delta]$ $\quad g = g_1 - g_2$, $g_i \uparrow$. $\lim_{t\to 0+} g(t) = 0$ $\quad$ o.B.d.A. $\lim_{t\to 0+} g_1(t) = \lim_{t\to 0+} g_2(t) = 0$ $\quad g_j(0) := 0$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \beta : \delta > \beta > 0$, $0 \leq g_j < \frac{\varepsilon}{2K}$ auf $(0,\beta]$. Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung, siehe [22, 85.7] $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in [0,\beta]$:

$$\int_0^\beta g_j(t)\, D_n(t)\, dt = \int_0^\beta g_j(t)\, D_n(t)\, dt = \underbrace{g_j(0)}_{=0} \int_0^{\alpha_j} D_n(t) + \underbrace{g_j(\beta)}_{=g_j(\beta) < \frac{\varepsilon}{2K}} \int_{\alpha_j}^\beta D_n(t)$$

$$\left|\int_0^\beta g_j(t)\, D_n(t)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2K} K = \frac{\varepsilon}{2}$$

Schließlich ist $\int_\beta^\delta g(t)\, D_n(t)\, dt \to 0$ nach (9.3.5). $\xRightarrow{(9.3.7)}$ $\square$

9.3.11 Folgerung. Punktweise Konvergenz gewisser Fourier-Reihen.

Für $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi] \cap BV[-\pi,\pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe s_n punktweise gegen s. $\square$

9.3.12 Proposition. Gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe.

Sei $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi] \cap BV[-\pi,\pi]$ und $f \in C[(a,b)]$. Dann konvergiert $s_n \to f$ glm. auf jedem kompakten Teilintervall von (a,b).

Beweis. Es sei $[a',b'] \subseteq (a,b)$. Z.z.

$$\int_0^\pi \underbrace{(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))}_{=:g(x,t)} D_n(t)\, dt \to 0 \text{ für } t \to 0 \text{ glm. in } x \in [a',b']$$

$V(f) < \infty \quad f = f_1 - f_2,\ f_i \uparrow,\ f_i \in C(a', b'),\ \|f\|_\infty < \infty.$

$$g^1(x,t) := f(x+t) - f(x) \geq 0$$
$$g^2(x,t) := -f(x-t) + f(x) \geq 0$$

$g^i(x, \_) \uparrow$ auf $[0,\pi]$ für $x \in [a,b]$, $\|g^i\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$, $g = g^1 - g^2$, $|\int D_n| \leq K$. f glm. stetig auf $[a'-\delta, b'+\delta]$ für $0 < \delta < a'-a, b-b', \pi$. $\quad \exists\, \beta > 0$: $|x-y| \leq \beta\ |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4K}\quad \forall t \leq \beta : |g^j(x,t)| < \frac{\varepsilon}{4K}$ $\int_0^\pi = \int_0^\beta + \int_\beta^\pi$, $\int g D_n = \int g^1 D_n - \int g^2 D_n$. $\quad \exists\, \alpha_j(x)$:

$$\int_0^\beta g_x^j D_n = \underbrace{g_x^j(0)}_{=0} \int_0^{\alpha_j(x)} D_n + \underbrace{g_x^j(\beta)}_{\leq \frac{\varepsilon}{4K}} \underbrace{\int_{\alpha_j(x)}^\beta D_n}_{\leq K} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\int_0^\beta g_x D_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\, \gamma_j(x): \quad \int_\beta^\pi g_x^j D_n = g_x^j(\beta) \int_\beta^{\gamma_j(x)} D_n + g_x^j(\pi) \int_{\gamma_j(x)}^\pi D_n \leq \frac{8\|f\|_\infty}{\sin(\frac{\beta}{2})} \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}
\text{da } \int_\beta^{\gamma_j(x)} D_n &= \int_\beta^{\gamma_j(x)} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}\, dt \\
&= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}} \underbrace{\int_\beta^{\eta_j(x)} \sin((n+\frac{1}{2})t)\, dt}_{= \left[\frac{-\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}\right]_\beta^{\eta_j} \leq \frac{2}{n+\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \frac{1}{2\sin\frac{\gamma_j(x)}{2}} \underbrace{\int_{\eta_j(x)}^{\gamma_j(x)} \sin((n+\frac{1}{2})t)\, dt}_{\leq \frac{2}{n+\frac{1}{2}}} \\
&\leq \frac{1}{2\sin(\frac{\beta}{2})}\, 2\, \frac{2}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sin(\frac{\beta}{2})} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \\
\text{und } \int_{\gamma_j(x)}^\pi D_n &\leq \frac{2}{\sin(\frac{\gamma_j(x)}{2})} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\sin(\frac{\beta}{2})} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \qquad \square
\end{aligned}$$

9.3.13 Beispiele von Fourier-Entwicklungen.
In den folgenden Beispielen seinen alle f von $[-\pi,\pi]$ auf $\mathbb{R}$ 2π-periodisch fortgesetzt zu stückweise C^1 Abbildungen.

1. $f(x) := x$ für $|x| < \pi$, $f(\pm\pi) := 0$. $\Rightarrow$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

punktw. bzw. glm. auf Kompakta in $(-\pi,\pi)$. $x := \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{2k+1},$$

vgl. (4.2.21).

2. $f(x) := |x|$ für $|x| \le \pi$. $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

   glm. auf Kompakta. $x := 0$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

3. $f(x) := |\sin(x)|$. $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$$

   glm. auf Kompakta. $x := \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

4. $f(x) := x^2$ für $|x| \le \pi$. $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(nx) n^2$$

   glm. auf Kompakta. $x := 0$ $\frac{\pi^2}{1} 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} \frac{\pi^2}{4 \cdot 6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

5. $f(x) := |\cos(x/2)|$. $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos(kx)}{4 \cdot k^2 - 1}\Big)$$

   glm. auf Kompakta.

6. $f(x) := \pm 1$ für $\pm x \in (0, \pi)$, $f(0) = f(\pm\pi) = 0$. $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1})$$

   glm. auf Kompakta.

7. $f(x) := \cosh(\alpha x)$ für $|x| \le \pi$ und $\alpha \ne 0$. $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi} \Big(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2\alpha \cos(kx)}{\alpha^2 + k^2}\Big)$$

   glm. auf Kompakta. $x := \pi$

$$\pi \coth(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + k^2},$$

   die Partialbruchentwicklung von coth. Denn $2\sinh(\alpha\pi) = e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi} = 0 \Leftrightarrow e^{2\alpha\pi} = 1$, d.h. $\alpha = \pm ki$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

9.3.14 Permanenzsatz für Cesaro-Verfahren.
Es konvergiere eine Zahlen-Folge $s_n \to s$. Dann konvergiert auch $\sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_n \to s$, d.h. s_n ist Cesaro-summierbar.

Insbesonders gilt das punktweise für die Partialsummen s_n der Fourier-Reihe einer $\mathcal{L}^1$-Funktion an einer Stelle x.

Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $\sum_k (-1)^k$ zeigt.

Beweis. Der erste Teil der Aussage heißt auch CAUCHY'SCHER GRENZWERTSATZ: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein m mit $|s - s_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq m$ und somit

$$\begin{aligned}|s - \sigma_n| &= \Big|\frac{1}{n}\sum k = 0^{n-1}(s - s_k)\Big| \leq \frac{1}{n}\sum k = 0^{n-1}|s - s_k| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum k = 0^{m-1}|s - s_k| + \frac{n-1-m}{n}\,\varepsilon \\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty. \quad \square\end{aligned}$$

9.3.15 Proposition. Cesaro-Summierbarkeit der Fourier-Reihen.
Für $f \in \mathcal{L}^1$ gilt: $s_n(x)$ ist Cesaro-summierbar gegen $s(x)$ $\Leftrightarrow$

$$\int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2s(x))\, F_n(t)\, dt \to 0 \textit{ für } n \to \infty,$$

wobei der sogenannte FEJÉR-KERN *F_n gegeben ist durch $F_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f \star D_k)(x) = \Big(f \star \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k\Big)\Big)(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \cdot F_n(t)\, dt \quad \square\end{aligned}$$

9.3.16 Lemma.
Für die Fejér-Kerne

$$F_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$$

gilt:

(1) $F_n(t) := \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\Big(\sin(\dfrac{t}{2}) + \cdots + \sin((2n-1)\dfrac{t}{2})\Big) = \dfrac{1}{n}\dfrac{\sin^2(n\frac{t}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})} \geq 0,$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi F_n = \frac{\pi}{2},$

(3) $0 \leq F_n(t) \leq \dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})}.$

Beweis. (1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik(x+\frac{x}{2}} &= e^{\frac{ix}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} \\ &= \frac{1 - e^{inx}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = \frac{1 - \cos(nx) - i\,\sin(nx)}{-2i\sin\frac{x}{2}} \text{ für } x \notin 2\pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\Big((2k+1)\frac{x}{2}\Big) = \frac{1 - \cos(nx)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2(n\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(2) $\Leftarrow \int_0^\pi D_n = \frac{\pi}{2}$.

(3) $\Leftarrow$ (1). $\square$

Wichtigste Anwendung der Cesaro-Summierbarkeit ist der

9.3.17 Satz von Fejér.

Es sei $f \in \mathcal{L}^1, \exists\, f(x+), f(x-)$. Dann ist $s_n(x)$ Cesaro-summierbar gegen $s(x) := \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Beweis. $g_x(t)$ w.o. , $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall t \in [0, \delta]$: $|f(x \pm t) - f(x\pm)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}\quad |g_x(t)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$

$$\Big|\int_0^\delta g_x\, F_n\Big| \le \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta |F_n| \le \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi F_n = \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Big|\int_\delta^\pi g_x\, F_n\Big| \le \frac{1}{2n}\frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}\ \int_\delta^\pi |g_x| \to 0,\ \text{o.B.d.A.}\ \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \square$$

9.3.18 Folgerung. Beschreibung des Grenzwertes der Fourier-Reihe.
Es sei $f \in \mathcal{L}^1,\ \exists\, f(x+), f(x-)$ und $s_n(x)$ konvergiere. Dann ist $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) := \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. $\square$

Bemerkung.

[**Carleson**] $f \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow s_n(f)$ konvergiert f.ü., [10].

[**Zygmund**] $f \in \mathcal{L}^2 \not\Rightarrow s_n(f)$ konvergiert überall, [52, S298f].

[**Kolmogoroff**] $\exists\, f \in \mathcal{L}^1$: $s_n(f)$ konvergiert nirgends, [27].

[**Olevskij**] $\exists\, f \in C$ s.d. eine Umordnung der Fourier-Reihe fast überall divergiert, [38].

$\exists\, f \in C$: $s_n(f)$ divergiert in überabzählbar vielen Punkten.

[**Fatou**] $\sum_{n\ge 2} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$ konvergiert punktweise, ist aber nicht die Fourier-Reihe einer $\mathcal{L}^1$-Funktion.

Es waren Konvergenzuntersuchungen von Fourier-Reihen die G. Cantor zur Entwicklung der Mengenlehre führten. Und Riemann hat sein Integral geschaffen und in seiner Habilitationsschrift "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trtigonometrische Reihe" 1854 vorgestellt um Fourier-Reihen zu studieren.

9.3.19 Zusammenhang: Taylor-Reihe – Fourier-Reihe.
Es sei f holomorph auf $\{z : |z| < 1\}$. Dann ist $f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$ mit $c_k := \frac{f^{(k)}(z)}{k!}$. Angenommen die Taylor-Reihe konvergiert für ein $|z| = 1$, d.h. $z = e^{i\varphi}$. Nach Abel'schen Grenzwertsatz (4.2.20) gilt: $f(r\, e^{i\pi}) \to f(e^{i\varphi})$ für $r \nearrow 1$, d.h.

$$g(\varphi) := f(e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^\infty c_k e^{ik\varphi} \text{ ist die Fourier-Reihe von } g \text{ mit } c_k = 0 \text{ für } k < 0.$$

Sei nun f lokal um $\{z : |z| = 1\}$ holomorph. Dann ist $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k$, eine Laurent-Reihe die auf Kompakta absolut und gleichmäßig konvergiert (siehe [40, 181]), dabei ist

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\, dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi})\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi.$$

Es seien

$$F_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ für } |z| \leq 1$$
$$F_\infty(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} \text{ für } |z| \geq 1$$

Dann sind F_0 und F_∞ holomorphe Funktionen auf den Inneren bzw. den Äußeren von S^1 und f die Differenz der beiden Randwerte.

