Übungen zu Diskrete Mathematik

Markus Fulmek & Christian Krattenthaler

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 ($\star$)**:** *Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tip beim Lotto "6 aus 45"*

a: *einen Fünfer zu tippen,*
b: *einen Vierer zu tippen.*

Aufgabe 2 ($\star\star$)**:** *Im Parlament eines Landes gibt es 151 Sitze und drei Parteien. Wieviele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es, sodaß keine Partei eine absolute Mehrheit (d.h., mehr als 75 Sitze) hat?*

Aufgabe 3 ($\star\star$)**:** *Die rationale Zahl*

$$H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

heißt harmonische Zahl. *Aus der Analysis ist bekannt, daß* H_n *ungefähr gleich* $\log(n)$ *ist:* $H_n \sim \log(n)$.

Sei $j \in \mathbb{N}$ *und bezeichne* $t(j)$ *die Anzahl der positiven Teiler von* j. *Bezeichne weiters* $\bar{t}(n)$ *die* durchschnittliche *Anzahl der positiven Teiler der Zahlen von* 1 *bis* n, *also*

$$\bar{t}(n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t(i).$$

Zeige:

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

(Hinweis: Dies ist eine Anwendung der Regel von der doppelten Abzählung!)

Schätze die Differenz $\left(H_n - \bar{t}(n)\right)$ *(ganz grob) ab und folgere:*

$$H_n - 1 \leq \bar{t}(n) \leq H_n.$$

Aufgabe 4 ($\star\star$)**:** *Zeige, daß für die Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ *gilt:*

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n}.$$

(Diese Eigenschaft heißt Unimodalität *der Binomialkoeffizienten.)*

Aufgabe 5 ($\star\star$)**:** *Man gebe kombinatorische Beweise für die folgenden Binomialidentitäten:*

(a) $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$. *(Anleitung: Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einer* n*-elementigen Menge eine* k*-elementige Teilmenge auszuwählen, und in dieser ein Element rot zu färben?)*
(b) $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$.

Aufgabe 6 ($\star\star$)**:** *Man gebe kombinatorische Beweise für die folgenden Binomialidentitäten:*

(a) $\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$.
(b) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.

Aufgabe 7 ($\star\star$)**:** *Zeige durch eine* Bijektion*: Für $n \geq 1$ ist die Anzahl der Teilmengen von $[n]$ mit* gerader *Mächtigkeit genauso groß wie die Anzahl der Teilmengen von $[n]$ mit* ungerader *Mächtigkeit*

Aufgabe 8 ($\star\star$)**:** *Wieviele Lottotips gibt es bei "6 aus 45", in denen keine zwei* aufeinanderfolgenden *Zahlen vorkommen?*

(Hinweis: Finde eine Bijektion der gesuchten Objekte auf die 6–elementigen Teilmengen aus $[40]$.)

Aufgabe 9 ($\star$)**:** *Veranschauliche die Begriffe Graph und Wanderung durch eine Skizze.*

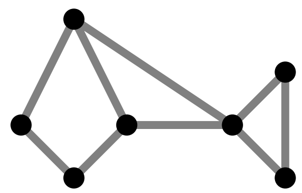
Zeige, daß die Relation

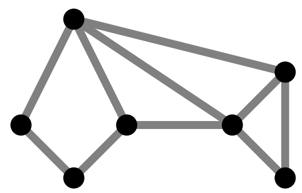
$$p \rightsquigarrow q := \text{ "Es gibt eine Wanderung, die von } p \text{ nach } q \text{ führt"}$$

auf der Knotenmenge $V(\mathbf{G})$ eines Graphen $\mathbf{G}$ eine Äquivalenzrelation *ist.*

Aufgabe 10 ($\star$)**:** *Zeige, daß alle vollständigen Graphen $\mathbf{K}_n$ (für $n > 0$) stets zusammenhängend sind.*

Zeige, daß die Graphen





Zusammenhangsgrad 1 bzw. 2 haben.

