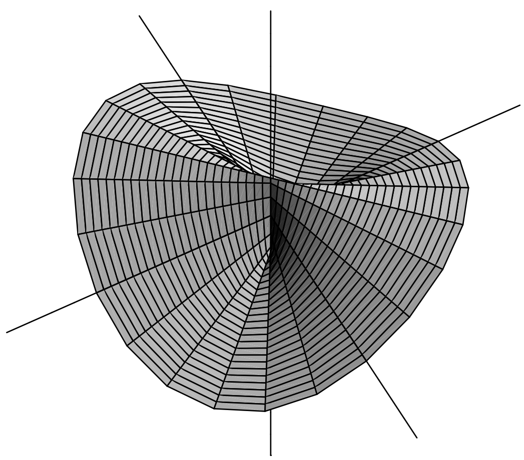
Zum Workshop Analysis 2 am 2. Juni 2004

Beispiel 1

(vgl. Beispiel 6.1.3.(3) im Skriptum zur Analysis 2 und Beispiel 3.2.7 im Skriptum zur Analysis 1 von Andreas Kriegl)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$



Frage: Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar?

Wenn f in $(0, 0)$ differenzierbar ist, dann existieren auch alle partiellen Ableitungen. Wir versuchen also zunächst die partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$ zu berechnen. Falls diese existieren, hätten wir auch gleich einen (den einzigen) „Kandidaten“ für die Jacobi-Matrix.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) = d_{(1,0)}f(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t\cdot(1,0))-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2t\cdot 0}{t^2}-0}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Die erste partielle Ableitung von f in $(0,0)$ existiert also und ist gleich 0.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) = d_{(0,1)}f(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t\cdot(0,1))-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0\cdot t}{t^2}-0}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Auch die zweite partielle Ableitung von f in $(0,0)$ existiert. Sie ist ebenfalls gleich 0.

Wir wissen nun:
Wenn die Ableitung von f in $(0,0)$ existiert, so lautet ihre Matrixdarstellung

$$[f'(0,0)] = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) & \frac{\partial}{\partial y}f(0,0)\end{pmatrix} = (0 \quad 0).$$

$f'(0,0)$ wäre also die Nullfunktion, die Tangentialebene an f in $(0,0)$ die x-y-Ebene. Für die Richtungsableitungen heißt das folgendes:
Wenn die Ableitung von f in $(0,0)$ existiert, so gilt für alle $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$

$$d_{(v_1,v_2)}f(0,0) = f'(0,0)(v_1,v_2)$$

und daher wäre in unserem Fall

$$d_{(v_1,v_2)}f(0,0) = f'(0,0)(v_1,v_2) = (0 \quad 0)\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 = 0$$

für alle $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.
Insbesondere bedeutet das, dass alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ existieren, wenn f in $(0,0)$ differenzierbar ist.
Das heißt: Wenn wir auch nur eine einzige Richtung $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ finden, so dass die Richtungsableitung $d_{(v_1,v_2)}f(0,0)$ nicht gleich 0 ist oder sogar gar nicht existiert, dann folgt

sofort, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Berechnen wir nun die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ (zum Beispiel) in Richtung $(v_1, v_2) = (1,1)$:

$$\begin{aligned}
d_{(1,1)} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t\cdot(1,1)) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t^2}{2t^2} - 0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \qquad \nexists
\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ in Richtung $(1,1)$ existiert also nicht.

Es folgt:
Antwort: f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Dieses Beispiel zeigt insbesondere:
Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen in einem Punkt (allein) folgt i. A. NICHT die Differenzierbarkeit in diesem Punkt!

(Bemerkung: Um zu klären, ob f in $(0,0)$ differenzierbar ist oder nicht, hätten wir uns die obige Rechnerei eigentlich sparen können, denn: Im Beispiel 3.2.7 (im Skriptum zur Analysis 1 von Andreas Kriegl) haben wir gesehen, dass f in $(0,0)$ nicht einmal stetig ist. Damit ist jede Hoffnung auf Differenzierbarkeit in diesem Punkt gestorben.)

Frage: Für welche $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $d_{(v_1,v_2)} f(0,0)$?

