Stochastik - Lehramt, WS 2026/27.

1. Übung

1. Ein Würfel wird zweimal geworfen, $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$. Sei A das Ereignis "die Augensumme ist 4" und B das Ereignis "der erste Wurf zeigt eine gerade Zahl". Schreiben Sie A, $A \cap B$ und $A \setminus B$ als Mengen von Paaren an. Beschreiben Sie $A \cup B$ und B^c in Worten und berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ und $\mathbb{P}(A \cup B)$.

2. Ein Handy wird mit einem vierstelligen PIN (Ziffern 0 bis 9, Wiederholungen erlaubt) entsperrt. Wie viele PINs gibt es? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger PIN aus lauter verschiedenen Ziffern besteht?

3. (Fortsetzung.) Jemand kennt den PIN nicht und probiert drei verschiedene PINs aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der richtige dabei, wenn alle PINs gleich wahrscheinlich sind? Ist diese Annahme realistisch? Was ändert sich, wenn der Handybesitzer seinen PIN nicht zufällig gewählt hat?

4. Fünf verschiedene Bücher, darunter Band 1 und Band 2 eines Romans, werden zufällig nebeneinander ins Regal gestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Bände nebeneinander stehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie in der richtigen Reihenfolge (Band 1 links von Band 2) nebeneinander stehen?

5. (Chevalier de Méré.) Was ist wahrscheinlicher: bei vier Würfen eines Würfels mindestens eine 6 zu werfen, oder bei 24 Würfen zweier Würfel mindestens einmal eine Doppelsechs? (Hinweis: Gegenereignis.)

6. Zwei Würfel werden geworfen. Die Augensumme 7 lässt sich auf drei Arten als Summe zweier Zahlen zwischen 1 und 6 schreiben (ohne Beachtung der Reihenfolge: $1+6$, $2+5$, $3+4$), ebenso die Augensumme 8 ($2+6$, $3+5$, $4+4$). Sind die beiden Summen daher gleich wahrscheinlich? Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten und vergleichen Sie mit dem "Irrtum von Leibniz" aus Abschnitt 1.3 des Skripts.

2. Übung

7. (Zwei Münzen und Burdzys Regeln.) Wir werfen zwei Münzen und wollen dafür einen Grundraum mit gleich wahrscheinlichen Ausgängen (Laplace-Modell) wählen. Zur Auswahl stehen die Menge der ungeordneten Ausgänge

$$\Omega_1 = \big\{\{K,K\},\ \{K,Z\},\ \{Z,Z\}\big\}$$

("zweimal Kopf", "einmal Kopf und einmal Zahl", "zweimal Zahl") und die Menge der geordneten Paare

$$\Omega_2 = \{(K,K),\ (K,Z),\ (Z,K),\ (Z,Z)\},$$

wobei die erste Komponente die erste Münze beschreibt. Erklären Sie anhand von Burdzys Regeln (L1)–(L5) aus Abschnitt 1.3 des Skripts, warum Ω_2 mit der Gleichverteilung ein gutes Modell ist, Ω_1 mit der Gleichverteilung aber nicht. Welche Wahrscheinlichkeiten erhalten die drei Ausgänge in Ω_1 tatsächlich?

8. (Zweierschnapsen.) Beim Zweierschnapsen wird mit 20 Karten gespielt (Ass, Zehner, König, Ober, Unter in jeder der vier Farben). Jede der beiden Spielerinnen erhält 5 Karten, die nächste Karte wird als Atout aufgedeckt, und die restlichen 9 Karten bilden den verdeckten Talon, von dem später der Reihe nach gezogen wird. Zwei Austeilungen gelten als gleich, wenn jede Spielerin dieselben Karten in der Hand hat (die Reihenfolge in der Hand spielt keine Rolle), dieselbe Karte als Atout aufliegt und der Talon in derselben Reihenfolge liegt.

(a) Auf wie viele Arten können die Karten ausgeteilt werden?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die erste Spielerin alle vier Asse in der Hand? Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie kein Ass?

9. Wie viele verschiedene "Wörter" (sinnvoll oder nicht) kann man durch Umordnen der Buchstaben von STOCHASTIK bilden? Die zehn Buchstabenkärtchen werden gemischt und zufällig nebeneinandergelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint wieder das Wort STOCHASTIK?