Zeige, daß ein Graph genau dann Zusammenhangsgrad 0 hat, wenn er entweder unzusammenhängend ist oder gleich dem vollständigen Graphen $\mathbf{K}_1$ ist.

Zeige, daß der Zusammenhangsgrad des vollständigen Graphen $\mathbf{K}_n$ gleich $n-1$ ist.

Zeige, daß jeder induzierte *Teilgraph eines vollständigen Graphen wieder ein vollständiger Graph ist.*

Zeige, daß ein Graph $\mathbf{G}(V, E)$ mit $|V(\mathbf{G})| \geq 3$ zweifach zusammenhängend ist, wenn es für je zwei Knoten v und w aus V einen Kreis *(das ist eine geschlossene Wanderung $v_0, \ldots, v_n$ in $\mathbf{G}$, wobei $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$ mit der einzigen Ausnahme $v_0 = v_n$) gibt, der v und w enthält.*

Aufgabe 11 ($\star\star$)**:** *Beweise die Aussage: Sei $\mathbf{G}(V, E)$ ein Graph. Dann gilt:*

$$\sum_{v \in V(\mathbf{G})} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

(Hinweis: Das ergibt sich durch die Regel von der doppelten Abzählung!)

Aufgabe 12 ($\star$)**:** *Gegeben seien 3 äußerlich völlig gleiche Münzen, wovon genau eine falsch ist. Wir wissen zwar, daß die falsche Münze ein anderes Gewicht hat als die richtige, wir wissen aber* nicht*, ob sie schwerer oder leichter ist. Das einzige Instrument, mit dem wir die falsche Münze identifizieren können, ist eine gewöhnliche Balkenwaage. Die Aufgabe besteht darin, die falsche Münze mit möglichst wenigen Wägungen zu identifizieren* und *festzustellen, ob sie schwerer oder leichter ist.*

Was ist hier die geringste Anzahl von Wägungen, mit der wir in jedem Fall *die falsche Münze identifizieren und feststellen können, ob sie leichter ist oder schwerer?*

Aufgabe 13 ($\star\star$)**:** *Sei S eine Menge mit $|S| = n$. Wieviele k–Tupel*

$$(T_1, T_2, \ldots, T_k)$$

von Teilmengen von S gibt es, sodaß

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_k \text{ ?}$$

Aufgabe 14 ($\star$)**:** *Wieviele Möglichkeiten gibt es, k einander nicht schlagende Türme auf einem $n \times n$ Schachbrett zu placieren?*

Aufgabe 15 ($\star\star$)**:** *Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, n Personen um einen runden Tisch zu setzen? (Zwei Anordnungen π und τ betrachten wir in diesem Zusammenhang als "gleich", wenn alle Personen in π denselben linken und denselben rechten Nachbarn haben wie in τ.)*

Aufgabe 16 ($\star\star$)**:** *Auf wieviele verschiedene Arten kann man $2n$ Personen zu n (ungeordneten) Paaren zusammenfassen? Gib alle Möglichkeiten für $n = 1, 2, 3$ explizit an.*

Aufgabe 17 ($\star\star$)**:** *An einem Bridgeturnier nehmen $4n$ Spieler teil, und das Turnier findet an n Tischen statt. Jeder Spieler benötigt einen anderen Spieler als Partner, und jedes Paar von Partnern benötigt ein anderes Paar als Gegner. Auf wieviele Arten kann die Wahl von Partner und Gegner erfolgen?*

Aufgabe 18 ($\star\star$)**:** *Auf wieviele Arten können wir die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ anordnen, sodaß — abgesehen vom ersten Element — die Zahl k nur dann placiert werden kann, falls $k-1$ oder $k+1$ bereits placiert wurden (also links von k stehen)? (Zum Beispiel für $n = 6$: $3\,2\,4\,5\,1\,6$ oder $4\,3\,5\,2\,1\,6$.)*

Aufgabe 19 ($\star$)**:** *Zeige folgende Verschärfung des Schubfachprinzips:*

Sei $f : [k] \to [n]$ mit $k > n$, dann gibt es ein Element $m \in [n]$, für das gilt:

$$\left|f^{-1}(m)\right| \geq \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor + 1.$$