Umgekehrt sei $u \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$, a_k, b_k seine Fourier-Koeffizienten. Dann ist $\sum_k a_k^2 + b_k^2 < \infty$.

$$v(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} -b_k \cos(kx) + a_k \sin(kx), \quad v \in \mathcal{L}^2.$$

Achtung: Dies gilt nicht für $\mathcal{L}^1$, siehe [23, 143.2a]. Es folgt: $f := u + iv \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ hat Fourier-Koeffizienten

$$c_k := \begin{cases} a_k - ib_k & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0, \quad \text{deshalb die Wahl von } v! \end{cases}$$

Somit konvergiert $F(z) := F(re^{it}) := \sum_{k\geq 0} c_k\, r^k\, e^{itk} = \sum_{k\geq 0} c_k z^k$ auf $\{z : |z| < 1\}$ und somit ist F dort holomorph. Nach [10] konvergiert $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ f.ü. für $|z| = 1$ gegen $f(x)$ mit $z = e^{ix}$. Nach dem Abel'schen Grenzwertsatz (4.2.20) ist $\lim_{r\to 1-} F(re^{it}) = f(t)$ für fast alle t, d.h. $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ist Randwert einer holomorphen Funktion $F : \{z : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ und die $\mathbb{C}$-Fourier-Koeffizienten sind genau die Taylor-Koeffizienten von F bei 0.

Allgemeiner sei $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ beliebig, c_k die $\mathbb{C}$-Fourier-Koeffizienten von f. Dann sind

$$F_0(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \text{ und } F_\infty(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^k$$

holomorphe Funktionen am Inneren und Äußeren und f ist die Summe der Randwerte von F_0 und F_∞ und die $\mathbb{C}$-Fourier-Koeffizienten von f sind gerade die Taylor-Koeffizienten von F_0 bei 0 bzw. F_∞ bei $+\infty$.

Beispiele.

1. $f(z) := e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für $|z| < \infty$.
   $f(e^{ix}) = e^{\cos(x)+i\sin(x)} = e^{\cos(x)}(\cos(\sin(x)) + i\sin(\sin(x)))$
   $e^{\cos(x)}\cos(\sin(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Re e(e^{ikx})}{k!} = 1 + \cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2!} + \frac{\cos(3x)}{3!} + \dots.$
2. $f(z) := \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \dots$ für $|z| \leq 1$ mit $z \neq -1$, $\log(z) = \log(r\,e^{it}) = \log(r) + it$, wegen $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}}{2}$ ist $z = 1 + e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\, e^{\frac{ix}{2}}$ $r = 2\cos\frac{x}{2}$, $t = \frac{x}{2}$; $f(e^{ix}) = \log(1+e^{ix}) = \log(2\cos\frac{x}{2} e^{\frac{ix}{2}}) = \log(2\cos\frac{x}{2}) + i\frac{x}{2}$ $\log(2\cos\frac{x}{2}) = \Re e(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k+1}) = \cos x - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(3x)}{3} \mp \dots.$
3. $f(z) := \frac{\alpha}{\alpha - z} = \frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}} = 1 + \frac{z}{\alpha} + \frac{z^2}{\alpha^2} + \dots$ $f(e^{ix}) = \alpha\frac{(\alpha - \cos(x)) + i\sin(x)}{\alpha^2 - 2\alpha\cos(x) + 1}$. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\alpha^n} = \frac{\alpha(\alpha - \cos x)}{\alpha^2 - 2\alpha\cos(x) + 1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\alpha^n} = \frac{\sin(x)}{\alpha^2 - 2\alpha\cos(x)+1}$.
4. $I := \int_0^{\pi} \log(2\cos\frac{x}{2})^2\, dx \overset{\text{gerade}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \log(2\cos\frac{x}{2})^2\, dx = \frac{1}{2}\|f\|_2^2$ mit $f(x) := \log(2\cos\frac{x}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(nx)}{n}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $I = \frac{1}{2}\|f\|_2^2 = \frac{1}{2}\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^3}{12}$

9.3.21 Theorem. Orthoprojektion.
Es sei E Hilbert-Raum, $\{u_i : i \le n\}$ eine orthonormale Familie in E, und $E_0 := \langle\{u_k : k \le n\}\rangle$ das lineare Erzeugnis dieser Familie. Dann gilt:

1. $\forall f \in E \;\; \exists! f_0 \in E_0$: $\|f - f_0\| = \inf\{\|f-g\| : g \in E_0\}$. *Es ist* $f_0 = \sum_i \langle f, u_i\rangle u_i$ *und wir setzen* $P(f) := f_0$.
2. $P : E \to E$ *ist die Orthoprojektion auf* E_0, *d.h.* P *linear,* $P^2 = P$, $P^t = P$, $\operatorname{Bild} P = E_0$, $\operatorname{Ker} P = E_0^\perp$.
3. $\forall f \in E : f - P(f) \perp E_0$.
4. Bessel'sche Gleichung: $\|f\|^2 = \|f - P(f)\|^2 + \|P(f)\|^2$.
5. Bessel'sche Ungleichung: $\|P\| = 1$, *bzw.* $\|f\|^2 \ge \|P(f)\|^2 = \sum_k \langle f, u_k\rangle^2$.

Beweis. (1) Es sei $f_0 := \sum_k a_k u_k$ ein beliebiger Punkt in E_0.

$$\begin{aligned}\|f - f_0\|^2 &= \|f\|^2 - 2\langle f, f_0\rangle + \|f_0\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\sum_k a_k \langle f, u_k\rangle + \sum_k a_k^2 \\ &= \|f\|^2 + \sum_k \Big((a_k - \langle f, u_k\rangle)^2 - \langle f, u_k\rangle^2 \Big).\end{aligned}$$

Dies ist genau dann minimal, wenn $\forall k : a_k = \langle f, u_k\rangle$.

(2) offensichtlich ist P linear; $P^t = P$ oder äquivalent $\langle f, Pg\rangle = \langle f, P^t g\rangle := \langle Pf, g\rangle = \sum_{k\le n}\langle f, u_k\rangle \cdot \langle f, u_k\rangle$.
$P(u_j) = \sum_{k \le n} \langle u_j, u_k\rangle u_k = u_j \quad \forall f \in E_0 : P(f) = f$. $\operatorname{Bild} P = E_0$, $P^2 = P$.
$(\operatorname{Bild} P)^\perp = \operatorname{Ker}(P^t) = \operatorname{Ker} P$.

(3) $P^2 = 1 \quad \operatorname{Bild}(1-P) = \operatorname{Ker} P = E_0^\perp$.

(4) $Pf \perp f - Pf$, $f = Pf + (f - Pf)$

$$\|f\|^2 = \langle Pf + (f - Pf), Pf + (f - Pf)\rangle = \|Pf\|^2 + 2\underbrace{\langle Pf, f - Pf\rangle}_{0} + \|f - Pf\|^2.$$

(5) $0 \le \|f - Pf\|^2 \overset{(4)}{=} \|f\|^2 - \|Pf\|^2 \quad \|f\| \ge \|P(f)\| \quad \|P\| \le 1$ und aus $P^2 = P \quad \|P\| = \|P^2\| \le \|P\|^2$
$1 \le \|P\|$, also $\|P\| = 1$. Weiters ist $\|Pf\|^2 = \langle \sum_k \langle f, u_k\rangle u_k, \sum_j \langle f, u_j\rangle u_j\rangle = \sum_k \langle f, u_k\rangle^2$. □

Bemerkung.
Wegen (9.3.21) ist die n-te Partialsumme $s_n := \sum_{k=0}^n \langle f, u_k\rangle u_k$ der Fourier-Reihe von f die beste Approximation an f unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grad n.

9.3.22 Theorem. Maximale Orthonormalsysteme.
E ein Hilbert-Raum, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine orthonormale Familie. Dann sind äquivalent:

1. $E_0 := \langle\{u_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ *ist dicht in* E;
2. $\forall f : \langle f, u_n\rangle = 0 \; f = 0$;
3. $\forall f : f = \sum_n \langle f, u_n\rangle u_n$;
4. $\forall f : \|f\|^2 = \sum_n \langle f, u_n\rangle^2$ (Parseval'sche Gleichung).

Beweis. (1 2) $\varphi : g \mapsto \langle f, g\rangle$ ist stetig linear, $\varphi(u_k) = 0 \quad \varphi(E_0) = 0 \quad \varphi = 0 \quad \varphi(f) = \|f\|^2 = 0 \quad f = 0$.
(2 3) Wegen der Bessel'schen Ungleichung (9.3.21) ist $\sum_{k\le n}\langle f, u_k\rangle^2 \le \|f\|^2$ für alle n, also $\sum_k \langle f, u_k\rangle^2$ absolut konvergent, und damit $\sum_k \langle f, u_k\rangle u_k$ eine Cauchyfolge, denn

$$\|\sum_{k=n}^{n+m}\langle f, u_k\rangle u_k\|^2 = \sum_{k=n}^{n+m}\langle f, u_k\rangle^2 \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

$\langle f - \sum_{k\le n}\langle f, u_k\rangle u_k, u_j\rangle = 0$ für $j \le n \quad \forall j : \langle f - \sum_{k<\infty}\langle f, u_k\rangle u_k, u_j\rangle = 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} f = \sum_{k<\infty}\langle f, u_k\rangle u_k$.
(3 4) Dies ist eine Verschärfung der Bessel'schen Ungleichung.

$$\|f\|_2^2 = \underbrace{\|f - s_n\|_2^2}_{\to 0} + \underset{\to\sum_k\langle f,u_k\rangle^2}{\to} \|s_n\|_2^2.$$

(4 2) $\quad \forall k : \langle f, u_k\rangle = 0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} \|f\|^2 = \sum_k\langle f, u_k\rangle^2 = 0 \quad f = 0$.
(3 1)

$$f = \lim_n \underbrace{\sum_k \le n\langle f, u_k\rangle u_k}_{\in E_0}. \quad \square$$

9.3.23 Proposition. Dichtheitsaussagen.

1. $B_c \cap \mathcal{L}^p \subseteq \mathcal{L}^p$ *dicht.*
2. $T \subseteq B_c \cap \mathcal{L}^p$ *dicht.*
3. C *liegt dicht in* T *bzgl.* $\|\_\|_p$.
4. Trig *liegt dicht in* $C_{2\pi} := \{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}$ *bzgl.* $\|\_\|_p$.

Dabei bezeichnet B_c den Raum der beschränkten Funktionen mir kompakten Träger und Trig Raum der trigonometrischen Polynome.

Beweis. (1) Mittels des Satzes von Beppo Levi (siehe (7.8.5)) zeigt man durch Abschneiden, daß $B \cap \mathcal{L}^1 \subseteq \mathcal{L}^1$ dicht ist, siehe [23, Aufgabe 129.7]. Es sei f_n aus f durch Abschneiden außerhalb des Würfels um $(0,0)$ mit Seitenlänge n erhalten. Dann ist $|f_n - f| \le |f|$, $|f_n - f| \searrow 0$, $f_n \in B_c \cap \mathcal{L}^p$ $\overset{(7.8.5)}{\Longrightarrow} \int |f_n - f|^p \searrow 0$.
(2) Nach (7.8) ist $T \subseteq \mathcal{L}^1$ dicht. $f \in B_c \cap \mathcal{L}^p$, $\varepsilon > 0 \quad f \in \mathcal{L}^p_c \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$, da $\|f\|_1 = \|f \cdot 1\|_1 \le \|f\|_p \, \|1\|_q$ nach der sogenannten Hölder-Ungleichung, eine Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. $\overset{(7.8)}{\Longrightarrow} \quad \exists\, \psi \in T : \|f - \psi\|_1 < \frac{\varepsilon^p}{(2\|f\|_\infty)^{p-1}}$. O.B.d.A. $\|\psi\|_\infty < \|f\|_\infty$ (Ersetze ψ durch ψ bei $\pm\|f\|_\infty$ abgeschnitten). $f \in \mathcal{L}^p$, $\psi \in \mathcal{L}^p \quad f - \psi \in \mathcal{L}^p$,

$$\|f - \psi\|_p^p = \||f - \psi|^p\|_1 \le \|f - \psi\|_1 \cdot \|f - \psi\|_\infty^{p-1} < \frac{\varepsilon^p}{2\|f\|_\infty^{p-1}}(2\|f\|_\infty)^{p-1} = \varepsilon^p.$$

(3) $\psi \in T$, $\varepsilon > 0$, N Sprungstellen, Wähle $f = \psi$ bis auf N Intervalle der Länge 2δ mit $\delta := \frac{1}{2^{p-1}N\|\psi\|_\infty^p}\varepsilon^p$, wo die konstanten Teile von ψ affin verbunden werden, $\|f\|_\infty \le \|\psi\|_\infty$.

$$\int \|f - \psi\|^p \le \sum_{i=1}^N 2\delta \underbrace{\|f - \psi\|_\infty^p}_{\le 2\|\psi\|_\infty^p} \le \varepsilon^p.$$

(4) Nach Weierstraß'scher Approximationssatz (7.5.4) liegen die trigonometrischen Polynome dicht in C bzgl. $\|\_\|_\infty$. Wegen $\|\_\|_p^p \le 2\pi \|\_\|_\infty^p$ ($\int |f|^p \le 2\pi \|f\|_\infty^p$) gilt dies auch für $\|\_\|_p$. □

Folgerung.
Es ist $\mathcal{L}^p$ eine Vervollständigung sowohl von $(T, \|\_\|_p)$ als auch von $(C, \|\_\|_p)$. □

9.3.24 Folgerung. Vollständigkeitssatz.

$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \dots\}$ *ist ein maximales Orthogonalsystem in $\mathcal{L}^2$.* □

9.3.25 Folgerung. Abstrakte Fourier-Entwicklung.
Es sei $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein maximales Orthonormalsystem in einen Hilbert-Raum E. Dann ist

$$\mathcal{F} : E \cong \ell^2, f \mapsto (\langle f, u_k\rangle)_k$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. $\mathcal{F}$ ist ein wohldefinierter isometrischer linearer Isomorphismus wegen Theorem (9.3.22) und insbesonders der Parseval'schen Gleichung. Damit ist $\mathcal{F}$ injektiv.

