PS Kombinatorik

(Modul: “Kombinatorik” (MALK))

Markus Fulmek

Sommersemester 2015

Aufgabe 1: *Zeige, daß die Anzahl aller unbezeichneten geordneten Wurzelbäume mit n Knoten, wo in jedem inneren Knoten 2 oder 3 Äste ausgehen, gleich*

$$\frac{1}{n}\sum_{j}\binom{n}{j}\binom{j}{3j-n+1}$$

ist.

Hinweis: *Finde eine Gleichung für die erzeugende Funktion und verwende die Langrange–Inversionsformel.*

Aufgabe 2: *Wieviele Klammerungen von n nichtkommutativen Elementen eines Monoids gibt es? Wieviele Klammerungen von n paarweise kommutativen Elementen eines Monoids gibt es? Eine "nichtkommutative Klammerung" von 6 Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ wäre zum Beispiel*

$$((x_2x_5)((x_1(x_4x_6))x_3)).$$

Das ist natürlich auch eine "kommutative Klammerung", allerdings ist beispielsweise die Klammerung

$$((x_3(x_1(x_4x_6)))(x_5x_2))$$

eine äquivalente Klammerung: Sie unterscheidet sich ja nur durch ein paar Anwendungen des Kommutativgesetzes von der obigen Klammerung.

Hinweis: *Übersetze Klammerungen in* bezeichnete *binäre Bäume: Äußerste Klammer ist Wurzel; Elemente des Monoids sind die* Bezeichnungen *der Blätter.*

Aufgabe 3: *Entwickle eine analoge Theorie für* gewichtete *erzeugende Funktionen (für unbezeichnete und bezeichnete Spezies). Das heißt, gegeben sei eine Spezies $\mathcal{A}$ mit einer Gewichtsfunktion $w(x)$, die jedem Objekt $A \in \mathcal{A}$ ein Element eines Ringes R (zum Beispiel $R = \mathbb{R}[y]$, der Ring der Polynome in y) zuordnet. Die erzeugende Funktion, die hier betrachtet wird, ist also*

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} z^{\|A\|} \cdot w(x)\, A.$$

Wie müssen die Gewichtsfunktionen auf Summe, Produkt und Zusammensetzung von Spezies definiert werden, damit die entsprechenden Gesetze für erzeugende Funktionen noch immer gelten?

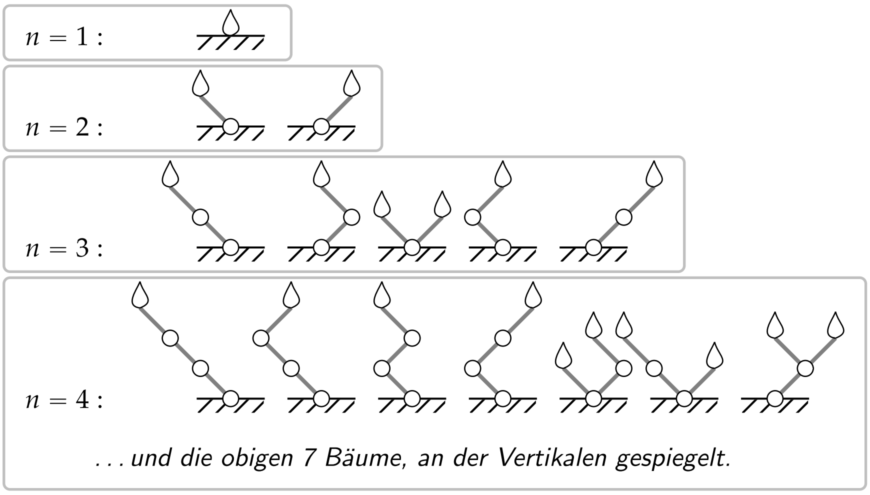
Aufgabe 4: *Sei $f(m,n)$ die Anzahl aller Wege von $(0,0)$ nach (m,n) in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, wobei die einzelnen Schritte von der Form $(1,0)$ (Schritt in die x–Richtung), $(0,1)$ (Schritt in die y–Richtung) oder $(1,1)$ (diagonaler Schritt) sind. Begründe in der Sprache der Spezies, warum*

$$\sum_{m,n\geqslant 0} f(m,n)\, x^m y^n = \frac{1}{1-x-y-x\cdot y}$$

gilt.

Aufgabe 5: *Bestimme die Anzahl aller* unbezeichneten geordneten binären *Wurzelbäume mit n Knoten und k Blättern.*

Hinweis: *Eine Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, besteht darin, die erzeugende Funktion in 2 Variablen z und y zu betrachten, wobei jeder Wurzelbaum W mit n Knoten und k Blättern das Gewicht $w(x)\,W := z^n y^k$ erhält. Die folgende Grafik zeigt die Bäume für $n = 1,2,3,4$:*



Das heißt, die erzeugende Funktion beginnt folgendermaßen:

$$T(z, y) := \sum_W w(x)\, W = z \cdot y + z^2 \cdot 2y + z^3 \left(y^2 + 4y\right) + z^4 \left(6y^2 + 8y\right) + \cdots$$

Suche eine Gleichung für die erzeugende Funktion T und finde die Reihenentwicklung für T.