Aufgabe 20 ($\star\star$)**:** *Sei $1 \leq k < n$. Zeige, daß unter allen 2^{n-1} Kompositionen von n der Teil k genau $(n-k+3)2^{n-k-2}$ mal auftritt. Nimmt man zum Beispiel $n = 4$ und $k = 2$, dann tritt 2 in $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$ je einmal, in $2+2$ zweimal auf, also insgesamt 5–mal.*

Aufgabe 21 ($\star\star$)**:** *Finde eine möglichst einfache Methode, um die k–te Permutation der $\mathfrak{S}_n$* in lexikographischer Ordnung *zu finden. (Die "triviale Methode" — erzeuge alle $n!$ Permutationen der $\mathfrak{S}_n$, ordne sie lexikographisch und wähle das k–te Element — gilt hier natürlich* nicht *als "einfach".)*

Aufgabe 22 ($\star\star$)**:** *Zeige: Jede natürliche Zahl n besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form*

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_k \cdot k!, \qquad \text{mit } 0 \leq a_i \leq i.$$

Ist k die größte Zahl mit $a_k \neq 0$, so schreibt man $n = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Finde eine möglichst einfache Methode zur Berechnung der Ziffern a_i und berechne die Darstellung von 1,000.000. Wie erkennt man an den Ziffern, daß $(a_1, \ldots, a_k) < (b_1, \ldots, b_l)$ gilt?

Aufgabe 23 ($\star$)**:** *Die größte Zahl, die sich in der Darstellung aus Aufgabe 22 mit n Ziffern schreiben läßt, ist einerseits $(1, 2, 3, \ldots, n)$ und andererseits $(n+1)! - 1$. Daher gilt*

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Finde einen einfacheren Beweis für diese Formel!

Aufgabe 24 ($\star\star$)**:** *Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gilt stets:*

$$\operatorname{inv} \pi = \operatorname{inv} \pi^{-1}.$$

Aufgabe 25 ($\star\star$)**:** *Für verschiedene Zwecke benötigt man eine Durchnumerierung aller Permutationen von $[n]$, sodaß man π_k sofort angeben kann, ohne vorher die anderen Permutationen zu konstruieren.*

In Aufgabe 21 war die Durchnumerierung der Permutationen durch die lexikographische Ordnung gegeben; eine weitere Möglichkeit besteht im Abzählen der Inversionen: Sei π eine Permutation von $[n]$. Sei a_i die Anzahl der Inversionen (k, l) mit $\pi(l) = n - i$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Zum Beispiel ist für $n = 7$, $\pi = 5\ 3\ 7\ 2\ 1\ 6\ 4$ die entsprechende Folge durch $(a_1, a_2, \ldots, a_6) = (1, 0, 3, 1, 3, 4)$ gegeben.

Zeige: Es gilt $0 \leq a_i \leq i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Jede solche Folge, kurz Inversionsfolge genannt, definiert eine eindeutig bestimmte Permutation π. Man kann also jeder Zahl k mit $0 \leq k \leq n! - 1$ eine eindeutig bestimmte Permutation π zuordnen: Schreibe einfach k in der Gestalt

$$k = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_{n-1} \cdot (n-1)!$$

(siehe Aufgabe 22) und interpretiere $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ als Inversionsfolge.

Finde eine möglichst einfache Methode, um aus der Inversionsfolge die Permutation π zu konstruieren.

Aufgabe 26 ($\star\star\star$)**:** *Sei $I(n, k)$ die Anzahl der Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_n$ mit k Inversionen.*

(1) *Zeige, daß für $n \geq k$*

$$I(n+1, k) = I(n, k) + I(n+1, k-1)$$

gilt.

