Quantitative Aktienstrategien und Faktor Investing

Dr. Simon Haller

14. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

CAPM

Grundlegende Regression

- $\underbrace{r_i - R_0}_{\text{Aktien-return}} \sim \alpha_i + \beta_i \cdot \underbrace{(R_M - R_0)}_{\text{Markt-return}} + \underbrace{\varepsilon_i}_{\text{Idiosynkratischer Anteil}}$
- $\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)}$

CAPM

- $\mathrm{E}(r_i) = \beta_i \mathrm{E}(R_M)$, kein Alpha: $\alpha_i = 0$. Nix geht.
- Das Beta bestimmt die erwartete Aktien-rendite vollständig.
- Die Marktrisikoprämie ist positiv $\mathrm{E}(R_M) \geq 0$ (über dem risikolosen Zins).

Konsequenzen für die Portfolio-konstruktion

Portfolioertrag und -risiko

definiert durch die Portfolio-gewichte $w = (w_1, \ldots, w_n)$ mit $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

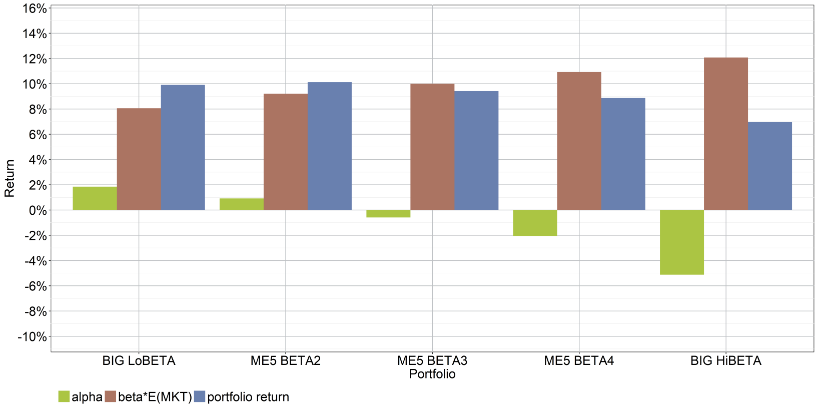
- $\mathrm{E}(R_p) = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n w_i r_i) = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i \mathrm{E}(R_M) = \beta_p \mathrm{E}(R_M)$
- $\mathrm{Var}(R_p) = \beta_p^2 \mathrm{Var}(R_M) + \underbrace{\sum_{i,j=1}^n w_i w_j \varepsilon_i \varepsilon_j}_{\geq 0} \geq \beta_p^2 \mathrm{Var}(R_M)$
- Ein Portfolio ist immer mindestens so riskant, wie ein entsprechend skaliertes (Portfolio-beta) Marktportfolio.
- Aktives Portfoliomanagement macht keinen Sinn!

Empirische Überprüfung des CAPM

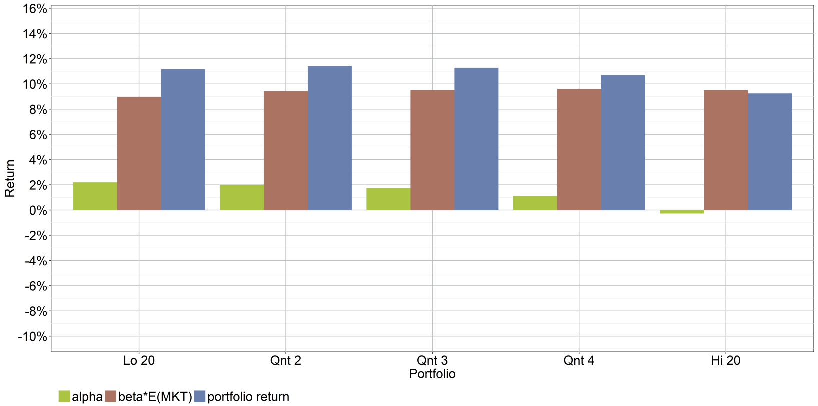
Portfolio

- Die Steigung der Regressionsgeraden ist zu niedrig ($\downarrow \beta : \alpha < 0$ und $\uparrow \beta : \alpha > 0$)
- Verschiedenene Firmencharakteristika führen zu Portfolios mit einem signifikant von 0 abweichenden α:
  - Market-Capitalization (Small Cap Effect)
  - Value: Book-to-Price und Earnings-over-Price (KGV)
  - Dividend Yield
  - Profitability: Return-over-Assets und Return-over-Equity
  - Momentum: $Preis_{t-12Monate} - Preis_{t-1Monat}$.