Sei nun $(c_k)_k \in \ell^2$. Dann ist $\| \sum_{k=n}^{n+p} c_k\, u_k \|_2^2 = \sum_{k=n}^{n+p} c_k^2 \|u_k\|_2^2 = \sum_{k=n}^{n+p} c_k^2 \to 0$ $\sum_k c_k\, u_k$ Cauchyreihe $\xRightarrow{(7.8.4)}$ konvergiert in $\mathcal{L}^2$ gegen ein f. ( )

$$\langle f, u_k\rangle = \Big\langle \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, u_j, u_k \Big\rangle \overset{(7.8.4)}{=\!=\!=} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \langle u_j, u_k\rangle = c_k,$$

d.h. $\mathcal{F}(f) = (c_k)_k$, $\mathcal{F}$ ist surjektiv. □

9.3.26 Verallgemeinerte Parseval'sche Gleichung.

$$f, g \in \mathcal{L}^2\ \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle = \langle f, g\rangle.$$

Beweis. Die folgt aus der Polarisierungsgleichung:

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad \square$$

9.3.27 Weitere Operationen mit Fourier-Reihen .
Für die Faltung gilt $\mathcal{F}(f \star g)_k = \mathcal{F}(f)_k \cdot \mathcal{F}(g)_k$ oder kurz $\boxed{\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \star g)(x) e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, e^{-ikx}\, dy\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, e^{-iky} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{-ik(x-y)}\, dx\, dy \quad \text{(nach Fubini)} \\
&= \mathcal{F}(f)_k \cdot \mathcal{F}(g)_k.
\end{aligned}$$

Für das Produkt zweier L^2-Funktionen gilt $\boxed{\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)}$, wobei die Faltung zweier Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ durch $(a \star b)_k := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{k-n} \cdot b_n$ gegeben ist:

Für $k=0$ folgt das aus der Parseval'schen Gleichung (siehe (9.3.22):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\cdot g)_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx\\
&= \langle f,\bar g\rangle = \langle \mathcal{F}(f),\mathcal{F}(\bar g)\rangle\\
&= \sum_k \mathcal{F}(f)_k\cdot\overline{\mathcal{F}(\bar g)}_k\\
&= \sum_k \mathcal{F}(f)_k\cdot\mathcal{F}(g)_{-k}\\
&= (\mathcal{F}(f)\star\mathcal{F}(g))_0.
\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\cdot g)_k = \mathcal{F}(f\cdot g\cdot\exp_{-k})_0 &= \sum_j \mathcal{F}(f)_j\cdot\mathcal{F}(g\cdot\exp_{-k})_{-j}\\
&= \sum_j \mathcal{F}(f)_j\cdot\mathcal{F}(g)_{k-j}\\
&= (\mathcal{F}(f)\star\mathcal{F}(g))_k.
\end{aligned}$$

Bezüglich Stammfunktionbildung gilt für $f\in L^1$ mit Fourier-Koeffizienten c_k:
Die durch $F(x):=\int_0^x (f(t)-c_0)\,dt$ definierte Funktion F ist absolut-stetig und 2π-periodisch, denn

$$F(x+2\pi)-F(x)=\int_x^{x+2\pi}(f(t)-c_0)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt-2\pi\cdot c_0=0.$$

Seien C_k die Fourier-Koeffizienten von F. Nun liefert partielle Integration für $k\neq 0$:

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,e^{-ikt}\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[F(t)\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-c_0)\,\frac{e^{-ikt}}{-ik}\,dt\right)\\
&= 0+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt - c_0\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikt}}{ik}dt\right]\\
&= \frac{1}{ik}c_k+0.
\end{aligned}$$

Da für absolut-stetige F die Reihe $\sum_k C_k\,e^{ikx}\to F(x)$ gleichmäßig konvergiert, folgt aus $0=F(0)=\sum_k C_k\,e^{ik0}=\sum_k C_k$ die Beziehung $C_0=-\sum_{k\neq 0}C_k$. Da die Summe $\sum_{k\neq 0}C_k=\sum_{k\neq 0}\frac{1}{ik}c_k$ konvergiert, gilt gleiches für $\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}c_k$, also ist z.B. $\sum_{k>1}\frac{\sin(kx)}{\ln(k)}$ nicht die Fourier-Reihe einer L^1-Funktion.

Es gilt $\int_a^b f(t)dt=\sum_k\int_a^b c_k e^{ikt}\,dt$ für $f\in L^1$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= F(b)-F(a)+(b-a)\,c_0\\
&= \sum_k C_k\,e^{ikb}-\sum_k C_k\,e^{ika}+(b-a)\,c_0\\
&= \sum_{k\neq 0}\frac{c_k}{ik}\,(e^{ikb}-e^{ika})+(1-1)\,C_0+(b-a)\,c_0\\
&= \sum_{k\neq 0} c_k\int_a^b e^{ikt}\,dt + c_0\int_a^b e^{ik0}\,dt\\
&= \sum_k\int_a^b c_k e^{ikt}\,dt.
\end{aligned}$$

Für absolut-stetiges und 2π-periodisches f gilt $\boxed{\mathcal{F}(f')_k = ik\mathcal{F}(f)_k}$:
Da f absolut-stetig ist, existiert f' fast überall, $f' \in L^1$ und $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$. Es seien c_k die Fourier-Koeffizienten von f' und C_k jene von f, so gilt $c_0 = 0$ und nach dem eben Bewiesenen, daß $C_k = \frac{1}{ik}c_k$ für $k \neq 0$.

9.3.28 Nochmals die schwingende Saite.
Ausgangspunkt unserer Überlegungen zu Fourier-Reihen war die Schwingungsgleichung für die Entfernung $u(x,t)$ vom Punkt x zur Zeit t von der Ruhelage:

$$\begin{aligned}
(\partial_2)^2 u &= \alpha^2 (\partial_1)^2 u\\
u(0,t) &= 0 = u(\pi,t) \qquad \text{Randbedingung}\\
u(x,0) &= g(x), \quad \partial_2 u(x,0) = h(x) \qquad \text{Anfangsbedingung}
\end{aligned}$$

Notwendige Voraussetzungen dafür waren: $\exists\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, also u 2-mal differenzier und somit muß g 2-mal differenzierbar und h 1-mal differenzierbar sein.
Die Randbedingung impliziert $g(0) = g(\pi) = 0$ und $\partial_2 u(0,t) = 0 = \partial_2 u(\pi,t)$ also insbesonders $h(0) = 0 = h(\pi)$. Weiters folgt $\alpha^2(\partial_1)^2 u(0,t) = (\partial_2)^2 u(0,t) = 0 = (\partial_2)^2 u(\pi,t) = \alpha^2(\partial_1)^2 u(\pi,t)$ und somit $g''(0) = 0 = g''(\pi)$
Wir haben folgenden Lösungsansatz herausgearbeitet:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &:= \sum_{k\geq 1} \sin(kx)\,(A_k\cos(\alpha kt) + B_k \sin(\alpha kt))\\
g(x) &:= \sum_{k\geq 1} A_k \sin(kx),\\
h(x) &:= \sum_{k\geq 1} \alpha\, k\, B_k \sin(kx)
\end{aligned}$$

Wir suchen so eine Lösung u_1 für den Fall $h = 0$ und ein weitere u_2 für $g = 0$. Dann ist $u_1 + u_2$ eine Lösung. für beliebiges fixes h und g.

$(h = 0)$ g 2-mal diffb., $g(0) = 0 = g(\pi)$, $g''(0) = 0 = g''(\pi)$ g hat 2-mal diffb. 2π-periodische ungerade Fortsetzung $g(x) = \sum_{k\geq 1} A_k \sin(kx)$ konvergiert absolut nach 9.3.12 und glm. nach (9.3.13) mit $A_k := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,\sin(kx)\,dx$.

$$u_1(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sin(kx)\,A_k\cos(\alpha kt)}_{\frac{A_k}{2}\Big(\sin(k(x-\alpha t)) + \sin(k(x+\alpha t))\Big)} = \frac{1}{2}\Big(g(x-\alpha t) + g(x+\alpha t)\Big)$$

konvergiert ebenfalls absolut und es ist

$$\begin{aligned}
u_1(0,t) &= \frac{1}{2}(g(-\alpha t) + g(\alpha t)) = 0, \text{ da } g \text{ ungerade ist},\\
u_1(\pi,t) &= \frac{1}{2}(g(\pi-\alpha t) + g(\pi+\alpha t)) = 0, \text{ da } g \text{ zusätzlich } 2\pi\text{-periodisch},\\
u_1(x,0) &= \frac{1}{2}2g(x) = g(x)\\
\partial_2 u_1(x,t) &= \frac{1}{2}(-\alpha g'(x-\alpha t) + \alpha g'(x+\alpha t))\\
\partial_2 u_1(x,0) &= 0\\
(\partial_2)^2 u_1(x,t) &= \frac{1}{2}(\alpha^2 g''(x-\alpha t) + \alpha^2 g''(x+\alpha t))\\
(\partial_1)^2 u_1(x,t) &= \frac{1}{2}(g''(x-\alpha t) + g''(x+\alpha t))
\end{aligned}$$

$$\alpha^2\,(\partial_2)^2 u_1 = (\partial_1)^2 u_1.$$

$(g = 0)$ h 1-mal diffb., $h(0) = 0 = h(\pi)$ $\quad h$ hat 1-mal diffb., 2π-periodische ungerade Fortsetzung; $H(x) := \int_0^x h(t)\,dt$.
H ist 2π-periodisch, da $\int_x^{x+2\pi} h = \int_{-\pi}^{\pi} h = 0$, da h ungerade;
H ist gerade, da $H(-x) = \int_0^{-x} h(t)\,dt = \int_0^x h(-s)(-1)ds = H(x)$.
$H(x) = \sum_{k\ge 0} C_k \cos(kx)$ mit $C_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi H(x)\cos(kx)\,dx$. $\quad h(x) = H'(x) = \sum_{k\le 0} -k\,C_k\,\sin(kx) = \sum_{k\ge 1} \alpha\,k\,B_k\,\sin(kx)$ mit $B_k := -\frac{C_k}{\alpha}$.

$$u_2(x,t) := \sum_{k\ge 1} B_k \underbrace{\sin(kx)\,\sin(\alpha k t)}_{\frac{1}{2}(\cos(k(x-\alpha t))-\cos(k(x+\alpha t)))} = \frac{1}{2\alpha}\Big(H(x+\alpha t) - H(x-\alpha t)\Big)$$

und es ist

$$\begin{aligned}
u_2(0,t) &= \frac{1}{2\alpha}(H(\alpha t) - H(-\alpha t)) = 0, \text{ da } H \text{ gerade;}\\
u_2(\pi,t) &= \frac{1}{2\alpha}(H(\pi+\alpha t) - H(\pi-\alpha t)) = 0, \text{ da } H\ 2\pi\text{-periodisch;}\\
u_2(x,0) &= \frac{1}{2\alpha}(H(x) - H(x)) = 0\\
\partial_2 u_2(x,t) &= \frac{1}{2\alpha}(\alpha H'(x+\alpha t) + \alpha H'(x-\alpha t))\\
\partial_2 u_2(x,0) &= H'(x) = h(x)\\
(\partial_2)^2 u_2(x,t) &= \frac{\alpha^2}{2\alpha}(H''(x+\alpha t) - H''(x-\alpha t)) = \alpha^2(\partial_1)^2 u_2(x,t).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
u(x,t) &:= u_1(x,t) + u_2(x,t)\\
&= \frac{1}{2}(g(x-\alpha t) + g(x+\alpha t)) + \frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} h\\
&= \sum_{k\ge 1} \sin(kx)\,\Big(A_k\cos(\alpha k t) + B_k \sin(\alpha k t)\Big)
\end{aligned}$$

eine Lösung, wobei

$$\begin{aligned}
A_k &:= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,\sin(kx)\,dx\\
B_k &:= \frac{2}{\alpha k \pi}\int_0^\pi h(x)\,\sin(kx)\,dx
\end{aligned}$$

Beachte, daß wir dabei Fourier-Reihen eigentlich nur dazu benutzt haben um die Gestalt der Lösung zu erraten.

Isoperimetrische Ungleichung.

Es sei f eine geschlossene Jordan-Kurve in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, L ihre Länge und A die eingeschlossene Fläche. Dann ist $L^2 \ge 4\pi A$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn f einen Kreis parametrisiert.

