Mathematische Modelle in der Lebensversicherung

Mag. David Wimmesberger

DAGOPT Optimization Technologies GmbH

11.04.2018

Inhalt

- Vorstellung, Berufserfahrung
- Berufsbild Aktuar
- Grundbegriffe der Lebensversicherungsmathematik
- Berufsalltag als Mathematiker in der Lebensversicherung

Vorstellung

- **Name:** Mag. David Wimmesberger
  wimmesberger@dagopt.com
- **Studium:** Diplomstudium Mathematik, Universität Wien
  - Schwerpunkt: „Angewandte Mathematik und Scientific Computing“
  - Diplomarbeit: „The time-dependent Pauli equation“, bei Prof. Mauser

Berufserfahrung

- **2010 - 2012:** Consultant bei
  arithmetica, Versicherungs- und finanzmathematische Beratungs-GmbH
- **2012 - 2017:** Entwickler, Fachberater und Teamleiter bei
  msg life AG
- **seit August 2017:** *DAGOPT Optimization Technologies GmbH*

Mathematiker in der Versicherungsbranche

- **Offizielle Berufsbezeichnung:** (Anerkannte/r) AktuarIn

Mathematiker in der Versicherungsbranche

- **Offizielle Berufsbezeichnung:** (Anerkannte/r) AktuarIn
- Anerkennung durch die **Aktuarvereinigung Österreichs (AVÖ)**

Mathematiker in der Versicherungsbranche

- **Offizielle Berufsbezeichnung:** (Anerkannte/r) AktuarIn
- Anerkennung durch die **Aktuarvereinigung Österreichs (AVÖ)** - Voraussetzungen (kurzgefasst):
  - abgeschlossenes Mathematikstudium (Diplom- oder Masterstudium)

Mathematiker in der Versicherungsbranche

- **Offizielle Berufsbezeichnung:** (Anerkannte/r) AktuarIn
- Anerkennung durch die **Aktuarvereinigung Österreichs (AVÖ)** - Voraussetzungen (kurzgefasst):
  - abgeschlossenes Mathematikstudium (Diplom- oder Masterstudium)
  - versicherungsmathematische, versicherungsrechtliche und versicherungswirtschaftliche Ausbildung

Mathematiker in der Versicherungsbranche

- **Offizielle Berufsbezeichnung:** (Anerkannte/r) AktuarIn
- Anerkennung durch die **Aktuarvereinigung Österreichs (AVÖ)** - Voraussetzungen (kurzgefasst):
  - abgeschlossenes Mathematikstudium (Diplom- oder Masterstudium)
  - versicherungsmathematische, versicherungsrechtliche und versicherungswirtschaftliche Ausbildung
  - einschlägige Berufserfahrung (drei bzw. vier Jahre)

- **Berufsaussichten**
- **Einstieg als Absolvent der Universität Wien** (insbesondere ohne versicherungsmathematisches Vorwissen)
- **Aufgaben von Aktuaren**

Grundbegriffe der Lebensversicherungsmathematik

„Als Aktuar braucht man die vier Grundrechnungsarten, aber Dividieren kommt eh nicht so oft vor "

In der Versicherungsmathematik beschäftigt man sich mit Zahlungen, die zu verschiedenen Zeitpunkten (mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten) stattfinden.

Um diese zu einem fixen Zeitpunkt vergleichbar zu machen, verwendet man den sogenannten *(versicherungsmathematischen) Barwert*.

Finanzmathematischer Barwert

Seien

$$i \ldots \text{Rechnungszins (jährlich)}$$

$$v := \frac{1}{1+i} \ldots \text{Abzinsungsfaktor}$$

Dann betrachte folgende Entwicklung des Kapitals K_0:

$$\begin{array}{cccc}
K_0 & K_1 := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zeitwert nach 1 Jahr}}}{K_0} \cdot (1+i) & \cdots & K_n := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Endwert nach } n \text{ Jahren}}}{K_0} \cdot (1+i)^n \\
\uparrow & & & \\
\text{Barwert} & & \ldots &
\end{array}$$