(2) *Folgere mittels der obigen Rekursion, daß für $n \geq k$ die Zahl $I(n, k)$ ein Polynom in n vom Grad k und führendem Koeffizienten $1/k!$ ist. Für $n \geq 2$ gilt beispielsweise $I(n, 2) = \frac{1}{2}(n+1)(n-2)$. Berechne das Polynom für $I(n, 3)$. (Hinweis: Induktion nach k unter Verwendung der Bemerkung über den Delta–Operator in der Vorlesung!)*

Aufgabe 27 ($\star\star$)**:** *Zeige: Die Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen von $[n]$ ist gleich*

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Aufgabe 28 ($\star\star$)**:** *Sei n eine natürliche Zahl. Die* Eulersche ϕ–Funktion *von n ist die Anzahl der zu n relativ primen Zahlen k, $1 \leq k \leq n$. Verwende das Prinzip der Inklusion–Exklusion, um die aus der Zahlentheorie bekannte Formel*

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)$$

zu beweisen (wobei $p_1, \ldots, p_t$ die Primteiler *von n sind).*

Aufgabe 29 ($\star\star$)**:** *Zeige, daß für die Fibonacci–Zahlen F_n für $n \geq 2$ die Matrixidentität*

$$\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

gilt, und folgere daraus

$$F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2 = (-1)^n.$$

Aufgabe 30 ($\star\star$)**:** *Drücke die folgenden Zahlen durch Fibonaccizahlen aus:*

(a) *Anzahl aller Kompositionen von n, deren Teile entweder gleich 1 oder 2 sind,*

(b) *Anzahl aller Kompositionen von n, deren Teile alle größer oder gleich 2 sind,*
(c) *Anzahl aller Kompositionen von n in ungerade Teile.*

Aufgabe 31 ($\star\star$)**:** *Man zeige für die Fibonaccizahlen F_n die Identität*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) F_{k+1} (-2)^{n-k}.$$

Aufgabe 32 ($\star\star$)**:** *Mit Hilfe des Differenzenoperators Δ, definiert durch*

$$\Delta p(x) := p(x+1) - p(x),$$

kann man die Koeffizienten in Reihenentwicklungen der Gestalt

$$q(x) = \sum_k c_k x^{\underline{k}}$$

berechnen ($x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$): Es gilt nämlich

$$c_k = \frac{1}{k!} \Delta^k q(x)|_{x=0}.$$

(Siehe auch die Bemerkung zum Delta–Operator in der Vorlesung.) Benutze dies, um die Formel

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1} x^{\underline{k}}$$

zu beweisen.

Aufgabe 33 ($\star\star$)**:** *Sei $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$.*

(1) *Eine Permutation $a_1 a_2 \dots a_n$ von $[n]$ heißt* unzerlegbar*, falls n die kleinste natürliche Zahl j ist, für die $\{a_1, a_2, \dots, a_j\} = \{1, 2, \dots, j\}$ gilt. Sei $f(n)$ die Anzahl aller unzerlegbaren Permutationen von $[n]$. Zeige:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n = 1 - F(z)^{-1}.$$

(2) *In einer Permutation $a_1 a_2 \dots a_n$ von $[n]$ heißt a_i ein* starker Fixpunkt*, falls (1) $j < i \Rightarrow a_j < a_i$, und (2) $j > i \Rightarrow a_j > a_i$. Sei $g(n)$ die Anzahl aller Permutationen von $[n]$, die keinen starken Fixpunkt besitzen. Zeige:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^n = F(z)(1 + zF(z))^{-1}.$$

Aufgabe 34 ($\star\star$)**:** *Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die der Rekursion $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = a_1 = 1$ genügt.*

Aufgabe 35 ($\star\star$)**:** *Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die der Rekursion $a_n = -a_{n-1} + 5a_{n-2} - 3a_{n-3}$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 7$, $a_1 = -12$, $a_2 = 49$ genügt.*

Aufgabe 36 ($\star\star$)**:** *Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die der Rekursion $a_n = 6a_{n-1} - 4a_{n-2}$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ genügt. Zeige, daß $a_n = \lceil \frac{(3+\sqrt{5})^n}{2} \rceil$.*