Beweis. Falls f nicht rektifizierbar, d.h. $L = \infty$ so gilt alles, d.h. O.B.d.A. f rektifizierbar. Wir zeigen es nur für stückweise C^1-Kurven mit $\forall t : f'(t) \ne 0$. O.B.d.A. sei f nach der Bogenlänge parametrisiert (siehe (9.4.5)), i.e. $|f'| = 1$. Wenn wir noch a affin umparametrisieren können wir

$[-\pi,\pi]$ als Parameterintervall voraussetzen, Wegen $|f'|$ konstant ist dann $L = \int_{-\pi}^{\pi} |f'| = 2\pi|f'|$. Sei $\sum_k c_k e^{ikx}$ die Fourier-Reihe von f, dann ist $\sum_k ikc_k\, e^{ikx}$ die Fourier-Reihe von f'.

$$\begin{aligned} L^2 = (2\pi|f'|)^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 = 2\pi\|f'\|_2^2 \\ \overset{(9.3.22)}{=\!=\!=} (2\pi)^2 \sum_k |ikc_k|^2 = 4\pi^2 \sum_k k^2 |c_k|^2. \end{aligned}$$

Nach (8.1.7) ist für einen C^1-Normalbereich dessen Rand durch $f = u + iv$ gegeben ist:

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (uv' - vu')\, dt.$$

Wegen

$$f \cdot \overline{f'} = (u + iv) \cdot (u' - iv') = \underbrace{(uu' + vv')}_{d(u^2+v^2)/2} - i(uv' - vu'),$$

ist

$$\langle f, f' \rangle_{\mathbb{C}} = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \overline{f'} \overset{(9.3.22)}{=\!=\!=} 2\pi \sum_k c_k \cdot \overline{ikc_k} = -2\pi i \sum_k k|c_k|^2.$$

$$\begin{aligned} A = -\frac{1}{2}\Im m\langle f, f' \rangle_{\mathbb{C}} = \pi \sum_k k|c_k|^2 \\ L^2 - 4\pi A = 4\pi^2 \sum_k (k^2 - k)|c_k|^2 \ge 0, \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $c_k = 0$ für $k^2 - k = k(k-1) \neq 0$, d.h. $k \notin \{0, 1\}$, also für $f(t) = c_0 + c_1 e^{it}$, eine Kreisparametrisierung. □

9.3.29 Fourier-Reihen-Bildung als Isomorphismus von Fréchet-Räumen.
Die Fourier-Koeffizienten liefern einen Isomorphismus von $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit dem Fréchet-Raum $s := \{(c_k)_k : k^n c_k \to 0$ für alle $n\}$ der schnell fallenden Folgen, wobei wir diesen Raum mit den Normen $\|(c_k)\|_p := \sup_k |c_k\, p(k)|$ versehen, wobei p alle Polynome durchläuft. Es genügt sich dabei auf Polynome der Form $p(k) := (k^2 + 1)^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ zu beschränken.

Unter einen Fréchet-Raum versteht man einen Vektorraum der nicht wie ein normierter Raum mit einer Norm, sondern mit abzählbar vielen (Semi-)Normen $\|\_\|_k$ versehen wurde und welcher bzgl. der dadurch erzeugten Metrik $d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x-y\|_k}{1+\|x-y\|_k}$ vollständig ist.

$$\begin{tikzcd} C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \arrow[r, "\mathcal{F}", "\cong"'] \arrow[d, hook] & s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \arrow[d, hook] \\ C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \arrow[d, hook] & \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \arrow[l, "\mathcal{F}^{-1}"'] \arrow[d, hook] \\ L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Beweis. Es sei $f \in C^\infty$, dann ist $f^{(n)} \in L^1$, also gilt nach dem Satz von Riemann-Lebesgue, daß die Fourier-Koeffizienten $(ik)^n\, c_k$ von $f^{(n)}$ in c_0 und somit jene von f in s liegen. Umgekehrt, falls $(c_k) \in s$, so ist $(ik)^{n+2} c_k \in \ell^\infty$ und damit $(ik)^n c_k \in \ell^1$. Folglich ist $f := \sum_k c_k \exp_k \in C^n$ für alle n, also $f \in C^\infty$. Die Abbildungen sind invers zueinander, einerseits, da das für (c_k) in ℓ^1 gilt, und andererseits, da es für absolut-stetige f gilt.

Das die Zuordnung sogar einen topologischen Isomorphismus liefert, folgt daraus, daß beides Fréchet-Räume sind, und die Punkt-Evaluationen stetig sind, siehe [30, 5.6 und 5.8]. Es genügt also die Beschränktheit von $f \mapsto c_k(f) = \langle f, \exp_k \rangle$ für fixes k und die von $(c_k) \mapsto \sum_k c_k\, e^{ikx}$ für fixes x zu zeigen. Diese folgen sofort aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. □

9.3.30 Verallgemeinerungen.

- Fourier-Reihen für andere partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung:
  Man kann die für die Schwingungsgleichung entwickelte Methode der Fourier-Reihen auch auf andere partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung anwenden um orthogonale Polynome als Eigenvektoren zu erhalten, siehe [30, 6.13].

- Fourier-Reihen von Distributionen:
  Durch Übergang zum adjungierten Operator $\mathcal{F}^* : s^* \to C^\infty(S^1, \mathbb{C})^*$ erhält man eine Isomophismus des Dualraums s^* der langsam wachsenden Folgen mit dem Dualraum $C^\infty(S^1, \mathbb{C})^*$ der Distributionen mit kompakten Träger, siehe [30, 5.11].

- Fourier-Tranformation:
  Durch Stauchung von glatten Funktionen mit kompakten Träger und periodisches Fortsetzen und Grenzübergang wird man zu einem Operator $\mathcal{F} : C^\infty_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ geführt, der Fourier-Transformation mit ganz ähnlichen Eigenschaften wie jenen der Fourier-Reihen. Durch geschickte Wahl eines Teilraums $C^\infty_c \subseteq \mathcal{S} \subseteq C^\infty$ der sogenannten schnell fallenden Funktionen erhält man einen Isomorphismus $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ und der adjungierte Operator $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$ ist dann ein Isomorphismus der Dualräume $\mathcal{S}^*$ der temperierten Distributionen. Dieser wurde von Malgrange und Ehrenpreis verwendet um die Lösbarkeit von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu zeigen, siehe [30, 8].

- Fourier-Tranformation für das Jpeg-Format:
  Die Fourier-Transformation spielt in Form der diskreten Cosinustransformation bei der Bild-Komprimierung im Jpeg-Verfahren eine entscheidende Rolle, siehe [32, 3.6.2].

  Es gibt auch zahlreiche andere Varianten von $\mathcal{F}$, z.B. die Laplacetransformation, die für das lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen sehr nützlich ist, und die Radon-Transformation, die für die Röntgentechnologie von essentieller Bedeutung ist.

- Harmonische Analyse:
  Es gibt eine weitreichende Verallgemeinerung von $\mathcal{F}$ indem man statt $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, S^1 eine beliebige lokalkompakte Gruppe G betrachtet. Darauf kann man eine unter links-Translationen invariante Lebesgue'sche Integrationstheorie entwickeln und damit einen Isomorphismus $\mathcal{F} : L^2(G) \cong L^2(\hat{G})$ erhalten, wobei $\hat{G} := \mathrm{Hom}(G, S^1)$ die lokalkompakte Gruppe der stetigen Gruppenhomomorphismen von G nach $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnet, siehe [31, 10.55] .

9.4 Variationsrechnung

9.4.1 Variationsproblem. Back to the roots.
Wir wollen in diesem Beispiel einige der klassischen Probleme behandeln, die bereits am Anfang der Entwicklung der Analysis um 1700 angegangen wurden und deren exakte Behandlung es nötig macht Analysis von Funktionen auf unendlich dimensionalen Banach-Räumen zu treiben.

Wir betrachten als Einstieg folgendes einfaches Problem: Gesucht sei eine Kurve minimaler Länge in der Ebene, die zwei vorgegebene Punkte verbindet. O.B.d.A. sei ein Punkte $(0,0)$ und der andere $(1,0)$. Die Länge des Graphens einer C^1-Abbildung $x:[0,1]\to\mathbb{R}$ ist durch

$$\varphi(x) := \int_0^1 \sqrt{1+x'(t)^2}\,dt$$

gegeben. Wir suchen also jene Funktion $x\in C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $x|_{\{0,1\}}=0$ für welche $\varphi(x)$ minimal ist, also ein Minimum der Funktion $\varphi:E\to\mathbb{R}$ auf dem unendlich dimensionalen Banach-Raum $E:=\{x\in C^1([0,1],\mathbb{R}): x(0)=0=x(1)\}$.

Wir formulieren diese Aufgabestellung gleich etwas allgemeiner um mehrere klassische Probleme aus den Anafngstagen der Analysis damit behandeln zu können: Sei

$$\varphi(x) := \int_a^b f(t,x(t),x'(t))\,dt$$

für $x:[a,b]\to W\subseteq F$ C^1 und $f:[a,b]\times W\times F\to\mathbb{R}$ C^2 mit $W\subseteq F$ offen in $F=\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner in einem Banach-Raum F). Dann ist $\varphi: C^1([a,b],F)\supseteq C^1([a,b],W)\to\mathbb{R}$ wohldefiniert. Ziel ist es (lokale) Extramalstellen dieser Funktion φ auf der offenen Teilmenge $U:=\{x\in C^1([a,b],F): x([a,b])\subseteq W,\ x(a)=x_a,\ x(b)=x_b\}$ des abgeschlossenen affinen Teilraums $E:=\{x\in C^1([a,b],F): x(a)=x_a,\ x(b)=x_b\}$ des unendlich-dimensionalen Banach-Raums $C^1([a,b],F)$ zu finden. Indem wir x durch $\tilde{x}: t\mapsto x(t)-x_a+\frac{t-a}{b-a}(x_b-x_a)$ ersetzt könne wir O.B.d.A. $x_a=0=x_b$ annehmen und dann ist E ein abgeschlossener linearer Teilraum des Banach-Raums $C^1([a,b],F)$ also selbst ein Banach-Raum. Falls $\xi\in U$ ein lokales Extremum ist, so verschwindet nach (6.4.2) die Richtungsableitung $d_v\varphi(\xi)$ von φ für alle Richtungen $v\in E$, d.h. x ist ein kritischer Punkt von φ.

Für diese Richtungsableitungen erhalten wir unter Verwendung von (6.1.22), partieller Integration und weil v an den Randpunkten verschwinden muß.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x)(v) &:= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi(x+tv)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_a^b f\Big(s,(x+tv)(s),(x+tv)'(s)\Big)\,ds\\
&\overset{(6.1.22)}{=\!=} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f\Big(s,(x+tv)(s),(x+tv)'(s)\Big)\,ds\\
&= \int_a^b\Big(\partial_2 f(s,x(s),x'(s))\cdot v(s) + \underbrace{\partial_3 f(s,x(s),x'(s))\cdot v'(s)}_{\frac{d}{ds}(\partial_3 f\cdot v)-\left(\frac{d}{ds}\partial_3 f\right)\cdot v}\Big)\,ds\\
&\overset{(6.1.9)}{=\!=} \int_a^b\Big(\partial_2 f(s,x(s),x'(s)) - \frac{d}{ds}\partial_3 f(s,x(s),x'(s))\Big)\cdot v(s)\,ds + \underbrace{\int_a^b \frac{d}{ds}(\partial_3 f\cdot v)\,ds}_{[\partial_2 f\cdot v]_a^b=0}
\end{aligned}$$

Um hier weiterzukommen benötigen wir das

9.4.2 Fundamentallemma der Variationsrechnung.
Es sei $x \in C([a,b], L(F,\mathbb{R}))$ derart, daß $\int_a^b x(t)\cdot v(t)\,dt = 0$ für alle $v \in C^\infty([a,b],F)$ mit $v|_{\{a,b\}} = 0$. Dann ist $x = 0$.

Beweis. Wir nehmen indirekt an, daß $x \neq 0$ ist, also ein $t_0 \in [a,b]$ mit $x(t_0) \neq 0$ existiert, und somit ein $v_0 \in F$ existiert mit $x(t_0)(v_0) \neq 0$ und sogar $x(t_0)(v_0) > 0$ indem wir nötigenfalls v_0 durch $-v_0$ ersetzen. Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto x(t)(v_0)$ können wir o.B.d.A. $a < t_0 < b$ voraussetzen und weiters ein $\delta > 0$ finden mit $a < \alpha := t_0 - \delta < t_0 + \delta =: \beta < b$ und $x(t)(v) > 0$ für $|t - t_0| \leq \delta$. Nach (7.5.2) finden wir eine glatte Funktion $0 \neq \rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\rho|_{\mathbb{R}\setminus(\alpha,\beta)} = 0$. Damit liegt $v : t \mapsto \rho(t)\, v_0$ in $C^\infty([a,b],F)$, verschwindet am Rand $\{a,b\}$ und

$$\int_a^b x(t)\cdot v(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \underbrace{\rho(t)}_{\geq 0}\, \underbrace{x(t)\cdot v_0}_{>0}\,dt > 0,$$

ein Widerspruch zu den Voraussetzungen. □

9.4.3 Folgerung. Euler-Lagrange Gleichung, [Euler 1747].
Es ist $x \in U$ genau dann ein kritischer Punkt für obiges Variationsproblem, wenn x die Euler-Lagrange Gleichung

$$\partial_2 f(s, x(s), x'(s)) = \frac{d}{ds}\partial_3 f(s, x(s), x'(s)) \text{ für alle } s,$$

eine (implizite) Differentialgleichung zweiter Ordnung für x, erfüllt

9.4.4 Spezialfälle.
Wir betrachten Situationen wo $f(t, x(t), x'(t))$ von jeweils einer der 3 Variablen t, $x(t)$ bzw. $x'(t)$ nicht abhängt:

1 Es hänge f nicht von der dritten Variable x' ab.
Dann ist die Euler-Lagrange-Gleichung $\partial_2 f(s, x(s)) = 0$, also eine gewöhnliche implizite Gleichung für x die wir mittels (6.2.4) unter geeigneten Voraussetzungen lösen können.