10. (Beobachtbare Ereignisse.) Ein Würfel wird geworfen, $\Omega = \{1,\dots,6\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_1 = \big\{\emptyset,\ \{1,3,5\},\ \{2,4,6\},\ \Omega\big\}$ eine σ-Algebra ist. Geben Sie eine Situation an, in der $\mathcal{F}_1$ genau die beobachtbaren Ereignisse beschreibt.

(b) Ist $\mathcal{F}_2 = \big\{\emptyset,\ \{1\},\ \{6\},\ \{2,3,4,5,6\},\ \Omega\big\}$ eine σ-Algebra?

(c) Geben Sie die kleinste σ-Algebra auf Ω an, die das Ereignis $\{6\}$ enthält.

11. (Axiome nachprüfen.) Sei $\Omega = \{1,2,3\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ sind Wahrscheinlichkeitsmaße? Prüfen Sie die Axiome I–III aus Abschnitt 2.1 nach bzw. geben Sie an, welches Axiom verletzt ist.

(a) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|^2}{9}$,

(b) $\mathbb{P}(A) = 1$, falls $1 \in A$, und $\mathbb{P}(A) = 0$ sonst,

(c) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{6}\sum_{i\in A} i$ (also z.B. $\mathbb{P}(\{1,3\}) = \frac{4}{6}$, und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$),

(d) $\mathbb{P}(A) = 1$, falls $A \neq \emptyset$, und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(Hinweis: Da Ω endlich ist, sind in einer Folge $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkter Teilmengen höchstens drei Mengen nicht leer. Für Axiom III genügt es daher, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ für disjunkte A, B nachzuprüfen.)

12.

(a) Zeigen Sie mit den Eigenschaften aus Abschnitt 2.2, dass für alle Ereignisse A, B gilt:

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \;\leq\; \mathbb{P}(A \cap B) \;\leq\; \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}.$$

(b) In einer Schule geben 70% der Schülerinnen und Schüler an, gerne Mathematik zu haben, und 60%, gerne Sport zu haben. Eine Person wird zufällig ausgewählt. Was lässt sich über die Wahrscheinlichkeit sagen, dass sie beides gern hat? Was über die Wahrscheinlichkeit, dass sie keines von beiden gern hat? Geben Sie jeweils den kleinsten und den größten möglichen Wert an.

3. Übung

13. (Ein gezinkter Würfel.) Bei einem gezinkten Würfel ist die 6 doppelt so wahrscheinlich wie jede andere Augenzahl, und die Augenzahlen 1 bis 5 sind gleich wahrscheinlich. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an, der diesen Würfel beschreibt, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit einer geraden Augenzahl.

14. (Ziehen ohne Zurücklegen.) Aus einer Urne mit 3 roten und 2 blauen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Geben Sie einen Grundraum mit gleich wahrscheinlichen Ausgängen an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die *zweite* Kugel rot ist? Erklären Sie das Ergebnis auch ohne Rechnung.

15. (Warten auf Kopf.) Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal Kopf kommt. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum für die Anzahl der benötigten Würfe an. Prüfen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten zu 1 summieren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht man eine gerade Anzahl von Würfen? Warum ist hier ein Laplace-Modell unmöglich?

16. (Bedingte Wahrscheinlichkeit als Wahrscheinlichkeitsmaß.) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(A) := \mathbb{P}(A|B)$ wieder die Axiome I–III erfüllt. Was bedeutet das anschaulich?

17. (Ein medizinischer Test.) 1% der untersuchten Personen haben eine bestimmte Krankheit. Der Test ist bei Kranken mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv, bei Gesunden mit Wahrscheinlichkeit 9% (fälschlich) positiv. Eine Person wird positiv getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie krank? Rechnen Sie (a) mit dem Satz von Bayes und (b) mit natürlichen Häufigkeiten, indem Sie überlegen, was man unter 10 000 untersuchten Personen erwartet. Welcher Rechenweg ist für die Schule besser geeignet?

18. (Unabhängig oder unvereinbar?)

(a) Ein Würfel wird geworfen. Ist "die Augenzahl ist gerade" unabhängig von "die Augenzahl ist höchstens 4"? Und von "die Augenzahl ist höchstens 3"?