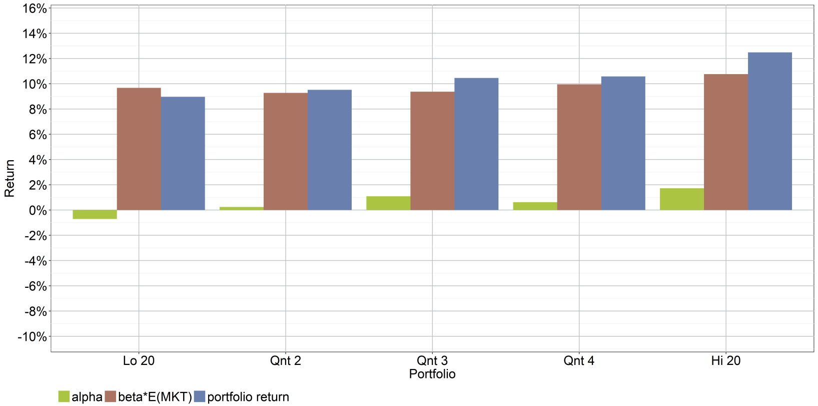
5 Portfolios sortiert nach Beta (USA, Aug. 1963 - Dez. 2017)



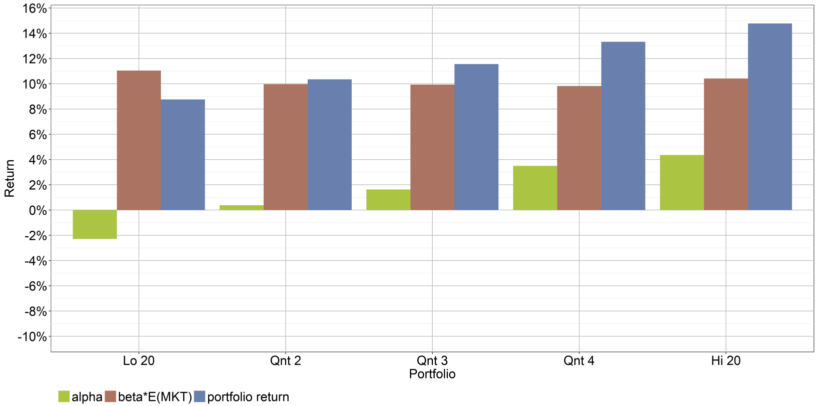
5 Portfolios sortiert nach Markt Kapitalisierung (USA, Jan. 1927 - Dez. 2017)



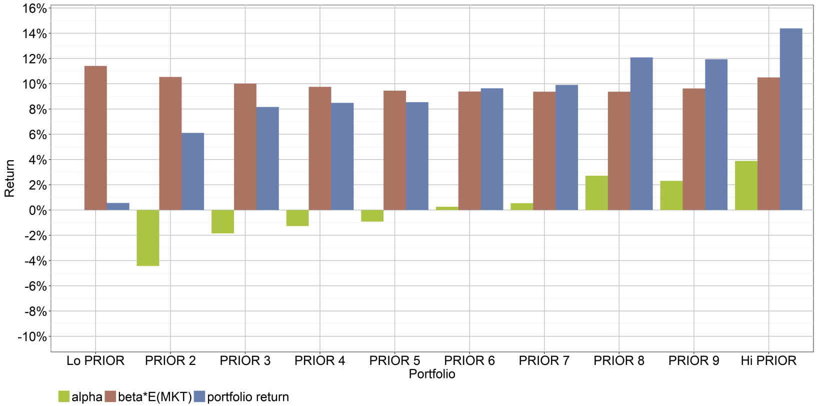
5 Portfolios sortiert nach Book-to-Price (USA, Aug. 1927 - Dez. 2017)



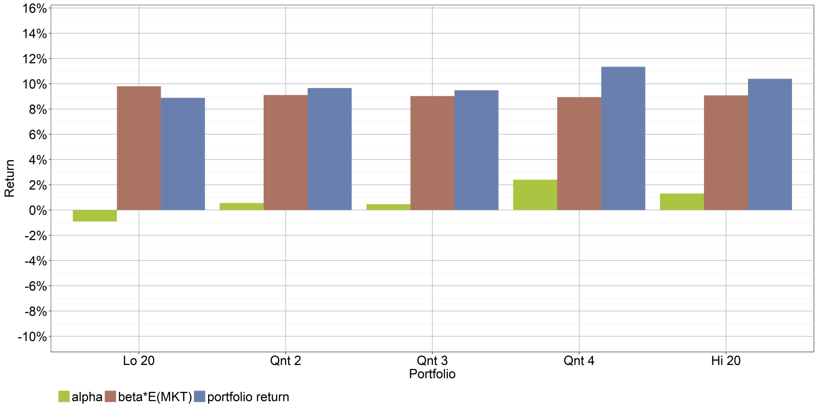
5 Portfolios sortiert nach Earnings-Price (USA, Aug. 1951 - Dez. 2017)