Aufgabe 37 ($\star\star$)**:** *Löse die Rekursion $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Hat das etwas mit Fibonaccizahlen zu tun?*

Aufgabe 38 ($\star\ \star\ \star$)**:** *Auf wieviele Arten kann ein Pfeiler, der die Form eines $2 \times 2 \times n$-Quaders besitzt, aus $2 \times 1 \times 1$-Ziegeln aufgebaut werden?*

Anleitung: Sei a_n die gesuchte Zahl und b_n die entsprechende Anzahl, einen $2 \times 2 \times n$-Pfeiler, dem in der obersten Ebene ein Ziegel fehlt, aus solchen Ziegeln zusammenzusetzen. Zeige zunächst die Rekurrenzen

$$a_n = 2a_{n-1} + 4b_{n-1} + a_{n-2} + [n = 0],$$
$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}\ .$$

Leite daraus 2 Gleichungen für die entsprechenden erzeugenden Funktionen her und gewinne daraus die gesuchte erzeugende Funktion.

Aufgabe 39 ($\star\ \star$)**:** *Bestimme jene eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, für die $a_0 = 1$ und*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 40 ($\star\ \star$)**:** *Sei $\mathbf{p}^*(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n, bei denen*

- *der Teil 1 beliebig oft vorkommen kann,*
- *der Teil 3 höchstens 4–mal vorkommen darf,*
- *der Teil 7 entweder gar nicht oder genau 2–mal vorkommen darf,*
- *und sonst keine andren Teile vorkommen dürfen.*

Wie sieht die erzeugende Funktion der Folge $(\mathbf{p}^*(n))_{n=0}^{\infty}$ aus?

Aufgabe 41 ($\star\ \star$)**:** *Beweise, daß die Anzahl der (Zahl–)Partitionen von n, deren Summanden alle nicht durch 3 teilbar sind, gleich ist der Anzahl der Partitionen, in denen kein Summand mehr als zweimal erscheint.*
Beispiel: $4 = 4,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$ beziehungsweise $4 = 4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1$.
(Anleitung: Drücke beide Anzahlen unter Verwendung des Prinzipes der Inklusion–Exklusion durch die Partitionsfunktion $p(.)$ aus, wobei $p(n)$ alle Partitionen von n bezeichnet.)

Aufgabe 42 ($\star\ \star$)**:** *Sei $\mathbf{G}$ ein einfacher Graph mit n Knoten; und sei für je zwei Knoten v_1, v_2, die nicht durch eine Kante verbunden sind, die Summe ihrer Grade mindestens $n-1$. Zeige: $\mathbf{G}$ ist zusammenhängend.*

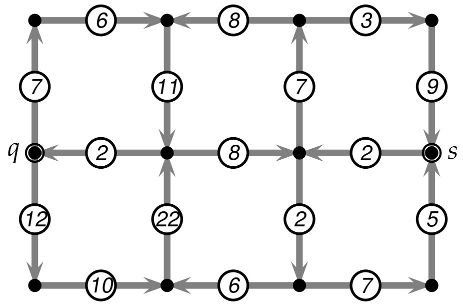
Aufgabe 43 ($\star\ \star$)**:** *Sei $\mathbf{G}$ ein Graph mit Adjazenzmatrix $A = A(\mathbf{G})$. Zeige: Der Eintrag in Zeile v_i, Spalte v_j in A^m ist gleich der Anzahl der Wanderungen der Länge m von v_i nach v_j.*

Aufgabe 44 ($\star\ \star$)**:** *Sei $\mathbf{G}(V, E)$ ein Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. Zeige, daß man den Kanten von $\mathbf{G}$ eine Orientierung aufprägen kann, sodaß für jeden Knoten der Ausgangsgrad gleich dem Eingangsgrad ist.*

Aufgabe 45 ($\star\ \star$)**:** *Beweise die folgende Variante des Satzes von Euler:*

Ein Digraph $\mathbf{D}$ ohne isolierte Knoten hat eine (orientierte) geschlossene Eulersche Wanderung genau dann, wenn sein zugrundeliegender Graph $\mathbf{G}$ zusammenhängend ist und für jeden Knoten der Eingangsgrad gleich dem Ausgangsgrad ist.