(b) Können zwei disjunkte Ereignisse A, B mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$ unabhängig sein?

4. Übung

19. (Urbilder.) Für $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $S \subseteq \mathbb{R}$ heißt $\{X \in S\} = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in S\}$ das *Urbild* von S unter X. Sei $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ mit der Gleichverteilung und $X(\omega) = |\omega - 3|$.

(a) Bestimmen Sie $\{X = 1\}$, $\{X \leq 1\}$, $\{X > 3\}$ und $\{X \in \mathbb{R}\}$.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und damit $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

20. (Urbilder und Mengenoperationen.) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $E, F, E_1, E_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie $\{X \in E\} \cap \{X \in F\} = \{X \in E \cap F\}$, $\{X \in E\}^c = \{X \in \mathbb{R} \setminus E\}$ und $\bigcup_n \{X \in E_n\} = \{X \in \bigcup_n E_n\}$.

(b) Sei Ω höchstens abzählbar und $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Folgern Sie, dass $P_X(S) := \mathbb{P}(X \in S)$, $S \subseteq \mathbb{R}$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ist.

21. (Wahrscheinlichkeitsfunktionen.) Welche der folgenden Funktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Wahrscheinlichkeitsfunktionen? (Jeweils $p(x) = 0$ für alle anderen $x \in \mathbb{R}$.)

(a) $p(x) = \dfrac{x}{10}$ für $x \in \{1, 2, 3, 4\}$,

(b) $p(x) = \dfrac{x - 2}{5}$ für $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

(c) $p(k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ für $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Für welches c ist $p(k) = c \cdot 3^{-k}$ für $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion?

22. (Von der Wahrscheinlichkeitsfunktion zur Zufallsvariable.) Sei $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $p(1) = \frac{1}{6}$, $p(2) = \frac{1}{3}$, $p(3) = \frac{1}{2}$ und $p(x) = 0$ sonst.

(a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und eine ZV X mit Wahrscheinlichkeitsfunktion p an.

(b) Geben Sie auf $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ mit der Gleichverteilung eine ZV Y mit Wahrscheinlichkeitsfunktion p an. Wie viele solche Y gibt es?

23. (Zwei Grundräume für einen Würfel.) Nach Abschnitt 3.2 ist ein *Würfel* eine ZV X mit $p_X(x) = \frac{1}{6}$ für $x \in \{1, \ldots, 6\}$ und $p_X(x) = 0$ sonst.

(a) Geben Sie zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsräume an, auf denen es einen Würfel gibt.

(b) Sei $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ mit der Gleichverteilung. Ist $Z(i, j) := r(i+j)+1$ ein Würfel, wobei $r(n)$ der Rest von n bei Division durch 6 ist?

24. (Wie groß muss Ω sein?)

(a) Zeigen Sie: Gibt es auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ einen Würfel, so hat Ω mindestens 6 Elemente.

(b) Gibt es auf $\Omega = \{a, b, \ldots, z\}$ (26 Buchstaben) mit der Gleichverteilung einen Würfel?

(c) Gibt es auf $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ mit der Gleichverteilung eine ZV Y mit $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{7}$?

Stochastik – Lehramt, WS 2026/27 **Probetest zum 1. Übungstest**

Probetest

Name: _____ Matrikelnr.: _____

Jede Frage hat **genau eine** richtige Antwort; kreuzen Sie pro Frage höchstens ein Kästchen an. **Bewertung:** richtige Antwort +1 Punkt, falsche Antwort $-\frac{1}{3}$ Punkt (mehrere Kreuze bei einer Frage zählen als falsch), keine Antwort 0 Punkte. Zufälliges Ankreuzen bringt also im Mittel 0 Punkte; im Zweifel lieber nichts ankreuzen. Die Gesamtpunktezahl ist mindestens 0, höchstens 10; positiv ab 5 Punkten. Hilfsmittel (Literatur, Taschenrechner) sind nicht erlaubt. Arbeitszeit: 30 Minuten. Wahrscheinlichkeitsfunktionen sind wie im Skript auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; nicht angegebene Werte sind 0. "Gleichverteilung" bedeutet $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega|$.

1. Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Welches der folgenden Mengensysteme ist eine σ-Algebra auf Ω?

☐ (a) $\{\emptyset,\ \{1, 2\},\ \Omega\}$
☐ (b) $\{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \Omega\}$
☐ (c) $\{\{1\},\ \{2, 3\},\ \Omega\}$
☐ (d) $\{\emptyset,\ \{1\},\ \{2, 3\},\ \Omega\}$

2. Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß?

☐ (a) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{i \in A} i$ (und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$)

☐ (b) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}\min\{|A|, 2\}$

☐ (c) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3}$ für $A \neq \emptyset$ und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

☐ (d) $\mathbb{P}(A) = \left(\dfrac{1}{3}|A|\right)^2$

3. Welche der folgenden Funktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion? (Jeweils $p(x) = 0$ für alle anderen $x \in \mathbb{R}$.)

☐ (a) $p(x) = \dfrac{x}{10}$ für $x \in \{1, 2, 3\}$

☐ (b) $p(x) = \dfrac{x+1}{10}$ für $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

☐ (c) $p(x) = \dfrac{x-1}{2}$ für $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

☐ (d) $p(k) = 2^{-k}$ für $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

4. 20% einer Bevölkerung haben eine Krankheit K. Ein Test ist bei Kranken mit Wahrscheinlichkeit 0.5 positiv, bei Gesunden mit Wahrscheinlichkeit 0.25. Eine zufällig gewählte Person wird positiv getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie krank?

☐ (a) $\dfrac{1}{2}$ ☐ (b) $\dfrac{3}{10}$ ☐ (c) $\dfrac{1}{10}$ ☐ (d) $\dfrac{1}{3}$

5. Sei $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ und $X(\omega) = (\omega - 3)^2$. Dann ist $\{X \leq 1\} =$

☐ (a) $\{2, 4\}$ ☐ (b) $\{2, 3, 4\}$ ☐ (c) $\{0, 1\}$ ☐ (d) $\{3\}$

6. Zwei faire Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 4 ist?

☐ (a) $\dfrac{1}{9}$ ☐ (b) $\dfrac{1}{12}$
☐ (c) $\dfrac{1}{11}$ ☐ (d) $\dfrac{2}{21}$

7. Eine faire Münze wird zweimal geworfen, $\Omega = \{K, Z\}^2$ mit der Gleichverteilung (dem Produktmodell zweier unabhängiger Würfe). Welche beiden Ereignisse sind unabhängig?

☐ (a) "erster Wurf Kopf" und "erster Wurf Zahl"
☐ (b) "erster Wurf Kopf" und "beide Würfe Kopf"
☐ (c) "beide Würfe Kopf" und "beide Würfe Zahl"
☐ (d) "erster Wurf Kopf" und "zweiter Wurf Zahl"

8. Wie viele verschiedene "Wörter" (sinnvoll oder nicht) entstehen durch Umordnen der Buchstaben von PAPAGEI?

☐ (a) 5040 ☐ (b) 1260 ☐ (c) 630 ☐ (d) 2520

9. Es gelte $\mathbb{P}(A) = 0.9$ und $\mathbb{P}(B) = 0.4$. Welcher der folgenden Werte ist für $\mathbb{P}(A \cap B)$ möglich?

☐ (a) 0.5 ☐ (b) 0.45 ☐ (c) 0.35 ☐ (d) 0.25

10. Sei $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ mit der Gleichverteilung, $X(\omega) = \omega$ und $Y(\omega) = 7 - \omega$. Welche Aussage ist richtig?

☐ (a) Y ist kein Würfel, weil $Y \neq X$.
☐ (b) $p_Y(0)$ ist nicht definiert, weil Y den Wert 0 nicht annimmt.
☐ (c) $\mathbb{P}(X = Y) = \dfrac{1}{6}$.
☐ (d) X und Y haben dieselbe Verteilung.

