UE Zahlentheorie

(Modul: “Elementare Algebra” (EAL))

Markus Fulmek

Sommersemester 2015

Aufgabe 1: *Betrachte folgende Partition der Menge* $[9] = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \subset \mathbb{N}$*:*

$$[9] = \{1,4,7\} \mathbin{\dot\cup} \{2,5,8\} \mathbin{\dot\cup} \{3,6,9\}\,.$$

Gib ein Repräsentantensystem für diese Partition an und versuche die Äquivalenzrelation "kompakt" zu beschreiben, die diese Blöcke als Äquivalenzklassen hat.

Hinweis: Betrachte die Differenzen von zwei beliebigen Elementen, die in einem Block liegen.

Aufgabe 2: *Seien* $A := \{-1, 2, -4\}$ *und* $B := \{-1, -2\}$ *zwei Teilmengen ganzer Zahlen, also* $A \subset \mathbb{Z}$ *und* $B \subset \mathbb{Z}$*. Betrachte die "ganz normalen" zweistelligen Verknüpfungen* $+$ *(Addition) und* $\cdot$ *(Multiplikation) auf* $\mathbb{Z}$ *und bilde die Mengen* $A + 2 \cdot B$ *und* $2 + A \cdot B$*.*

Aufgabe 3: *Seien* $m, n \in \mathbb{N}$*. Wieviele Vielfache von* m *(also Zahlen der Gestalt* $k \cdot m$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$*) gibt es in der Menge der Zahlen* $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$*?*

Aufgabe 4: *Zeige* $(a - b) \mid (a^n - b^n)$ *für alle* $a, b \in \mathbb{Z}$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Aufgabe 5: *Zeige: Wenn* $m \mid n$ *dann* $(a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$ *(mit* $a, b \in \mathbb{Z}$*,* $m, n \in \mathbb{N}$*).*

Aufgabe 6: *Zeige: Wenn* $2 \nmid n$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$ *dann* $8 \mid (n^2 + 23)$*.*

Aufgabe 7: *Zeige: Wenn* $3 \nmid n$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$ *dann* $3 \mid (n^2 + 23)$*.*

Aufgabe 8: *Zeige: Wenn* $2 \nmid a$ *und* $2 \nmid b$ *(mit* $a, b \in \mathbb{Z}$*) dann* $2 \mid (a^2 + b^2)$ *aber* $4 \nmid (a^2 + b^2)$*.*

Aufgabe 9: *Zeige: Wenn* $7 \mid (a^2 + b^2)$ *(mit* $a, b \in \mathbb{Z}$*) dann* $7 \mid a$ *und* $7 \mid b$*.*

Aufgabe 10: *Finde alle* $n \in \mathbb{N}$*, die* $(n+1) \mid (n^2 + 1)$ *erfüllen.*

Aufgabe 11: *Zeige* $6 \mid (n^3 - n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Aufgabe 12: *Zeige* $13 \mid \left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Hinweis: Induktion nach n.

Aufgabe 13: *Zeige* $169 \mid (3^{3n+3} - 26n - 27)$ *für alle* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*.*

Aufgabe 14: *Zeige* $n^2 \mid \left((n+1)^n - 1\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Aufgabe 15: *Zeige* $(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) \mid \left(3(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5)\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Aufgabe 16: *Beweise, daß* $f(n) := \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7 \cdot n}{15} \in \mathbb{N}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Hinweis: Betrachte $f(n+1) - f(n)$.

Aufgabe 17: *Finde alle positiven Teiler von a) 1799 b) 997.*

Aufgabe 18: *Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeige: Wenn die lineare diophantische Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ lösbar ist, ist ihre Lösungsmenge durch $\left\{ \left(x_0 - \frac{b}{d} \cdot t, y_0 + \frac{a}{d} \cdot t \right) :\ t \in \mathbb{Z} \right\}$ gegeben. Dabei ist $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ eine beliebige Lösung der gegebenen linearen diophantischen Gleichung (d.h. $a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = c$) und $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.*

Hinweis: Was ist die Differenz $(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ zweier Lösungen (x_0, y_0), (x_1, y_1) der diophantischen Gleichung?