Aufgabe 6: *Bestimme die Anzahl aller* bezeichneten ungeordneten *Wurzelbäume mit n Knoten und k Blättern.*

Hinweis: Betrachte die (exponentiell) erzeugende Funktion in 2 Variablen z und y (wie in Aufgabe 5) und verwende die Langrange–Inversionsformel.

Aufgabe 7: *Zeige die Cayleysche Formel (daß die Anzahl der bezeichneten Bäume auf n Knoten gleich n^{n-2} ist) folgendermaßen: Man nehme einen bezeichneten Baum auf n Knoten und markiere zwei der Knoten, sagen wir A und E. Man interpretiert A als Anfangspunkt und E als Endpunkt des eindeutigen Pfades, der im Baum A und E verbindet. Man orientiert nun alle Kanten, die nicht auf dem Pfad liegen, in Richtung des Pfades, und die Kanten auf dem Pfad in Richtung von A nach E. Nun wandert man entlang des Pfades von A nach E und notiert die Bezeichnungen der Knoten. Jedesmal, bevor solcherart ein neues Maximum angetroffen wird, schließt man einen Kreis (das heißt, mit den Kanten des Pfades, die man bisher durchwandert hat, und durch Einfügung einer gerichteten Kante, die den Kreis schließt). Man deutet nun die entstehende Figur als Funktion $[n] \to [n]$, indem eine gerichtete Kante von a nach b in dem Sinne gedeutet wird, daß die der Funktion a auf b abbildet.*

Aufgabe 8: *Zeige, daß die Anzahl aller Graphen mit n Knoten, m Kanten und k Komponenten der Koeffizient von $u^n \alpha^m \beta^k / n!$ in*

$$\left(\sum_{n \geqslant 0} (1 + \alpha)^{\binom{n}{2}} \frac{u^n}{n!} \right)^{\beta}$$

ist.

Hinweis: Finde einen Zusammenhang zwischen der erzeugenden Funktion aller bezeichneten Graphen (Gewicht $w(x)\, G := u^{|V(G)|} \alpha^{|E(G)|}$)und der erzeugenden Funktion aller zusammenhängenden *bezeichneten Graphen ("Komponenten").*

Aufgabe 9: *Zeige: Die Anzahl der (bezeichneten) unizyklischen Graphen (das sind zusammenhängende Graphen mit genau einem Kreis) auf n Knoten ist*

$$\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n}\binom{n}{j}j!\,n^{n-1-j}.$$

<u>Hinweis:</u> *Finde eine Darstellung als Zusammensetzung geeigneter Spezies.*

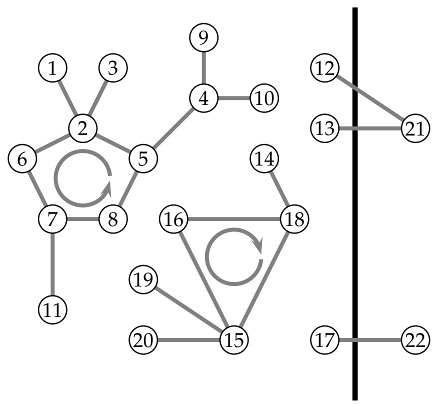
Aufgabe 10: *Sei $T(u)=\sum_{n\geqslant 0}(n+1)^{n-1}u^n/n!$. Beweise die Identität*

$$\frac{T^j(u)}{1-uT(u)}=\sum_{l\geqslant 0}(l+j)^l\,\frac{u^l}{l!}.$$

<u>Hinweis:</u> *Für einen* bijektiven *Beweis betrachte die Spezies $\mathcal{W}$ der bezeichneten Bäume, bei denen der Knoten mit der größten Nummer (also n, wenn der Baum n Knoten hat) als* Wurzel *markiert wird, dafür wird die Nummer gelöscht und die Wurzel trägt* nicht *zur Größe des Baumes bei (d.h., wenn t n Knoten (samt der Wurzel) hat, dann ist $\|t\|_{\mathcal{W}}=n-1$): Ersichtlich ist $T=\mathcal{GF}_{W}$.*
Betrachte Funktionen $f:[l]\to[l+j]$. Visualisiere eine solche Funktion f als gerichteten Graphen auf den Knoten $[l+j]$ mit den gerichteten Kanten $(x,f(x))$. Die folgende Graphik macht dies für den Fall $l=20$, $j=2$ und

$$(f(n))_{n=1}^{l}=(2,6,2,5,2,7,8,5,4,4,7,21,21,18,16,18,22,15,15,15)$$

deutlich:



Die Komponenten dieses Graphen sind Wurzelbäume oder unizyklische Graphen; alle *Knoten in $[l+j]\setminus[l]$ sind Wurzeln entsprechender Bäume.*

Aufgabe 11: *Die* Ableitung *$\mathcal{A}'$ einer bezeichneten Spezies $\mathcal{A}$ ist wie folgt definiert: Objekte der Spezies $\mathcal{A}'$ der Größe $n-1$ sind Objekte von $\mathcal{A}$ der Größe n, deren Atome allerdings nicht von 1 bis n durchnumeriert sind, sondern nur von 1 bis $n-1$, sodaß also ein Atom unnumeriert bleibt. Ein typisches Element der Ableitung* `Folgen`$'$ *wäre also*

$$(3,1,2,5,\circ,4),$$

wobei $\circ$ das unnumerierten Atom bezeichnet. Man zeige: Die erzeugende Funktion von $\mathcal{A}'$ ist genau die Ableitung der erzeugenden Funktion von $\mathcal{A}$. Zeige weiters:

(1) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})'=\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$.
(2) $(\mathcal{A}\star\mathcal{B})'=\mathcal{A}'\star\mathcal{B}+\mathcal{B}'\star\mathcal{A}$.
(3) $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})'=\left(\mathcal{A}'\circ\mathcal{B}\right)\star\mathcal{B}'$.

Diese Gleichungen sind natürlich im Sinne der Existenz von Isomorphismen zu verstehen: Es ist also für alle drei Gleichungen eine größenerhaltende Bijektion *zu finden!*

Aufgabe 12: *Zeige die folgenden Gleichungen für bezeichnete Spezies:*

(1) $\mathtt{gPar}' = \mathtt{gPar}^2 \star \mathtt{Mengen}$, *wobei* $\mathtt{gPar}$ *die Spezies der geordneten Partitionen von Mengen (geordnet bedeutet, daß es auf die Reihenfolge der Blöcke ankommen soll) bezeichnet.*

(2) $\mathtt{Polyp}' = \mathtt{Folgen}(\mathtt{Atom}) \star \mathtt{Folgen}(2\mathtt{Atom})$, *wobei* $\mathtt{Polyp}$ *die Spezies*

$$\mathtt{Zyklen}(\mathtt{Folgen1})$$

bezeichnet; d.h., jedes Objekt von $\mathtt{Polyp}$ *besteht aus einem Zyklus, an den in jedem Punkt eine nichtleere Folge angehängt ist.*

Aufgabe 13: *Sei* $\mathcal{A}$ *die (bezeichnete) Spezies der (ungeordneten) Wurzelbäume,* $\mathcal{U}$ *die (bezeichnete) Spezies der Bäume (ohne Wurzel) und* $\mathcal{F}$ *die (bezeichnete) Spezies der Wurzelwälder. Zeige die folgenden Gleichungen:*

(1) $\mathcal{A}' = \mathcal{F} \star \mathtt{Folgen}(\mathcal{A})$,

(2) $\mathcal{U}'' = \mathcal{F} \star \mathcal{A}'$,

(3) $\mathcal{A}'' = (\mathcal{A}')^2 + (\mathcal{A}')^2 \star \mathtt{Folgen}(\mathcal{A})$.

Aufgabe 14: *Berechne alle Ableitungen von* $\mathtt{Mengen}^2$ *und von* $\mathtt{Folgen}$.

Aufgabe 15: *Wieviele verschiedene Perlenketten der Länge* n *mit Perlen in* k *Farben gibt es? (Das soll wie in der "Praxis" verstanden werden, daß also Spiegelungen von Ketten nicht verschiedene Muster ergeben, im Unterschied zur Vorlesung.)*

Aufgabe 16: *Bestimme die Zykelindikatorreihe für die Spezies* $\mathtt{Fixfrei}$ *der fixpunktfreien Permutationen.*

Hinweis: *Zeige die Beziehung* $\mathtt{Mengen} \cdot \mathtt{Fixfrei} = \mathtt{Permutationen}$.

Aufgabe 17: *Bestimme die Zykelindikatorreihe für die Spezies der Partitionen von Mengen.*

Aufgabe 18: *Für eine beliebige Spezies* $\mathcal{A}$ *zeige die Formel*

$$\mathrm{Z}_{\mathcal{A}'}(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{Z}_{\mathcal{A}}\right)(x_1, x_2, \dots).$$

Aufgabe 19: *Zeige:*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \exp\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n}\right).$$

Hinweis: $\mathtt{Permutationen} = \mathtt{Mengen}(\mathtt{Zyklen})$.