Punkte: _____ / 10

Stochastik – Lehramt, WS 2026/27 **Stoff des 1. Übungstests**

Der 1. Übungstest prüft den Stoff von Kapitel 1 bis Abschnitt 3.3 des Skripts und der Übungsblätter 1–4, und zwar zu folgenden Punkten:

- Laplace-Räume (gleich wahrscheinliche Ausgänge), Urnenmodelle: Ziehen mit und ohne Zurücklegen
- Kombinatorik: mit und ohne Reihenfolge, Wörter zählen (Multinomialkoeffizient)
- Augensumme zweier Würfel (Dreiecksverteilung); geordnete statt ungeordnete Paare (Irrtum von Leibniz)
- σ-Algebren und Wahrscheinlichkeitsräume erkennen und beschreiben
- Axiome eines Wahrscheinlichkeitsmaßes nachprüfen
- Folgerungen aus den Axiomen: Komplement, Monotonie, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Größt- und kleinstmögliche Wahrscheinlichkeit von "A und B"
- Wahrscheinlichkeitsräume auf $\mathbb{N}$, die keine Laplace-Räume sind (z.B. Münze werfen bis zum ersten Kopf)
- Bedingte Wahrscheinlichkeit; $\mathbb{P}(\,\cdot \mid B)$ ist wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß
- Gesetz der vollständigen Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes (z.B. medizinischer Test)
- Unabhängigkeit von Ereignissen; unabhängige Experimente und Produktmodell (z.B. zwei Würfel)
- Unabhängig und unvereinbar unterscheiden
- Zufallsvariable als Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$; Notation für Ereignisse wie $\{X > 2\}$ (Urbilder)
- Verteilung P_X und Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsvariable bestimmen
- Wahrscheinlichkeitsfunktionen erkennen: auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, ≥ 0, Summe 1
- Zu einer Wahrscheinlichkeitsfunktion eine Zufallsvariable angeben; wann ist der Grundraum zu klein?
- Verschiedene Zufallsvariablen mit derselben Verteilung (z.B. zwei Würfel auf $\{1, \ldots, 6\}^2$)

Jeder Test besteht aus 10 Multiple-Choice-Fragen zu einer Auswahl dieser Punkte; Aufbau und Bewertung zeigt der Probetest. Im Folgenden gibt es zu jedem Punkt ein Beispiel im Stil der Testfragen (jeweils genau eine richtige Antwort).

Laplace-Räume (gleich wahrscheinliche Ausgänge), Urnenmodelle: Ziehen mit und ohne Zurücklegen

1. Eine Urne enthält 4 rote und 2 blaue Kugeln. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide blau?

☐ (a) $\frac{1}{15}$ ☐ (b) $\frac{1}{9}$ ☐ (c) $\frac{1}{3}$ ☐ (d) $\frac{2}{15}$

Kombinatorik: mit und ohne Reihenfolge, Wörter zählen (Multinomialkoeffizient)

2. Wie viele verschiedene "Wörter" (sinnvoll oder nicht) entstehen durch Umordnen der Buchstaben von TOMATE?

☐ (a) 120 ☐ (b) 360 ☐ (c) 180 ☐ (d) 720

Augensumme zweier Würfel (Dreiecksverteilung); geordnete statt ungeordnete Paare (Irrtum von Leibniz)

3. Zwei faire Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 6 ist?

☐ (a) $\frac{1}{6}$ ☐ (b) $\frac{5}{36}$

☐ (c) $\frac{1}{7}$ ☐ (d) $\frac{1}{11}$

σ-Algebren und Wahrscheinlichkeitsräume erkennen und beschreiben

4. Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Was ist die kleinste σ-Algebra auf Ω, die das Ereignis $\{1\}$ enthält?

☐ (a) $\{\{1\},\ \{2, 3, 4\}\}$
☐ (b) $\{\emptyset,\ \{1\},\ \{2, 3, 4\},\ \Omega\}$
☐ (c) $\mathcal{P}(\Omega)$
☐ (d) $\{\emptyset,\ \{1\},\ \Omega\}$

Axiome eines Wahrscheinlichkeitsmaßes nachprüfen

5. Sei $\Omega = \{1, 2\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\{1\}) = a$ und $\mathbb{P}(\{2\}) = b$. Für welche Werte ist $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß?