2 Es hänge nun f nicht von der zweiten Variable x ab. Dann ist die Euler-Lagrange-Gleichung $0 = \frac{d}{ds}\partial_2 f(s, x'(s))$, also $s \mapsto \partial_2 f(s, x'(s))$ konstant sagen wir c. Falls wir aus dieser impliziten Gleichung x' bestimmen können, so erhalten wir auch $x(t) = x_a + \int_a^t x'$.

3 Es hänge schließlich f nicht von der ersten Variable t ab. Dann ist die Euler-Lagrange-Gleichung $\partial_1 f(x(s), x'(s)) - \frac{d}{ds}\partial_2 f(x(s), x'(s)) = 0$ also

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\Big(f(x(s), x'(s)) - \partial_2 f(x(s), x'(s))\cdot x'(s)\Big) = \\
&\quad = \partial_1 f(x(s), x'(s))\cdot x'(s) + \partial_2 f(x(s), x'(s))\cdot x''(s) \\
&\qquad - \partial_2 f(x(s), x'(s))\cdot x''(s) - \partial_1\partial_2 f(x(s), x'(s))\cdot x'(s)\cdot x'(s) - \partial_2\partial_2 f(x(s), x'(s))\cdot x''(s)\cdot x'(s) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

nach dem Satz (6.3.10) von Schwarz. Somit ist

$$s \mapsto f(x(s), x'(s)) - \partial_2 f(x(s), x'(s))\cdot x'(s)$$

konstant, eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung für x.

9.4.5 Beispiel. Kürzeste Weg.
Nun zurück zum Problem der kürzesten Verbindungstrecke.

Da ist $f(t,x(t),x'(t)) = \sqrt{1+x'(t)^2}$. Also ist die Euler-Lagrange Gleichung nach (9.4.4.2) äquivalent zu

$$c = \partial_2 f(t,x'(t)) = \frac{2x'(t)}{2\sqrt{1+x'(t)^2}},$$

d.h. $(1+x'(t)^2)\cdot c^2 = x'(t)^2$, also entweder $x'(t)=0$ und damit x konstant falls $c=0$, oder unlösbar falls $c^2=1$, oder $x'(t)^2 = \frac{c^2}{1-c^2}$ fallls $c \notin \{0,1\}$, also x' konstant, d.h. x eine Gerade. Nur die erste Lösung mit $x'=0$ erfüllt die Randbedingungen, also ist der einzige Kandidat für die kürzeste Verbindung eine Gerade.

Besser ist für $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ das Funktional

$$\varphi(x) := \int_a^b \|x(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\langle x'(t)|x'(t)\rangle}\,dt$$

zu betrachten. Die Euler-Lagrange Gleichung besagt dann nach (9.4.4.2)

$$t \mapsto \frac{1}{|x'(t)|}\,x'(t) \text{ ist konstant}$$

Da die Länge einer Kurve nicht von der Parametrisierung abhängt können wir x mit konstanter skalarer Geschwindigkeit $|x'(t)|$ parametrisieren. In der Tat sei

$$s(t) := \int_a^t \|c'(\tau)\|\,\tau.$$

Dann ist s differenzierbar mit Ableitung $s'(t) = \|c'(t)\| > 0$ und somit $s:[a,b]\to[0,L]$ ein Diffeomorphismus. Für die Umkehrfunktion $h: s(t)\mapsto t$ ist dann $x\circ h$ eine Umparametrisierung von x mit

$$|(x\circ h)'(s(t))| = |x'(h(s(t)))\,h'(s(t))| = \frac{1}{s'(t)}|x'(t)| = \frac{|x'(t)|}{|x'(t)|} = 1.$$

Die Euler-Lagrange Gleichung besagt unter dieser Voraussetzung also

$$t \mapsto x'(t) \text{ ist konstant.}$$

Also parametrisiert x eine Gerade $t\mapsto c_0 + c_1\,t$ im $\mathbb{R}^n$.

Wir hätten dies auch ohne Variationsrechnung zeigen können. Denn o.B.d.A. seien die beiden Endpunkte $(0,0),(1,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}=\mathbb{R}^n$. Für $x=(x_0,\tilde{x}):[a,b]\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ und jede Zerlegung $Z=\{a=t_0<\dots<t_N=b\}$ ist die Länge

$$\begin{aligned} L(x) \ge V(x,Z) &= \sum_{i=1}^N \|x(t_i)-x(t_{i-1})\| \ge \sum_{i=1}^N |x_0(t_i)-x_0(t_{i-1})| \\ &\ge \Bigl|\sum_{i=1}^N x_0(t_i)-x_0(t_{i-1})\Bigr| = \Bigl|x_0(b)-x_0(a)\Bigr| = 1 \end{aligned}$$

und für die Parametrisierung $x(t) := (\frac{t-a}{b-a},0)$ der Strecke ist $L(x)=1$, also das Minimum. Wir werden aber gleich klassische Probleme behandeln, deren Minimum nicht so einfach gefunden werden kann.

9.4.6 Beispiel für die nicht-Lösbarkeit eines Variationsproblems.
Die Euler-Lagrange Gleichung liefert uns nur eine notwendige Bedingung für lokale Extrema. Im allgemeinen muß so ein Variationsproblem gar keine Lösung besitzen. Sei dazu $\varphi(x) := \int_0^1 x(t)^2\,dt$ und $x\in C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $x(0)=0$ und $x(1)=1$ sind gesucht. Die Euler-Lagrange Gleichung lautet dann $2x(t)=0$, dies erfüllt aber nicht die Randbedingungen. Offensichtlich ist $\inf\{\varphi(x):x\}=0$, denn dazu

betrachte man stetige Funktionen die auf $[0,1-\delta]$ gleich 0 sind. Hingegen existiert kein x welches die Randbedingung erfüllt mit $\varphi(x)=0$.

9.4.7 Hamilton-Prinzip.
Es sei ein konservatives Kraftfeld f am $\mathbb{R}^n$ vorgegeben, d.h. es existiert ein zugehöriges Potential $U:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} U=-f$. Es beschreibe $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ die Bahn eines Massepunktes in Kraftfeld f, also eine Lösung des Newton'sche Kraftgesetzes

$$f(x(t)) = m\,x''(t).$$

Die Arbeit die dabei von $x_0:=x(t_0)$ nach $x_1:=x(t_1)$ zu leisten ist, ist durch

$$A(x_0,x_1) := \int_x f := \int_{t_0}^{t_1}\langle f(x(t))|x'(t)\rangle\,dt = -U(x(t_1))-(-U(x(t_0))) = U(x_0)-U(x_1)$$

gegeben. Dies ist aber auch

$$A(x_0,x_1) = \int_{t_0}^{t_1}\langle f(x(t))|x'(t)\rangle = \int_{t_0}^{t_1}\langle m\,x''(t)|x'(t)\rangle = m\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x'(t)\|_2^2\,dt = \frac{m}{2}\left(|x'(t_1)|^2-|x'(t_0)|^2\right).$$

Wenn wir wie üblich mit $U(x(t))$ die POTENTIELLE ENERGIE und mit $\frac{m^2}{2}x'(t)^2$ die KINETISCHE ENERGIE des Massepunktes x zum Zeitpunkt t bezeichnen, so ist somit

$$U(x(t_0))+\frac{m}{2}|x'(t_0)|^2 = U(x(t_1))+\frac{m}{2}|x'(t_1)|^2,$$

also die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant. Dies ist der ENERGIEERHALTUNGSSATZ.

Wir wollen das Newton'sche Kraftgesetz nun als Euler-Lagrange Gleichung eines Variationsproblems identifizieren, sei dazu die sogenannte LAGRANGE-FUNKTION

$$L(x(t),x'(t)) := \frac{m}{2}|x'(t)|^2 - U(x(t))$$

also die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie. Das zugehörige Funktional φ gegeben durch

$$\varphi(x) := \int_{t_0}^{t_1} L(x(t),x'(t))\,dt$$

heißt WIRKUNGSINTEGRAL und die Euler-Lagrange Gleichung dafür ist

$$\frac{d}{dt}\partial_2 L - \partial_1 L = \frac{d}{dt}mx'(t) + \operatorname{grad} U\,x(t) = mx''(t) - f(x(t)),$$

also das Newton-Gesetz. Man kann dieses also in das HAMILTON'SCHE PRINZIP umformulieren, daß die Bahn eines Systems in einen konservativen Kraftfeld durch die kritischen Punkte des Wirkungsintegrals beschrieben wird.

9.4.8 Beispiel. Harmonischer Oszillator.
Ein Massepunkt bewege sich in $\mathbb{R}$ und habe im Abstand x vom 0-Punkt die potentielle Energie $U(x):=\frac{1}{2}k^2x^2$ mit einer positiven Konstanten $k>0$. Dies tritt z.B. auf, wenn x durch eine Feder mit dem 0-Punkt verbunden ist. Seine kinetische Energie ist somit $T(x,x')=\frac{1}{2}m\,(x')^2$ und die Lagrange-Funktion ist

$$L(x,x') = \frac{1}{2}\left(m\,(x')^2 - k^2\,x^2\right)$$

Dann ist die Euler-Lagrange Gleichung

$$0 = \partial_2 L - \frac{d}{dt}\partial_3 L = -k^2x - \frac{d}{dt}m\,x' = -(k^2\,x + m\,x''),$$

also die Gleichung des sogenannten HARMONISCHEN OSZILLATORS

$$x''(t) = -\omega^2\, x'(t) \text{ mit } \omega = \frac{k}{\sqrt{m}}.$$

Deren allgemeine Lösung wird durch

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

beschrieben und aus gegebenen Anfangsdaten $x(0)$ und $x'(0)$ können wir die Konstanten C_1 und C_2 bestimmen und erhalten

$$x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{x'(0)}{\omega}\sin(\omega(t)).$$

9.4.9 Beispiel. Brachistochrone. Johann Bernoulli 1696 [5].

> Die scharfsinnigsten Mathematiker des ganzen Erdkreises grüsst Johann Bernoulli, öffentlicher Professor der Mathematik.
>
> Da die Erfahrung zeigt, dass edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nützliche Aufgaben vorlegt, durch deren Lösung sie einen berühmten Namen erlangen und sich bei der Nachwelt ein ewiges Denkmal setzen, so hoffte ich den Dank der mathematischen Welt zu verdienen, wenn ich nach dem Beispiele von Männern wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen, welche vor mir dasselbe thaten, den ausgezeichnetsten Analysten dieser Zeit eine Aufgabe vorlegte, damit sie daran, wie an einem Prüfsteine, die Güte ihrer Methoden beurtheilen, ihre Kräfte erproben und, wenn sie etwas fänden, mir mittheilen könnten; dann wurde einem jeden öffentlich sein verdientes Lob von mir zu Theil geworden sein. Nun habe ich vor einem halben Jahre im Junihefte der Leipziger Acta Eruditorum eine solche Aufgabe vorgelegt, deren Nützlichkeit und Schönheit alle erkennen werden, die sich erfolgreich mit ihr beschäftigen. *Ankündigung, herausgegeben Gröningen, Januar 1697*

Gesucht ist eine Kurve die zwei gegebene Punkte so verbindet, daß ein Massepunkt welcher längs dieser Kurve reibungsfrei gleitet die kürzeste Zeit benötigt. Der Name BRACHISTROCHRONE für die Lösung dieses Problems kommt vom altgriechischen $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\zeta$ (kürzeste) $\chi\rho o\nu o\zeta$ (Zeit). Galileo dachte die Lösung sei ein Kreisbogen.