Aufgabe 19: *Bestimme mit dem euklidischen Algorithmus:*
a) $\mathrm{ggT}(7469, 2464)$ *b)* $\mathrm{ggT}(2689, 4001)$ *c)* $\mathrm{ggT}(2947, 3997)$ *d)* $\mathrm{ggT}(1109, 4999)$

Aufgabe 20: *Finde mit Hilfe des euklidischen Algorithmus $x, y \in \mathbb{Z}$ derart, daß*
a) $243 \cdot x + 198 \cdot y = 9$ *b)* $71 \cdot x - 50 \cdot y = 1$ *c)* $43 \cdot x + 64 \cdot y = 1$ *d)* $93 \cdot x - 81 \cdot y = 3$

Aufgabe 21: *Zeige: Wenn $\mathrm{ggT}(a, 4) = \mathrm{ggT}(b, 4) = 2$ (mit $a, b \in \mathbb{Z}$) dann $\mathrm{ggT}(a + b, 4) = 4$.*

Aufgabe 22: *Zeige: Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ dann $\mathrm{ggT}(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$.*

Aufgabe 23: *Zeige: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{ggT}(2 \cdot k + 1, 9 \cdot k + 4) = 1$.*

Aufgabe 24: *Bestimme $\mathrm{ggT}(4 \cdot k + 1, 5 \cdot k + 2)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.*

Aufgabe 25: *Bestimme $\mathrm{ggT}(2 \cdot k - 1, 9 \cdot k + 4)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.*

Aufgabe 26: *Bestimme $\mathrm{ggT}(56049, 14601, 43803)$.*

Aufgabe 27: *Finde $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sodaß*
a) $6 \cdot x + 10 \cdot y + 15 \cdot z = 1,$ *b)* $21 \cdot x + 15 \cdot y + 35 \cdot z = 1$.

Aufgabe 28: *Gegeben seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(c, d) = 1$. Zeige:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Z} \implies b \in \{d, -d\}.$$

Aufgabe 29: *Zeige für $a, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$, daß*

$$\mathrm{ggT}(a, b_1 \cdot b_2 \cdots b_k) = 1 \iff \mathrm{ggT}(a, b_i) = 1 \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Aufgabe 30: *Zeige: Wenn $a \cdot b = c^n$ (mit $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$) dann sind a und b ebenfalls n–te Potenzen natürlicher Zahlen.*

Aufgabe 31: *Zeige: Sind $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so gilt $\mathrm{kgV}(\ell \cdot n_1, \ldots, \ell \cdot n_k) = |\ell| \cdot \mathrm{kgV}(n_1, \ldots, n_k)$ für alle $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Aufgabe 32: *Zeige: Ist $k \geqslant 2$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so gilt*

$$\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(n_1, \ldots, n_{k-1}), n_k) = \mathrm{kgV}(n_1, \ldots, n_k).$$

Aufgabe 33: *Zeige: Bezeichnet $\mathbf{p}(n)$ die n–te Primzahl, so ist $\mathbf{p}(n) \leqslant 2^{2^{n-1}}$.*

Hinweis: Verwende den Beweis des zweiten Euklidischen Satzes und Induktion.

Aufgabe 34: *Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Gestalt $3k + 2$ (mit $k \in \mathbb{Z}$).*

Aufgabe 35: *Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Gestalt* $6k + 5$ *(mit* $k \in \mathbb{Z}$*).*

Aufgabe 36: *Zeige: Sind* $a, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ *und ist* $a^k - 1$ *Primzahl, so muß* $a = 2$ *sein.*

Aufgabe 37: *Zeige: Sind* $a, k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ *und ist* $a^k + 1$ *Primzahl, so muß* a *gerade und* k *eine Potenz von 2 sein.*

Aufgabe 38: *Es sei* p *eine Primzahl mit der Eigenschaft, daß* $2^p - 1$ *ebenfalls Primzahl ist und* $n := 2^{p-1}(2^p - 1)$. *Zeige, dass* $\sum_{d|n} d = 2n$, *d.h. die Summe der positiven Teiler von* n *(ohne* n *selbst) ist genau* n. *(Zahlen mit dieser Eigenschaft werden* vollkommen *genannt. Man kann zeigen, daß alle geraden vollkommenen Zahlen von dieser Gestalt sind.)*

Aufgabe 39: *Zeige: Ist* $p, p + 2$ *ein Primzahlzwilling und* $p > 3$ *so gilt* $12 \mid (p + (p + 2))$.