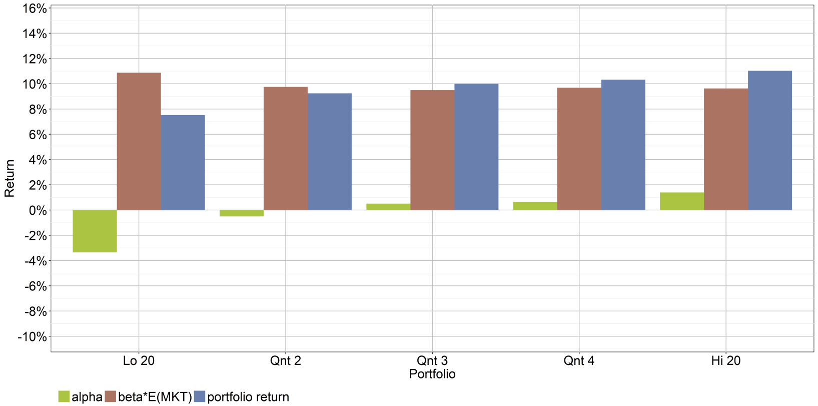
10 Portfolios sortiert nach Momentum (USA, Aug. 1926 - Dez. 2017)



5 Portfolios sortiert nach Dividend Yield (USA, Aug. 1927 - Dez. 2017)



5 Portfolios sortiert nach Profitability (USA, Jan. 1963 - Dez. 2017)

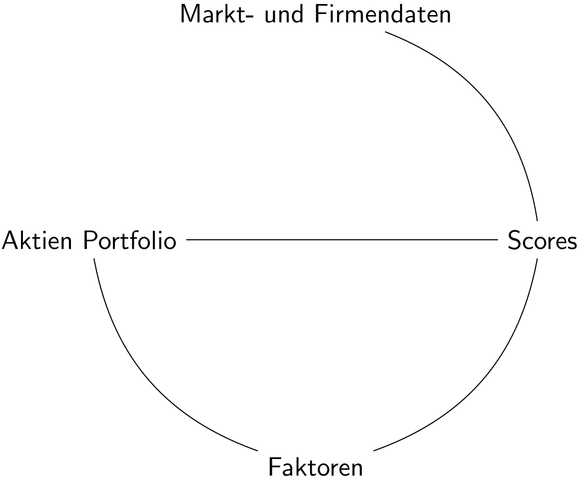


Zwischenfazit

1. CAPM hält der empirischen Überprüfung nicht zu 100% stand.
2. Es gibt Einflüsse auf die Portfolio-performance, die nicht durch das Markt-beta getrieben sind (Return-Anomalien).
3. Aktives Portfolio-management macht Sinn.

Inhaltsverzeichnis

Quantitative Aktienstrategie



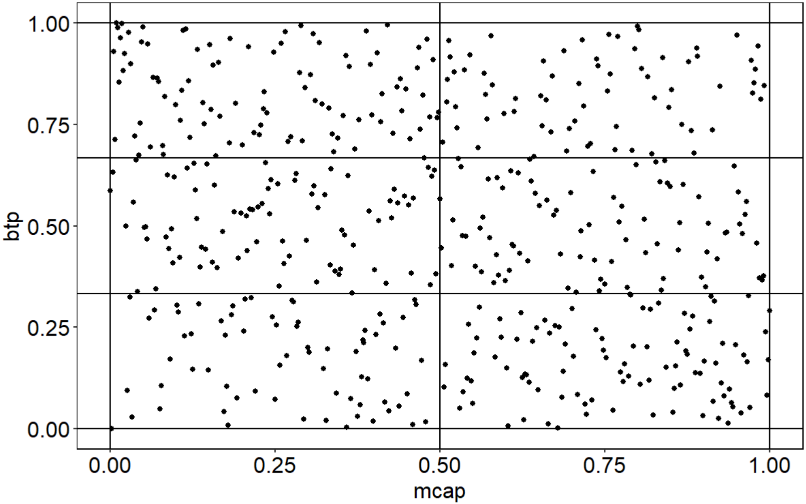
Wichtige Firmencharakteristiken (Faktorzoo)

- btp: Book-to-Price, Value, Buchwert pro Aktien / Marktpreis.
- mcap: Market-Cap, Marktkapitalisierung.
- mom: Momentum, 1J Preistrend P_{t-12m}/P_{t-1m}.
- pe: Price-Earnings, Kurs-Gewinn-Verhältnis.
- dy: Dividend Yield, Dividenden pro Aktie / Marktpreis.
- beta1y: CAPM Beta 1J Moving Window.
- roa: Return over Assets, Gewinn (buchhalterisch) / Vermögen.
- roe: Return over Equity, Gewinn (buchhalterisch) / Eigenkapital.
- lev: Leverage, Verschuldung / Eigenkapital.
- chgnosh: Change in number of shares, Änd. der Aktien-Stückzahl.