Sei dazu der eine Punkt der Nullpunkt und die y-Achse weise nach unten. Die skalare Geschwindigkeit des Körpers im Punkt (x, y) ist dann durch $\sqrt{2\,g\,y}$ gegeben, denn nach dem Energieerhaltungssatz ist $m\frac{v^2}{2} = m\,g\,y$. Es sei $s(t)$ der bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weg, also $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2\,g\,y}$ und somit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\sqrt{2\,g\,y}$$

also

$$t = \int dt = \int \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2\,g\,y(x)}}\,dx =: \varphi(y)$$

die Zeit welche bis zum Punkt (x, y) benötigt wird. Die Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung ist nach (9.4.4.3) äquivalent zu:

$$\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} - \frac{y'(x)^2}{\sqrt{y(x)(1 + y'(x)^2)}} = 0,$$

also

$$y(x) \cdot \Big(1 + y'(x)^2\Big) = c.$$

Wir verwenden die Substitution $y'(x) = \cot(\tau)$, also $\tau(x) = \operatorname{arccot} y'(x)$. Dann ist

$$y(x) = \frac{c}{1+\cot(\tau)^2} = c\,\sin(\tau)^2 = \frac{c}{2}\Big(1-\cos(2\tau)\Big)$$

und somit

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{y'(x)}\,\frac{c}{2}(2\sin(2\tau)) = \tan(\tau)\,c\,2\,\sin(\tau)\,\cos(\tau) = 2\,c\,\cos(\tau)^2 = c\,(1-\cos(2\tau))$$

und schließlich

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{c}{2}\Big(2\tau - \sin(2\tau)\Big) + c_0 \\ y(\tau) &= \frac{c}{2}\Big(1-\cos(2\tau)\Big) \end{aligned}$$

die Parametrisierung einer Zykloide. Aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 = x(\tau_0) &= \frac{c}{2}\Big(2\tau_0 - \sin(2\tau_0)\Big) + c_0 \\ 0 = y(\tau_0) &= \frac{c}{2}\Big(1-\cos(2\tau_0)\Big) \\ x_1 = x(\tau_1) &= \frac{c}{2}\Big(2\tau_1 - \sin(2\tau_1)\Big) + c_0 \\ y_1 = y(\tau_1) &= \frac{c}{2}\Big(1-\cos(2\tau_1)\Big) \end{aligned}$$

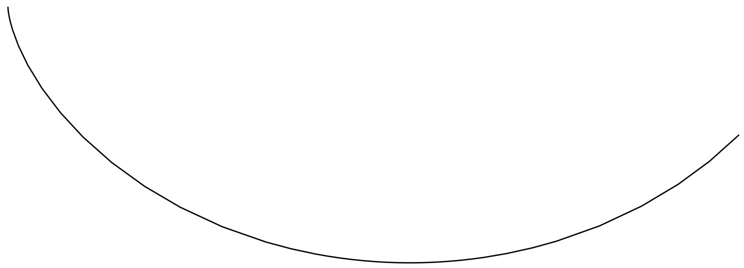
folgt $\tau_0 \in k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, weiters $c_0 = -c\,k\,\pi$ und wenn wir den Parameter τ durch $\tau - \tau_0$ ersetzen ist somit $c_0 = 0$ und

$$x_1 = \frac{c}{2}\Big(2\tau_1 - \sin(2\tau_1)\Big) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{c}{2}\Big(1-\cos(2\tau_1)\Big)$$

also

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{2\tau_1 - \sin(2\tau_1)}{1-\cos(2\tau_1)} \quad \text{und} \quad c = \frac{2y_1}{1-\cos(2\tau_1)}.$$

Da $\tau_1 \mapsto \frac{2\tau_1-\sin(2\tau_1)}{1-\cos(2\tau_1)}$ ein Diffeomorphismus $[0,\pi] \to [0,+\infty]$ ist lassen sich aus obigen Gleichungen $\tau_1 \in [0,\pi)$ und $c > 0$ eindeutig bestimmen. Falls $x_1/y_1 > \pi/2$ so ist $\tau_1 > \pi$ und somit liegt die Lösung zeitweise sogar unterhalb des Endpunktes.



9.4.10 Beispiel. Minimale Rotationsflächen.
Die Oberfläche des Rotationskörpers, der durch $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschrieben wird, ist durch

$$\varphi(x) = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{1+x'(t)^2}\,dt$$

gegeben. Die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung liefert nach (9.4.4.3)

$$x(t)\sqrt{1+x'(t)^2} - x(t)\,\frac{x'(t)^2}{\sqrt{1+x'(t)^2}} = c$$

also

$$x(t) = c\,\sqrt{1 + x'(t)^2}.$$

Wir betrachten die Substitution $x'(t) = \sinh(s)$, also $s(t) = \operatorname{Arsinh}(x'(t))$. Dann lautet die Euler-Gleichung:

$$x(t) = c\,\cosh(s),$$

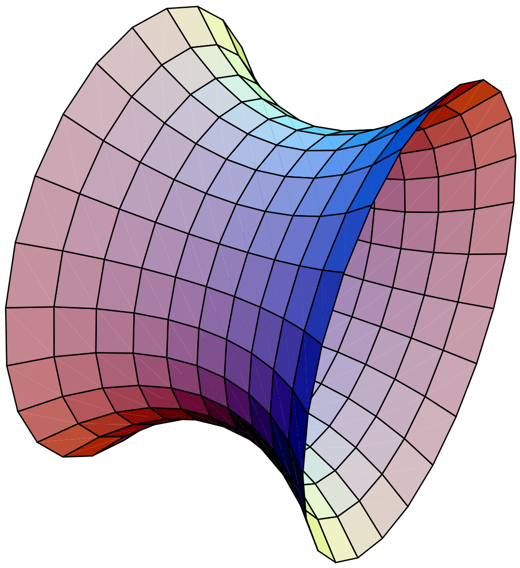
also ist

$$\sinh(s)\,\frac{dt}{ds} = x'(t)\,\frac{dt}{ds} = c\,\sinh(s),$$

d.h. $\frac{dt}{ds} = c$ und somit $t = c\,s + c_0$ also

$$x(t) = c\,\cosh(\frac{t-c_0}{c})$$

eine Kettenlinie.
Diese Drehfläche heißt Katenoid.
Beachte allerdings, daß es im Allgemeinen nicht so einfach ist aus den Randwerten $x(a) = x_a$ und $x(b) = x_b$ die Konstanten c und c_0 zu bestimmen. Falls $x_a = x_b =: r$ ist, so muß $\frac{a-c_0}{c} = -\frac{b-c_0}{c}$ sein, also $c_0 = \frac{a+b}{2}$ und somit c Lösung der Gleichung $r = c\,\cosh(\frac{a-b}{2c})$.



9.4.11 Mehrdimensionales Variationsproblem.
Wenn wir nun Minimalflächen finden wollen, die keine Rotationsflächen sind, so müssen wir Extremalstellen $x : \mathbb{R}^n \supseteq B \to W \subseteq E$ von

$$\varphi(x) := \int_B f(u, x(u), x'(u))\,du$$

mit $f : B \times W \times L(\mathbb{R}^p, E) \to \mathbb{R}$ finden. Analog zu (9.4.1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi'(x)(h) &:= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(x+th)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_B f\Big(u, (x+th)(u), (x+th)'(u)\Big)\,du\\
&\overset{(7.2.15)}{=\!=} \int_B \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f\Big(u, (x+th)(u), (x+th)'(u)\Big)\,du\\
&= \int_B \Big(\partial_2 f(u, x(u), x'(u)) \cdot h(u) + \partial_3 f(u, x(u), x'(u)) \cdot h'(u)\,du =^{*)}
\end{aligned}$$

wobei $\partial_3 f(u, x(u), x'(u)) : E^p \cong L(\mathbb{R}^p, E) \to \mathbb{R}$ linear und $h : \mathbb{R}^n \supseteq B \to E$. Sei das Vektorfeld g auf B gegeben durch

$$g : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \Big(\partial_{2+i} f(u, x(u), \partial_1 x(u), \dots, \partial_n x(u)) \cdot h(u)\Big)_{i=1}^n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} g\,(u) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u^i}\Big(\partial_{2+i} f(u, x(u), \partial_1 x(u), \dots, \partial_n x(u)) \cdot h(u)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\partial_{2+i} f(u, x(u), \partial_1 x(u), \dots, \partial_n x(u))\Big) \cdot h(u) +\\
&\qquad + \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_{2+i} f(u, x(u), \partial_1 x(u), \dots, \partial_n x(u)) \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} h(u)}_{\partial_3 f(u, x(u), x'(u)) \cdot h'(u)}
\end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned}
\varphi'(x)(h) = {}^{*)} = \int_B &\Big(\partial_2 f(u, x(u), x'(u)) \cdot h(u)\\
&- \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\partial_{2+i} f(u, x(u), \partial_1 x(u), \dots, \partial_n x(u))\Big) \cdot h(u) + \operatorname{div} g\,(u)\,du\\
\overset{(8.1.7)}{=\!=\!=} \int_B &\Big(\partial_2 f(u, x(u), x'(u)) \cdot h(u)\\
&- \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\partial_{2+i} f(u, x(u), \partial_1 x(u), \dots, \partial_n x(u))\Big) \cdot h(u)\,du + \underbrace{\int_{\partial B} g(u)\,du}_{=0},
\end{aligned}$$

da $h|_{\partial B} = 0$.

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert somit die sogenannte Ostrogradskij'sche Differentialgleichung [Ostrogradskij 1834]

$$\partial_2 f(u, x(u), x'(u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u^i}\Big(\partial_{2+i} f(u, x(u), \partial_1 x(u), \dots, \partial_n x(u))\Big)$$

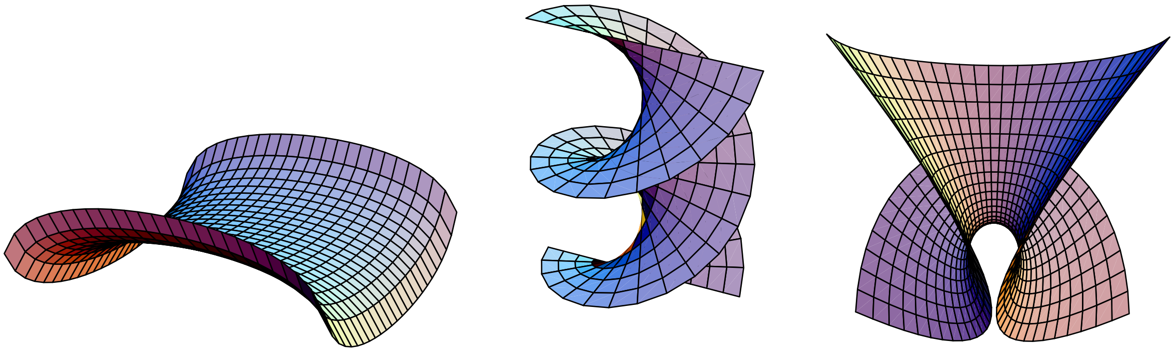
eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

9.4.12 Beispiel. Minimalflächen.
Eine Anwendung besteht in der Bestimmung von Minimalflächen. Es beschreibe $x : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ den Graph einer Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Deren Oberfläche ist durch

$$\varphi(x) := \int_B \sqrt{1 + (\partial_1 x)^2 + (\partial_2 x)^2}$$

gegeben. Die Ostrogradskij'sche Differentialgleichung für die Extremalpunkte diese Problems, die sogenannten Minimalflächen, lautet:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^i}\partial_{2+i} f(u, x(u), x'(u))\\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial_i x(u)}{\sqrt{1 + (\partial_1 x(u))^2 + (\partial_2 x(u))^2}}\\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial_i^2 x(u)}{\sqrt{1 + (\partial_1 x(u))^2 + (\partial_2 x(u))^2}} - \frac{1}{2}\frac{\partial_i x(u)}{\sqrt{1 + (\partial_1 x(u))^2 + (\partial_2 x(u))^2}^3}\, 2\,(\partial_i\partial_1 x(u)\,\partial_1 x(u) + \partial_i\partial_2 x(u)\,\partial_2 x(u))\\
&= \frac{(\partial_1^2 x + \partial_2^2 x)(1 + (\partial_1 x)^2) + (\partial_2 x)^2) - (\partial_1 x)^2\,(\partial_1^2 x) - 2(\partial_1\partial_2 x)\,(\partial_1 x)(\partial_2 x) - (\partial_2 x)^2\,(\partial_2^2 x)}{\sqrt{1 + (\partial_1 x(u))^2 + (\partial_2 x(u))^2}^3}\\
&= \frac{\partial_1^2 x\,(1 + (\partial_1 x)^2) - 2(\partial_1\partial_2 x)\,(\partial_1 x)(\partial_2 x) + \partial_2^2 x\,(1 + (\partial_2 x)^2)}{\sqrt{1 + (\partial_1 x(u))^2 + (\partial_2 x(u))^2}^3}.
\end{aligned}$$



Für eine weitergehende Analyse von Minimalflächen sei auf [28] verwiesen.

9.4.16 Variationsproblem mit Nebenbedingung.
Wenn wir nun das Problem der kürzesten Verbindung nicht in einem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sondern in einer (implizit gegebenen) Fläche $S := g^{-1}(0)$ mit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ angehen wollen, so ist hier ein Variationsproblem "Länge→Minimum" unter der Nebenbedingung "Kurve liegt in S" zu lösen.