Aufgabe 46 ($\star$)**:** *Betrachte das folgende Netzwerk: q bezeichnet die Quelle, s die Senke, die Kapazitäten der gerichteten Kanten sind in die kleinen Kreise eingetragen.*



Finde einen maximalen Fluß in diesem Netzwerk und begründe (kurz), warum dieser maximal ist.

Aufgabe 47 ($\star$)**:** *Zeige: Ein Graph* $\mathbf{G}$ *ist genau dann bipartit, wenn jede geschlossene Wanderung in* $\mathbf{G}$ *gerade Länge hat.*

Aufgabe 48 ($\star\star\star$)**:** *Zeige: Jeder Graph* $\mathbf{G}$ *kann in* $\mathbb{R}^3$ *so eingebettet werden, daß jeder Kante ein* Geradenstück *entspricht.*

(Hinweis: Ordne den Knoten von $\mathbf{G}$ *Punkte auf der Kurve* $\left(t, t^2, t^3\right)$ *zu.)*

Aufgabe 49 ($\star\star$)**:** *Finde einen Eulerschen Polyedersatz für unzusammenhängende planare Graphen.*

(Hinweis: In der entsprechenden Gleichung wird die Anzahl der Komponenten des Graphen eine Rolle spielen.)

Aufgabe 50 ($\star\star\star$)**:** *Angenommen, sämtliche Flächen eines (endlichen) zusammenhängenden planaren Graphen* $\mathbf{G}$ *sind durch Kreise (also geschlossene Wege) mit derselben Anzahl* n *von Kanten begrenzt, und alle Knoten haben denselben Grad* d.

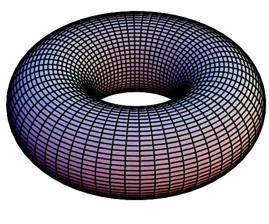
Drücke die Anzahl der Flächen von $\mathbf{G}$ *durch* d *und* n *aus. Wieviele Graphen mit diesen Eigenschaften gibt es? (Hinweis: Platonische Körper!)*

Aufgabe 51 ($\star\star$)**:** *Zeige:* $\mathbf{K}_5$ *und* $\mathbf{K}_{3,3}$ *kann man auf dem* Torus *— das ist die* 2*–dimensionale Mannigfaltigkeit, die duch die Gleichung*

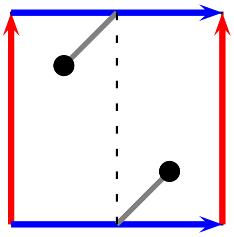
$$\left(c - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = a^2$$

mit $c > a$ *beschrieben ist — einbetten.*

Hinweis: Den Torus kann man sich als "Fahrradschlauch" (ohne Ventilöffnung) vorstellen.



In der Topologie stellt man sich das auch so vor: Durch zwei kreisförmige Schnitte wird der Torus zu einem Rechteck — um ihn wieder zusammenzusetzen, müßte man gegenüberliegende Seiten des Rechtecks "gleichsinnig" miteinander verkleben (also so, daß die verklebten Pfeile in der folgenden Graphik in dieselbe Richtung zeigen). Die hier gezeichnete Kante ist durch den "waagrechten" Schnitt durchtrennt; im zusammengeklebten Torus verbindet sie die beiden Knoten.