Aufgabe 20: *Sei* P *ein endliches Poset und* $f : P \to P$ *eine ordnungserhaltende Bijektion. Zeige, daß dann auch* f^{-1} *ordnungserhaltend ist.*
Zeige, daß dies im allgemeinen nicht *für unendliche Posets gilt.*

Aufgabe 21: *(a) Finde ein (endliches) Poset P, wo* jedes *Element einer Kette der Länge l angehört, wobei l die Länge der längsten Kette(n) in P bezeichnet, wo es aber trotzdem eine* maximale *Kette kleinerer Länge (also $< l$) gibt.*

(b) Sei P ein (endliches) Poset mit zusammenhängendem Hasse–Diagramm, wo die längste Kette (es kann auch mehrere solche geben) die Länge l hat. Weiters gelte für alle $x, y \in P$, wo y das Element x bedeckt, daß x und y einer Kette der Länge l angehören. Zeige, daß dann bereits alle *maximalen Ketten die Länge l haben.*

Aufgabe 22: *Sei Z_n das "Zickzackposet" mit Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und Bedeckungsrelationen $x_{2i-1} \lessdot x_{2i}$ und $x_{2i} \gtrdot x_{2i+1}$.*

a) Wieviele Ordnungsideale besitzt Z_n?

b) Sei $W_n(q)$ die rangerzeugende Funktion von $J(Z_n)$, dem Verband aller Ordnungsideale von Z_n. Zum Beispiel ist $W_0(q) = 1$, $W_1(q) = 1 + q$, $W_2(q) = 1 + q + q^2$, $W_3(q) = 1 + 2q + q^2 + q^3$. Zeige:

$$W(q, z) := \sum_{n=0}^{\infty} W_n(q) z^n = \frac{1 + (1+q)z - q^2 z^3}{1 - (1 + q + q^2)z^2 + q^2 z^4}.$$

c) Sei e_n die Anzahl aller linearen Erweiterungen von Z_n. Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n \frac{z^n}{n!} = \tan z + \frac{1}{\cos z}.$$

Aufgabe 23: *Seine P, Q graduierte Posets, der maximale Rang von P sei r, der von Q gleich s, und seien $F(P, q)$ und $F(Q, q)$ die entsprechenden rangerzeugenden Funktionen. Zeige:*

a) Wenn $r = s$ ist, dann gilt $F(P + Q, q) = F(P, q) + F(Q, q)$.

b) $F(P \oplus Q, q) = F(P, q) + q^{r+1} F(Q, q)$.

c) $F(P \times Q, q) = F(P, q) \cdot F(Q, q)$.

d) $F(P \otimes Q, q) = F\left(P, q^{s+1}\right) \cdot F(Q, q)$.

Aufgabe 24: *Seien P, Q, R Posets. Finde Isomorphismen für die folgenden Beziehungen:*

a) $P \times (Q + R) \simeq (P \times Q) + (P \times R)$.

b) $R^{P+Q} \simeq R^P \times R^Q$.

c) $\left(R^Q\right)^P \simeq R^{Q \times P}$.

Aufgabe 25: *Sei P ein endliches Poset und definiere $G_P(q, t) := \sum_I q^{|I|} t^{m(I)}$, wo I über alle Ordnungsideale von P läuft, und wo $m(I)$ die Anzahl der maximalen Elemente von I bezeichnet. (So ist zum Beispiel $G_P(q, 1)$ die rangerzeugende Funktion von $\mathcal{J}(P)$.)*

a) Sei Q ein Poset mit n Elementen. Zeige

$$G_{P \otimes Q}(q, t) = G_P\left(q^n, q^{-n} \cdot \left(G_Q(q, t) - 1\right)\right),$$

wo $P \otimes Q$ das ordinale Produkt bezeichnet.

b) Sei P ein Poset mit p Elementen. Zeige:

$$G_P\left(q, \frac{q-1}{q}\right) = q^p.$$

Aufgabe 26: *Sei L ein endlicher Verband. Zeige, daß die folgenden drei Bedingungen für alle $x, y \in L$ äquivalent sind:*
a) L ist graduiert (was bedeutet, daß alle maximalen Ketten in L dieselbe Länge besitzen) und die Rangfunktion $\mathbf{rg}$ von L erfüllt

$$\mathbf{rg}\,(x) + \mathbf{rg}\,(y) \geqslant \mathbf{rg}\,(x \wedge y) + \mathbf{rg}\,(x \vee y)\,.$$

b) Wenn y das Element $x \wedge y$ bedeckt, dann bedeckt $x \vee y$ das Element x.
c) Wenn x und y das Element $x \wedge y$ bedecken, dann bedeckt $x \vee y$ die Elemente x und y.
(Ein Verband L, der eine dieser Bedingungen erfüllt, heißt semimodular.*)*