☐ (a) $a = 1,\ b = 1$ ☐ (b) $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{3}$ ☐ (c) $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3}$ ☐ (d) $a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$

Folgerungen aus den Axiomen: Komplement, Monotonie, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

6. Für Ereignisse A, B gelte $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(B) = 0.4$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$. Dann ist $\mathbb{P}(A \cup B) =$

☐ (a) 0.7 ☐ (b) 0.2 ☐ (c) 0.8 ☐ (d) 0.9

Größt- und kleinstmögliche Wahrscheinlichkeit von "A und B"

7. Es gelte $\mathbb{P}(A) = 0.5$ und $\mathbb{P}(B) = 0.7$. Welcher der folgenden Werte ist für $\mathbb{P}(A \cap B)$ möglich?

☐ (a) 0.55 ☐ (b) 0.7 ☐ (c) 0.1 ☐ (d) 0.25

Wahrscheinlichkeitsräume auf $\mathbb{N}$, die keine Laplace-Räume sind (z.B. Münze werfen bis zum ersten Kopf)

8. Eine faire Münze wird geworfen, bis zum ersten Mal Kopf kommt; die Anzahl n der Würfe hat Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{n\}) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht man mehr als 2 Würfe?

☐ (a) $\frac{1}{8}$ ☐ (b) $\frac{1}{4}$ ☐ (c) $\frac{3}{4}$ ☐ (d) $\frac{1}{2}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit; $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ ist wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß

9. Zwei faire Münzen werden geworfen. Mindestens eine zeigt Kopf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen beide Kopf?

☐ (a) $\frac{1}{4}$ ☐ (b) $\frac{1}{2}$ ☐ (c) $\frac{2}{3}$ ☐ (d) $\frac{1}{3}$

Gesetz der vollständigen Wahrscheinlichkeit

10. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird Urne I (3 rote, 1 blaue Kugel) gewählt, sonst Urne II (1 rote, 1 blaue Kugel). Aus der gewählten Urne wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie rot?

☐ (a) $\frac{3}{8}$ ☐ (b) $\frac{5}{8}$ ☐ (c) $\frac{3}{4}$ ☐ (d) $\frac{2}{3}$

Satz von Bayes (z.B. medizinischer Test)

11. 10% einer Bevölkerung haben eine Krankheit K. Ein Test ist bei Kranken mit Wahrscheinlichkeit 0.9 positiv, bei Gesunden mit Wahrscheinlichkeit 0.1. Eine zufällig gewählte Person wird positiv getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie krank?

☐ (a) $\frac{9}{50}$ ☐ (b) $\frac{1}{2}$ ☐ (c) $\frac{9}{100}$ ☐ (d) $\frac{9}{10}$

Unabhängigkeit von Ereignissen; unabhängige Experimente und Produktmodell (z.B. zwei Würfel)

12. Zwei faire Würfel werden geworfen, $\Omega = \{1,\dots,6\}^2$ mit der Gleichverteilung. Sei A = "der erste Würfel zeigt eine gerade Zahl". Welches Ereignis ist unabhängig von A?

☐ (a) "beide Würfel zeigen eine gerade Zahl"
☐ (b) "die Augensumme ist 12"
☐ (c) "die Augensumme ist ungerade"
☐ (d) "der erste Würfel zeigt 6"

Unabhängig und unvereinbar unterscheiden

13. Seien A, B Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ und $A \cap B = \emptyset$. Welche Aussage gilt dann stets?

☐ (a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.
☐ (b) A und B sind nicht unabhängig.
☐ (c) $\mathbb{P}(A \cup B) < \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
☐ (d) A und B sind unabhängig.

Zufallsvariable als Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$; Notation für Ereignisse wie $\{X > 2\}$ (Urbilder)

14. Sei $\Omega = \{1,\dots,6\}$ und $X(\omega) = |\omega - 5|$. Dann ist $\{X > 2\} =$

☐ (a) $\{1,2,3\}$ ☐ (b) $\{1,2\}$ ☐ (c) $\{4,5,6\}$ ☐ (d) $\{3,4\}$

Verteilung P_X und Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsvariable bestimmen

15. Sei $\Omega = \{1,\dots,6\}$ mit der Gleichverteilung und $X(\omega) = \min\{\omega, 4\}$. Dann ist $p_X(4) =$

☐ (a) $\frac{1}{6}$ ☐ (b) $\frac{1}{2}$ ☐ (c) $\frac{1}{4}$ ☐ (d) $\frac{2}{3}$

Wahrscheinlichkeitsfunktionen erkennen: auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, ≥ 0, Summe 1

16. Für welches c ist $p(k) = c \cdot 2^{-k}$, $k \in \{0,1,2,\dots\}$, eine Wahrscheinlichkeitsfunktion?

☐ (a) $c = \frac{1}{4}$ ☐ (b) $c = 2$ ☐ (c) $c = \frac{1}{2}$ ☐ (d) $c = 1$

Zu einer Wahrscheinlichkeitsfunktion eine Zufallsvariable angeben; wann ist der Grundraum zu klein?