Somit

$$K_0 = K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = K_n \cdot v^n$$

Im Folgenden sei $K_n = 1$, also

$$K_0 = v^n$$

Versicherungsmathematischer Barwert

In der Lebensversicherung betrachtet man Zahlungen, die zusätzlich an das Leben einer (oder mehrerer) versicherten Person (VP) gebunden sind. Angenommen, eine VP im Alter von x Jahren erhält in n Jahren eine Zahlung in Höhe von 1, dann ist für

$$
\begin{aligned}
{}_nq_x &= P(\text{ein } x\text{-jähriger stirbt vor Erreichen des Alters } x+n) \\
{}_np_x &:= (1 - {}_nq_x)
\end{aligned}
$$

der (versicherungsmathematische) Barwert o.g. Zahlung gegeben durch:

$$\mathbf{{}_np_x \cdot v^n =: {}_nE_x}$$

Regelmäßige Zahlungen (Renten)

Erhält eine VP im Alter von x Jahren erhält ab sofort zu Beginn jedes Jahres für die Dauer von n Jahren eine Zahlung in Höhe von 1, dann gilt für den Barwert $\ddot{a}_{\mathbf{x},\overline{\mathbf{n}}}$ dieser Rente:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x,\overline{n}} &= 1 + {}_1p_x v + \cdots + {}_np_x v^n \\ &= 1 + {}_1E_x + \cdots + {}_nE_x\end{aligned}$$

also

$$\ddot{a}_{\mathbf{x},\overline{\mathbf{n}}} = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} {}_{\mathbf{k}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}}$$

Für wird die Rente lebenslang gezahlt, dann lautet der zugehörige Barwert:

$$\ddot{a}_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\infty} {}_{\mathbf{k}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}}$$

Unter der (durchaus sinnvollen Annahme), dass für $\omega = 120$ gilt ${}_{\omega-x+i}p_x = 0$ (für $i > 0$), folgt:

$$\ddot{a}_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\omega-\mathbf{x}} {}_{\mathbf{k}}\mathbf{E}_{\mathbf{x}} \left(= \ddot{a}_{\mathbf{x},\overline{\omega-\mathbf{x}}} \right)$$

Beginnt die Zahlung der Rente erst nach $m < n$ Jahren, so gilt für den zugehörigen Barwert $\mathbf{{}_{m|}\ddot{a}_{x,\overline{n}}}$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{x,\overline{n}} = \sum_{k=m}^{n} {}_kE_x = \ddot{a}_{x,\overline{n}} - \ddot{a}_{x,\overline{m}} $$

bzw. für die lebenslange vorschüssige Rente:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{x} = \sum_{k=m}^{\omega-x} {}_kE_x = \ddot{a}_{x} - \ddot{a}_{x,\overline{m}} $$

Zusammenfassend sind also folgende Kenngrößen von grundlegender Bedeutung für die Berechnung versicherungsmathematischer Barwerte:

- Zins
- Sterblichkeit ($\Rightarrow$ Sterbetafeln)
- Kosten ($\Rightarrow$ siehe später)

Beitragsberechnung

Ein Versicherungsvertrag beinhaltet immer eine klar definierte Versicherungsleistung, sowie die Gegenleistungen (Beiträge oder Prämien) die der Versicherungsnehmer dafür erbringen muss.
Bei der Berechnung der Beiträge (oder der Leistungen) beruft man sich auf das sogenannte **Versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip**:

Summe der Barwerte der Leistungen (**L**)

=

Summe der Barwerte der Beiträge (**GL**)

Beispiel 1: Erlebensfallversicherung in Höhe von S über n-Jahre für eine VP mit Alter x.
Nach dem Äquivalenzprinzip gilt für den **Einmalbeitrag** B^N:

$$(GL =) B^N = S \cdot {}_nE_x = S \cdot {}_np_x v^n (= L)$$

Beispiel 1: Erlebensfallversicherung in Höhe von S über n-Jahre für eine VP mit Alter x.
Nach dem Äquivalenzprinzip gilt für den **Einmalbeitrag** B^N:

$$(GL =)B^N = S \cdot {}_nE_x = S \cdot {}_np_x v^n (= L)$$

Konkret: Sei $S = 100.000,\ x = 60,\ n = 20,\ i = 2,25\%$, dann gilt unter Verwendung der Sterbetafel *DAV2008TM*:

$$B^N = 100.000 \cdot 0,2810982 = 28.109,82$$

Beispiel 2: Jährliche Altersrente in Höhe von R mit Beitragszahlungsdauer h, Aufschubzeit h für eine VP im Alter von x Jahren.
D.h. es wird ab sofort jährlich h-Jahre lang ein Beitrag von B^N entrichtet, also

$$GL = B^N \cdot \ddot{a}_{x,\overline{h}}$$

und ab dem Alter $x + h$ eine lebenslange Rente bezahlt

$$L = R \cdot {}_{h|}\ddot{a}_x$$

Daher wegen $GL = L$

$$B^N = R \cdot \frac{{}_{h|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,\overline{h}}}$$

Bruttoprämien

Versicherungen verrechnen für die Führung der Versicherungsverträge diverse *Kosten*, z.B. pauschal bei Vertragsabschluss (α-Kosten), für Inkasso (β-Kosten) oder Verwaltung (γ-Kosten)

Bruttoprämien

Versicherungen verrechnen für die Führung der Versicherungsverträge diverse *Kosten*, z.B. pauschal bei Vertragsabschluss (α-Kosten), für Inkasso (β-Kosten) oder Verwaltung (γ-Kosten), beispielsweise für lebenslange Rentenversicherungen:

Kostenart	**Höhe**	**Bezugsgröße**	**Fälligkeit**
α^Z	40‰	Beitragssumme	einmalig (Vertragsbeginn)
α^γ	$0,5\%$	Jahresrente	jährlich (Beitragszahlungsdauer)
β	3%	jährlicher Beitrag	jährlich (Beitragszahlungsdauer)
γ_1	1%	Jahresrente	jährlich (Beitragszahlungsdauer)
γ_2	$1,5\%$	Jahresrente	jährlich (Rentenbezug)

Beispiel 2, Brutto: Nun spaltet sich die Leistung L in die Rentenleistung L_R sowie die Kostenleistung L_K auf, also wie oben:

$$GL = B^B \cdot \ddot{a}_{x,\overline{h}}$$

$$L_R = R \cdot {}_{h|}\ddot{a}_x$$

$$L_K = \alpha^Z h B^B + \alpha^\gamma R \ddot{a}_{x,\overline{h}} + \beta B^B \ddot{a}_{x,\overline{h}} + \gamma_1 R \ddot{a}_{x,\overline{h}} + \gamma_2 R_{h|}\ddot{a}_x$$

Wegen

$$GL = L_R + L_K$$

folgt:

$$B^B = \frac{R \cdot \left(\ddot{a}_{x,\overline{h}}(\alpha^\gamma + \gamma_1) + {}_{h|}\ddot{a}_x(1+\gamma_2) \right)}{(1-\beta)\ddot{a}_{x,\overline{h}} - \alpha^Z h}$$

Deckungskapital

„Deckungskapital ist jenes Kapital, welches eine Versicherung zur Deckung der vereinbarten Leistungen bereithalten muss".

Deckungskapital

„Deckungskapital ist jenes Kapital, welches eine Versicherung zur Deckung der vereinbarten Leistungen bereithalten muss“. Betrachtet man den Zeitwert einer Versicherung zum Zeitpunkt t, dann ergibt sich aus (dem Zeitwert der) bereits erfolgten Zahlungen (*retro*-) und (dem Zeitwert der) zukünftigen Zahlungen (*pro*-):

$$GL_t^{retro} + GL_t^{pro} = GL_t = L_t = L_t^{retro} + L_t^{pro}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{GL_t^{retro} - L_t^{retro}}_{=:{}_tV_x^{retro}} = \underbrace{L_t^{pro} - GL_t^{pro}}_{=:{}_tV_x^{pro}}$$

Also:

$${}_tV_x := {}_tV_x^{retro} = {}_tV_x^{pro}$$

Man unterscheidet im Allgemeinen folgende beiden Typen von Lebensversicherungen:

- *klassische Lebensversicherungen* - bilden ein Deckungskapital wie soeben eingeführt.
- *fondsgebundene Lebensversicherungen* - die Beiträge werden in Fonds investiert, das (*retrospektive!*) Deckungskapital ergibt sich aus dem Fondsvermögen.