Sei also allgemeiner $x : [a, b] \to W \subseteq E$ ein kritischer Punkt von

$$\varphi(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, dt$$

unter der Nebenbedingung

$$g(t, x(t)) = 0 \text{ für alle } t \in [a, b],$$

wobei

$$f : [a, b] \times W \times E \to \mathbb{R} \text{ und } g : [a, b] \times W \to \mathbb{R}^k.$$

Wir gehen dazu ähnlich wie bei der Methode der Lagrange Multiplikatoren in (6.4.9) vor und betrachten die neue Funktion

$$\tilde\varphi(x) := \int_a^b \tilde f(t, x(t), x'(t))\, dt = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(t) \cdot g_i(t, x(t))\, dt$$

mit Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ und

$$\tilde f(t, x(t), x'(t)) = f(t, x(t), x'(t)) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(t) \cdot g_i(t, x(t))$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen für $\tilde\varphi$ lauten

$$\partial_2 \tilde f(t, x(t), x'(t)) = \frac{d}{dt} \partial_3 \tilde f(t, x(t), x'(t))$$

und zusätzlich muß $g(t, x(t)) = 0$ erfüllt sein.

Wir können hoffen aus diesen $n+k$ vielen Gleichungen die $n+k$ vielen Funktionen $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ berechnen zu können.

Dann ist aber auch $x_1, \ldots, x_n$ eine Extremalstelle des ursprünglichen Systems, denn für x mit $g_i(t, x(t)) = 0$ ist $\varphi(x) = \tilde\varphi(x)$.

Es gilt auch die Umkehrung wie folgende Proposition zeigt.

9.4.17 Proposition.
Es sei $x : \mathbb{R}^n \supseteq U \to W \subseteq E$ eine Extremalstelle von

$$\varphi(x) := \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, dt$$

unter der Nebenbedingung

$$g(t, x(t)) = 0,$$

wobei $g : [a, b] \times W \to \mathbb{R}^m$ mit $m < n$. Falls $\partial_2 g(t, x(t)) : E \to \mathbb{R}^m$ surjektiv für alle $t \in [a, b]$ ist, so existieren $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ so, daß $\tilde{x} := (x, \lambda)$ die Euler-Gleichungen

$$\partial_2 \tilde{f}(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)) = \frac{d}{dt} \partial_3 \tilde{f}(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t))$$

von

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) + \langle \lambda(t) | g(t, x(t)) \rangle\, dt$$

erfüllen.

Beweis. O.B.d.A. sei die Untermatrix $\partial_{2'} g(t, x(t)) = 0$, wobei $2'$ die ersten m-Koordinaten der zweiten Variable $x(t)$ bezeichne. Es sei $x_s(t) := x(t, s)$ eine Variation bzgl. s einer Extremalstelle $t \mapsto x(t)$. Also ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \varphi(x_s) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \int_a^b f(t, x_s(t), x_s'(t))\, dt \\
&= \int_a^b \partial_2 f(t, x_s(t), x_s'(t))\ \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} x_s(t) + \partial_3 f(t, x_s(t), x_s'(t))\ \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} x_s'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \partial_2 f(t, x_s(t), x_s'(t))\ \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} x_s(t) + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Big(\partial_3 f(t, x_s(t), x_s'(t))\, x_s'(t) \Big) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Big(\partial_3 f(t, x_s(t), x_s'(t)) \Big)\, x_s'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \Big(\partial_2 f - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \partial_3 f \Big) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} x_s(t)\, dt + 0.
\end{aligned}$$

Aus $g(t, x_s(t)) = 0$ folgt

$$\partial_2 g(t, x_s(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} x_s(t) = 0$$

und somit für beliebige λ auch

$$\sum_i \lambda_i(x) \cdot \partial_2 g_i(t, x_s(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} x_s(t) = 0.$$

Also ist auch

$$0 = \int_a^b \Big(\partial_2 f + \sum_i \lambda_i \cdot \partial_2 g_i - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \partial_3 f \Big) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} x_s(t)\, dt.$$

Wir bestimmen nun eine Funktion $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ eindeutig aus

$$\partial_{2'} f(t, x(t), x'(t)) + \sum_j \lambda_i(t) \cdot \partial_{2'} g(t, x(t)) - \frac{d}{dt} \partial_{3'} f(t, x(t), x(s)) = 0$$

wobei wir nun nach den Variablen $x_1, \dots, x_m$ bzw. $x_1', \dots, x_m'$ differenzieren. Dann ist die vorige Bedingung ident zu

$$0 = \int_a^b \Big(\partial_{2''} f + \sum_i \lambda_i \cdot \partial_{2''} g_i - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \partial_{3''} f \Big) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} x_s(t)\, dt,$$

wobei wir hier nach den reslichen $x_{m+1}, \dots, x_m$ und $x'_{m+1}, \dots, x'_n$ differenzieren. Die entsprechenden Koordinaten von $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} x_s(t)$ können jedoch willkürlich gewählt werden, also ist nach dem Fundamentallemma

$$\partial_{2''} f + \sum_i \lambda_i \cdot \partial_{2''} g_i - \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \partial_{3''} f = 0$$

und nach Wahl von λ auch

$$\partial_{2'} f(t, x(t), x'(t)) + \sum_j \lambda_i(t) \cdot \partial_{2'} g(t, x(t)) - \frac{d}{dt} \partial_{3'} f(t, x(t), x(s)) = 0.$$

Zusammen mit $g(t, x(t)) = 0$ sind dies die Euler-Gleichungen für

$$\tilde{f}(t, \tilde{x}, \tilde{x}') = f(t, x, x') - \langle \lambda(t) | g(t, x(t)) \rangle. \quad \square$$

9.4.18 Beispiel. Geodätengleichung. Johann Bernoulli 1697.
Gesucht ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Fläche $g^{-1}(0)$. Dies ist ein Variationsproblem mit Nebenbedingung, dessen kritischen Punkte heißen.

O.B.d.A. verwenden wir x als Parameter der Kurve. Ihre Bogenlänge ist dann

$$\varphi(y, z) = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}\, dx$$

und die Nebenbedingung ist

$$g(x, y(x), z(x)) = 0$$

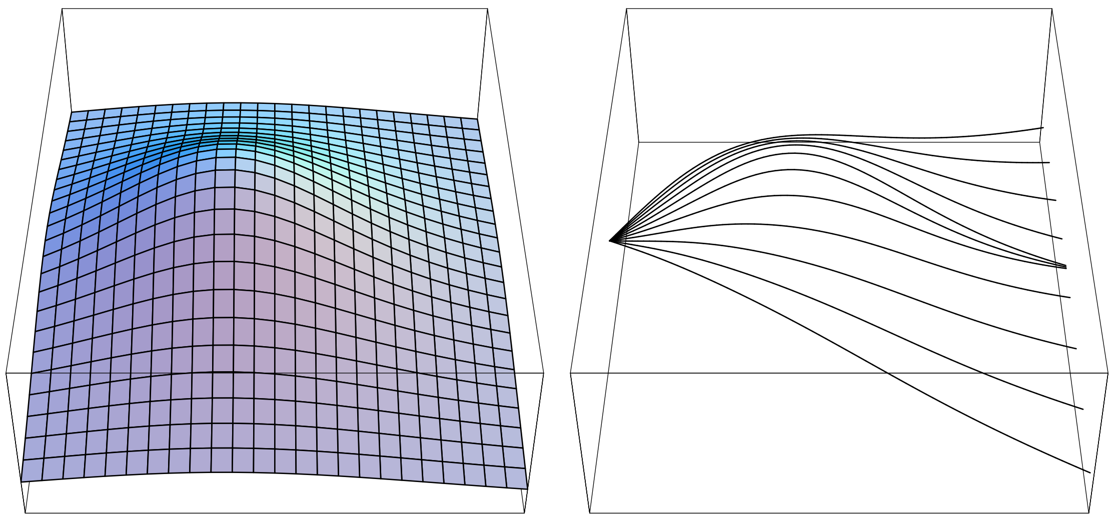
also ist die Euler-Lagrange Gleichung des assoziierten Problems

$$\tilde{\varphi}(y, z, \lambda) := \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} + \lambda(x)\, g(x, y(x), z(x))\, dx$$

gerade

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(x) \frac{d}{dy} g - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} \\ 0 &= \lambda(x) \frac{d}{dz} g - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} \\ 0 &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

Daraus läßt sich λ, y und z bestimmen.



Allgemeiner liefert die Euler-Lagrange Gleichung von $\tilde{f}(c,c') := \int_0^1 |c'(t)| + \lambda(t)\, g(c(t))\, dt$:

$$\begin{aligned}\lambda(t)\ \operatorname{grad} g\,(c(t)) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{|c'(t)|}\,c'(t)\\ g(c(t)) &= 0\end{aligned}$$

Wenn wir O.B.d.A. $|c'(t)|$ konstant setzen, dann ist somit $c''(t)$ proportional zu $\operatorname{grad} g'(c(t))$, steht also normal auf die Fläche. Geodäten sind somit derart gestaltet, daß die Beschleunigung die sie erfahren nur dazu dient sie auf der Fläche $g^{-1}(0)$ zu halten.

Für eine weitergehende Diskussion von Geodäten sei auf [28] verwiesen.

9.4.22 Bemerkung. Differentialgleichungen als Nebenbedingungen.
Falls die Nebenbedingungen (implizite) Differentialgleichungen der Form

$$g(t, x(t), x'(t)) = 0$$

mit $g : [a,b] \times W \times E \to \mathbb{R}^k$ sind, dann können wir wie zuvor f durch

$$\tilde{f}(t, x(t), x'(t)) = f(t, x(t), x'(t)) + \sum_i \lambda_i(t) \cdot g_i(t, x(t), x'(t))$$

ersetzen und die entsprechende Euler-Lagrange Gleichung lösen. Für einen Beweis analog zu (9.4.17) siehe z.B. [17, S120ff].

9.4.23 Bemerkung. Integrale als Nebenbedingungen.
Wenn wir nun des isoperimetrische Problem angehen wollen, d.h. unter allen einfach geschlossenen Kurven in $\mathbb{R}^2$ mit gegebener Länge L jene zu finden, die maximalen Fläche einschließt, so müssen wir ein Variationsproblem folgender Art lösen: Gesucht sind die Extremalstellen $x : [a,b] \to W \subseteq E$ von

$$\varphi(x) := \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, dt$$

unter Nebenbedingungen der Form

$$\gamma(x) := \int_a^b g(t, x(t), x'(t))\, dt = 0$$

mit $g : [a,b] \times W \times E \to \mathbb{R}^k$. Beim isoperimetrische Problem ist

$$f(t, x(t), x'(t)) := \frac{1}{2}\int_a^b x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)\, dt$$

und

$$g(t, x(t), x'(t)) := \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2} - \frac{L}{b-a}.$$

Sei $z(t) := \int_a^t g(t, x(t), x'(t))$ oder äquivalent

$$z'(t) = g(t, x(t), x'(t)) \text{ und } z(a) = 0,$$

also Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Dann können wir die Methode aus (9.4.22) anwenden und gewöhnliche Extrema $\tilde{x} := (x, z)$ von

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) := \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) + \sum_i \lambda_i(t) \cdot (g_i(t, x(t), x'(t)) - z_i(t))\, dt$$

suchen. Die Euler-Lagrange Gleichungen dafür sind

$$\partial_2 f + \sum_i \lambda_i \, \partial_2 g_i = \frac{d}{dt}(\partial_3 f + \sum_i \lambda_i \partial_3 g_i)$$
$$0 = \lambda_i' \text{ für } i = 1, \ldots, k$$

also sind die λ_i konstant und die erste Gleichung ist die Euler-Lagrange Gleichung für

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x) := \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) + \sum_i \lambda_i \cdot g_i(t, x(t), x'(t)) \, dt.$$

Die Konstanten der allgemeinen Lösung dieser Euler-Lagrange Gleichung sowie die λ_i lassen sich aus den Randbedingungen für $x(a)$ und $x(b)$ und der Nebenbedingung $\int_a^b g = 0$ bestimmen. Für Beispiele siehe [17, SS125].

9.4.24 Beispiel. Isoperimetrisches Problem.
Es sei eine Kurve $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit vorgegebener Länge

$$g(y) := \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx$$

gesucht, s.d. die Fläche

$$\varphi(y) := \int_0^1 y(x) \, dx$$

maximal wird. Das Hilfsfunktional $\tilde{\varphi}$ ist dann

$$\tilde{\varphi}(y) := \int_0^1 y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx$$

und die Euler-Lagrange Gleichung liefert

$$y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{\lambda y'(x)^2}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = c$$

also

$$y(x) - c = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

Die Substitution $\frac{dy}{dx} = y'(x) = \tan(s)$ liefert

$$y(x) - c = -\lambda \cos(s)$$

und

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\tan(s)} \cdot \lambda \sin(s) = \lambda \cos(s)$$

also parametrisiert

$$x(s) = \lambda \sin(s) + c_1$$
$$y(s) = -\lambda \cos(s) + c$$

einen Kreis.

9.4.25 Kettenlinie.
Eine Kette sei zwischen zwei Punkten aufgehängt. Die Gleichgewichtslage liegt dort wo der Schwerpunkt am tiefsten zu liegen kommt, also

$$\varphi(y) := \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx$$

ein Minimum animmt unter der Nebenbedingung

$$g(y) := \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = L.$$

Das Hilfsfunktional ist

$$\tilde\varphi(y) := \int_a^b (y(x)+\lambda)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

und die Euler-Lagrange Bedingung liefert:

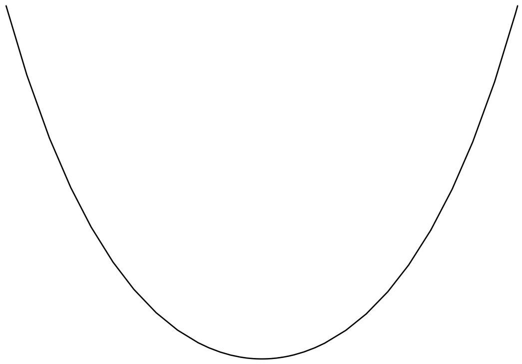
$$(y(x)+\lambda)\sqrt{1+y'(x)^2} - \frac{(y(x)+\lambda)y'(x)^2}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = c$$

also

$$y(x)+\lambda = c\sqrt{1+y'(x)^2}.$$

Substitution $\frac{dy}{dx} = y'(x) = \sinh(s)$ liefert

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y'(x)^2} &= \cosh(s),\\ y(x)+\lambda &= c\,\cosh(s)\end{aligned}$$



und somit

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sinh(s)}\cdot c\sinh(s) = c\\ &\Rightarrow x(s) = c\,s + c_1,\end{aligned}$$

also beschreibt die Lösung eine Kettenlinie:

$$y(x)+\lambda = c\,\cosh\left(\frac{x-c_1}{c}\right).$$

Epilog

Ich hoffe, dieser zugegebenermaßen nicht immer ganz einfache Weg durch die Grundlagen der Analysis hat die Hörer- bzw. LeserInnen von der Brauchbarkeit der dabei entwickelten Methoden überzeugt und klargemacht, daß auch die teilweise sehr allgemeinen bzw. abstrakten Teile für ein wirkliches Verständnis vieler der bereits am historischen Anfang der Analysis stehenden Probleme essentiell sind. Natürlich würden mich jegliche Rückmeldungen darüber freuen, ob diese meine Ansicht sich bei den weiteren Studien oder Berufsleben auch bewahrheitet, bzw. falls nicht, was gefehlt hat oder was als unnötig empfunden wurde.

Ich möchte bei diese Gelegenheit meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für all die Fragen, Anmerkungen und Anregungen, die ich von HöherInnen erhalten habe und die dadurch zu einem Gelingen dieser Vorlesung entscheidend beigetragen haben.

Bleibt mir nur noch viele Freude und Aha-Erlebnisse bei der weiteren Beschäftigung mit der Mathematik zu wünschen,

Andreas Kriegl, Wien im Jänner 2005

Literatur

[1] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis.* Springer, 1985. Hochschultext.

[2] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis II.* Grundstudium Mathematik. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 1999.

[3] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis III.* Grundstudium Mathematik. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2001.

[4] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis I.* Grundstudium Mathematik. Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2002.

[5] Johann Bernoulli. The Bergman kernel of biholomorphic mappings of pseudo convex domains. *Acta Eruditorum*, page 269, June 1696. 142

[6] Christian Blatter. *Analysis 1*, volume 151 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[7] Christian Blatter. *Analysis 2*, volume 152 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[8] Christian Blatter. *Analysis 3*, volume 153 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1974.

[9] Theodor Bröcker and Klaus Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*, volume 143 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1970.

[10] Lennart Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.*, 116:135–157, 1966. 120, 128, 129

[11] C. O. Christenson and W. L. Voxman. *Aspects of Topology.* BCS Asociate, Moscow, Idaho, USA, 1998. ISBN: 0-914351-08-07

[12] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, volume 96. Springer, 1985. Graduate Texts in Maths. 120

[13] Richard Courant. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1.* Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 4 edition, 1971.

[14] Richard Courant. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 2.* Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 4 edition, 1971.

[15] Jean Dieudonné. *Foundations of modern analysis, I.* Academic Press, New York – London, 1960.

[16] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Multidimensional Real Analysis II: Integration.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004. ISBN 0 521 82925 9. 56, 59

[17] L.E. Elsgolc. *Variationsrechnung*, volume 431 of *B.I.Hochschultaschenbücher.* Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1970. 149, 150

[18] Ryszard Engelking. *General Topology.* Heldermann, Berlin, 1989. ISBN: 3-88538-006-4

[19] Alberto Guzman. *Derivatives and Integrals of Multivariable Functions.* Birkhäuser, Boston, 2003. ISBN 0-8176-4274-9. 52

[20] F. Hausdorff. Beweis eines satzes von arzelà. *Math. Z.*, 26:135–137, 1927. 55, 56

[21] Ernst Henze. *Einführung in die Maßtheorie*, volume 505 of *B.I.Hochschultaschenbücher.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971.

[22] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart, 1980. 124

[23] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 2.* Mathematische Leitfäden. Teubner, Stuttgart, 1981. 49, 66, 89, 93, 95, 129, 131

[24] Morris W. Hirsch. *Differential topology.* Springer-Verlag, New York, 1976. GTM 33.

[25] Richard A. Hunt. On the convergence of Fourier series. *Southern Illinois Univ. Press*, pages 235–255, 1969. 120

[26] S.I. Ionisyan. Trigonometric Fourier series of continuous functions which are divergent on a given set. *Collect. sci. Works*, pages 45–48, 1980.

[27] A. Kolmogoroff. Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout. *C.R.*, pages 1327–1328, 1926. 120, 128

[28] Andreas Kriegl. *Differentialgeometrie.* Universität Wien, 1996. 109, 146, 149

[29] Andreas Kriegl. *Topologie 1.* Universität Wien, 2000.

[30] Andreas Kriegl. *Funktionalanalysis 1.* Universität Wien, 2002. 119, 120, 137

[31] Andreas Kriegl. *Funktionalanalysis 2.* Universität Wien, 2002. 137

[32] Andreas Kriegl. *Computer Graphics.* Universität Wien, 2003. 137

[33] Andreas Kriegl, Mark Losik, and Peter W. Michor. Choosing roots of polynomials smoothly, II. *Israel J.M.*, 139:183–188, 2004.

[34] Ronald Larsen. *Functional Analysis.* Marcel Dekker, 1973.

[35] Lusin. *The Integral and Trigonometric Series.* 1915. 120

[36] W. A. J. Luxemburg. Arzelaà's dominated convergence theorem for the Riemann integral. *Am. Math. Monthly*, pages 970–979, 78 1971. 55, 56

[37] Meusnier. Mémoire sur la curbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers 10*, pages 477–510, 1776.

[38] A. M. Olevskij. Divergent Fourier series. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser.Mat.*, 27:343–366, 1963. 128

[39] John C. Oxtoby. *Maß und Kategorie.* Hochschultext. Springer, Berline - Heidelberg - New York, 1971.

[40] Ernst Peschl. *Funktionentheorie*, volume 131 of *B.I.Hochschultaschenbücher.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967. 128

[41] Osserman R. Global Properties of minimal surfaces in E^3 and E^n. *Ann. of Math.*, 80:340–364, 1964.

[42] Osserman R. *A Survey of Minimal Surfaces.* Van Nostrand, NewYork, 1969.

[43] Osserman R. A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateaus's problem. *Ann.of Math 91*, pages 550–569, 1970.

[44] Hildebrandt S. Boundary behaviour of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal. 35*, pages 47–82, 1969.

[45] Lang Serge. *Differentiable Manifolds.* Addison-Wesley, 1962.

[46] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang. *Algebraische Topologie.* Mathematische Leitfäden. B.G.Teubner, Stuttgart, 1988. 101

[47] Elconin V. and Michal A.D. Completely integrable differential equations in abstract spaces. *Acta Mathematica*, 68:71–107, 1937.

[48] Hassler Whitney. A function not constant on a connected set of critical points. *Duke Math. J.*, 1:514–517, 1935. 46

[49] Lee Peng Yee and Rudolf Výborný. *The integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, volume 14 of *Australian Mathematical Society Lecture Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[50] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis*, volume 123. Springer, 1980. Grundlehren.

[51] J. Zemánek. A simple proof of the Weierstrass-stone theorem. *Comment. Math.*, 20:495–497, 1977. 43

[52] Antoni Szczepan Zygmund. *Trigonometric Series I, II.* Cambridge University Press, NewYork, 1968. 128

Liste der Symbole

$O(f,Z)$	Obersumme der Funktion f bzgl. der Zerlegung Z, Seite 2
$U(f,Z)$	Untersumme der Funktion f bzgl. der Zerlegung Z, Seite 2
$\int_B f$	Riemann-Integral von f über die Menge B, Seite 12
$\int_I f = \int_I f(x_1,\dots,x_p)\,d(x_1,\dots,x_p)$	Darboux-Integral von f über das kompakte Intervall I, Seite 2
$\int_K \omega$	Integral einer p-Form ω über J-meßbare $K \subseteq \mathbb{R}^p$, Seite 97
$\int_K \omega$	Integral einer p-Form ω über eine p-dimensionale Fläche S, Seite 99
$\int_S \rho\,\mathrm{vol}_S$	Integral einer (Dichte)funktion ρ über eine Fläche S, Seite 78
$\int_S g$	Integral eines Vektorfelds g längs einer Fläche S, Seite 76
$\int_\Phi g$	Integral eines Vektorfelds g längs einer durch Φ parametrisierten Fläche, Seite 76
$\int_\Phi \omega$	Integral einer p-Form ω über eine Parametrisierung Φ einer p-dimensionale Fläche, Seite 97
$\int_{I_1}\int_{I_2} f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1$	iteriertes Integral von f, Seite 8
∂B	Rand der Menge B, Seite 12
B_c	Raum der beschränkten Funktionen mir kompakten Träger, Seite 131
C^1	stetig differenzierbar, Seite 30
$C_p(X)$	Raum der singulärer p-Ketten, Seite 100
$L(E_1,\dots,E_p;F)$	Raum aller p-linearen Abbildungen, Seite 85
L^2	Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen, Seite 66
$L_0(E,F)$	Raum der 0-Formen, Seite 89
$L_p(E;F)$	Raum aller p-linearen Abbilduneg, Seite 85
$L_p(E_1,\dots,E_p;F)$	Raum aller p-linearen Abbildungen, Seite 85
$L_{0,\mathrm{alt}}(E,F)$	Raum der alternierenden 0-Formen, Seite 89
$L_{p,\mathrm{alt}}(E,F)$	Raum aller alternierenden multi-linearen Abbildungen, Seite 86
Trig	Raum der trigonometrischen Polynome, Seite 131
χ_A	charakteristische Funktion, Seite 62
S	Spiegelung, Seite 118
T_c	Translation um c, Seite 118
$\cos_n$	Oberschwingung $\cos(nx)$ von Cosinus, Seite 116
$\sin_n$	Oberschwingung $\sin(nx)$ von Sinus, Seite 116
alt	Alternator, Seite 86
$\mathrm{div}\, f$	Divergenz oder Quellendichte des Vektorfelds f, Seite 74
$\mathcal{F}$	Fourier-Koeffizienten, Seite 132

$\operatorname{rot} f$	Rotation eines Vektorfelds f, Seite 76
$\operatorname{rot} f$	Rotation oder auch Wirbeldichte eines Vektorfelds f, Seite 73
σ_n	Partialsumme der Fourier-Reihe, Seite 126
a_n	die geraden Fourier-Koeffizienten, Seite 117
b_n	die ungeraden Fourier-Koeffizienten, Seite 117
$\Phi_p : K_p \to \Delta_p$	standard-Parametrisierung des standard p-Simplex, Seite 102
$\partial\varphi$	Rand einer singulären Kette, Seite 100
$\langle a_0, \dots, a_p \rangle$	Simplex mit Ecken $A_1, \dots, a_p$, Seite 99
$\langle a_0, \dots, a_p \rangle$	standard p-Simplex, Seite 99
ν_S	Einheitsnormale an die Fläche S, Seite 78
ν_Φ	Einheitsnormale an die durch Φ parametrisierte Fläche, Seite 77
$\nu_{\partial B}$	nach außen weisende Einheitsnormalvektor am Rand des Bereichs B, Seite 73
τ_K	Einheitstangentialvektor an K, Seite 70
τ_c	Einheitstangentialvektor an die Kurve c, Seite 70
$\Phi \otimes \Psi$	Tensor-Produkt von multi-linearen Formen, Seite 85
$\det^{i_1,\dots,i_p}$	Subdeterminante, Seite 88
$\operatorname{div} f$	Quellendichte oder Divergenz des Vektorfelds f, Seite 80
$\omega \wedge \eta$	hack-Produkt von Formen, Seite 87
vol_S	Oberflächenelement, Seite 78
vol_Φ	Oberflächenelement der durch Φ parametrisierten Fläche, Seite 77
vol_c	Längenelement der Kurve c, Seite 70
$d\omega$	äußere Ableitung der Differential-Form ω, Seite 90
$f^*(\Omega)$	Pullback eines Tensorfelds / einer Differential-Form, Seite 94

Index