Hinweis: Zum Beweis von (b) $\Longrightarrow$ (a), oder (c) $\Longrightarrow$ (a), gehe man für beide zu beweisende Behauptungen indirekt vor. Zum Beweis der ersten Behauptung nehme man ein Intervall $[u, v]$ in L minimaler Länge, das nicht graduiert ist. Dann gibt es Elemente x_1, x_2 in diesem Intervall, die beide u bedecken, sodaß die Länge aller maximalen Ketten in $[x_i, v]$ gleich ℓ_i ist, wobei $\ell_1 \neq \ell_2$. Nun wende (b) oder (c) auf x_1, x_2 an. Zum Beweis der zweiten Behauptung nehme man ein Paar $x, y \in L$ mit

$$\mathbf{rg}\,(x) + \mathbf{rg}\,(y) < \mathbf{rg}\,(x \wedge y) + \mathbf{rg}\,(x \vee y)\,, \tag{0.1}$$

sodaß die Länge des Intervalls $[x \wedge y, x \vee y]$ minimal ist, und unter all jenen Paaren eines, wo $\mathbf{rg}\,(x) + \mathbf{rg}\,(y)$ minimal ist. Da nicht x und y zugleich $x \wedge y$ bedecken können (warum?), gibt es o.B.d.A. ein x' mit $x \wedge y < x' < x$. Zeige, daß dann $X = x, Y = x' \vee y$ ein Paar ist, das $\mathbf{rg}\,(X) + \mathbf{rg}\,(Y) < \mathbf{rg}\,(X \wedge Y) + \mathbf{rg}\,(X \vee Y)$ erfüllt, wo aber die Länge des Intervalls $[X \wedge Y, X \vee Y]$ kleiner als jene von $[x \wedge y, x \vee y]$ ist.

Aufgabe 27: *Sei L ein endlicher semimodularer Verband. Zeige, daß die folgenden zwei Bedingungen äquivalent sind:*
a) Zu jedem $x, y, z \in L$ mit $z \in [x, y]$ (also $x \leqslant y$!) gibt es ein $u \in [x, y]$, sodaß $z \wedge u = x$ und $z \vee u = y$ (u ist ein "Komplement" zu z im Intervall $[x, y]$).
b) L ist atomar *(jedes Element ist als Supremum von Atomen darstellbar).*
(Ein endlicher semimodularer Verband L, der eine dieser beiden Bedingungen erfüllt, heißt geometrisch.*)*

Aufgabe 28: *Sei G ein (bezeichneter) Graph mit n Knoten. Eine Partition der Knoten heißt zusammenhängend, wenn jeder Block der Partition als induzierter Teilgraph von G zusammenhängend ist. Die Menge aller zusammenhängenden Partitionen ist ein Poset als Teilposet des Posets aller Partitionen der Knotenmenge. Wählt man beispielsweise für G den vollständigen Graphen (je zwei Knoten sind mit einer Kante verbunden), dann ist das Poset der zusammenhängenden Partitionen von G identisch mit dem Poset aller Partitionen der Knotenmenge.*
Zeige: Das Poset aller zusammenhängenden Partitionen eines Graphen ist ein geometrischer Verband.

Aufgabe 29: *Ein Verband L heißt* modular, *falls er graduiert ist und für alle $x, y \in L$ gilt:*

$$\mathbf{rg}\,(x) + \mathbf{rg}\,(y) = \mathbf{rg}\,(x \wedge y) + \mathbf{rg}\,(x \vee y)\,. \tag{0.2}$$

Insbesondere ist also der Verband $L(V)$ aller Teilräume eines endlichen Vektorraumes modular.
Zeige: Ein endlicher Verband L ist genau dann modular, wenn für alle $x, y, z \in L$ mit $x \leqslant z$ die Beziehung

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \tag{0.3}$$

gilt.

Aufgabe 30: *Zeige: Der (gewöhnliche) Partitionenverband Π_n aller Partitionen einer n–elementigen Menge ist nicht modular.*

Aufgabe 31: *Beweise das "NBC–Theorem" ("Non–broken circuit theorem") von G.–C. Rota: Sei L ein geometrischer Verband. Wir nehmen an, daß die Atome von L durchnumeriert sind. Wir nennen eine Menge B von Atomen unabhängig, wenn $\mathbf{rg}\left(\bigvee B\right) = |B|$ ist, andernfalls abhängig. Eine Menge C von Atomen heißt Kreis (circuit), wenn C eine minimale abhängige Menge ist. Ein unterbrochener Kreis ist ein Kreis, aus dem das größte Atom (in Bezug auf unsere Numerierung der Atome) entfernt wurde. Ein nicht–unterbrochener Kreis ist eine Menge B von Atomen, die keinen unterbrochenen Kreis enthält. Dann besagt Rotas Theorem, daß*

$$\mu\left(\hat{0}, x\right) = (-1)^{\mathbf{rg}(x)} \cdot \#\left(\text{nicht–unterbrochene Kreise } B \text{ mit } \bigvee B = x\right).$$

Aufgabe 32: *Zeige: Die Möbiusfunktion $\mu(x,y)$ eines semimodularen Verbandes ist alternierend, d.h.*

$$(-1)^{\text{Länge von } [x,y]}\, \mu(x,y) \geqslant 0.$$

Außerdem zeige, daß die Möbiusfunktion eines geometrischen Verbandes strikt *alternierend ist, also*

$$(-1)^{\text{Länge von } [x,y]}\, \mu(x,y) > 0.$$

<u>Hinweis:</u> *Verwende die folgende Formel für die Möbiusfunktion eines Verbandes:*

$$\sum_{x : x \vee a = \hat{1}} \mu\left(\hat{0}, x\right) = 0 \text{ für alle } a \in L. \tag{0.4}$$

Wähle für a ein Atom und zeige, daß dann folgt:

$$\mu\left(\hat{0}, \hat{1}\right) = -\sum_{\substack{x \text{ Koatom} \\ x \ngeqslant a}} \mu\left(\hat{0}, x\right). \tag{0.5}$$

Aufgabe 33: *Seien f, g Funktionen von den natürlichen in die nichtnegativen reellen Zahlen. Welche der folgenden Regeln sind gültig für $n \to \infty$ (unter welchen Voraussetzungen)?*

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n)) \qquad O(f(n)) - O(g(n)) = O(f(n) - g(n))$$

$$O(f(n)) \cdot O(g(n)) = O(f(n) \cdot g(n)) \qquad \frac{O(f(n))}{O(g(n))} = O(f(n)/g(n))$$

$$O(f(n))^{O(g(n))} = O\left(f(n)^{g(n)}\right) \qquad \exp(O(f(n))) = O(\exp(f(n)))$$

$$\sqrt{O(f(n))} = O\left(\sqrt{f(n)}\right) \qquad g(O(f(n))) = O(gf(n))$$

$$e^{f(n)+O(g(n))} = e^{f(n)}\,(1 + O(g(n))) \qquad \log(f(n) + g(n)) = \log(f(n)) + O(g(n)/f(n)).$$

(Die "Gleichungen" sind so zu interpretieren: $O(f(n)) + O(g(n))$ ist die Klasse aller Funktionen von der Gestalt $f^\star(n) + g^\star(n)$, wobei $f^\star(n) = O(f(n))$ und $g^\star(n) = O(g(n))$; die erste "Gleichung" bedeutet, daß diese Klasse in der Klasse $O(f(n) + g(n))$ enthalten *ist.)*

Aufgabe 34: *Dieselbe Fragestellung wie in der vorherigen Aufgabe, wobei allerdings $O(.)$ durch $o(.)$ ersetzt wird.*

Aufgabe 35: *Seien f_1, f_2, g_1, g_2 Funktionen von den natürlichen in die komplexen Zahlen, sodaß $f_1(n) \sim f_2(n)$ und $g_1(n) \sim g_2(n)$ für $n \to \infty$. Welche der folgenden Regeln sind gültig für $n \to \infty$ (unter welchen Voraussetzungen)?*

$$f_1(n) + g_1(n) \sim f_2(n) + g_2(n) \qquad f_1(n) - g_1(n) \sim f_2(n) - g_2(n)$$
$$f_1(n) \cdot g_1(n) \sim f_2(n) \cdot g_2(n) \qquad \frac{f_1(n)}{g_1(n)} \sim \frac{f_2(n)}{g_2(n)}$$
$$f_1(n)^{g}{}_1(n) \sim f_2(n)^{g_2(n)} \qquad \exp(f_1(n)) \sim \exp(f_2(n)))$$
$$\sqrt{f_1(n)} \sim \sqrt{f_2(n)} \qquad g_1(f_1(n)) \sim g_2(f_2(n)).$$

Aufgabe 36: *Seien f, g komplexe Funktionen, die auf einem gegebenen Gebiet analytisch sind. Welche der folgenden Regeln sind gültig (unter welchen Voraussetzungen)?*

$$\operatorname{Sing}(f \pm g) \subseteq \operatorname{Sing}(f) \cup \operatorname{Sing}(g) \qquad \operatorname{Sing}(f \cdot g) \subseteq \operatorname{Sing}(f) \cup \operatorname{Sing}(g)$$
$$\operatorname{Sing}(f/g) \subseteq \operatorname{Sing}(f) \cup \operatorname{Sing}(g) \cup \operatorname{Null}(g) \qquad \operatorname{Sing}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Sing}(g) \cup g^{(-1)}(\operatorname{Sing}(f))$$
$$\operatorname{Sing}\left(\sqrt{f}\right) \subseteq \operatorname{Sing}(f) \cup \operatorname{Null}(f) \qquad \operatorname{Sing}(\log f) \subseteq \operatorname{Sing}(f) \cup \operatorname{Null}(f)$$
$$\operatorname{Sing}\left(f^{(-1)}\right) \subseteq f(\operatorname{Sing}(f)) \cup f\left(\operatorname{Null}(f')\right)$$

Hier bezeichnet $\operatorname{Sing}(f)$ die Menge der singulären Punkte von f, und $\operatorname{Null}(f)$ bezeichnet die Menge der Nullstellen von f.

Aufgabe 37: *Sei $p(n)$ die Anzahl der (Zahl–)Partitionen von n. Wir wissen, dass*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^i}.$$

Was sind die (dominanten) singulären Punkte dieser erzeugenden Funktion? Welche Schlüsse lassen diese auf das asymptotische Wachstum von $p(n)$ für $n \to \infty$ zu?

Aufgabe 38: *Sei w_n die Anzahl aller Möglichkeiten, n Euro durch 1–Euromünzen, 2–Euromünzen, 5–Euroscheine und 10–Euroscheine zu bezahlen.*

(1) *Man finde eine Formel für die erzeugende Funktion $\sum_{n \geqslant 0} w_n z^n$.*
(2) *Wie verhält sich w_n asymptotisch für $n \to \infty$?*

Aufgabe 39: *Sei $D_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen von $[n]$, deren disjunkte Zyklenzerlegung ausschließlich aus Zyklen der Länge größer als k besteht. ($D_{n,1}$ ist also die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von $[n]$.)*

(1) *Zeige:*

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{D_{n,k}}{n!} z^n = \frac{e^{-z - \frac{z^2}{2} - \cdots - \frac{z^k}{k}}}{1 - z}.$$

(2) *Für festes k, wie verhält sich $D_{n,k}$ asymptotisch für $n \to \infty$?*

Aufgabe 40: *Sei $w_{n,k}$ die Anzahl aller Möglichkeiten, n Euro durch 1–Euromünzen, 2–Euromünzen, 5–Euroscheine und 10–Euroscheine zu bezahlen, wobei genau k Münzen oder Scheine verwendet werden.*

(1) *Man finde eine Formel für die erzeugende Funktion $\sum_{n,k \geqslant 0} w_{n,k} z^n t^k$.*

(2) *Falls wir alle Möglichkeiten, die durch w_n abgezählt werden, als gleich wahrscheinlich erachten: Wieviele Münzen und Scheine werden* im Erwartungswert *benutzt, um n Euro zu bezahlen, asymptotisch für $n \to \infty$?*

Aufgabe 41: *Wir wollen ein $2 \times n$ Rechteck durch 1×1 Quadrate und 1×2 Rechtecke (Dominos) vollständig ausfüllen: Sei R_n die Anzahl aller Möglichkeiten, dies zu tun.*

(1) *Man finde eine Formel für die erzeugende Funktion $\sum_{n\geqslant 0} R_n z^n$.*
(2) *Wie verhält sich R_n asymptotisch für $n \to \infty$?*

Hinweis: *Die Tatsache, dass sich die dominante Singularität nicht explizit ausrechnen läßt, ist kein Hindernis: Man muß mit der dominanten Singularitäat symbolisch weiterrechnen.*

Aufgabe 42: *Es sei $p(n,k)$ die Anzahl aller (Zahl–)Partitionen von n mit höchstens k Summanden. Man zeige:*

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n,k)\, z^n = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^k)}.$$

Wie verhält sich $p(n,k)$ bei festem k asymptotisch für $n \to \infty$?

Aufgabe 43: *Die Bernoullizahlen b_n haben als erzeugende Funktion*

$$\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Wie verhalten sich die Bernoullizahlen b_n asymptotisch für $\to \infty$?

Aufgabe 44: *Bekanntlich ist $\frac{1}{\Gamma(z)}$ eine ganze Funktion mit Nullstellen bei $0, -1, -2, \ldots$ ist. Zeige die Produktdarstellung von Weierstraß:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n},$$

wobei γ die Eulersche Konstante

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \log n)$$

und

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

die n–te harmonische Zahl bezeichnet.

Aufgabe 45: *Zeige die Spiegelungsformel für die Gammafunktion:*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{0.6}$$

Hinweis: *Verwende die Produktdarstellung für den Sinus:*

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{0.7}$$

Aufgabe 46: *Zeige die Verdopplungsformel für die Gammafunktion*

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z)$$

sowie die Verallgemeinerung

$$\prod_{j=0}^{m}\Gamma\left(z+\frac{j}{m}\right)=m^{\frac{1}{2}-mz}\,(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,\Gamma(mz)\,.$$

Aufgabe 47: *Zeige*

$$\binom{n+\alpha-1}{n}=\frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

<u>Hinweis:</u> *Verwende die Stirlingsche Formel*

$$\Gamma(s+1)\sim s^{s}\mathrm{e}^{-s}\sqrt{2\pi s}\left(1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right)$$

für die Γ–Funktion.

Aufgabe 48: *Ein* Motzkinpfad *ist ein Gitterpunktweg, der aus Schritten der Form $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,1)$ (horizontale, Aufwärts– respektive Abwärtsschritte) besteht, der im Ursprung startet, zur x–Achse zurückkehrt, und nie die x–Achse unterschreitet. Sei M_n die Anzahl aller Motzkinpfade der Länge n. Zeige, daß die erzeugende Funktion für Motzkinpfade durch*

$$\sum_{n\geqslant 0}M_n z^n=\frac{1-z-\sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}$$

gegeben ist. Leite außerdem eine explizite Formel für M_n her. Benutze die erzeugende Funktion zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von M_n für $n\to\infty$.

Aufgabe 49: *Ein* Schröderpfad *ist ein Gitterpunktweg, der aus Schritten der Form $(2,0)$, $(1,1)$, $(1,1)$ (doppelte horizontale, Aufwärts– respektive Abwärtsschritte) besteht, der im Ursprung startet, zur x–Achse zurückkehrt, und nie die x–Achse unterschreitet. Wenn wir alle Schröderpfade der Länge n als gleichwahrscheinlich erachten: Wie viele Schritte besitzt ein Schröderpfad der Länge n im Durchschnitt asymptotisch für $n\to\infty$?*

Aufgabe 50: *Wieviele Zyklen enthält die disjunkte Zyklenzerlegung einer Permutation von $[n]$ im Durchschnitt, asymptotisch für $n\to\infty$?*

Aufgabe 51: *Sei $H_n=\sum_{j=1}^{n}j^{-1}$ die n–te* Harmonische Zahl*. Man zeige, daß*

$$\sum_{n\geqslant 0}H_n z^n=\frac{1}{1-z}\log\frac{1}{1-z},$$

und benutze dies zusammen mit Singularitätenanalyse, um eine asymptotische Entwicklung von H_n für $n\to\infty$ zu finden.

Aufgabe 52: *Sei u_n die Anzahl der Permutationen von $[n]$, die nur Zyklen ungerader Länge in ihrer disjunkten Zyklenzerlegung aufweisen. Wie verhält sich u_n asymptotisch für $n\to\infty$?*

Aufgabe 53: *Wie verhalten sich Erwartungswert und Varianz der Anzahl von Zusammenhangskomponenten in 2–regulären Graphen mit n Knoten asymptotisch für $n \to \infty$?*

Aufgabe 54: *Wie verhält sich die Summe*

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2k}{k}$$

asymptotisch für $n \to \infty$?

<u>Hinweis:</u> Berechne die erzeugende Funktion dieser Summen, das heißt, multipliziere den obigen Ausdruck mit z^n, summiere über alle $n \geqslant 0$, und verwende den Binomischen Lehrsatz, um die so erhaltene Doppelsumme in eine kompakte Gestalt zu bringen.

Aufgabe 55: *Bezeichne I_n die Anzahl aller Involutionen (eine* Involution *ist eine selbstinverse Bijektion) auf $[n]$.*

(1) *Zeige*

$$\sum_{n \geqslant 0} I_n \frac{z^n}{n!} = e^{z + \frac{z^2}{2}}.$$

(2) *Benutze die Sattelpunktmethode, um das asymptotische Verhalten von I_n für $n \to \infty$ zu bestimmen.*

Aufgabe 56: *Die Bell–Zahlen B_n (B_n ist die Anzahl aller Partitionen von $[n]$) haben die exponentiell erzeugende Funktion*

$$\sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z - 1}.$$

Benutze die Sattelpunktmethode, um das asymptotische Verhalten von B_n für $n \to \infty$ zu bestimmen.

Aufgabe 57: *Wie verhält sich die Summe*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!}$$

asymptotisch für $n \to \infty$?

<u>Hinweis:</u> Berechne die erzeugende Funktion dieser Summen.

Aufgabe 58: *Die Sattelpunktmethode kann auch herangezogen werden, um die Motzkinzahlen M_n (siehe Aufgabe 48) asymptotisch für $n \to \infty$ abzuschätzen. Zeige zu diesem Zweck zunächst*

$$M_n = \left[\!\left[z^0 \right]\!\right] \left(z + 1 + z^{-1} \right)^n - \left[\!\left[z^2 \right]\!\right] \left(z + 1 + z^{-1} \right)^n$$

und benutze dies, um ein komplexes Kurvenintegral für M_n zu erhalten, das mit der Sattelpunktmethode behandelt werden kann.