Aufgabe 40: *Finde sämtliche Primzahldrillinge, d.h. alle Tripel* $p, p + 2, p + 4$ *von Primzahlen.*

Aufgabe 41: *Begründe: Wenn jemand heuer an einem Montag (Dienstag, ..., Samstag, Sonntag) Geburtstag hat, wird er oder sie nächstes Jahr an einem Dienstag (Mittwoch, ..., Sonntag, Montag) Geburtstag haben (vorausgesetzt keines der beiden Jahre ist ein Schaltjahr).*

Aufgabe 42: *Zeige für alle* $a, b \in \mathbb{Z}$ *und alle Primzahlen* p*: Wenn* $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$ *gilt, dann gilt* $p \mid (a - b)$ *oder* $p \mid (a + b)$.

Aufgabe 43: *Es sei* $f \in \mathbb{Z}[x]$, *d.h.:* f *sei ein* Polynom *mit ganzzahligen Koeffizienten. Zeige:*

$$f(a + t \cdot m) \equiv f(a) \pmod{m} \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \text{ und alle } a, t \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 44: *Zeige für alle* $a, b \in \mathbb{Z}$ *und alle Primzahlen* $p \in \mathbb{P}$, *daß* $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

Hinweis: *Zeige* $p \mid \binom{p}{i}$ *für* $1 \leqslant i \leqslant p - 1$.

Aufgabe 45: *a) Bestimme die letzten beiden Ziffern der Dezimaldarstellung von* 7^n *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
b) Bestimme die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung von 2^n *für* $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 46: *Bestimme den Rest der folgenden Divisionen mit Rest mittels Kongruenzen:*

a) $2^3 \cdot 3^6 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 17 : 11$ *b)* $9^2 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 41 : 7$

Aufgabe 47: *Für welche* $a \in \mathbb{Z}$ *sind die folgenden linearen Kongruenzen lösbar?*

a) $11x \equiv a \pmod{80}$ *b)* $12x \equiv a \pmod{16}$ *c)* $3x \equiv 5 \pmod{a}$ *d)* $ax \equiv 11 \pmod{17}$

Aufgabe 48: *Löse die folgenden linearen Kongruenzen (soferne das möglich ist):*

a) $8 \cdot x \equiv 12 \pmod{19}$ *b)* $8 \cdot x \equiv 12 \pmod{160}$ *c)* $8 \cdot x \equiv 12 \pmod{28}$

Aufgabe 49: *Löse die folgenden simultanen Kongruenzen:*
a) $x \equiv 1 \pmod{7}$, $x \equiv 4 \pmod{9}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$,
b) $x \equiv 1 \pmod{20}$, $x \equiv 9 \pmod{21}$, $x \equiv 20 \pmod{23}$.

Aufgabe 50: *Finde alle modulo* $20 \cdot 21 \cdot 23$ *inkongruenten Lösungen des folgenden Systems:*

$$7 \cdot x \equiv 8 \pmod{20}, \quad 5 \cdot x \equiv -6 \pmod{21}, \quad 9 \cdot x \equiv 13 \pmod{23}.$$

Aufgabe 51: *Zeige: Für jede Primzahl* $p \neq 2$ *gilt* $1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}$.

Aufgabe 52: *Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Zeige: Wenn* $n > 4$ *keine Primzahl ist, dann gilt* $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

Aufgabe 53: *Eine unbewiesene Vermutung über die Eulersche* φ*-Funktion besagt: Zu jedem* $m \in \mathbb{N}$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \neq m$ *und* $\varphi(n) = \varphi(m)$. *Zeige diese Vermutung für ungerades* m.

Aufgabe 54: *Zeige: Zu jedem* $m \in \mathbb{N}$ *gibt es nur endlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft* $\varphi(n) = m$.

Aufgabe 55: *Zeige für* $k, \ell \in \mathbb{N}$: *Wenn* $k \mid \ell$ *dann* $\varphi(k) \mid \varphi(\ell)$.