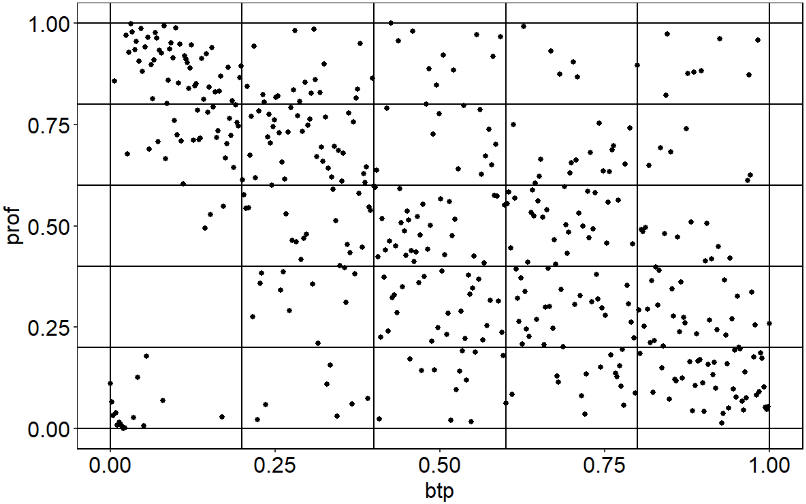
Faktor Portfolio

- Ranking aller Aktien (in einem Universum) nach einer oder mehreren Firmen-Charakteristik (zB. Value).
- Faktor-portfolio: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$, zB. Top-Quintil long und Bottom-Quintil short.
- Faktor-returns sind die Portfolio-returns der Faktor-portfolios.
- Empirisch besser als CAPM.
- Multivariate Modelle: Fama-French 3-Faktormodell (Value und Size, 1993), Carhart 4-Faktormodell (Value, Size und Momentum, 1997).

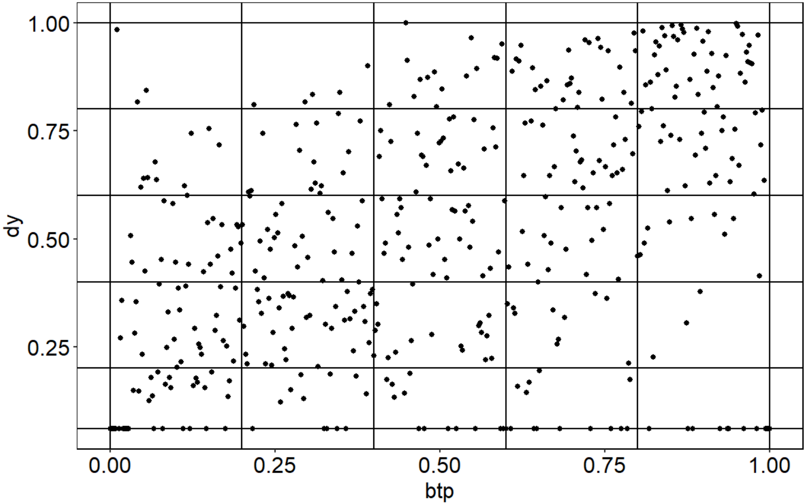
QQ-Plot: Marktkap. vs. Value, S&P500 2018-02-09



QQ-Plot: Value vs. Profitability, S&P500 2018-02-09



QQ-Plot: Value vs. Dividend Yield, S&P500 2018-02-09



Fama French

$$
\begin{aligned}
\underbrace{r_i(t) - R_0(t)}_{\text{Aktien-return}} \sim \alpha_i + \beta_i^{\mathrm{Mkt}} \cdot & \left(\underbrace{R_M(t) - R_0(t)}_{\text{Markt-return}} \right) \\
+ \beta_i^{\mathrm{HML}} \cdot & \left(\underbrace{R_{\mathrm{H}}(t) - R_{\mathrm{L}}(t)}_{\text{High value minus Low value}} \right) \\
+ \beta_i^{\mathrm{SMB}} \cdot & \left(\underbrace{R_S(t) - R_B(t)}_{\text{Small minus Big}} \right) \\
& + \underbrace{\varepsilon_i(t)}_{\text{Idiosynkratischer Anteil}}
\end{aligned}
$$

Scores

- Da die unterschiedlichen Charateristiken nicht unabhängig sind, führt die Aufteilung des Investment-universums in Quantile bei mehreren Charakteristiken zu Portfolios unterschiedlicher Größe.
- Deshalb ist es flexibler zunächst Scores zu berechnen
  1. *Q-Score* $q \in [-1, 1]^n$

$$q := 2\frac{\mathrm{rk}(y) - \overline{\mathrm{rk}(y)}}{n-1} = 2\frac{\mathrm{rk}(y) - (n+1)/2}{n-1}$$

  2. *Z-Score* $z(y) \in \mathbb{R}^n$ ... Achtung Ausreisser

$$z := \frac{y - \overline{y}}{\sigma(y)}$$

Faktor Portfolios

1. Top-Bottom Faktor portfolio (zB. Fama-French): Q-Scores q

$$w^{(i)} := \begin{cases} 1/N & q^{(i)} \geq 1-\alpha \\ -1/N & q^{(i)} \leq \alpha - 1 \\ 0 & \alpha - 1 < q^{(i)} < 1-\alpha \end{cases}$$

   mit $\sum_i w_i = 0$ und N sodass $\sum_i |w_i| = 1$.