Aufgabe 52 ($\star$)**:** *Sei T ein vollständiger 2–Baum mit n Blättern, $e(T)$ bezeichne die Summe der Längen der Blätter, $i(T)$ die Summe der Längen der inneren Knoten. Zeige:*

$$e(T) = i(T) + 2(n-1).$$

Aufgabe 53 ($\star\star$)**:** *Löse das Wägeproblem für n Münzen, wenn bekannt ist, daß die falsche Münze schwerer ist.*

Aufgabe 54 ($\star$)**:** *Es seien $m \cdot n$ Leute in einem $m \times n$-Rechteck angeordnet. Wir sollen die unbekannte Person X durch Fragen der Art „Ist X in der i-ten Zeile?", beziehungsweise „Ist X in der j-ten Spalte?" finden. Wieviele Fragen benötigen wir im Durchschnitt?*

Aufgabe 55 ($\star$)**:** *Gegeben ist die Verteilung $(\frac{30}{100}, \frac{20}{100}, \frac{15}{100}, \frac{14}{100}, \frac{11}{100}, \frac{10}{100})$ für die Blätter $1, 2, \dots, 6$. Zeige, daß die folgenden binären Suchbäume (2–Bäume) optimal sind. Nur einer ist ein Huffman–Baum, welcher?*

Aufgabe 56 ($\star$)**:** *Gegeben sei der Suchraum $\{1, 2, \dots, 10\}$, in dem ein (zunächst unbekanntes) Element zu suchen ist. Für die Suche stehen Tests zur Verfügung, die den Suchraum* immer *in drei* beliebige *Teile zerlegen können. Weiters ist von vornherein bekannt, daß Element i mit Wahrscheinlichkeit p_i das Gesuchte ist:*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i (in %)	30	22	14	12	9	4	4	2	2	1

Konstruiere in dieser Situation einen optimalen Suchalgorithmus (Suchbaum) im Sinne der Average–Case–Analysis. Achtung beim Aufbauen des Baumes: Siehe die Bemerkung dazu in der Vorlesung!

Aufgabe 57 ($\star\star\star$)**:** *Bestimme die optimalen Sortieralgorithmen für $n = 6, 7, 8$. (Hinweis: Setze voraus, daß es einen Sortieralgorithmus für $n = 5$ gibt, der immer mit höchstens 7 Vergleichen auskommt.) Was sind die optimalen Suchlängen?*

Aufgabe 58 ($\star$)**:** *Betrachte die Gleichverteilung auf $\mathfrak{S}_n$ und bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$* genau *$k \le n$ Fixpunkte hat.*

Aufgabe 59 ($\star\star$)**:** *Zeige, daß die Anzahlen*

- *der Dyck–Pfade der Länge* $2n$
- *und der Triangulierungen des* $(n+2)$*–Ecks*

dieselbe Rekursion erfüllen.

Aufgabe 60 ($\star\star$)**:** *Für zwei ganze Zahlen* $h_1 > h_2$ *betrachten wir die Familie aller Paare von Gitterpunktwegen* (P_1, P_2)*, wo* P_i *in* $(0, 2h_i)$ *beginnt und in* $(2n, 2h_i)$ *endet, und wo* P_1 *und* P_2 *keinen Gitterpunkt gemeinsam haben (man nennt das* nichtüberschneidende Gitterpunktwege*). Zeige, daß die Anzahl dieser nichtüberschneidenden Gitterpunktwege durch die* 2×2*–Determinante*

$$\det\begin{vmatrix} \binom{2n}{n} & \binom{2n}{n-h_1+h_2} \\ \binom{2n}{n+h_1-h_2} & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}$$

gegeben ist.

(Hinweis: Versuche die Idee des Spiegelungsprinzips geeignet zu adaptieren!)

Aufgabe 61 ($\star\star\star$)**:** *Seien* i, j *und* h *ganze Zahlen, sodaß* $0 \le 2i, 2j \le h$*. Zeige: Die Anzahl aller Gitterpunktwege von* $(0, 2i)$ *nach* $(2n, 2j)$*, die* zwischen *den Geraden* $y = 0$ *und* $y = h \ge 0$ *liegen (d.h., diese Gitterpunktwege gehen nie unter die* x*–Achse und nie über die "Höhe"* h*), ist*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\binom{2n}{n-i+j-k\,(h+2)} - \binom{2n}{n+i+j-k\,(h+2)+1} \right).$$

(Hinweis: Kombiniere das Spiegelungsprinzip mit dem Prinzip der Inklusion–Exklusion.)