17. Sei $\Omega = \{1,\dots,n\}$ mit der Gleichverteilung. Für welches n gibt es auf Ω einen Würfel?

☐ (a) $n = 9$ ☐ (b) $n = 4$ ☐ (c) $n = 12$ ☐ (d) $n = 10$

Verschiedene Zufallsvariablen mit derselben Verteilung (z.B. zwei Würfel auf $\{1,\dots,6\}^2$)

18. Sei $\Omega = \{1,\dots,6\}^2$ mit der Gleichverteilung. Welche der folgenden Zufallsvariablen ist ein Würfel?

☐ (a) $X(i,j) = \lceil (i+j)/2 \rceil$ ☐ (b) $X(i,j) = |i-j| + 1$
☐ (c) $X(i,j) = 7 - i$ ☐ (d) $X(i,j) = \max\{i,j\}$

5. Übung

25. (Unabhängigkeit für Mengen.) Diskrete ZV X, Y heißen *unabhängig*, falls

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B) \qquad \text{für alle } A, B \subseteq \mathbb{R}$$

gilt. (Hinweis: Zerlegen Sie $\{X \in A, Y \in B\}$ in die Ereignisse $\{X = x, Y = y\}$.)

26. (Zwei Würfel.) Sei $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ mit der Gleichverteilung und

$$X(i, j) = i, \qquad Y(i, j) = j.$$

(a) Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

(b) Sind X und $X + Y$ unabhängig?

27. (Erwartungswert auf zwei Arten.) Sei $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ mit der Gleichverteilung und $X(\omega) = |\omega - 3|$ (wie in Beispiel 19). Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ einmal mit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})$$

und einmal mit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x\,\mathbb{P}(X = x).$$

28. (Indikatoren.) Für ein Ereignis A sei

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie $\mathbf{1}_A \sim B(\mathbb{P}(A))$ und $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

29. (Warten auf die erste Sechs.) Ein fairer Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal eine 6 fällt; X sei die Anzahl der Würfe.

(a) Welche Verteilung hat X?

(b) Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(X > k) = \left(\frac{5}{6}\right)^k \qquad \text{für } k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

30. (Ein Würfelspiel.) Sie werfen einen fairen Würfel. Bei einer 6 gewinnen Sie 3 Euro, sonst verlieren Sie 1 Euro. Sei G Ihr Gewinn (in Euro).

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von G.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[G]$. Lohnt sich das Spiel?

6. Übung

31. (Anzahl der Sechsen.) Ein fairer Würfel wird 12-mal geworfen; X sei die Anzahl der Sechsen und A_i das Ereignis, dass der i-te Wurf eine 6 zeigt.

(a) Begründen Sie
$$X = \mathbf{1}_{A_1} + \ldots + \mathbf{1}_{A_{12}}.$$

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ mit der Linearität des Erwartungswerts.

32. (Erwartungswert einer Funktion.) Sei X eine ZV mit
$$p_X(-1) = p_X(0) = p_X(1) = p_X(2) = \frac{1}{4}$$
und $p_X(x) = 0$ für alle anderen $x \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und, mit der Formel $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_x f(x)\, p_X(x)$, auch $\mathbb{E}[X^2]$.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $Y = X^2$ und berechnen Sie damit $\mathbb{E}[Y]$ noch einmal.

33. (Die Varianz misst die Streuung.) Sei X gleichverteilt auf $\{3, 4\}$, Y gleichverteilt auf $\{1, 6\}$ und Z ein fairer Würfel.