2. Lineares (Parametric) Faktor portfolio
   - $w := q/\|q\|_1$
   - $w := z/\|z\|_1$

Multilineares Faktormodel

Mulitlineare Regression

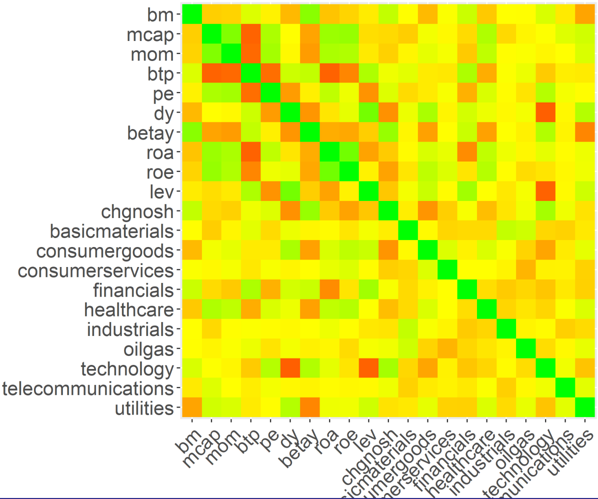
$n \ldots$ # Aktien, $m \ldots$ # Faktoren, $T \ldots$ # Beobachtungen.

$$\underbrace{r}_{T\times n} \sim \underbrace{1}_{T\times 1}\underbrace{\alpha^T}_{1\times n} + \underbrace{F}_{T\times m}\underbrace{B}_{m\times n} + \underbrace{\varepsilon}_{T\times n}$$

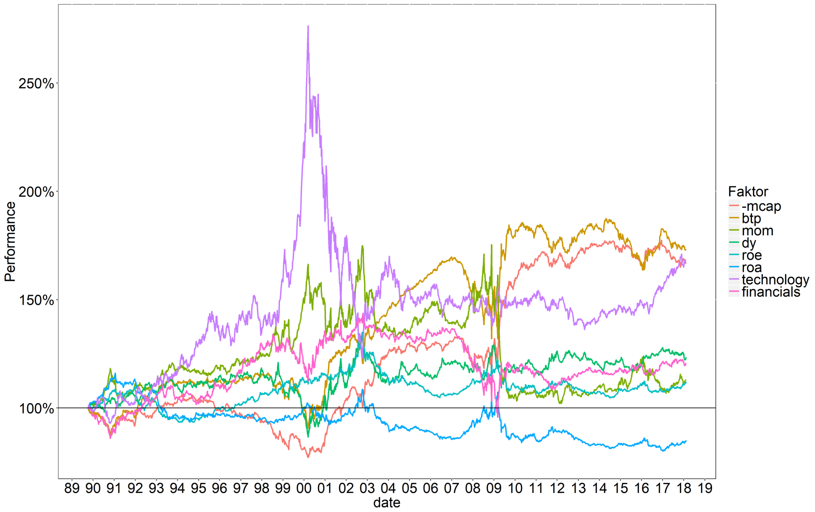
- Mittelwerte $\overline{r} = \frac{1}{N}1^T r$ and $\overline{F} = \frac{1}{N}1^T F$ und $\overline{r} = \alpha + \overline{F}B$.
- Aktien Kovarianzmatrix $\Sigma = \frac{1}{n-1}(r - \overline{r})^T(r - \overline{r})$.
- Faktor Kovarianzmatrix $\Omega = \frac{1}{n-1}(F - \overline{F})^T(F - \overline{F})$.
- Risikostruktur $\Sigma = B^T\Omega B + \varepsilon^T\varepsilon \quad (\text{hoffentlich } \varepsilon^T\varepsilon = \sigma \cdot \mathbb{1}_{n\times n})$
- Portfolio-Risiko bestimmt durch das Portfolio-Beta Bx (Style-exposure).

$$\mathrm{Var}(rx^T) = x^T\Sigma x = \underbrace{(Bx)^T\Omega(Bx)}_{\text{Portfolio-beta bestimmt das Risiko}} + \sigma\cdot \underbrace{x^Tx}_{\text{diversifizierbar}}$$