Aufgabe 56: *Seien* $m, n \in \mathbb{N}$, *sei* $d = \mathrm{ggT}\,(m, n)$. *Zeige:*

$$\varphi\,(m \cdot n) = \varphi\,(m) \cdot \varphi\,(n) \cdot \frac{d}{\varphi(d)}.$$

Aufgabe 57: *Die Zahl* $n \in \mathbb{N}$ *habe die Dezimaldarstellung* $n = a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \cdots + 10^k \cdot a_k$ *mit* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
a) Beweise die folgenden Teilbarkeitsregel für 7: Die Zahl n *ist genau dann durch 7 teilbar, wenn der folgende Ausdruck durch 7 teilbar ist:*

$$(a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2) - (a_3 + 10 \cdot a_4 + 100 \cdot a_5) + (a_6 + 10 \cdot a_7 + 100 \cdot a_8) - + \cdots .$$

b) Zeige, daß eine völlig analoge Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch 13 gilt.
Verwende Teil a), um $7 \mid 194618851$ *zu überprüfen.*

Aufgabe 58: *Die Zahl* $n \in \mathbb{N}$ *habe die Dezimaldarstellung* $n = a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \cdots + 10^k \cdot a_k$ *mit* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. *Beweise die folgenden Teilbarkeitsregeln:*
a) $13 \mid n \iff 13 \mid \Big(4 \cdot a_0 + \big(a_1 + 10 \cdot a_2 + 10^2 \cdot a_3 + \cdots + 10^{k-1} \cdot a_k\big)\Big)$
b) $17 \mid n \iff 17 \mid \Big((-5 \cdot a_0 + \big(a_1 + 10 \cdot a_2 + 10^2 a_3 + \cdots + 10^{k-1} a_k\big)\Big)$
c) $19 \mid n \iff 19 \mid \Big(2 \cdot a_0 + \big(a_1 + 10 \cdot a_2 + 10^2 \cdot a_3 + \cdots + 10^{k-1} a_k\big)\Big)$
Verwende Teil a), um $13 \mid 112697$ *zu überprüfen.*

Aufgabe 59: *Finde und beweise Teilbarkeitsregeln für Zahlen, die im heptadischen System dargestellt sind, für Teilbarkeit durch* 3, 8 *und* 9.

<u>Hinweis:</u> Siehe den entsprechenden Satz in der Vorlesung für Teilbarkeitsregeln im dekadischen System!

Aufgabe 60: *Es seien* $a, b \in \mathbb{Z}$ *und* $p \in \mathbb{P}$. *Zeige: Wenn* $a^p \equiv b^p \pmod{p}$, *dann gilt auch* $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

Aufgabe 61: *Leite den ersten Ergänzungssatz aus dem Gaußschen Lemma ab.*

Aufgabe 62: *Berechne* *a)* $\left(\frac{-1}{31}\right)$ *b)* $\left(\frac{-1}{17}\right)$ *c)* $\left(\frac{2}{41}\right)$ *d)* $\left(\frac{2}{47}\right)$.

Aufgabe 63: *Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Gestalt* $8 \cdot k + 7$.

<u>Hinweis:</u> Angenommen, $p_1, \ldots, p_s$ *wären alle solchen Primzahlen: Betrachte* $N := (4 \cdot p_1 \cdots p_s)^2 - 2$ *und verwende den zweiten Ergänzungssatz.*

Aufgabe 64: *Welche der folgenden Kongruenzen sind lösbar?*

a) $x^2 \equiv 59 \pmod{79}$ *b)* $x^2 \equiv 17 \pmod{41}$ $x^2 \equiv 29 \pmod{101}$

Aufgabe 65: *Es sei* $p \in \mathbb{P} \setminus \{2,3\}$. *Zeige, daß die Kongruenz* $x^2 \equiv -3 \pmod{p}$ *genau dann lösbar ist, wenn* $p \equiv 1 \pmod{6}$.

<u>*Hinweis:*</u> *Berechne*

$$\left(\frac{-3}{6k+1}\right) \text{ und } \left(\frac{-3}{6k+5}\right).$$

Aufgabe 66: *Entwickle* $\frac{167}{61}$ *und* $\frac{61}{167}$ *in regelmäßige Kettenbrüche.*

Aufgabe 67: *Finde für* $0 \leqslant n \leqslant 4$ *die Teilnenner* a_n *und Näherungsbrüche* $\frac{p_n}{q_n}$ *der Zahl* π.