Es sei $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann

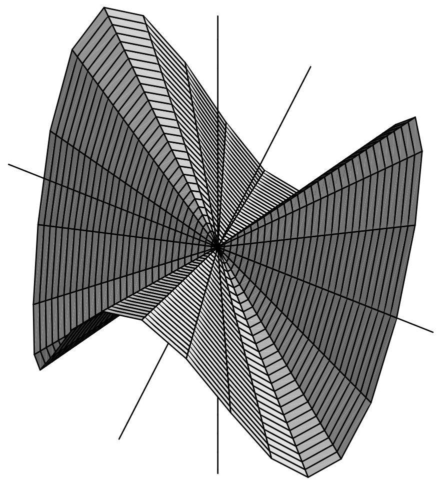
$$\begin{aligned}
d_{(v_1,v_2)} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t\cdot(v_1,v_2)) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t^2 v_1 v_2}{t^2(v_1^2 + v_2^2)} - 0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(v_1, v_2)}{t}.
\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $d_{(v_1,v_2)} f(0,0)$ existiert also genau dann, wenn $f(v_1, v_2) = 0$ ist. Das sind genau die (v_1, v_2) von der Form $(k, 0)$ und $(0, k)$. $\quad (k \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$
Für $(v_1, v_2) = (0,0)$ gilt (immer) trivialerweise $d_{(0,0)} f(0,0) = 0$.

Beispiel 2

(vgl. Beispiel 6.1.3.(4) im Skriptum zur Analysis 2 von Andreas Kriegl)

Es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y):=\begin{cases}\frac{(3x^2-y^2)y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$



Frage: Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

Wir versuchen zunächst wieder die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=d_{(1,0)}f(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+t\cdot(1,0))-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\frac{0}{t^2}-0}{t}\\&=\lim_{t\to0}\ 0\\&=0\end{aligned}$$

Die erste partielle Ableitung von f in $(0,0)$ existiert also und ist gleich 0.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=d_{(0,1)}f(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+t\cdot(0,1))-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\frac{(-t^3)}{t^2}-0}{t}\\&=\lim_{t\to0}(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

Auch die zweite partielle Ableitung von f in $(0,0)$ existiert. Sie ist gleich -1.

Unser Kandidat für $[f'(0,0)]$ ist also:

$$[f'(0,0)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) & \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \end{pmatrix} = (0 \quad -1)$$

Die Richtungsableitungen wären dann

$$d_{(v_1,v_2)} f(0,0) = f'(0,0)(v_1,v_2) = (0 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 = -v_2$$

für alle $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Wieder gilt: Wenn wir auch nur eine einzige Richtung $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ finden, so dass die Richtungsableitung $d_{(v_1,v_2)} f(0,0)$ nicht gleich $-v_2$ ist oder sogar gar nicht existiert, dann folgt sofort, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Berechnen wir nun die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ (zum Beispiel) in Richtung $(v_1,v_2) = (1,1)$:

$$\begin{aligned} d_{(1,1)} f(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t \cdot (1,1)) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{2t^3}{2t^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Wenn die Ableitung von f in $(0,0)$ existiert, dann müsste nach obiger Überlegung die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ in Richtung $(v_1,v_2) = (1,1)$ aber gleich $-v_2 = -1$ sein. Widerspruch.

Es folgt:
Antwort: f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Frage: Für welche $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $d_{(v_1,v_2)}f(0,0)$?

Es sei $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Dann

$$\begin{aligned} d_{(v_1,v_2)}f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot(v_1,v_2)) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3(v_1^2 v_2 - v_2^3)}{t^2(v_1^2+v_2^2)} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{v_1^2 v_2 - v_2^3}{v_1^2 + v_2^2} \\ &= f(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Für $(v_1, v_2) = (0,0)$ gilt trivialerweise $d_{(0,0)}f(0,0) = 0$.

Daher ist

$$d_{(v_1,v_2)}f(0,0) = f(v_1, v_2)$$

für alle $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Antwort: Es existieren alle Richtungsableitungen von f in $(0,0)$.

Dieses Beispiel zeigt insbesondere:
Aus der Existenz aller Richtungsableitungen in einem Punkt (allein) folgt i. A. NICHT die Differenzierbarkeit in diesem Punkt!