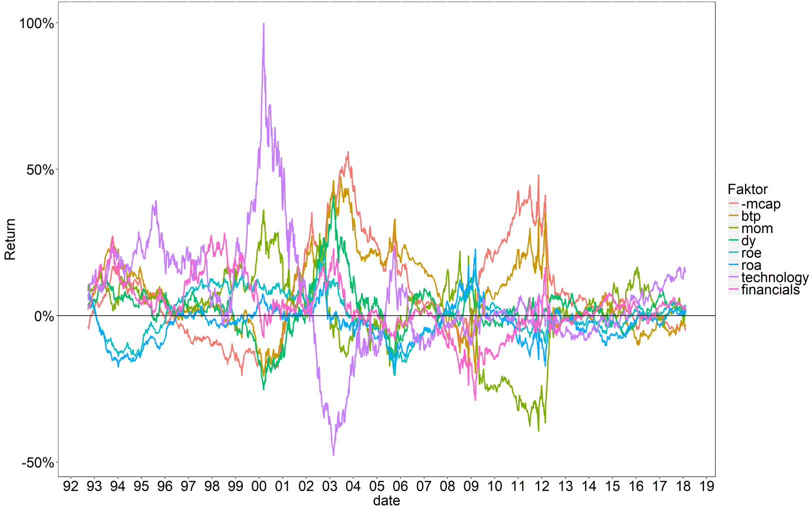
Faktor Korrelationen



Faktor Performance



Faktor 3J Return



Optimierung im Faktormodell

Minimum Varianz Optimierung

Optimiere das Portfolio-beta.

$$\min b^T \Omega b$$
$$\overline{F} b \geq \mu$$

Minimum Tracking Error

Markt $b_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

$$\min (b - b_0)^T \Omega (b - b_0)$$
$$\overline{F}(b - b_0) \geq \mu$$

Quadratische Nutzenfunktion

α ist ein Risikoaversions-parameter.

$$\max \overline{F} b - \alpha b^T \Omega b$$

Falls Ω invertierbar (Achtung: Kollinearitäten in den Faktor-returns) ist, gilt $\hat{b} = \frac{1}{\alpha} \Omega^{-1} \overline{F}$.

Kollinearitäten

Eine Lineare Abhängigkeit bei verschiedenen Ratios zB.

$$\underbrace{\frac{\text{Buchwert pro Aktie}}{\text{Aktienpreis}}}_{\text{Value}} \times \underbrace{\frac{\text{Aktienpreis}}{\text{Gewinn pro Aktie}}}_{\text{KGV}} = \underbrace{\frac{\text{Buchwert pro Aktie}}{\text{Gewinn pro Aktie}}}_{1/\text{Profitabilität}}$$

oder bei kategorischen Variables (Sektoren,Länder) die eine disjunkte Zerlegung des Gesamt-universum liefern.

Investierbarkeit der Lösung

Portfolio-gewichte

Ein Portfolio-beta $\hat{b}$ (als Lösung einer Optimierung oder diskretionär festgelegt) ergibt zusammen mit den Faktorportfolios $W(t) = (w_1(t), \ldots, w_m(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ein dynamisches Portfolio $x(t) = \underbrace{W(t)}_{n \times m} b$ mit der Portfolio-varianz $\hat{b}^T \Omega \hat{b}$.

- Das resultierende Portfolio $x(t)$ kann negative Gewichte haben.
- Die $\|x\|_1 \neq 1$, dh. das Portfolio hat Leverage.
- Die Anzahl der Aktien, die $x_i > 0$ ist typischerweise sehr hoch.
- Der Turnover $\|x(t) - x(t-1)\|_1$ hängt von der Dynamik der Faktorgewichte ab (hoch).