(a) Skizzieren Sie die drei Wahrscheinlichkeitsfunktionen und zeigen Sie
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] = \frac{7}{2}.$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$ und $\mathrm{Var}(Z)$ mit der Formel $\mathrm{Var}(V) = \mathbb{E}[V^2] - (\mathbb{E}[V])^2$.

34. (Die beste Konstante.) Sei $X \sim B(\frac{1}{4})$ und
$$h(c) := \mathbb{E}[(X - c)^2], \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(a) Schreiben Sie $h(c)$ als Polynom in c.

(b) Für welches c ist $h(c)$ minimal? Vergleichen Sie dieses c mit $\mathbb{E}[X]$ und den minimalen Wert mit $\mathrm{Var}(X)$.

35. (Raten beim Übungstest.) Bei einer Multiple-Choice-Frage mit vier Antworten, von denen genau eine richtig ist, gibt es für die richtige Antwort 1 Punkt und für eine falsche $-\frac{1}{3}$ Punkte; leer lassen ergibt 0 Punkte. Sei G die Punktezahl, wenn Sie zufällig eine der vier Antworten ankreuzen.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von G sowie $\mathbb{E}[G]$ und $\mathrm{Var}(G)$.

(b) Sie können eine falsche Antwort sicher ausschließen und kreuzen zufällig eine der anderen drei an. Wie groß ist nun $\mathbb{E}[G]$? Lohnt sich das Raten?

36. (Produkt unabhängiger ZV.) Seien X, Y unabhängig mit $X, Y \sim B(\frac{1}{2})$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von XY und damit $\mathbb{E}[XY]$. Vergleichen Sie mit $\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X \cdot X]$. Warum gilt hier nicht $\mathbb{E}[X \cdot X] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X]$?

7. Übung

37. (Die Standardabweichung als Abstand.) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ mit der Gleichverteilung und

$$X(1) = 0, \qquad X(2) = X(3) = 3.$$

(a) Skizzieren Sie X als Funktion auf Ω und berechnen Sie die Länge $\|X\|_2$.

(b) Zeichnen Sie die konstante ZV $\mathbb{E}[X]$ ein und berechnen Sie den Abstand $\|X - \mathbb{E}[X]\|_2$. Welche bekannte Größe ist das?

38. (Zweimal würfeln oder einmal verdoppeln?) Seien X, Y unabhängige faire Würfel. Nach Beispiel 33 ist $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{35}{12}$.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X + Y]$ und $\mathrm{Var}(X + Y)$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[2X]$ und $\mathrm{Var}(2X)$. (Hinweis: $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.) Welche der beiden ZV $X + Y$ und $2X$ streut stärker? Ist das plausibel?

39. (Mittelwert vieler Münzwürfe.) Eine faire Münze wird n-mal geworfen. Sei $X_i = 1$, wenn der i-te Wurf Kopf zeigt, und $X_i = 0$ sonst. Dann ist

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

die relative Häufigkeit von Kopf.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$ und die Standardabweichung von $\bar{X}_n$ für $n = 100$.

(b) Wie oft muss man werfen, damit die Standardabweichung von $\bar{X}_n$ höchstens 0,01 ist?

40. (Risikostreuung.) Sie legen 1000 Euro für ein Jahr an. Es gibt zwei Projekte A und B. Jedes bringt, unabhängig vom anderen, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Gewinn von 20 % und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Verlust von 10 %.

(a) Sie stecken alles in Projekt A. Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung Ihres Gewinns G (in Euro).

(b) Sie stecken je 500 Euro in A und in B. Berechnen Sie wieder Erwartungswert und Standardabweichung des Gewinns. Was ändert sich, was nicht?

41. (Kovarianz.) Ein fairer Würfel wird geworfen; W sei die Augenzahl. Sei $X = 1$, wenn W gerade ist, und $X = 0$ sonst; sei $Y = 1$, wenn $W \geq 4$ ist, und $Y = 0$ sonst.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$ und $\mathrm{cor}(X, Y)$. Sind X und Y positiv oder negativ korreliert?

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X + Y)$. Wäre $\mathrm{Var}(X + Y)$ größer oder kleiner, wenn X und Y unabhängig wären?

42. (Unkorreliert, aber nicht unabhängig.) Sei X gleichverteilt auf $\{-1, 0, 1\}$ und $Y = X^2$.

(a) Zeigen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind.