Aufgaben zu Kurven im $\mathbb{R}^n$

Proseminar zu Analysis 2

Sommersemester 2004

1. Eine **Kurve im** $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

f ist stetig [differenzierbar, C^1 etc.], wenn alle Komponenten $f_1, \ldots, f_n$ stetig [differenzierbar, C^1 etc.] sind. Statt $[a,b]$ kann auch ein beliebiges Teilintervall I von $\mathbb{R}$ auftreten.

2. Der **Tangentialvektor** an eine differenzierbare Kurve im im Punkt $f(t)$ ist gegeben durch $f'(t)$.

3. Die **Bogenlänge** einer stetig differenzierbaren Kurve ist gegeben durch $\int_a^b \|f'(t)\|_2 \, dt$.

(Das ergibt sich unter anderem aus dem mehrdimensionalen Analogon von Aufgabe 5.24.)

4. Die **Krümmung** einer durch $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gegebenen zweimal differenzierbaren Kurve (im $\mathbb{R}^2$) im Punkt $f(t)$ ist gegeben durch $\dfrac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$.

Der Kehrwert der Krümmung ist der Radius des Kreises, der sich der Kurve in $f(t)$ am besten anschmiegt; die Krümmung ist positiv in „Links-“ und negativ in „Rechtskurven“, bei Fahrt in Richtung steigender t-Werte.

5. Vorgabe einer **Kurve im $\mathbb{R}^2$ mittels ebener Polarkoordinaten**: Ist $g : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben, dann definiert $r = g(\varphi)$ eine Kurve in folgendem Sinn: Auf jedem Halbstrahl, der mit der x-Achse den Winkel φ (gemessen gegen den Uhrzeigersinn, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$) einschließt, liegt im Abstand $r = g(\varphi)$ vom Ursprung ein Kurvenpunkt.

Offenbar wird eine derartige Kurve in (x,y)-Koordinaten durch $\varphi \mapsto \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\varphi)\cos\varphi \\ g(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$ dargestellt.

Aufgaben

A1. Zeige, daß $f(t) := (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ den Einheitskreis (ohne den Punkt $(-1,0)$) darstellt.

A2. Die durch $f(t) := (\sin(2t), \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, gegebene Kurve bildet einen Achter. Berechne die Tangentialvektoren im Kreuzungspunkt $(0,0)$.

A3. Die *Zykloide* ist die Bahn eines Punktes am Umfang eines auf der x-Achse abrollenden Rades mit dem Radius a. Fertige eine Skizze an und zeige, daß diese Kurve durch $\theta \mapsto \begin{pmatrix} a(\theta - \sin\theta) \\ a(1 - \cos\theta) \end{pmatrix}$ gegeben ist. Wenn wir das Rad z.B. von $x = 0$ aus drei Umdrehungen nach rechts rollen lassen, durchläuft θ das Intervall $[0, 6\pi]$. (Hinweis: Ermittle zuerst die Koordinaten des Mittelpunktes des rollenden Rades.)

A4. Versuche, den Tangentenvektor an eine Zykloide am höchsten und am tiefsten Punkt der Bahn zu berechnen. Wenn eine Lokomotive mit 200 km/h dahinrollt, mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die beiden Punkte des Rades, die gerade die Schiene berühren bzw. sich ganz oben befinden, relativ zur Schiene?

A5. Berechne die Bogenlänge eines Zykloidenbogens.

A6. Skizziere die *Astroide* $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}$ bzw. $x(t) = a(\cos t)^3$, $y(t) = a(\sin t)^3$, $t \in [0, 2\pi]$ und bestimme die Tangentenrichtung in den Punkten mit $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π. Berechne weiters die Bogenlänge. Ermittle schließlich die Gleichung der Tangente in einem Punkt $(a(\cos t_0)^3, a(\sin t_0)^3)$ und die Länge des Tangentenabschnitts zwischen den Koordinatenachsen.

Mache dir plausibel, daß die Astroide auch als „Zykloide“ entsteht, wenn ein Kreis vom Radius $\frac{a}{4}$ innen an einem Kreis vom Radius a abrollt.

A7. Illustriere die Vorgabe einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ mittels ebener Polarkoordinaten mit einer Skizze.

A8. Leite eine Formel für die Bogenlänge einer Kurve her, die in ebenen Polarkoordinaten gegeben ist (g stetig differenzierbar).

A9. Skizziere die *Kardioide* $r = a(1 - \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, und berechne ihre Bogenlänge.

A10. Leite eine Formel für die Krümmung einer Kurve her, die in ebenen Polarkoordinaten gegeben ist (g zweimal differenzierbar).

A11. Berechne die Krümmung der *logarithmischen Spirale* $r = e^{a\varphi}$, der *Archimedischen Spirale* $r = a\varphi$ (skizziere diese beiden Spiralen) und der Kardioide zunächst als Funktion von φ und dann als Funktion von r (φ durch r ausdrücken und einsetzen).

Was passiert, wenn man die logarithmische Spirale um einen Winkel α dreht?

A12. Für die, die in der Mittelschule die Konstruktion der (Mittelpunkte der) Scheitelkrümmungskreise einer Ellipse gelernt haben: Zeige, daß diese Konstruktion die „richtigen“ Radien R_1, R_2 liefert, d.h. daß deren Kehrwerte gerade die amtlichen Werte der Krümmung der Ellipse in den Scheitelpunkten sind. (Ellipse: $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$.)

10.5.2004 Zusammengestellt von M. Grosser