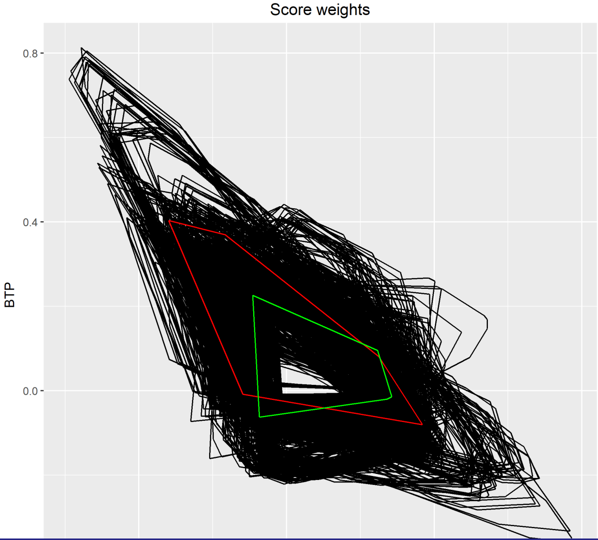
Beschränkung der Style-exposures

Style-exposures

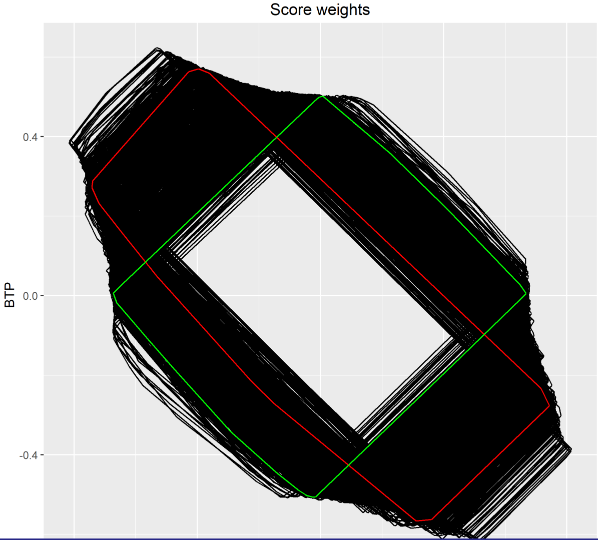
Wenn das Style-exposures b nahe bei $b_0 = (1, \ldots, 0)$ ist, dann bleibt das resultierende Portfolio positiv.

- Die Umgebung ist ein konvexer Polyeder.
- Die Größe hängt von der gewählten Scoring-methode (Z-Score oder Q-Score) ab.
- Die Umgebung ändert sich im Zeitverlauf.
- Wenn das Optimum $\hat{b}$ durch ein Long-portfolio realisierbar sein soll, sind eventuell Constraints auf die Style-exposures sinnvoll.

Z-Score Value und Momentum



Q-Score Value und Momentum



Statistische Fragen

- Wahl des Regressionsfensters (expanding window, moving window).
- Statistische Robustheit: Schätzfehler der Kovarianz-matrix Ω.
- Ist $\overline{F}$ ein guter Prediktor für die erwarteten Erträge?

Steuerung über Portfolioscores

Die Scorematrix $S = (q_1, \ldots, q_m)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Portfolio, dann ist der mittlere Portolioscore $S^T x$.

Lineares Faktorportfolio

Die Faktorgewichte $W(t) := (w_1(t), \ldots, w_m(t)) \propto S$ und somit haben ergeben sich für die Portfolio-Scores $S^T W \propto S^T S$.

Aggregierte Scores

Für ein beliebiges Style-exposure $b \in \mathbb{R}^m$. Das Portfolio $x(t) = W(t)b$ hat den Portfolio-Score $S^T Wb \propto S^T(Sb)$. Insbesondere kann $\hat{b} \propto (S^T S)^{-1}\hat{s}$ (falls $S^T S$ invertierbar ist) ein beliebig vorgegebener Portfolio-Score $\hat{s}$ erreicht werden. b ist das Scoring-gewicht für den aggregierten Score Sb. Man kann die Matrix $S(S^T S)^{-1}$ als orthogonalisierte Scorematrix interpretieren.

Dualität

Linear Abbildung: Portfolio Scores

$$\begin{array}{rcl} \text{Portfolio} & \rightarrow & \text{Portfolio Scores} \\ \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ w & \mapsto & S^T w \end{array}$$

Duale Abbildung: Gewichtetes Faktor Portfolio

$$\begin{array}{rcl} \text{Scoring Gewichte} & \rightarrow & \text{gewichtetes Factor Portfolio} \\ \mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ b & \mapsto & Sb \end{array}$$

Moore Penrose Pseudoinverse

Singularwert Zerlegung

Die Singulärwertzerlegung S (mit Rang $r \leq m$)

$$S = UDV^T$$

mit U, V orthogonal und $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\mathrm{diag}(D) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$ und Nullen sonst.

Moore Penrose Pseudoinverse

Die *Moore Penrose Pseudoinverse* von S ist definiert durch

$$S^{\ominus} = V^T D^{\ominus} U$$

mit $D^{\ominus} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\mathrm{diag}(D^{\ominus}) = (1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_r, 0, \ldots, 0)$ und Nullen sonst.

Pseudoinverse

Eigenschaften

1. $(S^T)^{\ominus} = (S^{\ominus})^T$.
2. $SS^{\ominus}S = S$ and $S^{\ominus}SS^{\ominus} = S^{\ominus}$.
3. Wenn die Spalten von S linear unabhängig sind: $S^{\ominus}$ ist identisch zur links-inversen Matrix $(S^TS)^{-1}S^T$.

Portfolio Projector

S Score matrix mit Rang $r \leq m$.

Projektor auf ein Portfolio ohne Score

Mit der Pseudoinversen $S^{\ominus}$ kann ein

$$P := SS^{\ominus} = UDD^{\ominus}U^T = U\mathrm{diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{r}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-r})U^T$$

Projektionsoperator auf das Bild von $\lambda \mapsto S\lambda$ bzw. auf Komplement des Kerns von $w \mapsto S^T w$ definiert werden. Und $M := \mathbb{I} - P$ ist der Projektor auf den Kern (Projector auf ein Portfolio mit Score 0).

Portfolio Zerlegung

Attribution

Die Zerlegung eines Portfolios x

$$x = \underbrace{Px}_{\text{Teil mit Score}} + \underbrace{Mx}_{\text{ungescorter Teil}} = \sum_{k=1}^{m} P_k w + Mw$$

wobei

$$P_k = S(S^T S)^{-1}_{:k}(S^T)_{k:}$$

eine Projektor auf den $k - ten$ (orthogonalisierten) Score ist.

Portfolio-Zerlegung: Value und Momentum

Inhaltsverzeichnis

Wichtige Stellschrauben der Portfolio Optimierung

- Investment-Universum (S&P 500, DJ Stoxx 600, MSCI Emerging Markets)
- Filterkriterien (zB. Nachhaltigkeit)
- Anzahl der Titel (ca. $40 - 60$)
- Ländergewichte (meistens Constraints rel. zur Benchmark, ca. $\pm 10\%$)
- Sektorgewichte (meistens Constraints rel. zur Benchmark, ca. $\pm 10\%$)
- Strategie: basierend auf Portfolio-Scores oder Portfolio-Faktorbeta
- Handelfrequenz und Turnover ($\sum_{i=1}^{n} |w_i(t) - w_i(t-1)|$)

Portfolio Optimierung: direkte Methode

Quadratische Optimierung

Optimierung einer quadratische Nutzenfunktion (optional eine Benchmark x_0). Achtung: Statistisch nicht robust!

$$
\begin{array}{ll}
\max \bar{r}^T(x - x_0) - \alpha(x - x_0)^T \Sigma (x - x_0) & \text{Information Ratio} \\
\text{s.t.} & \\
0 \leq x_i & \text{Long-only Aktienportfolio} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & \text{Normierung} \\
l_c \leq A(x - x_0) \leq u_c & \text{Länder- und Sektor-Con.} \\
\#\{x_i > 0\} = N & \text{Integer Constraints} \\
\|x - x(t-1)\|_1 \leq \tau & \text{pfadabhängig}
\end{array}
$$

Portfolio Optimierung: Faktorkovarianz

Alternative Nutzenfunktion

Anstatt die volle Kovarianz-matrix Σ zu verwenden, ist es statistisch robuster die Nutzenfunktion

$$\max \overline{F}^T B(x - x_0) - \alpha(Bx - b_0)^T \Omega(Bx - b_0)$$

zu verwenden. $b_0 = Bx_0$ ein Ziel-exposure definiert ($b_0 = (1, 0 \ldots, 0)$ für das Marktportfolio).

Alternative Methoden für eine robustere Nutzenfunktion

- Principal component analysis (PCA): Projektion auf die größten Eigenwerte von Σ.
- Shrinkage estimator für die Kovarianz: $\hat{\Sigma} = \lambda\Sigma + (1 - \lambda)\mathbb{1}$.

Es ist wichtiger eine statistisch robuste Lösung zu erhalten, als das exakte Optimum des quadratischen Programms.

Portfolio Optimierung: Aggregierter Score

Lineare Optimierung

Die lineare Optimierung eines Portfolio-Score mit Scoring-gewicht $b \in [-1, 1]^m$ (Sortierung unter Nebenbedingung). Trennung zwischen Optimierung des Style-exposure b und der Konstruktion eines Portfolios.

$$
\begin{array}{cl}
\max b^T S^T x & \\
\text{s.t.} & \\
0 \leq x_i \leq 1/N & \text{Mindestzahl an Aktien } N \\
\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 & \text{Normierung} \\
l_c \leq A(x - x_0) \leq u_c & \text{Länder- und Sektor-Con.}
\end{array}
$$

Turnover Reduktion: Varianten

Turnover Reduktion

Eine Turnover-reduktion führt zu pfadabhängigen Strategien...Strategie hängt von der Vorgeschichte ab.

- Nebenbedingung: $\sum_{i=1}^{n} |w_i(t) - w_i(t-1)| \leq \tau$.
- Scoring-Penalty: Bonus-score für Aktien, die bereits im Portfolio sind.
- Slicing: Nur ein Teil der Aktien steht für die Umschichtung an einem bestimmten Zeitpunkt zur verfügbar.
- Objektive Funktion: $u(x) = b^T S^T w(t-1) + b^T S^T (x - w(t-1)) - \delta \|x - w(t-1)\|_1$.

Transaktionskosten

- Bid-Ask Spread $\propto |w_i(t-1) - w_i(t)|$ (aktienspezifisch, zeitabhängig).
- Broker-fee $\propto \|w(t-1) - w(t)\|_1$. zB. 0.1%.
- Ticket-fee $\propto \#\{|w(t-1) - w(t)| > 0\}$. zB. 100$ pro Ticket.
- Management-fee.